CAROLI RENALDINII DE RESOLVTIONE,

& Compoſitione Mathematica.

CAROLI RENALDINII

SERENISS. MAGNI PRINCIPIS ETRVRIÆ
PHILOSOPHI, AC MATHEMATICI.

OLIM IN PISANA ACADEMIA PHILOSOPHIAM ORDINARIO LOCO PROFITENTIS.

NVNC IN PATAVINO LYCEO PHILOSOPHI PRIMÆ SEDIS.

De Reſolutione, & Compoſitione Mathematica.

LIBRI DVO.

EMINENTISS. ET REVERENDISS.

LEOPOLDO S. R. E.
CARDINALI MEDICEO
MAGNI ETRVRIÆ DVCIS FRATRI

D D.



PATAVII, MDCLXVIII.

Typis, ac Impenſis Heredum Pauli Frambotti Bibliopolæ.
SVPERIORVM CONSENSV.

Eminentiſsimo & Reuerendiſsimo

LEOPOLDO S·R·E·

CARDINALI MEDICEO

CAROLVS RENALDINIVS F.

SAPIENTER admodum, atque perbelle Te Eminentiſsime Princeps, ſępeſępius enunciaſſe, in memoria firmiter, ac penitus hæſit, longè præſtantius, atq; etiam vtilius eſſe res Geometricas ea ratione tractare, vt introſpecta Reſolutricis Artis natura Præceptiones tradantur, à quibus vnuſquiſque paratus, quicquid libuerit, haud Muſis inuitis, perficere mirificè poſſit; quam aſſerta nullo ferè comprehenſa numero, etſi demonſtrationibus munita, in vnum congerendo, plures, ac plures exarare Codices, ingentia concinnare Volumina; Cùm illud ſit ingenij ſolertis, penèque Diuini; hoc autem laboris improbi munus; illud nullis adminiculis prouinciam ſuſcipere, atque adeo proprio ſplendore nitere; hoc autem aliorum inuentis vti, ac proinde aliunde lumine mutuato ſplendeſcere. Hoc equidē, Eminentiſſime Princeps, Oraculi loco ſemper habui. Commentarios propterea de Reſolutione, & Compoſitione Mathematica, quos tibi nuncupatos iure, ac merito volui, te haud parui facturum exiſtimo. Erat profectò, cur inſigniti tui nominis inclyti fulgore prodirent in lucem; tum quia Geometricis literis eruditus de his ferre iudicium valebis; perſpectum habens, num ſic argumentum verſauerim, vt oleum, operamque perdiderim, quod nolim; an potiùs feliciter ſcopum attigerim, quod velim; tum quia tibi compertum eſt, quantum officij ſuſtineam, & quàm magna, & quàm multa ſint beneficia, quibus me deuinxiſti; præſertim quòd meis humillimis precibus, quibus tecum iamdudum, quàm poſſem, diligentiſſimis egi; ſecretiora Naturę myſteria experimentis operoſiſſimis aggreſsus es. Vnde Academiam hac de re, veritatis inquirendæ gratia, ſummos labores perferendo, ſumptus ingentes ſuſtinendo non ſine magno tui nominis ſplendore inſtituiſti; Sic multorum mentes in celebrioribus totius Orbis Ciuitatibus à ſomniculoſa quadam, ad hanc ſolertem philoſophandi rationem excitaſti; vt Veterum inſtitutis multa dicta ſalute, hoc vnum addiſcendi genus arri-

puerint.

puerint. Atque demum qui vel animi quodam ſublimioris impulſu, vel vnius veritatis cupidine prolectati, ad res cognoſcendas ſunt vehementer accenſi; hunc ſapientiæ cultum retinendum duxerunt, Vnde mihi licuit de rebus naturâ conſtantibus ſecuriori, quàm hactenus viâ philoſophari, nimirum Geometriâ, vbi rei natura patitur, accerſitâ. Ita nunc agente me ſuppliciter tecum, Aſtronomiam generosè admodum promouere contendis, Organis egregijs, Inſtrumentis elegantiſſimis, Machinamentis ſumptuoſiſſimis, quæ fieri, tua, qua polles, incomparabili munificentia, curaui; vt ijs, ſi Deo placuerit, quàmproximè Cæleſtium corporum dimenſiones aſſecuti; Cœlum ipſum opitulatione Celſitudinis tuæ conſcendiſſe quodammodo videamur. Verumenimverò eruditione, qua exornaris, quaque ſic omnium peritorum lumen obſcuras, vt Sol Cæleſtium corporum claritatem obtenebrat, ne metiaris quæſo Clementiſſime Princeps meos qualeſcunque conatus ingenij; exiguos enim illos videri neceſſe foret; ſed potiùs tenui, ac ferè nulla, quam è Veterum Monumentis hac de re licuit haurire, notitiâ. Non enim te præterit, Antiquos Sapientiæ proceres in Mathematicis Diſciplinis huius Artis opitulatione Herculeos pertuliſſe labores, eaque perpetraſſe, ſingulis de rebus inita ratione, vt æternis, Diuiniſque laudibus efferri promeruerint, & apud poſteros immortalem ſint gloriam adepti haud citra Poſteritatis inuidiam. Hæ literariæ, quibus Veteres affluebant, diuitiæ, præſtantiſſima ſunt animi bona, quæ nos hæreditario Iure conſecuti, prægaudio geſtientes conſpiceremur; niſi temporis edacis iniuriâ, non ſine mœrore abdicati, moleſtiæ plurimum, oneris multum in ſacratioribus detegendis arcanis, veritateque perquirenda ſuſtinere miſerrimè cogeremur. Summa neceſſitas igitur adegit, coniecturis, vt ita dixerim, eorum reſolutricem Artem rediuiuam reddere, quod operis exigui non fuit. Eam verò, quam huius ætatis induſtria in ſummum veritatis quæſtum, & commodum Reipublicæ literariæ peperit, ita tractare, vt eò tandem, quò ſpectabat, & Mentis acies, & Ingenij ſolertia, perueniret. At hoc in munere ſi minùs egregiè Eminētiſſime Princeps me geſſiſſe cognoueris; tuæ quidem erit excelſæ virtutis perpendere, num æquum ſit, aliqua eos ornari laude, qui ad res præclaras animum adijciunt, etſi, quod velint, minùs aſſequantur, quod te facturum pro tua clementia confido. Interim ſi lucubrationes qualeſcunque meas Tibi voluptati fuiſſe perſpexero; in id omnibus viribus incumbam, omneſque ingenij neruos contendam, vt poſthac præclariora tuo Nomini ſacrata videns, intelligas omne ſtudium, omnemque conatum à me libentiſſimè gratia Celſitudinis Tuæ ſuſceptum fuiſſe. Vale,

CA-

CAROLI RENALDINII

SERENISS. MAGNI PRINCIPIS ETRVRIÆ PHILOSOPHI, AC MATHEMATICI.

Et in Patauino Lyceo Philoſophi primæ Sedis.

De Reſolutione, & Compoſitione Mathematica

LIBER PRIMVS.

PRÆFATIO.

PRæſtantiores Artifices Matheſcos partem ſummoperè commendant, ampliſsimiſque laudibus proſequuntur, quæ Demonſtrationes benè, facilèque docet adinuenire; ea quidem eſt, quæ de Analyſi, & Syntheſi, hoc eſt de Reſolutione, & Compoſitione Mathematica ediſſerit; nec id ab ijs iniuria factum exiſtimes, quandoquidem expedita methodus ad contexendas Demonſtrationes magnum habet momentum; non enim in huiuſmodi Diſciplinis quicquam indemonſtratum proferre licet, nec probabili tantùm ratiocinatione differere ijs, qui præclariſsimum hoc verſant argumentum, conceditur; quinimo vt cæteris commendatiſsimi ſint, firmiſsimis demonſtrationibus Propoſitiones munire coguntur, nec aliter oblatæ Quæſtioni ſatisfeciſſe exiſtimantur. Opus planè arduum, vtpotè difficultatibus implicatum; quamobrem Ars, quæ ad id magnopere conducit, erit in primis expetenda; nec mirum, ſiquidem vt Veteres memoriæ, literiſq; prodidere, non diuinando, ſed methodicè procedendũ in Mathematicis eſt; priori etenim inquiſitionis via caſu potiùs, quàm Arte veritatem aſſequimur, ſecunda verò non ita, ſed firma, certaque ratione comparamus. Longè propterea videtur eſſe præſtantius, atque præclarius reſolutiuam potentiam adeptũ fuiſſe, quàm multas particulares demonſtrationes comparaſſe: quamobrem non immeritò Marinus antiquus ille Geometra pronunciauit. Quantam porrò vim obtineat in Mathematicis diſciplinis, & quæ ad illas proximè accedunt Optica, Canonica, reſolutus Locus; alio loco dictum eſt à nobis, tum quod Reſolutio demonſtrationis inuentio eſt, tum quod in ſimilibus ad demonſtrationis inuentionem multum conferat, tum quod longe præſtantius ſit potentiam reſolutiuam nanciſci, quàm multas particulares demonſtrationes poſſidere. Propterea non ignobilis harum Diſciplinarum magiſter frequenter id vſurpabat, Mathematica multi ſciunt, Matheſin autem pauci; cùm non idem ſit aliquot propoſitiones noſſe, & ex ijs quaſdam ſatis obuias elicere caſu potius, quàm aliqua differendi Arte; non idem ſit inquam, ac ipſius ſcientiæ naturam,

Matheſeos pars, de Analyſi & Syntheſi tractat magnopere commendanda.

Eſt tamen ardua plenaque difficultatib.

Marini Geometræ ſententia.

Præſtantiſſimi Geometræ dictum.

atque

atque Indolem habere perſpectam, vt ad ſacratiora quidem admiſſus, vniuerſalibus ſit inſtructus præceptis, quibus Problemata, ac Theoremata innumera excogitet, meditetur, inquirat, eademque ſumma facilitate demonſtret; Nec vnquam animum ea potui informare ſententia, vt crederem, eſſe Sapientis, euolutis aliorum monumentis, quadam eorum imitatione Propoſitiones effingere; ſed potius ita eſſe inſtructum, & ab huiuſmodi ſtudijs paratum, vt quicquid ſibi libuerit, excogitare queat, ne aliorum veſtigijs inhærendo, veritatem perſequi, & alienis inuentis, tanquam prototypo indigere videatur; Propterea Matheſeos hanc partem iugiter excoluerunt Veteres, vt eorum monumenta verſanti perſpicuum erit; & quidem teſtis eſt Pappus Alexandrinus, apud quem legimus, ita Veteres in hac Arte fuiſſe verſatos, & de Reſolutionis, Compoſitioniſque methodo fuiſſe ſollicitos, vt ipſius Reſolutionis gratia multa congeſſerint, multaque compilauerint; ſimulque commemorat Libros de Datis Euclidis, De proportionis ſectione, De ſpatij ſectione, De determinata ſectione, De fractionibus, De Poriſmatibus, &c., alijſque ad locum reſolutum pertinentibus, atque non aliam ob cauſam id ab Antiquis factum fuiſſe, niſi vt oblato Problemati certa quadam ratione occurrerent, ac ſatisfacerent; proinde poſt Elementa, operæ eſſe pretium arbitrabantur in hanc Artem incumbere, vt facilitas in Problematibus reſoluendis, compararetur; non eſt autem cur quis ſibi perſuadeat ijs ſic fuiſſe veritatis ampliſſima ſpatia perquiſita, vt poſteritati nullatenus liceat per aliqua inuia ipſis, excurrere; quinimò ſic eorum reſolutionis rationis ratio per nos ditior euaſit, vt haud multa dicenda ſupereſſe videantur, Recentiorum uerò tot eſt inuentis adaucta, ut æquè de utraque fortaſſe nobis gloriari liceat, unde non immeritò quiſpiam animo foret ancipiti, num ipſi nobis, an nos ipſis inuidere debeamus. Ordo autem hic erit, ut primus Liber totus ſit in explicatione Methodi, qua Veteres in reſoluendo, componendoque utebantur, ubi præcepta tradimus, & exempla afferimus tam pro Theorematum, quàm Problematum reſolutionibus. Secundus uerò liber occupatus eſt in explicanda Recentiorum Arte Reſolutrice, ubi ad id uarias methodos afferimus, quarum qualibet licet Artifici ſub quocunq; genere infinita Problemata, ac Theoremata reſoluere; præſertim autem eo Artem deduximus, ut etiam Problemata ſolida artificioſè reſoluere poſſimus. Quod cumulatius perſequemur in proximo ſubſequenti Tractatu, cui titulus eſt, Geometra Promotus; ubi uariarum linearum ortum tradidimus, quarum præſidio licet difficillimis Problematibus ſatisfacere, nedum ſcilicet Problematum effectiones præſcribendo, quod hac in re magni momenti eſt; ſed etiam dictando demonſtrationem earundem effectionum, quamuis aſcenſu facto ad immaginarias quantitates, repetitis Analyſeos ueſtigijs, quod à nemine factum hucuſque cuique perſpicuum eſſe poteſt. Omnia uerò contendimus ea claritate tractare, ut quiſque etſi in puluere Mathematico parùm uerſatus, dummodo harum Diſciplinarum Elementa prælibauerit, Theoremata, & Problemata certa differendi Arte excogitare, ac adinuenire queat; proinde reſoluendo, componendoque quicquid libuerit moliri, perficereque poſſit.

Qua de cauſę Veteres etatē Analyticam plurimùm excoluerint.

Ordo huius Tractatus.

Quid in primo Libro.

Quid in ſecũdo agatur.

Auctor multa alia eadem de re ſe tractaturum in ſuo Geometra promoto pollicetur.

DE LOCO RESOLVTO.

RESOLVTIO porrò ad Locum pertinet Reſolutum; Reſolutus aútem Locus propria materies eſt, vt ait Pappus Alexandrinus, poſt communium Elementorum conſtitutionem ijs parata, qui in Geometricis ſibi comparare volunt vim, ac facultatem inueniendi Problemata, quæ ipſis proponuntur, cuius gratia tantùm inuenta eſt.

Reſolutio ad quid pertineat. Locus reſolutus quid. lib. 7. Mathem. Collec.

Vt autem ab vniuerſalioribus exordium deſumamus. Locus Geometricus generatim, vt ait Proclus, eſt lineæ, vel ſuperficiei ſitus, qui vnum, idemque ſymptoma efficit.

Quid Locus Geometricus. In primum Euclidis.

Ex Theorematibus quidem alia vniuerſalia, alia particularia, alia ſimplicia, alia compoſita, præſertim tamen prout ad præſens attinet inſtitutum, alia localia, & alia non localia. Localia ſunt, quibus ſymptomata in toto quodam loco accidunt; at verò Localium alia quidem in lineis conſtituuntur, alia autem in ſuperficiebus.

Ex Theorematibus quidem alia vniuerſalia alia particularia. alia ſimplicia, alia compoſita alia localia, & alia non localia.

Quoniam verò linearum aliæ ſunt planæ, aliæ ſolidæ, planæ quidem, quarum ſimplex eſt intelligentia in plano; ſolidæ verò, quarum ortus ex quadam ſolidæ figuræ ſectione apparet, vt cylindricæ, helices, conicarumque linearum: ita fit, vt ex localibus Theorematibus, quemadmodum ex Problematibus, alia quidem planum, alia verò ſolidum habere locum dicantur.

Linearũ alia plana, alia ſolida.

Theorema Locale erit, vt propoſitio trigeſima quinta primi Elementorum. *Parallelogramma ſuper eadem baſi conſtituta, & inter eaſdem parallelas ſunt inter ſe æqualia.* Locale quidem, ſed planum. Locale eſt, cùm totum illud ſpatium idem ſymptoma efficiat; planum autem, quoniam in lineis ſimpliciſſimis eſt, nimirum rectis.

Theorema etiam locale illud eſt. *Rectangula comprehenſa interceptis hyperboles perimetro, & aſymptotis æqualia ſunt*, Locale quidem eſt, quoniam totum illud ſpatium idem efficit ſymptoma; ſolidum autem, quoniam hyperbole ſolida linea eſt.

Ex Theorematibus planis quædam in lineis rectis, vt ſuperiùs allatum, quædam in lineis curuis, vt *In eodem circuli ſegmento Anguli conſtituti ſunt inter ſe æquales.*

Ex Theorematibus planis quædã in lineis rectis, quædam in curuis.

Problema verò locale aliud quidem planum, aliud autem ſolidum. Planum, vt *Si recta linea ſecta ſit vtcumque, ab extremitatibus eius duas rectas inflectere, quæ inter ſe rationem habeant, vt partes lineæ ſectæ.* Locale profectò eſt, cùm tota circuli peripheria deſcripta quidem idem ſymptoma efficiat, at verò planum, quoniam in ſimpliciſſimis lineis eſt, vt recta, & curua.

Problema locale aliud planum, aliud ſolidum.

Problema autem locale ſolidum eſt, ad quod efficiendum requiritur linea quædam ſolida, ita vt ſit locale, quoniam totum aliquod ſpatium idem ſymptoma efficit, ſolidum verò, quoniam in lineis eſt ſolidis. vt.

Datis punctis, & linea recta, in plano per vtrumque ducto, aliud punctum inuenire, à quo binæ rectæ, altera quidem ad datum punctum, altera ad datam lineam perpendiculariter ductæ ſibi innicem ſint æquales. Problema locale eſt, quoniam infinita ſunt huiuſmodi puncta, quæ Problemati ſatisfaciunt, ac ob id totum ſpatium vnius lineæ idem ſymptoma efficit; eſt autem ſolidum, quoniam huiuſmodi linea, eſt vna è ſectionibus conicis, nempe Parabole.

Non idem tamen eſt Problema Solidum, ac eſt Locale ſolidum; ſiquidem ad primum requiritur tantummodo, vt ad eius conſtructionem ſit opus lineam ſolidam adhibere, quæcumque ſit illa ſiue Parabole, ſiue Ellipſis, ſiue Hyperbole; at ad ſecundum requiritur, vt totum aliquod ſpatium idem ſymptoma efficiat.

Non idem eſt Problema ſolidum, ac locale ſolidum.

Problema tripartitũ apud Geometras, aliud planum, aliud ſolidũ, aliud lineare. Planum Geometricum Problema quid. Solidum Problema quid. Lineare quid.

Quamobrem apud omnes tum Veteres, tum recentiores Geometras tripartitum Problema eſt, cum aliud ſit Planum, aliud ſolidum, aliud denique Lineare:

Planum Geometricum Antiqui dixerunt, quod per circulum, & lineas rectas ſolui poteſt, plana autem hæc appellantur Problemata.

Solidum dicitur illud, quod enodatur aſſumpta in conſtructionem aliqua ex ſectionibus conicis, hæc ſolida dicuntur, quod in eorum ſolutionem ſolidæ adhibeantur lineæ.

Lineare denique dicitur, quod ad ſui effectionem lineas illas expoſcat, quæ variam, ac tranſmutabilem ortum habent, quæque ex inordinatis, implicitiſque motibus fiunt, cuiuſmodi ſunt Helix, Quadratix, Conchoides, Ciſſoides, Cycloides &c.

Apud pleroſque nõ eſt Problema Geometricum, niſi quod per rectam, & circularem perficitur.

Pleriſque tamen illud Problema, ad cuius effectionem aſſumitur ſolida linea, minimè Geometricum videtur, multòque minùs ſi genus aliquod aliud lineæ præter rectam, & circularem adhibeatur. Num autem ratione compulſi, an potiùs aliorum auctoritate ſubacti in hanc ſententiam abierint, ſatis profectò non liquet.

Auctoris hac in re ſentẽtia.

Ipſe quidem nunquam animum induxi, vt crederem ſolum illud Geometricum eſſe Problema cenſendum, cuius effectio per circulum, lineamque rectam perficitur; quinimò ſemper mihi toto aberraſſe cælo ſunt viſi, quos noui tam religioſè de Geometria ſentire, vt id in Problemate Geometrico deſiderarent; longè propterea aliter ſeſe habere rem compulſus ratione ſum arbitratus. Non tamen inficias ibo lineis rectæ, & circulari in re, de qua agimus, primas deberi partes. Illud tamen ab omni prorſus ratione alienum puto, nimirum Geometram duabus illis lineis debere eſſe contentum, propterea quod eatenus hęc, vel illa Geometrica effectio vnam, vel aliam ſibi lineam adſciſcit, quatenus illi quædam ineſt proprietas, quam illa quidem effectio requirit; at, quod neminem latere crediderim, huiuſmodi lineæ, de quibus exiſtimant Geometram tantummodò debere eſſe ſollicitum, non omnes ſibi affectiones, ac proprietates vendicant, ac proindè per illas tantummodò licebit effectiones abſoluere, quibus illarum proprietates accommodatæ ſunt. Si Problema igitur conſtruendum fuerit, & ad id circuli proprietas non conducat, fateor, mihi incompertum eſſe, cur ad circulum confugiendum ſit, cùm aliud lineæ genus ſatisfacere poſſit proprietate ſua; & certè quod per quatuor lineas continuè proportionales perfici natura contendit, per tres vtique fieri non patietur; quamobrem ſubijt animum admiratio, quòd Veterum plerique ad alicuius Problematis effectionem elaborandam circulum aſſumere vellent, etſi ijs foret ſatis obuium ſine quatuor continuè proportionalibus lineis inuita natura perfici non poſſe, cum tamen per circulum tres tantum adinuenire concedatur: quod ſi res ità ſe habet, nemini licebit tantummodo rectam lineam, & circularem pro Geometricis effectionibus adſtruere.

Geometræ officiũ eſt quodcumque linearum genus ſua perſequi contemplatione.

Illud quoque hac in re plurimum videtur habere momenti, quod Geometræ ſunt partes quodcumque linearum genus perſequi contemplatione ſua; neminem tamen præterit quamlibet Diſciplinam contemplatricem ſic rem propoſitam conſiderandam aſſumere, vt naturam eius perſcrutetur, ac proprietates inquirat. Primum Definitionibus iuxtà Artis præcepta elaboratis; ſecundum verò recta diſſerendi ratione, demonſtrationeque conſequitur; Si itaque linearum contemplatio adeò eſt Geometræ propria (ſi tamen ipſæ prout induunt rationem menſuræ, & menſurabilis ſpectentur) vt alterius Artificis hæc non ſit meditatio; non dubito, quin cuique debeat exploratum eſſe, omne linearum genus ad Geometram pertinere, adeò nimirum vt non ſolum Definitionibus vniuſcunque lineæ intrà limites tamen ipſius Matheſeos explicari debeat natura, ſed etiam Demonſtrationes de proprietatibus ipſarum contexantur. Quòd ſi proprietas aliqua nullum habeat cum circuli natura commercium, qui fieri poterit, vt in illius demonſtratione circulus aſſumatur? Quantumuis enim illum partitus fueris ductis rectis lineis, hiſque etiam diuiſis ſecundum rationes diuerſas, continget vt nihil his cum lineæ proprietate commune ſit; Inſulſum propterea foret circuli naturam perquirere, variaſque ſectiones inſtituere illius proprietatis gratia, vt perficiatur effectio.

Conſiderãtur rationum momenta.

Agedum perpendamus rationum momenta, quę pleriſque plurimum negotij faceſſunt. Primum autem occurrit, quod plerique magni faciunt argumentum, nimirum ideò Problema Geometricum eſſe, quoniam ipſius effectio Geometrica eſt; hanc verò dicunt eſſe, in qua nihil determinatur, aut nulla iubetur fieri operatio, niſi per rectam lineam, vel curuam,

Id

Id inſuper addunt, ſcilicet Problematis Geometricæ ſolutioni non officere, quod in eorum demonſtrationibus aſſumantur lineæ ſolidæ, ſectionesque conicæ, vel earum proprietates demonſtratæ, aut in ipſa demonſtratione oſtendantur cuncta per rectas lineas aut rectangula Geometricè in conſtructione determinata eſſe quidem ad Ellipſim, Parabolen, vel Hyperbolen, dummodò conſtructio lineis haud ſolidis, ſed rectis, atque circumferentia peracta ſit, quò non iniuria Apollonij Problemata cenſeri Geometrica debent; quoniam etſi de lineis ſolidis per ſolam lineam rectam tamen, atque circumferentiam conſtructa ſunt.

Confirmatio.

Hi profectò ampliſſimo contemplationis Oceano, cuiuſmodi eſt Geometria, fines anguſtiſſimos præſcribunt, & nulla ratione tam ſeueras leges promulgant, quod nimirum circulus vnico circini circumductu deſcribatur, & recta linea citrà laborem ſimpliciſſima norma ducatur.

Reiicitur ſuperior ſententia.

Sed vide quantum dedecoris præſtantiſſimis, peneque Diuinis Diſciplinis inurant, quaſi videlicet hæ tractandum argumentum Mechanicis Machinamentis aſſumant: Geometra enim neque lineas, neque figuras papyro conſignatas ſua perſequitur contemplatione, cum ea potius tantummodo meditetur prout vel in Diuina reſident Mente, vel in humano intellectu relucent; alioquin neque lineam ducere, nec figuræ genus vllum deſcribere, nobis natura permiſit. Quod ſi problema iubet aliquid conſtrui; non ſic illud vſurpandum, quaſi aliquo ex Mechanicis inſtrumentis, ſiue id circinus ſit, ſiue aliud quidpiam, vti debeamus, ſed intellectu potius, quo aliquid fieri concipiendum eſt.

Occurritur difficultatib.

Neque Problema, vt vulgo creditur, quidquam operandum præſcribit, vt nos videlicet illud perficere debeamus; quis enim audet vel lineam, vel circulum, vel aliquod aliud figuræ genus deſcribere? ſed potiùs vt intelligamus illas linearum interſectiones, quæcumque ſint ipſæ lineæ, & inde figuras, vel aliud quidpiam enaſci concipiamus, adeout Problema ſit propoſitio, in qua alicuius ſectionis, aut figuræ ortum, vel idgenus alia doceamur.

Problema quo ſenſu aliquid operandum præſcribat.

Ad hæc illud accedit quod ſi deſideretur adhuc aliqua conſtructio circuli deſcriptioni perſimilis; organa quidem non deſunt, quibus eleganter atque concinnè linearum hæc alia genera ſumma facilitate perficere nobis licet, vnde non obſcuri nominis Geometræ Veterum ſententiam damnant, atque contemnunt.

Nec multum negotij nobis faceſſit aliorum ratio quod Geometrica dicantur illa Problemata, in quorum effectione tantummodò lineæ rectæ, circulique peripheriæ, vel circuli ipſi adhibentur, propterea quod ſimpliciſſimæ ſint quantitates; hoc enim nullius roboris eſt argumentum; numquam enim id mihi perſuadere potui Geometram tantum in contemplatione ſimpliciſſimæ quantitatis occupari, cum potius communi Sapientum calculo eius credantur eſſe partes quantitatem continuam quæcumque illa ſit prout ſibi rationem menſuræ, & menſurabilis vendicat ſua perſequi contemplatione: quo nón ſine magno veritatis lucro nobis Geometriam ipſam promouere licuit, eandemq; rebus Phyſicis innumeris aptare, dummodò menſuræ, menſurabiliſque rationem obtineant.

Alteri occurritur difficultati.

Multoque minus videntur ſcitè locuti, qui propterea deteſtantur lineas, quas magni fieri contendimus, quoniam Geometria à motu præſcindit, atque adeo fieri non poterit, vt in linearum meditatione verſetur, quæ ab implicato motu alicuius puncti originem trahunt, vt Conchoides, Helica, Ciſſoides, &c., atque etiam aliæ, quæ profectò certo numero minimè comprehenduntur; hoc autem nullius eſt momenti; quinimò licet cum Satyrico exclamare. O quantum eſt in rebus inane. Nec mirum, cum id ad pauca reſpicientes pronuncient. Nonne aduertunt circuli ortum huiuſmodi eſſe, vt lineæ rectæ extremo vno fixo, ac immoto, alterum autem in orbem vertatur? Nonne etiam fatentur Sphæram ſolidam eſſe figuram procreatam ex ſemicirculi reuolutione circa ſtantem diametrum, cui nomen axeos inditum eſt, donec eo redeat, vnde diſceſſerat? Nonne etiam conum, atque cylindrum per motum explicare conſueuere, dicentes illum procreari ſi rectus fuerit, ex motu trianguli rectanguli circa latus vnum immotum adeò, vt ab hypotenuſæ motu conica ſuperficies procreetur, perpendiculo ſtante tanquam axi, & eiuſdem trianguli baſi circumuoluta ipſius coni baſis, nempe circulus oriatur? Quod ſi ſcalenus extiterit eodem modo etiam per motum generatur.

Improbatur alia ipſorum interpretatio.

Perperam verò interpretantur ab omnibus receptum effatum; nimirum Geometram

Quo ſenſu Geometra à motu dicatur præſcindere.

à motu perſcindere, non enim ſic illud vſurpes velim, quaſi nunquam conſiderandum motum aſſumat. Vniuerſa quidem Matheſis motum reſpuere dicetur, ſi tamen pro vt id cum veritate conſentit, explicetur, vel enim nullatenus in contemplatione motus verſatur, vt cum ex. gr. trianguli proprietates inquirit, ſed etiam tametſi motum ſua contemplatione perſequatur, illum tamen conſiderandum aſſumit prout rationem menſuræ, & menſurabilis induit, quamobrem ab effectrice, ac fine, abſtinet de quibus differere Phyſici eſt, ità vt etiam Aſtronomia in contemplatione cæleſtium corporum occupata dici quodammodo poſſit à motu præſcindere; cum non motus naturam quo pacto cauſam effectricem, ac finem reſpicit, à quorum conſideratione Mathematicus animum auertit, ſed potius in ratione menſuræ, ac měſurabilis illum ſua contemplatione perſequitur; Quinimò illud etiam addendum, nec ipſam rationem menſuræ, ac menſurabilis ſecundum propriam naturam conſiderare, ſed quatenus motum in partes diſpeſcimus, & ſecundum diuerſas partitiones diuerſa quoque ſymptomata meditamur.

Cognitio Phyſico Mathematica.

Non diſſimulabo tamen illud, ſcilicet cognitionem, quæ non puram quantitatem ab omni materiæ concretione ſeiunctam perſcrutatur, non tam Matheſin, quàm Phyſico-Matheſin eſſe dicendam.

Cur Problematum planorum ſolutiones Geometricæ dicantur alia non ita.

Cæterum ſupereſt adhuc inquiſitione dignum, cur planorum Problematum ſolutiones Geometricæ dicanur, aliæ verò non item; id verò non inde putes originem ducere, quoniam rectæ lineæ, itemque, & circularis in Geometricis Elementis Definitiones traduntur, cum tamen conicarum linearum nulla quidem commemoratio habeatur, alioquin, vt placuit etiam Soucro nihil præter Elementa Geometricum foret, quod abſurdum æque putandum, ac illud, nihil præter Elementa Phyſicum eſſe. Nec etiam, vt ſuperius aduertimus, quoniam circuli ynico circumductu circini determinantur, quod in ſectionibus conicis non permittitur, propterea quod inſtrumenta non deſunt, quibus ne dum Parabole, quam organicè deſcribere iam Eutocius docuerat, cuiuſdam inſtrumenti beneficio, cuius inuentionem Iſidoro Mileſio magiſtro ſuo refert acceptam, ſed cæteræ quoque conicæ ſectiones deſcribuntur.

Cauſa iuxta Auctoris ſententiam.

Non aliam propterea cauſam mihi ſuadeo, ob quam Planorum Problematum ſolutiones Geometricæ ſunt nuncupatæ, quoniam operationes factæ per rectas lineas omnium primæ, ac ſimpliciſſimæ ſunt, vndè Geometricæ dicuntur, non quod aliæ non ita ſint, ſed quia præ alijs ità dicendæ ob eam, quam attulimus cauſam.

Soueri ſententia reyicitur.

Nec de his bene ſentit Souerus dicendo Ellipſim, Parabolen, Hyperbolen æquè, ac Circulum in plano deſcribi poſſe, vnde Problemata earum beneficio ſoluta æque ac alia dicenda ſint plana; nulla profectò conſecutio, cum plana non dicantur Problemata, quoniam circulus, per quem ſoluuntur in plano deſcribitur, ſed potius quoniam ex plano ſuũ ducit ortum, cum videlicet alicuius lineæ rectæ vno extremo manente extremum alterum in gyrum agatur, at verò ſectiones conicæ ex ipſius coni ſectione à plano factæ originem trahunt, & earum perimetri non in plano, ſed in conica ſuperficie exiſtunt. Quamuis autem huiuſmodi lineæ in plano deſcribi poſſint id nihil eſt; cum hoc ſit earum origine poſterius, nec Geometricè perficiuntur niſi ex illarum proprietatibus, quas ex cono depromplimus, vndè Problematum ſolutiones per rectas lineas, & circulum factæ Geometricæ dicendæ ſunt, non minus tamen, quæ per alia linearum genera.

Præoccupatio obiectionis.

Nec eſt cur vrgeas dicendo circulum etiam ex ſolidis enaſci, cum ex ſphæra, cono, cylindro per ſectiones oriatur, quinimò triangulum, quod coni ſectione per axem plano tranſeunte ſit, vt parallelogramum ſectione cylindri acto plano per axem, circulus enim ex ſolidis ortum non ducit, tametſi enim ſpheræ, coni, & cylindri ſectione exhiberi poſſit, tamen hoc eſt poſterius natura, poſterius inquam generatione illa, quam in plano conſequitur, quod euidentiſſimum deprehendes cum ſphæra ex circumuolutione ipſius circa axem producatur.

Cur Aduerſarij decepti ſint.

Eos tamen fefellit, vt opinor minus accurata conſideratio, cum ad aliam diſciplinam pertinere non poſſe reliqua linearum genera preter rectam ſcilicet, & circularem ſectiones conicas, & alias ab implicato motu alicuius puncti naſcentes, ac reliquas ordinis perſimilis, quàm ad ipſam Geometriam non aduertiſſent, nec operæ pretium de illis tractationem inire conſideraſſent; cum tamen vtrumque ſit exploratum, linearum enim omnium Geometrica conſideratio eſt, & cum ſingula ſua habeant attributa, quę Geometrica diffe-

differendi ratione oſtendi, demonſtrarique poſſunt, quo nihil prohibet in Problematum effectionibus adhiberi; tametſi enim innumera Problemata ſint, quibus fit ſatis opitulantibus lineis recta, & circulari, tamen non omnia quidem eius ſunt indolis, cum potius nullo ſint numero comprehenſa, quę ad ſui effectionem aliarum linearum ſymptomata requirant.

Reijcitur quorundam conſilium.

Nec ſatis quorundam conſilium mihi probatur, quibus adeò ariſit Geometrica effectio ab interſectione lineæ rectę cum circulari petita, vt aliam omnem exploſerint, alicui ſiquidem lineæ ſic attributa conueniunt, vt alterius naturę minimè ſint accommodata, quo neceſſe eſt Problemata quędam ità illi eſſe addicta, vt per aliud lineę genus reſolui non poſſint.

Quorundam inſcitia.

Quamobrem non ſemel admiratione ſum captus, quòd plerique tam pertinacem laborem pertulerint in quorundam Problematum effectionibus, vt eas per minus proprium lineę genus perficere niterentur; ità profectò qui triſectionem anguli rectilinei mediantibus circulo, lineaque recta abſoluere contenderunt, & qui inter duas datas, duas alias medio loco proportionales in continua ratione eadem via reperire conati ſunt; non ſecus ac per rectam, & circularem cuicumque Problemati fieri ſatis poſſet.

Refutatio partitionis Problematis in Mathematicum & Mechanicum.

Mirum autem in modum commoueor, quod apud quoſdam Problematis illa partitio locum obtinuerit in Mathematicum, & Mechanicum μηχανὴ Gręcis idem eſt, ac artificium, ſiue mauis adminiculum, quo quis ad aliquid efficiendum vtitur, & ſi etiam accipi poſſit pro machina, μηχανικὸς fabricandarum machinarum peritus dicitur, quamobrem μηχανικὴ τέχνη. Ars mechanica dici conſueuit; propterea generatim μηχανικὸς opifex dicitur, eorum, quę ingenio ſimul, & manu perficiuntur, atque μηχανητικὸς dicitur machinas fabricandi peritia prędítus, at ſi rem, in cuius conſideratione verſamur, ſedula meditatione perpendamus nil minus in ea μηχανῆς adinueniri comperiemus, circulum enim, de quo Geometra tractationem inſtituit, nec vllum figuræ genus, cuius conſideratione detinetur, nec lineam vllam, in cuius meditatione eſt occupatus, deſcribere, vel perficere nobis licet. Mechanicum quidem eſt hæc opitulante circino moliri, ſed non ea ſunt, in quorum contemplatione ſe ſe Mathematicus labor exercet; plauſu quidem excipitur circinus, vtpotè machinula ſatis expedita, cuius pręſidio circulum in plano deſcribere cuique licet, ſed mirum eſt quantum inconſideratè voces effutiant; Geometra quidem negligit circulum illum, quo tantum vtitur ad facilius, ac promptius animi ſenſus promendos, cum aliàs intellectu omne linearum, omneque figurę genus deſcribendum velit; nec admittendum ab Vniuerſa Matheſi quamlibet conſtitutionem ſolo rectarum, & circulorum ductu, hoc eſt, vt aiunt, ſola circini, & regulæ opera perfici.

Occurritur Plutarchi auctoritati.

Parum verò perturbat animum Plutarchi auctoritas, quod in Marcelli vita Problema nondum mechanicè ſolutum appellet ἄλογον, quod nondum rationes numericas exhibet, vndè nequit ἐπιλογίζεσθαι, vt contra λογικῶν καὶ πραγματικῶν ἀποδείξεων, nimirum Epilogiſmum, & numerorum rationes ſecum ferar, id quidem mechanicum eſt pręſtare, ſed non magis, quàm circulum deſcribere circino, & vel ſectà diametro ipſius circuli ex puncto in eà aſſumpto rectam perpendicularem ad peripheriam ducendo tres adinuenire proportionales magnitudines dato extremarum aggregato, vt igitur illud, ita & hoc mechanicum Plutarco eſſe debuiſſet; ſed vt mechanicè non ille dicitur Problema ſoluere, in cuius effectione circulum adhibet, quia non is eſt circulus, qui circini opitulatione perficitur, nec recta linea, quam regula deſignamus, cum de his Mathematicus ſuam non inſtituat tractationem; ſic nec mechanicè ſolutum Problema dicas in effectione, cuius aliquod aliud lineę genus pręter circuli peripheriam adhibetur.

Platonis conſilium explicatur.

Quod ſi Plato, vt accepimus, machinulas odio habebat, non ideò profectò, quia cętera linearum genera negligenda putaret, ſed quia timebat, ne poſteritas huiuſmodi machinulis contenta greſſum ad altiora, ſublimioraque remoraretur; ſecus autem ſentientibus errandi quidem occaſio fuit, vt ſibi perſuaderent id à Mathematicis conſiderandum aſſumi, quod manibus, vel inſtrumentis cuiuſque generis non ſola mente, ac imaginatione perficitur.

Quorundam deceptio.

Illud itidem in hoc multum habet momenti, quod ijs Problema videbatur Propoſitio, in qua quidem moliri aliquid docemur, & tamen longè aliter ſagacioris Philoſophi ſententia eſt, cum inter Theorema, ac Problema diſcriminis illud intereſſe videatur, quod etſi

vtraque

Vtraque Propoſitio ſit, in qua veritas demonſtratione comparatur, tamen in Problemate veritas ſic oſtenditur, vt ortum, vel alicuius figuræ, vel ſectionis quantitatis, rerumque ſimilium oſtendat, generationis modum declarans; ſecus Theorema, quod veritatem reſpiciens in ea ita ſiſtit, vt generationis modus intra limites Mathematicos tamen indè non conſtet, ita ſit vt Problema quoque cognitio ſit contemplatrix, nec practici rationem obtineat, cum nobis inſeruire nequeat veluti norma ad operandum, ſi quidem id operari nobis denegauit natura, quod ſi practici rationem ſibi adhuc vendicare notitiam putes tametſi nobis deſit operandi facultas dummodò notitia illa apta ſit ſui natura ad operandum dirigere; falſum profectò ſupponis, propterea quod cognitio eſse non poteſt de modo, quo nos operationem aliquam exerceamus, ſi modus hic nobis deſit, pratica tamen dicetur Matheſis ſecundum partem, in qua eo modo, quo nobis licet operari dirigimur ad operandum.

Qua ratione aliqua demõſtratio dicatur Mechanica.

At Mechanicum, non ſemper defectum, vel vitium deſignat ſed aliquando Mechanica nobiliſſimam diſciplinam ſignificat, quæ Geometriæ, non ſecus ac Optica, &c. ſubiungitur, & vt vulgò dicitur, ſubalternatur; atque huius eſt Architectonices præſcribere, ac demonſtrare effectum, qui intenditur neceſſariò ex præſcriptorum executione conſequi. Plerumque idem nomen ſignificat Artes famulatrices, quæ nimirum dominæ ſubſeruiunt, quo pacto ammittit non nihil decoris, illiberale quidpiam denotans. Verùm illud eſt animaduerſione dignum, nimirum demonſtrationem aliquam dici poſſe Mechanicam, & Geometricam, priori modo, ſi in ipſa fuerint aſſumpta principia illius ſcientiæ, quæ Mechanica dicitur, cuiuſmodi ſunt principia æquiponderantium, quatenus in ea admirabiles effectus oſtenduntur; huiuſmodi enim demonſtratio, vtpote illa, quæ innititur principio deſumpto ex Diſciplina Mechanica, non ſecus ac aliqua demonſtratio diceretur Muſica in qua principia Muſica forent aſſumpta, vel Optica ſi in ipſa aſſumerentur Optica principia. At verò Geometrica demonſtratio erit, in qua principia Geometrica aſſumuntur.

Archimedis conſilium explicatur.

Quando igitur. Archimedes contexit demonſtrationes de quadratura paraboles mediante principio Mechanico nempe pertinente ad diſciplinam de æquponderantibus, dicitur procedere Mechanicè; non quod vtatur inſtrumentis, atque machinamentis, atque adeo demonſtratiuè non procedat; ſed quia demonſtrationes illas perficit deductas ex principijs pertinentibus ad ſcientiam de æquiponderantibus, ac proinde ad ſcientiam Mechanicam. Quod ſi hæc non tam Mathematica, quam Phyſico-Matematica dicenda fuerit, etiam demonſtratio, atque adeo tractatio integra inde deducta, huiuſmodi dicenda erit.

Illud tamen cuique ſit exploratum in his diſciplinis notitiam quamcumque demonſtratione comparatam ſcientiæ rationem obtinere, vndè de rebus, quibus inſunt ſymptomata, vel per cauſam, vel per aliquid illis concomitantia coniunctum, vel per proprietatem, demonſtrentur.

Omnia ferè Problemata, in Geometria aliqua præparatione egent.

Ceterum omnia ferè Problemata in Geometricis propoſita quadam præparatione indigent, qua facta ſi quiſpiam naturali quadam ingenij alacritate, dexteritate, atque ſolertia, aut facultate, vſu, exercitationeque comparata conſequentiarum ſeriem protrahere feliciter valeat, vndè fuerit id conſecutus quod ad effectionem Geometricam conducat, non erit cur ad hanc differendi Artem confugiat, cum effectionem ipſam per Elementa haud operosè demonſtrare poſſit; at ſi longam illam conſecutionum ſeriem protrahere eouſque non poſſit, donec Geometricæ effectionis notitiam aſſequatur, ſtatim hanc Matheſeos partem adeat, eiuſque vtatur præſidio, tunc primò cum illa conſecutionum ſeries defecerit. Præcipuum quidem Analytices Artis munus hucuſque creditum eſt conſtructionem, non demonſtrationem præſcribere, quòd nimirum Artifex ſuis vteretur præceptis, vt Problematis conſtructionem aſſequeretur, deindè neglectis Analyſeos veſtigijs demonſtrationem habitis per Elementa iam medijs, contexeret. Verùm hoc nos non exigui laboris experti ſumus; propterea omnes ingenii neruos contendimus, vt vtrumque ſuppeditetur ab Arte, quod in noſtro Promoto Geometra apertè conſtabit.

Propoſitionum cuiuſque generis artificioſa tractatio cuiuſmodi ſit.

Verùm in propoſitionum cuiuſque generis artificioſa tractatione ſiue Theorema, ſiue Problema ſit, potiſſima demonſtrandi methodus, & via eſt, quæ dictante natura ſit obuia, qua videlicet à principijs, & elementis cuiuſque diſciplinæ proprijs per conſequentias deductas componendo, Syntheticè progrediendo ad propoſiti confirmationem proceditur; vndè compoſitiua methodus appellari conſueuit. Verùm ſæpe, ac ſæpius vſu venire ſolet,

vt

vt Artifex in Problematum reſolutione, pręſertim eorum, quę fortuitò reſoluenda exhibentur medijs ad reſolutionem, ac demonſtrationem conficiendam idoneis deſtitutus à diſciplinę principijs, ac Elementis ſynthetica via ad Problematis reſolutionem ratiocinatione comparandam greſſum facere non poſſit, propterea cum id perpetuò ferè contingat, neceſſitate adactus retrogradam, naturalique contrariam capeſſit viam; ſiquidem initio ducto ab ignota quadam, ac incerta quantitate ad ipſum Problema conducente veluti nota, & manifeſtè aſſumpta plurium conſecutionum ſerie in reſoluendo progreditur, quoad in aſſumptę quantitatis illius, veluti datę quomodocumque ea ſit, cum quantitate certa, ac data ęqualitatem incidat, vndè artificioſè hunc in modum ea quidem inuenta, de qua quęritur quantitas, vel per ſe manifeſtè prodeat, vel vlteriori quadam induſtria demum eruatur, atque tandem oblato Problemati factum ſit ſatis; hęc verò methodus eſt, quę ἀναλυτικὴ hoc eſt Reſolutiua nuncupatur, ad quam oportet ab ijs eſſe paratum, quę in Elementis traduntur.

Redeamus vndè diſceſſimus. Locorum alij quidem ſunt ἐφεκτικοί, hoc eſt in ſe ipſis tantum conſiſtentes, vndè puncti locus dicitur punctum, ſuperficiei ſuperficies, ſolidi ſolidum.

Locorum partitio.

Alij verò dicuntur διεξοδικοί, hoc eſt ſe ſe extrà tendentes, vndè puncti locus eſt linea, lineę ſuperficies, ſuperficiei ſolidum.

Loci in ſeipſis conſiſtentes.

Locorum rurſus, qui in reſoluto Loco, alij quidem poſitione dati ἐφεκτικοί dicuntur, alij verò plani, & ſolidi, & lineares.

Loci ſe ſe extra tendentes.

Loci poſitione dati.

Loci διεξοδικοί ſunt punctorum alij, & alij ad ſuperficiem ἀναστροφικοὶ quidem punctorum loci dicuntur διεξοδικοί autem linearum, Plani autem Loci ſunt quicumque ſunt rectę lineę, vel circuli.

Alij plani ſolidi, & lineares loci alij ſunt punctorum alij ad ſuperficiem.

Solidi verò Loci quicumque ſunt conorum ſectiones, Parabole, Ellipſis, vel Hyperbole.

Solidi Loci.

Lineares Loci quicumque ſunt neque rectę, neque circuli, neque aliqua dictarum coni ſectionum.

Lineares Loci.

De Demonſtratione, qua Reſolutio perficitur.

ET quoniam de Reſolutione agitur; pręſtabit ob id nonnihil perpendere naturam demonſtrationis, qua Analyſta vtitur in reſoluendo, quod vt aſſequi nobis liceat iuuabit inquirere medium, quo Artifices atque adeò Mathematicus in ſuis demonſtrationibus perficiendis vtuntur. Qua in re conſulendi ſunt Dialectici, quorum doctrinam prout ad pręſens attinet inſtitutum paucis perſtringemus. In dicendorum gratiam redigere in memoriam oportet vniuerſę Philoſophię partitionem, quam duplicem Veteres fecerunt; Prima eſt, qua in Naturalem, Moralem, & Dialecticā diſtribuitur, vbi Naturalis fuſa quadam ſignificatione, vndè nomen conſequitur, nedum Phiſiologiam, ſed etiam Methaphyſicā, & Mathematicas Diſciplinas complectitur; Hęc Platoni commendata eſt Philoſophię partitio, quòd ad humanam felicitatem ipſa dirigatur, quę in actione virtuti conſentanea partim, & partim in veritatis contemplatione poſita eſt; quamobrem ex Diſciplinis vnam eſſe oportet, quę honeſti rationem contineat, & ad virtutem, ac morum probitatem humanum animum erudiat, quę Moralis dicitur; item & aliam, quę Naturę ſacratiora myſteria perſcrutetur, ac in ſolius veritatis indagandę ſtudium incumbat, rerumque cauſas perquirat, vt quę, & qualis res ipſę ſint declaret; hęc verò Phyſica nuncupatur. At cum intellectus humanus commemoratas Diſciplinas diſſerendo adipiſcatur, ob ſui autem imbecillitatem, dum id conatur perficere, non rarò deceptus errore minus benè ſua munera obeat; erat proindè operę pretium, vt Ars quędam inſtitueretur ſolerter prouidens, ne veritas falſitati ſuccumberet; hęc Rationalis eſt, quam Dialecticam appellant.

Vniuerſa Philoſophia partitio.

Qua Platoni eſſet plauſibilis.

Alia quoque partitio Philoſophię contemplatricis inualuit, qua ſcilicet ipſa in Methaphyſicam, Phiſiologiam, & Mathematicas Diſciplinas diuiditur, hęc tamen ſint perfunctoriè dicta; Ad ſcientiam conſequendam nobis demonſtratio inſeruit, quarum vna per cauſam proximam, & adęquatam, veluti per medium ad concluſionem demonſtrandam procedit; altera, quę non ità, ſed vel per effectum cauſam eſſe demonſtrat, ſiue effectus cum cauſa ſua reciprocetur, vbi ex negatione, vel affirmatione ipſius cauſam negare, vel affirmare licet; ſiue fuerit effectus, qui non reciprocetur cum cauſa, ſed vel à cauſa exce-

Alia contemplatricis Philoſophia partitio.

ditur,

Multiplex demonſtratio.

ditur, atque tunc ipſo effectui ad affirmatiuam demonſtrationem contexendam vtimur; ad negatiuam autem non ità. Vel cauſa ab effectu exceditur, atque tunc demonſtratio negatiua per effectum, veluti per medium conficitur. Hoc idem demonſtrationis genus per cauſam remotam contingit, ità vt non per propriam effectus oſtendatur; Remota verò cauſa dicitur quæ inadæquata eſt, & quidem dum excedit effectum à negatione cauſæ negationem effectus colligere licet. Si verò exceditur ab effectu affirmatiuè à poſitione cauſæ ad poſitionem effectus concluditur; non prætcribo tamen remotam cauſam bifariam vſurpari, vel vt ab immediata, & proxima diſtinguitur, ità tamen vt adæquata ſit conuertibilis cum effectu; vel vt contra diſtinguitur ab inadæquata, & non conuertibili.

Huiuſmodi demonſtrationis genus explicatur.

Contingit præterea huiuſmodi genus demonſtrationis cum perficitur medio illo quod neceſſariò connectitur cum alio, ità vt ſe mutuò conſequantur; non tamen ſe habet, vt cauſa, & effectus, dicique conſueuit à concomitanti; vt ſi quis ex intellectu voluntatem inferat, ad hunc demonſtrandi modum ſpectare videtur inductio, nempè progreſſio à particularibus ſufficienter enumeratis ad vniuerſale, vbi particularia poſteriora ſunt, vniuerſale verò natura prius. Demonſtratio autem ad impoſſibile conducens videtur ad vtrumque demonſtrationis Genus reuocari poſſe pro conditione, quo vtitur medij. Cæterum demonſtratio per cauſam nos docet propter quid res ſit, cum alia faciat nos tantummodò ſcire, quod res ipſa ſit.

Proponuntur conſideranda demonſtrationis principia.

Conſideranda ſunt autem ipſarum demonſtrationum principia, eſt autem demonſtratio per cauſam procedens proximam, & adæquatam vtque alij addunt per propriam, & immediatam cauſam, ſed per propoſitionem notam ex terminis concluſionem oſtendens bipartitò definita, primò enim dicitur Syllogiſmus faciens ſcire, vbi per ſcientiam intelligi debet proprijſſima, per cauſam verò intelligenda eſt illa, quæ in eſſendo dicitur; alias Definitio poſſet aptari demonſtrationi procedenti ab effectu, huiuſmodi verò cauſa ſiue ſit propria, quarum vna Phyſica dicitur, alia Metaphyſica, ſiue virtualis, quæ propriè cauſa non eſt, ſed ſic ſe habet in ordine ad aliud, quod ſi illud cauſaretur, non niſi ab illa cauſa proueniret, vt incomprehenſibilitas Dei ab eius infinitate dicitur proficiſci, eſt igitur cauſa, de qua loquimur, in eſſendo quæ etiam in cognoſcendo eſt. Dicitur quoque Syllogiſmus conſtans ex veris, primis, & immediatis prioribus, notioribus, & cauſis concluſionis; ſiue hæc ſit Definitio, ſiue conditionum enumeratio, illud perſpicuum eſt ſic ſe habere demonſtrationem, quæ per cauſam procedit, etſi aliæ quoque conditiones requirantur, vt quod præmiſſæ ſint neceſſariæ de omni per ſe, & ſecundum quod ipſum, de quibus hic nonnulla dicenda, cumque demonſtrationis principia ſit operæpretium explicare, primò de eorum neceſſitate diſcurrendum.

Demonſtrationis principiũ.

Principium demonſtrationis eſt Propoſitio Immediata, qua ſcilicet alia prior non eſt per quam demonſtretur, ſic ſe habet hæc propoſitio, Si ab æqualibus æqualia demas, quæ remanent ſunt æqualia. Duplex eſt verò propoſitio Immediata, quarum vna dicitur Dignitas: altera verò nuncupatur Poſitio; duplex igitur eſt demonſtrationis principium, nempè Dignitas, & Poſitio, Dignitas eſt Propoſitio immediata, & indemonſtrabilis, quam præcognoſcere oportet ad aliquam ſcientiam addiſcendam, ita ſe habent Propoſitiones per ſe notæ; dicuntur autem Dignitates, quoniam propter maximam euidentiam ſuam dignæ ſunt, vt ab omnibus tanquam veræ concedantur; dicuntur quoque Maximæ, quoniam ad quamplures Propoſitiones oſtendendas inſeruiunt, ſic in Metaphyſica ſe habet illa, De quolibet verum eſt affirmare, vel negare, de nullo ambo.

Exempla ad id opportuna.

In Phyſica Deus, & Natura nihil fruſtrà molitur, in Mathematicis omne totum eſt maius ſua parte; vbi illud aduerte è principijs quædam eſſe communia, & quædam propria, principium ſiquidem generatim ſumptum Propoſitio eſt vera, & neceſſaria indemonſtrabilis, vel abſolutè, vel ſaltem in ea ſcientia, vbi tanquam principium recipitur; ſub hoc autem continetur, velut ſub genere principium proprium, & commune, proprium eſt illud, quod principium eſt tantummodò in vna ſcientia, quæ poteſt pluribus aptari, ut autem communia principia Dignitates vocantur, ita propria in Suppoſitiones, ac Definitiones diuiduntur, quæ quidem ambæ poſitiones appellantur, Poſitio enim Propoſitio eſt, quam non oportet antea ſcire, ſed ſufficit vt in ipſa ſcientia tradatur, ſuntque duæ ipſæ ſubiecti prenotiones, de ſubiecto ſiquidem prenoſcendum eſt quod ſit, & quid ſit, vt verò ſubiectum eſt proprium ipſius ſcientiæ, ità quidem eiuſdem hæc eſſe principia propria neceſſe

neceſſe eſt, ita in Geometria. Principium proprium erit. Punctum eſſe, Lineam eſſe, &c. eſtque ſuppoſitio ſubiecti in Geometria, vt in Arithmetica vnitatẽ eſſe; quoniam verò ſuppoſitio non ſolùm accipit rem eſſe, vel non eſſe, quo pacto dicitur ſuppoſitio, & pręcognitio incomplexa, ſiue ſimplex, ſed etiam accipit interdum in ſubiecto aliquid ineſſe, diciturque ſuppoſitio, & pręcognitio complexa, vt in Geometriâ, omnes anguli recti ſunt inter ſe æquales, & lineæ rectę productę ad eandem partem in qua anguli ſunt minores duobus rectis, tandem concurrunt. Definitio accipit quid res ſit, vt in Geometria Linea recta eſt, quæ ex æquo ſua interiecet puncta. Principium commune dicitur, quod pluribus ſcientijs inſeruire poteſt, cuiuſmodi eſt illud, Si ab æqualibus ęqualia demas, quæ remanent ſunt æqualia. Omne totum eſt maius ſuâ parte, Impoſſibile eſt idem eſſe, & non eſſe, & id genus alia. Huiuſmodi principia communia ad varias ſcientias contrahuntur, ſi videlicet vſurpentur contracta ad materiam vnius, vel alterius ſcientiæ. Ita planè Geometra vtitur hoc principio; Omne totum eſt maius ſuâ parte, contrahendo illud ad quantitatem continuam, eodemq; vtitur Arithmeticus per contractionẽ ad quantitatem diſcretã. Principium autem proprium diuidi conſueuit in Suppoſitionem, Petitionem, Quęſtionem, & Definitionem. Quid ſuppoſitio ſit conſtat ex dictis. Suppoſitionis autem nomen ignorationem in auditore ſignificat; ideò ſiquidem Doctor aliquid ſupponit, quia putat diſcipulũ ignorare; non enim neceſſario hęc ſuppoſitio nota eſt diſcenti; qui igitur docet ignorans num diſcipulo id perſpectum ſit, vel non, illud ſupponit, ne ſi negetur ad diſciplinam illam ſine fructu accedatur. Eſt etiam animaduerſione dignum, quod ſi huiuſmodi fuerit principium, vt ſtatim atque à docente proponitur diſcipulus præſtet aſſenſum, tunc propriè ſuppoſitio dicitur; quandoque contingit, vt diſcipulus audiens non ſtatim aſſentiatur, ſed vel in ancipiti verſetur, vel in contrariam ſententiam ſit propenſus, tunc principium dicitur Petitio, ſiue Poſtulatum, Doctor enim poſtulat, vt id credatur, cum abſque eius admiſſione nullus addiſcenti pateat ad diſciplinam aditus; vndè facilè conſtat differentiam inter ſuppoſitionem, & petitionem, non quidem in re, ſed in nobis eſſe conſtitutam, eadem enim Propoſitio reſpectu diſcipuli annuentis, appellatur Suppoſitio, reſpectu verò non annuentis Petitio nuncupatur; nihil tamen prohibet Suppoſitionem, ac Petitionem ipſam in alia ſcientiâ demonſtrari, etſi non in illâ, in quâ tanquam principium aſſumitur, vt in Geometria conſtat, de poſtulato huiuſmodi, A quouis puncto ad quoduis punctum lineam rectam duci poſſe; quamuis enim Geometra illam non probet, ſed poſtulet, vt ſibi concedatur, in Phyſicis tamen oſtenditur. Quæſtio eſt Propoſitio demonſtrabilis, licet non demonſtretur, & à diſcipulo non conceditur, imò negatur quouſque illi demonſtrata fuerit. Definitio explicat rei naturam, & quamuis Propoſitio non ſit, ſiquidem ex genere, & differentiâ abſque copula conſtat, tamen oratio eſt indicans, & explicans rei naturam, diciturque Poſitio, vt ſuperius traditum eſt, ſiquidem initio ſcientiæ ponitur. Sed cuiuſmodi Principia eſſe debeant demonſtrationis, videamus.

Scientiarum principia declarantur. *Principium cõmune quid.* *Principiũ proprium in qua diuidatur Suppoſitio, Petitio, Quæſtio, Definitio.* *Suppoſito.* *Petitio.* *Quæſtio.* *Definitio.*

Primò igitur demonſtrationis principia (de complexis verò ſermo eſt), neceſſaria eſſe debent, ut aliter ſe habere non poſſint, atque adeò ſempiternę ſint veritatis, concluſio enim, ac ſcientia de neceſſarijs cum ſit, principia quoque huiuſmodi eſſe debent; tametſi enim ex falſis pręmiſſis contingat aliquando colligi veram concluſionem, & ex non neceſſarijs neceſſariam; tamen id fit non tanquam ex falſis, & non neceſſarijs, alioquin effectus foret nobilior causâ, vel eo quod ſe habet veluti cauſandi ratio, non inquam colligi contingit velut ex falſis, & non neceſſarijs, ſed propter ratiocinandi formam.

Qualia eſſe debeant demõſtrationis principia.

Tres recẽſentur neceſſitatis gradus, quorũ primus eſt Propoſitionis, quam Logici de omni nuncuparunt, quæ quidem eſt, in quâ prædicatum dicitur de quolibet contento ſub ſubiecto, & pro quolibet tempore; vt cum dicitur Omnis homo eſt coloratus, non ſic ſe habet hęc, Omnis homo diſputat, cũ nõ de omni contento ſub homine dicatur, nempè de quolibet indiuiduo, ſeu ſingulari humanę naturę; Ita pariter hęc propoſitio, Omnis homo comedit deſtituta eſt huiuſmodi neceſſitatis gradu, cum non pro quolibet tempore verificetur.

Secundus gradus neceſſitatis eſt propoſitionis, quę dicitur per ſe, huiuſmodi autẽ illa eſt, in qua prędicatum ſubiecto conuenit per ſe, & non ex accidenti; In cuius gratiam aduertere duplicem eſſe prędicationem, quarum vna directa, & naturalis dicitur, eaque contingit, cum id, quod à parte rei ſubijcitur, eſt etiam propoſitionis ſubiectum, & quod illi ineſt in re, in ipſa propoſitione locum obtinet prędicati, vt hęc ſe habet, Homo eſt animal; alia

verò eſt prædicatio indirecta, & non naturalis, quæ videlicet oppoſito ſe habet modo, vt ſi quis diceret, animal eſt homo,

Primus modus neceſſariæ prædicationis ſecundus,

Primus neceſſariæ prædicationis modus eſt, cum prædicatum eſt definitio, vel ingrediens definitionem ſubiecti, vt cum diuinus, Homo eſt animal rationis particeps, vel Homo eſt animal. Secundus eſt cum ſubiectum eſt de definitione prædicati, huiuſmodi tamen eſſe debet, vt non pars ſit eſſentialis, ſed ſe habeat, vt additum, & inter illa ſit habitudo cauſæ ad effectum, non quidem cauſæ materialis, ſed efficientis, non cuiuſcumque, ſed illius, quæ per emanationem nuncupatur; ità cenſetur ſe habere ſubiectum reſpectu propriæ paſſionis, vt homo reſpectu riſibilitatis; paſſio quoque de inferioribus proprij ſubiecti affirmatur, vt cum generis affectio de ſpecie, vel ſpeciei de indiuiduis enunciatur; at verò non licet inferioris paſſionem per ſe de ſuperiori enunciare, ità ſit, vt hæc Propoſitio Animal eſt riſibile, Numerus eſt par, Linea eſt recta, non ſit per ſe; Verum enim verò paſſiones inferiorum ſub diſiunctione per ſe prædicantur in ſecundo modo de ſuperiori, vndè rectè dicimus Numerus, vel eſt par, vel impar, Linea vel eſt recta, vel curua.

Tertius.

Tertius verò modus dicendi per ſe, qui etiam modus per ſe eſſendi dici conſueuit, variè ſolet explicari; ſi enim ſumatur, vt excludat modum eſſendi in alio, velut in ſubiecto, ſiue actu, ſiue aptitudine, ſubſtantiæ tantummodò conuenit; quod ſi excludatur modus eſſendi in alio, velut in inferiori, conueniet tantummodò primæ ſubſtantiæ.

Quartus.

Quartus modus dicendi per ſe eſt potiùs modus per ſe cauſandi, quàm per ſe prædicandi, enumeraturque inter modos per ſe cauſandi, hiſque contingit cum in ſubiecto includitur proxima ratio inhærentiæ prædicati, etſi inter ipſum ſubiectum, & prædicatum non ſit neceſſaria habitudo, ſed ſit potiùs contingens, vt cum dicitur voluntas vult, iugulatus interijt; Trifariam autem contingit, primò cum effectus formalis prædicatur de ſubiecto mediante ſuâ causâ formali, vt cum dicimus Homo eſt albedine albus, albus enim eſt formalis effectus albedinis, quâ mediante de homine prædicatur; Secundò quando actus egrediens à ſuâ causâ formali, de formali effectu prædicatur illius cauſæ eâ mediante, vt cum dicimus album albedine diſgregat; interfectum interfectione interijt; eſt enim interire actus interfectionis; quemadmodum diſgregare eſt actus albedinis, & effectus interfectionis eſt eſſe interfectum, vt eſſe album eſt formalis effectus albedinis. Tertiò cum effectus de ſui immediato principio prædicatur, vt cum dicimus intellectus intelligit.

Quot modi dicendi per ſe, totidem dicendi per accidens,

Quot autem modi dicendi ſunt per ſe, totidem modi ſunt dicendi per accidens; Primus cum prædicatum non facit ad eſſentiam, atque naturam ſubiecti; vt ſi quis dicat Homo eſt riſibilis; quamuis enim hæc propoſitio dicatur per ſe in ſecundo modo, non tamen in primo, ſed per accidens. Secundus cum prædicatum non ſolum non facit ad ſubiecti naturam, ſed nec eius eſt proprietas, ſeu attributum, vt cum dicitur Homo eſt albus; Tertius quando de accidenti prædicatur eſſe, fitque propoſitio de ſecundo adiacente, vt albedo eſt. Quartus, cum effectus non prædicatur de ſuâ per ſe causâ, ſed de aliquo illi accidentariè coniuncto, vt ſi quis dicat Muſicus ædificat, accidit enim ædificatori vt ſit muſicus.

Tertius neceſſitatis gradus eſt, quod Propoſitio non ſolum ſit de omni, & per ſe, ſed quòd vniuerſaliter prædicetur; vbi illud occurrit animaduertendum, quod prædicatum vniuerſale vnum eſt, quod dicitur de omni per ſe, & ſecundum quòd ipſum, nempè quod primo conuenit ſubiecto, & ſecundum quod ipſum, ideſt adæquatè, & conuertibiliter; ſic ſe habet hæc propoſitio, Homo eſt riſibilis; riſibilitas enim adæquatè conuenit homini, & conuenit illi quatenus homo eſt, cum ipſo reciprocatur, ità vt omnis homo ſit riſibilis, omne riſibile ſit homo; non ſic ſe habet homo eſt ſenſibilis, cum ſenſibile non conueniat homini quatenus homo, ſed quatenus animal eſt; nec etiam hęc Homo eſt animal, cum animal non reciprocetur cum homine; commemoratę igitur propoſitiones non ſunt de prędicato ſecundum quod ipſum. Trifariam verò contingit errare circà prędicatum vniuerſale, ſeu ſecundum quod ipſum; Primò ſi exiſtente vno tantum indiuiduo alicuius ſpeciei putet quiſpiã prędicatũ per ſe, & vniuerſale ipſius ſpeciei conuenire indiuiduo quatenus tale eſt indiuiduũ, vt ſi quis ſibi perſuaderet huic Lunę quatenus hęc Luna eſt competere poſſe eclipſari. Reliqua nempè ſecundum, & tertium modum vide apud Dialecticos.

Quæ requiruntur ad principia demonſtrationis.

Commemorauimus igitur neceſſitatis gradus, quos Dialectici melioris nominis ad principia demonſtrationis requirunt; ſolum illud ſupereſt obſeruandum, nempè ſecundum & primum pręſupponi ab vltimo, propterea quod Propoſitio de prędicato vniuerſa-

li

li eſt per ſe, & de omni, at verò ſecundus pręſupponit primum, non contrà; illud prętereà eſt animaduerſione dignum, non omnes modos prędictos neceſſitatis demonſtrationi inſeruire, ſed primum, & ſecundum tantummodò, in quibus videlicet prędicatum nunquam poteſt ſubiecto non ineſſe, inficiandum tamen non eſt aliquandò etiam quartum vtilem eſſe, tertium verò dumtaxat cum de ſubiecto exiſtentia demonſtratur, & quoniam omnis diſciplina diſcurſiua fit ex pręexiſtenti cognitione, nempè omnis cognitio illatę propoſitionis, & concluſionis pręſupponit cognitionem alterius Propoſitionis inferentis, vti ſunt pręmiſſę, in quibus virtualiter concluſio continetur, ſiquidem diſcurſus illatio eſt alicuius ignoti ex notiori; propterea ad conſequendam notitiam concluſionis demonſtratiuæ quædam præcognoſcenda ſunt, vt termini, pręmiſſæ, quæ ex ipſis componuntur; aliqua igitur ſunt pręcognita, atque adeò de ipſis quædam præcognoſcenda ſunt, vbi aduertendum prenotionem ſumi poſſe, vel quatenus dicit cognitionem neceſſariò prerequiſitam ad notitiam alterius, vel quatenus eſt obiectum huiuſmodi cognitionis, quo pacto ad rem facit in pręſentia, vndè ſignificat modum, quo res aliqua ab intellectu cognoſcitur, huiuſmodi verò modi ſunt numero quinque, nempè quid nominis; An res ſit: Quid res ſit: Qualis res ſit: & propter quid res ſit. Quorum poſterior priorem ſupponit, quia verò modus præcedens comparatione ſubſequentis eſt pręcognitio, & qui ſequitur eſt quæſtio, propterea quid nominis ſemper erit pręcognitio, vltimus verò erit quæſtio, & nunquam pręcognitio; ità fit, ut numero quattuor ſint modi pręcognitionis, etſi ad duos facilè reuocentur, etenim quid eſt, & quod eſt pertinent ad primum modum, qui ſubdiuitur in quid eſt nominis, & quid eſt rei; ſecundus verò quod eſt diuiditur in quod eſt ſimplex, & incomplexum, quod ſignificat eſſe rei, vel eſſentiæ, vel exiſtentiæ, ſiue potentialis, ſiue actualis & in quod eſt compoſitum, atque complexum, idque ſignificat propoſitionis veritatem. At verò præcognita tria ſunt ſubiectum, paſſio, & principium, de his pręcognoſcimus quæ diximus, nempè quid eſt, & quod eſt: & quidem de dignitate, ſiue principio pręcognoſcendum eſt quod ſit complexum, nimirum quod ſit verum, de paſſione pręcognoſcendum eſt quid nominis, & aliquando etiam quod ſit incomplexum, hoc eſt eius exiſtentia, denique de ſubiecto pręcognoſci debet quid nominis, quod ſit, & quid rei, propter quod rei definitio in potiſſima demonſtratione medij rationem obtinet. Ad Philoſophiæ partitionem ſuperius allatam redeuntes quibus medijs vtatur Philoſophia reliquum eſt, vt perpendamus quibus medijs vtatur naturalis Philoſophia, itemque Philoſophia Diuina, quæ prima dicitur, atque tandem Matheſis.

Philoſophia naturalis quatuor vtitur cauſarum generibus.

Ad primam illam, quod attinet nullus videtur ambigendi locus quin ipſa quatuor cauſarum genera adhibeantur tamquam media demonſtrationum, quibus vtitur in veritatibus oſtendendis, idque facilè cuique perſuaſum erit, ſi animaduertatur res naturà conſtantes à quatuor cauſarum generibus dependere, vt igitur res ſe habet ad eſſe, ſic etiam ad cognoſci, quamobrem rectè licebit inferre quatuor illa cauſarum genera adhiberi in demonſtrationibus contexendis de rebus naturalibus, cum res ipſę à quatuor illis generibus dependeant, atque adeò naturalem Philoſophum commemoratis cauſis vti in demonſtrando, ſiquidem res illas naturam habentes ſua contemplatione perſequitur, quod non ità vſurpandum, quaſi in qualibet demonſtranda concluſione ſingulas illas cauſas adhibeat, ſed quoniam à toto genere vtitur quatuor illis cauſarum generibus, etſi non per quatuor ipſas cauſas ſingulas concluſiones oſtendat; quamuis enim aliquando id pręſtet, id tamen non eſt opus cum concluſionem aliquam ad genus vnum, alteram per genus aliud oſtendere commodiſſimè poſſit.

Methaphyſica quibus medijs vtatur.

Ad primum Philoſophum quod attinet in confeſſo eſt apud omnes ab eo conſiderari cauſam agentem, atque mouentem, non motam, itemque finalem cauſam, atque adeò hęc duo genera cauſarum ab eo adhiberi poſſe in demonſtrationibus perficiendis; quoniam verò conceptus exprimens rei naturam formę rationem obtinet hoc ſenſu ab eodem formalem cauſam in demonſtrando vſurpari non immeritò concedi poterit; non proptereà tamen dicendus erit vti cauſa formali, quę à Philoſopho naturali adhibetur; ità pariter & ſubiectum huiuſmodi rationi formali reſpondens, medij apud ipſum in demonſtratione locum obtinebit; cuiuſmodi tamen non eſt illud, quo naturalis vtitur Philoſophus, qualis eſt materia, quam etſi ille quoque, vt ſpeciem contentam ſub eo, quod adęquatè ſua perſequitur contēplatione cōſiderat, non tamē vt principiū generationis pro vt induit mu-

tationis rationem quo pacto ſub naturali cadit contemplatione.

Demonſtrationes Mathematicæ.

In Mathematicis Diſciplinis longè magis; quàm in cæteris locum obtinet demonſtratio, non exigua tamen eſt difficultas in explicando cuiuſmodi ſint eæ, quæ perficiuntur demonſtrationes; non enim defuerunt, qui demonſtrationes eas eſſe negarint, re tamen verà introſpecta natura diſcurſus, quo Mathematicus vtitur, facilè conſtabit quid ſit hac in re ſentiendum, & vt à certis, ac manifeſtis exordium ducamus, ſatis, vt opinor, cuique compertum eſſe poteſt non adhiberi à Mathematico quodlibet genus cauſæ in demonſtrando, vt à Phyſico, ſed tantùm illud genus cauſę, quod intrà limites proprię abſtractionis coercetur; itaque demonſtrationes contexit, vel per genus cauſę formalis, ad quod pertinet ſubiectę rei definitio, vel per genus cauſę materialis, ad quod reducitur pars integralis, vel tandem per aliquod concomitans, quod paſſim ab ipſo fieri ſolet; Sic igitur ſe habent, quę in Mathematicis diſciplinis adhibentur demonſtrationes, directè concludentes, cum alioquin etiam in huiuſmodi diſciplinis locum habeat demonſtratio ducens ad inconueniens; non eſt autem hic locus opportunus ad inquirendum num Mathematicę ſcientię rationem ſibi vendicent, id enim alibi tractandum; interim ſupponendum ijs maximè ipſius ſcientię rationem conuenire; ac proinde in ipſis veras demonſtrationes contexi.

Proponitur conſideranda diligẽter Theorematis, & Problematis natura.

Quid interſit diſcriminis inter Theorema & Problema.

Quoniam verò plurimùm conducere ad ea, quę ſequuntur, aduertimus diligenter introſpicere Theorematis, ac Problematis naturam; propterea non erit abs re ſi de his nos aliqua in medium afferamus. Altiùs tamen hoc argumentum repetendum videtur, atque adeò operę pretium eſt adnotare quid interſit diſcriminis inter hęc. Illud autem cuique perſpectum eſt Mathematicorum demonſtrationem omnem ab antiquis diuiſam fuiſſe in Problema, & Theorema. Problema quidem vocant illam demonſtrationem, quę iubet, ac docet aliquid conſtituere, vndè ſi quis demonſtrare contendat ſuprà finitam lineam rectam conſtitui poſſe triangulum ęquilaterum, huiuſmodi demonſtrationem Problema appellant, quoniam docet quà ratione triangulum ęquilaterum ſuprà rectam lineā finitam conſtitui debeat; hoc autem demonſtrationis genus creditur dictum Problema ob

Problema apud Dialecticos.

Problema apud Mathematicos.

ſimilitudinem cum Problemate Dialectico; vt enim apud Dialecticos ipſos Problema dicitur quęſtio, cuius vtraque pars contradictionis probabilis eſt, cuiuſmodi eſt quęſtio An mundus ex ęternitate ſit, an in tempore productus, non diſſimiliter quęſitum illud apud Mathematicos quo aliquid iubemur conſtruere, & cuius etiam contrarium effici poteſt Problema nuncupare conſueuerunt; vt ſi quis demonſtrandum aſſumat ſupra lineam rectam finitam triangulum ęquilaterum conſtitui poſſe; propterea quod, & triangulum, nimirum iſoſceles, vel ſcalenum ſuprà eandem lineam conſtitui nihil prohibet; quemadmodum etiam, qui rectam lineam terminatam bifariam inſtituit diuidere nobis Problema

Quid interſit inter Problema Dialecticum & Mathematicum.

exhibet, ſiquidem & recta ipſa linea diuidi quoque poteſt in partes non ęquales. Illud tamen inter hęc Problemata diſcriminis intercedit, quod Problematis dialectici vtrauis pars contradictionis ſuſcepta probabilibus rationibus tantùm confirmetur, ità vt intellectus verſetur in ancipiti, cui nam ex illis aſſenſum prębeat, vtpote vexatus probabilibus argumentis vtrinque; vtra enim illarum ad veritatem propiùs accedat, ignorat; ſecus verò Problema Mathematicum ſe ſe habet; quęcumque enim fuerit pars demonſtranda ſuſcepta, ità firmis rationibus confirmatur, vt nulla ſuperſit dubitandi ratio, nulluſque dubitationi ſit locus; vndè cum Geometra ſibi propoſuerit diuidendam lineam bifariàm; id quidem firmâ ratione perficiet, euidentique argumentatione comprobabit, nec diſſimiliter ſe geret in diuidendo lineam aliquâ aliâ ratione, & non bifariàm.

Theorema Mathematicum.

At verò Theorema Mathematicis ea eſt demonſtratio, quę ſolùm paſſionem, attributum, vel proprietatem vnius, vel plurium quantitatum ſimul perſcrutatur; quęque per propriam cauſam de re propoſita paſſionem ipſam oſtendit; quamobrem erit quidem Theorema demonſtratio illa, quà oſtenditur triangulum conſtare tribus angulis, qui ęquales ſunt duobus rectis; ſeu vniuſcuiuſque trianguli tres angulos ęquales eſſe duobus rectis; quandoquidem non iubemur quicquam cõſtruere per huiuſmodi demonſtrationem, ſed tantummodò ab eà docemur cauſam propter quam triangulo prędictum inſit attributum; vndè cum in ipſius veritatis contemplatione ſiſtat; factum eſt vt Theorema dicatur, nomen enim iſtud Gręcis idem ſonat quod Latinis contemplatio. Ex his autem intelliges facilè non idem in Theoremate, quod in Problemate contingere. In hoc enim,

vt

vt ſuperiùs animaduerſum fuit, nihil prohibet, quin vtraque contradictionis pars vera ſit; quinimò ſic per Problema iubemur aliquid conſtruere, vt etiam oppoſitum, atque contrarium effici etiam pòſſit, quod ex hactenus dictis perſpicuum cuique eſſe poteſt; quamobrem ſi quis proponeret triangulum conſtituere, cuius duo latera reliquo ſint maiora quomodocunque aſſumpta; non Problema, ſed Theorema, etſi in formam Problematis proponeret; irridendus tamen propterea quod vtraque contradictionis pars vera eſſe non poteſt. Secus autem de Theoremate dicendum; ſi quis enim oſtenderit; Si duę rectę lineę ſe mutuò ſecuerint, angulos ad verticem ęquales inter ſe efficere, nullatenus fieri poterit, vt commemorati anguli, qui ſunt ad verticem, ſint inter ſe inęquales. Et ſi quis demonſtratione firmauerit triangulum illud ſibi vindicare attributum, quod habeat tres angulos ęquales duobus rectis, nunquam oppoſitum eueniet, videlicet vt huiuſmodi tres anguli ſint duobus rectis inęquales. Hęc autem adeò vera ſunt, vt in eorum confirmationem nil addendum ſuperſit. Solùm id ſilentio pretereundum non crediderim, quòd quę de Problemate diximus adeò ſunt vera, vt ſi Problema non ſic ſe haberet, rationem Problematis ammitteret, Theorematis induens naturam. Non me latet Problema etiam per modum Theorematis concipi, enunciarique poſſe; tunc autem ſic eſt enunciatio ipſa efformanda, vt non amplius vtraque contradictionis pars vera eſſe poſſit. Conſtructio enim Problematis ad modum Theorematis concipitur, ac demonſtratur; vndè in reſolutionibus Poriſma, quod peractâ Problematis reſolutione ex ipſâ reſolutione deducitur, in formam Theorematis proponi, demonſtrarique poteſt; vt ſi proponeretur *Datum latus ità ſecare, vt rectangulum ſub partibus aquale ſit ei, quod a differentia partium ſit quadrato,* Inſtitutâ reſolutione beneficio ſpecioſę Logiſtices, eâque peractâ Poriſma illud emergit. *Quadratum totius lateris ſecandi quintuplum eſt quadrati differentia partium* Quod per modum Theorematis enunciabitur. *Si latus ità ſecetur, vt rectangulum ſub partibus aquale ſit ei, quod à differentià partium ſit quadrato; quadratum totius quintuplum eſt quadrati differentiæ partium.* Id ſolum intereſt quod in reſolutione Problematis cum peruentum fuerit ad effectionem a poriſmate indè deducto pręſcriptam; compoſitio, ac demonſtratio retrogrado ordine procedit repetitis reſolutionis veſtigijs; quod ſi per modum Theorematis, vt dicebamus, ipſius Theorematis compoſitio, ac demonſtratio eodem ordine directo, quo reſolutio, perficitur. Quà de re plura nos infrà dicemus; interim tamen exploratum illud eſto, videlicet in Problemate partem vtramque contradictionis veram eſſe poſſe, at in Theoremate nequaquam. Illud porrò commune eſt vtrique, nempè propoſitio, quod vtrumque, ſiue Problema, ſiue Theorema ſit, nobis aliquid proponit.

Problema per modum Theorematis enunciari poteſt et contra.

Conſtructio Problematis ad modum Theorematis concipitur, ac demõſtratur.

Exemplum ad idem.

Propoſitio deducta ex Poriſmate, per modum Theorematis enũciatur.

Hęc tamen ſi diligentiùs introſpiciamus comperiemus nondum ſatis explicata fuiſſe; propterea quod tametſi problema conſtruendum aliquid pręcipere videatur, tamen cum Mathematicę Diſciplinę, & ſpeciatim de Geometrià loquendo non ſit de lineis, vel figuris, quas nos deſcribimus, cum id potius fiat a nobis adiuuandę imaginationis gratiâ; non tam credendum eſt per problema aliquid conſtruendum pręcipi, quàm potius explicari ortum alicuius rei pertinentis ad id, de quo in illa Diſciplina diſſeritur; non enim nobis, vel lineam ducere, vel illam ſecare, vel idgenus alia perficere datum eſt; ac proindè ſatis intelligi non poteſt à problemate nobis iniungi rerum ſimilium conſtructionem, quę in noſtrà poteſtate non eſt, ſed potius explicari ortum alicuius ſectionis, vel figurę, & rerum conſimilium, ità vt perindè ſit, vt id aliquo nos illuſtremus exemplo, iniungi triangulum ęquilaterum ſuper terminatam lineam deſcribere, ac eſt proponi ortum ipſius trianguli ęquilateri inquirendum, adeò vt per huiuſmodi problema non doceamur triangulum ipſum ęquilaterum efficere ſuprà datam rectam lineam terminatam deſcriptis circulis, ductiſque lineis quemadmodum in primâ Elementorum explicatur propoſitione, ſed potius doceamur qui nam ſit ortus ipſius triãguli ęquilateri, quo pacto nimirum ſe habeat ortus trianguli ęquilateri ſuprà datã rectam lineam terminatam, quod in problematibus omnibus licet obſeruare, Hoc igitur ipſius problematis proprium eſt; theorematis verò paſſionem, ac proprietatem de ſubiecto demonſtrare. Quod ſi aliquando contingat problema in formam theorematis concipi; tunc quidem cognitio ipſa non ſic erit circa ſuũ obiectum occupata, vt rei ad id genus pertinentis ortum explicet immediatè, ſed potius de re ſubiecta paſſionem, vel attributum oſtendat, ad eum modum, quo paulò ſuprà fuit breuiter à nobis inſinuatum, ita vt Theorema in rei alicuius quatenus aliquã paſſione affectæ

Non dum hactenus dicta ſatis ab alijs explicata fuerunt.

De quibus Geometria diſputet.

Quid Problema praſtet.

Exemplum.

ſectæ contemplatione verſetur, Problema verò prout res ipſa ſuum ortum ſubit.

Finis Problematis et Theorematis.

Ex his profectò licet intelligere finem Problematis conſtructionem, vel inuentionem eſſe ſenſu iam explicato; Theorematis verò cognitionem cauſæ proprietatis cuiuſque, eius nimirum, quæ propoſitæ ineſt quantitati.

Nonnulla efferuntur, quæ à maioribus tradita fuerunt.

Ad maiorem tamen explicationem non grauabimur hìc ea ſubijcere, quæ à maioribus accepimus nonnulla afferentes in medium, è quibus haud mediocriter innoteſcunt, quæ ſuperius attulimus.

Problema, vel Theorema, ſi perfectū extiterit ſex conſtat partibus.
Propoſitio è quibus cōſtet.
Expoſitio.
Determinatio
Conſtructio.
Demōſtratio.
Concluſio.

Obſeruandum eſt igitur problema, vel theorema perfectum ſi fuerit ſex conſtare partibus, cuiuſmodi ſunt Propoſitio, Expoſitio, Determinatio, Conſtructio, Demonſtratio, Concluſio. Propoſitio dicit, atque proponit aliquo dato quid quæſitum ſit. Et quidem perfecta Propoſitio ex his duobus conſtat, dato nimirum, & quæſito. Expoſitio ipſum per ſe datum aſſumens ad quæſitum præparat, atque diſponit. Determinatio verò ſeorſum quæſitum ipſum, quodnam ſit, explicat. Conſtructio ea, quæ dato deſunt ad quæſiti peruestigationem, ac venationem, adijcit. Demonſtratio peritè ex conceſſis, quod eſt propoſitum, colligit. Concluſio tandem ad propoſitionem rurſus induſtriosè regrediens, confirmat, quod oſtenſum, ac demonſtratum fuit. Problema itaque omne, omneque Theorema perfectum, expletumque ſuis partibus, omnibuſque numeris abſolutum commemorata hæc apud Mathematicos in ſe ipſo habere in confeſſo eſt.

Supradicta non ſunt omnia neceſſaria in omni Problemate, vel Theoremate.

Non hæc tamen omnia veluti neceſſaria prorſus in quocumque Problemate, vel Theoremate reperies. Sed quæ cuique ex ipſis neceſſariò inſunt Propoſitio, Demonſtratio, atque Concluſio ſunt. Primùm enim oportet quæſitum cognoſcere, deindè illud idem per media oſtendere, atque demum oſtenſa concludere; horum igitur nihil, vt deeſſe poteſt, ità & reliqua, vt ſæpè aſſumuntur ſæpè verò cum nullam habeant vtilitatem adiunctam, ommittuntur; plurima ſiquidem Problemata extant, in quibus nec determinationem, nec expoſitionem vllam reperies. Nec pauca ſunt Theoremata, in quibus conſtructionem adinuenire non liceat; cum ſatis, ſuperque ſit expoſitio nullà conſtructione, quæ alioquin præparatio dici conſueuit, vt ex Datis propoſitum demonſtretur. Id verò contingit, cum in propoſitione nullum eſt Datum, non enim propoſitio omnis tam neceſſariò ex dato, & quæſito conſtat, vt perpetuò id ità ſit, cum potius plerumque ſolum quæſitum ipſum cognoſcendum, atque comparandum dicat.

Propoſitio plerumq; etſi non conſtet explicitè ex dato, & quæſito; conſtat tamen implicitè.

Illud autem cauendum, quod aliquando Propoſitio quamuis explicitè ex dato, & quæſito non conſtet, implicitè tamen conſtat, in quo plerique videntur decepti non aduertentes Datum in aliquà propoſitione, quòd illud clarè non exprimatur, cum tamen ſi propoſitio ipſa accuratiùs introſpiciatur, deprehendere liceat eam non ſolum quæſitum, ſed etiam Datum in ſe ſe cohibere.

Determinato, ac expoſitio, quando contingat.

Determinatio verò, ac expoſitio tunc planè contingit, cum propoſitio ipſa vtrumque illud habet, deficiente verò Dato, & Expoſitio deficiat neceſse eſt, cum hæc ipſius ſit Dati, vndè Determinatio eadem eſt, quæ Propoſitio, quamobrem omittitur, ne fiat eadem, quæ ipſa propoſitio. Paſſim verò in Arithmeticis huiuſmodi occurrunt problemata, cuiuſmodi foret illud; *Duos reperire numeros quadratos, quorum differentia ſit numerus quadratus*, Itemque in Geometricis præſertim, vbi de lineis commenſurabilibus, & incommenſurabilibus diſſeritur, vt illud. *Duas rectas lineas potentià commenſurabiles reperire, quæ medium comprehendant.*

Datum pluribus modis contingit.

Quomodo autem aliquid datum eſſe dicatur ſuo loco de Datis agentes explicabimus; pluribus enim modis contingit, vel nimirum poſitione, vel proportione, vel magnitudine, vel ſpecie; neque quicquid datur hiſce omnibus modis intelligendum dari, cum aliquid poſitione dari poſſit, alijs verò modis non poſſit, vt punctum; de his tamen loco ſuprà citato diſſerendum.

Conſtructio variatur pro varietate poſitionis.
Quotuplex datum totuplex expoſitio.

Illud porrò non prætermittam conſtructionem variari pro varietate poſitionis, illud inſuper addendum, vt multiplex eſt Datum, & multiplicem quoque expoſitionem eſſe, vndè ſi quatuor modis Datum aliquid eſſe dicatur, & quatuor quoque expoſitionis modos neceſſariò eſſe, hoc eſt vt quadrifariàm Datum contingit reperiri, ſic & expoſitionem quadrifariàm fieri poſſe neceſſe eſt, etſi quandoque duos, imò & tres modos cōplectatur.

Demonſtratio qualis.
Concluſio duplex particularis vna, vniuerſalis altera.

Demonſtratio verò non raró ex definitionibus medijs quæſitum oſtendit, plerumque autem ex ijs, quæ naturæ lumine innoteſcunt, veritatem colligit. Ad hæc concluſio in duplici diſcrimine eſt, quarum vna particularis, altera verò vniuerſalis dicitur; in dato ſiquidem concluſionem facientes ne particularia propoſuiſſe videamur ad concluſionem vniuerſalem gradum facimus.

At ſi præter dicta de Problemate, ac Theoremate maioris eruditionis gratià licet in

medium

Problematis partes ſex numerantur, ac explicantur.

medium afferre; non erit illud diſſimulandum Problematis partes has quidem eſſe dicendas, nimirum ſi fuerit aliquid datum; primam ipſius hypotheſeos Explicationem; ſecundam Conſtructionem, ſeu quæſiti deprehenſionem; tertiam etſi non neceſſariò, aliquandò tamen contingere, Præparationem ad ipſam demonſtrationem contexendam, quintam Demonſtrationem, quà videlicet oſtenditur methodo adhibità quæſitum neceſſariò adinueniri, ſextam Concluſionem. Vt verò hæ ſunt Problematis partes, ità & quæ ſequuntur Theorematis eſſe exiſtimandæ ſunt. Primam explicationem, ſiue Datorum hypotheſin, ſecundam Explicationem quæſiti, tertiam etſi non neceſſariam plerumque tamen contingere Præparationem ad demonſtrationem ipſam; quartam Demonſtrationem, quà manifeſtum fit paſſionem, ac affectionem de quà quæritur ineſſe ijs, quæ proponuntur; quintam Concluſionem.

Theorematis partes.

Lemma quid.

Ad hæc accedit Lemma, quod propriè ſumptio dicitur, ac in Geometricis eſt propoſitio fide indigens; cum enim vel in conſtructione, vel in demonſtratione ſumimus aliquid eorum, quæ oſtenſa non ſunt, ratione tamen indigent, tunc quod ſumptum eſt veluti per ſe ambiguum inquiſitione dignum arbitrati Lemma ipſum appellare conſueuimus. Differt autem à Poſtulato, & Axiomate, cum hoc abſque vlla demonſtratione ad aliorum fidem faciendam per ſe quidem vſurpetur; illud autem non ſumitur, niſi demonſtratione firmatum, adhiberique ſolet ad oſtendendam aliquam præmiſſam, vt Quæſiti demonſtratio breuior euadat.

Caſus quid.

Datur etiam, & Caſus, qui differentes conſtructionis modos, & poſitionis mutationem indicat tranſpoſitis nimirùm punctis, vel lineis, vel planis, vel ſolidis, vndè varietas ipſius propriè circà deſcriptionem verſatur, & inde ſumpſit propriam nomenclaturam, atque dictus èſt caſus, quòd conſtructionis ſit tranſpoſitio.

Corollarium quid.

Corollarium verò propriè dicitur, cum ex demonſtratis aliquod aliud Theorema apparet, quod propoſitum non eſt, ità dictum quòd ſit veluti lucrum quoddam accedens ad demonſtrationis propoſitum, vndè eſt conſectarium quoddam ex peracta demonſtratione tanquam aliquod lucrum, collectum.

Poriſma quid.

Poriſma, vt huic ſimile quidpiam vſurpari conſueuit, de hoc tamen infrà.

Inſtãtia quid.

Sequitur inſtantia, quæ curſum orationis impedit conſtructioni, vel demonſtrationi occurrens non admittenda, ſed remouenda, vt falſa.

Deductio quid.

Deductio tranſitus eſt quidam à propoſito Problemate, vel Theoremate ad aliud, quo cognito, atque comperto illud etiam, quod propoſitum eſt, apparet.

Poriſma explicatur.

Ad Poriſma quod attinet, cuius paulò ſuprà meminimus, de quo tractationem huc diſtulimus; in confeſſo eſt apud omnes illud vſurpari pro eo, quod excogitatur, vt corollarium, ſeſeque habeat veluti Theorema, quod obiter à priùs demonſtratis reſultat, & aſtruitur, ac veluti lucro apponitur τῆς ἀποδείξεως additamentum. De hoc nonnulla ſcribit Pappus initio Libri ſeptimi dicens poſt tactiones ſequi Euclidis Poriſmata tribus voluminibus, contenta, atque opus eſſe artificioſiſſimum, ac perutile ad reſolutionem obſcuriorum Problematum.

Quid ſit Reſolutio, & quid Compoſitio Mathematica.
CAP. I.

Reſolutio varijs modis definiri ſolet.

Reſolutio non eodem modò definiri ſolet. Apud Ariſt. 3. Ethic. c. 3. Reſolutio eſt continuata cauſarum perſcrutatio, & ſi eo in loco Philoſophus de conſultatione ſermonem habeat, quæ poſito fine, conſultamus, & deliberamus de medijs; quod facimus reſoluendo vſque ad vltimum medium, vltimum in reſolutione, & primum in executione. Vnde Euſtratio nil aliud videbatur Reſolutio, quàm à fine ad principium aſcenſus; quando videlicet ſumpta concluſione demonſtrationis, primùm ea, quæ continenter, ac proximè ad hanc confirmandam adhibita fuerunt, aſſumimus; deinde ea, quæ ijs proximè antecedunt, tum ſuperiora, alia, atque ita deinceps, donec ad principium ipſum aſcendamus; ex quo rurſus deſcendendo per eoſdem gradus compoſitionem facimus, adeò vt, quod in vno progreſſu erat principium, in alio finis euadat. Hęc eadem dici quoque ſolet ab vltimo, ad initium progreſſus; Inſuper inquiſitio cauſarum verę con-

concluſionis

cluſionis propoſitę. Preterea eorum, quę ſecanda, & ex illis proficiſcuntur ad ſuperiora; & priora conuerſio. Item ad id, quod eſt prius, & eſt cauſa compoſitionis, reflexio. Eſt tandem diſſolutio rei in ea principia, ex quibus dependet.

Reſolutio, alia realis, & alia rationis.

Cęterum reſolutio alia realis, alia rationis; Realis, quę fit in re per actionem aliquam realem, vt cum reſoluitur realiter mixtum in quatuor elementa; Rationis, quę conuenit rebus per aliquam operationem intellectus; Vt ſi quis reſoluat aliquid mente in ea, è quibus realiter conſtat; Itaut duplex ſit reſolutio, alia quidem naturę, alia verò mentis, ſeu rationis.

Reſolutio rationis duplex altera practica, altera ſpeculatiua. Reſolutio ſpeculatiua triplex Methaphyſica, Mathematica, & Logica.

Reſolutio rationis duplex altera practica, altera ſpeculatiua. Practica eſt, quę propoſito fine operabili, euſque media inquirit ad illum finem conducentia, quouſque ad aliquod primum à nobis efficiendum perueniamus; & hęc propriè conſultatio, ſeu deliberatio dicitur. Reſolutio ſpeculatiua, quę non terminatur ad opus, ſed ſolùm ad cognitionem. Triplex autem cenſetur Metaphyſica, Mathematica, & Logica. Metaphyſica eſt, quę à formis ſenſibilibus ad intelligibiles procedit, quę Platoni reſolutio amatoria dicebatur. Reſolutio Mathematica eſt concluſionis in principia, à quibus pendet. Logica eſt, qua reſoluitur ſyllogiſmus in ſuas pręmiſſas. Mathematica autem illa dicitur reſolutio, non quia ſola ſit apud Mathematicos in vſu, ſed quia ab ipſis frequentiùs vſurpatur. Aduertendum eſt autem reſolutionem illam Mathematicam, non idem eſſe ac demonſtrationem, aliud enim eſt reſoluere concluſionem in principia, & aliud demonſtrare concluſionem per principia. Illud porrò diſcriminis intercedit, quod per illam reſolutio inſtituitur rei alicuius in principia à quibus realiter pendet. Hęc autem eſt qua fit reſolutio ſyllogiſmi in pręmiſſas, & ea à quibus dependet formaliter in ratione diſcurſus, ſeu ratiocinationis generatim acceptę.

Analyſis tribuitur Platoni tanquam auctori.

Plato ille diuinus fertur omnium primus hanc Geometricam analyſin, ſiue reſolutionem inueniſſe, & ab ipſo Laudamantem Theſium eam didiciſſe, eiuſque ope tot Mathematicas demonſtrationes perfeciſſe. Pappus autem Alexandrinus initio libri ſeptimi Mathematicarum Collectionum perſpicuè teſtatur hàc de re verba feciſſe Euclidem, Apollonium, & Ariſteum ſeniorem, quorum opera nunc deſiderantur.

Quid verò ſit Analyſis, ſeu Reſolutio Mathematica, quid Syntheſis, ſeu compoſitio docemur ab Euclide in Scholio propoſitionis primę Libri xiij. Elementorum, cuius verba ſunt hæc,

Quid ut reſolutio Mathematica explicatur.

Reſolutio eſt ſumptio quæſiti tamquam conceſſi per ea, quæ conſequuntur in aliquod verum conceſſum. Huius autem definitionis hic eſt ſenſus. Reſolutio eſt diſcurſus quo Theorematis veritatem, vel Problematis poſſibilitatem inueſtigamus. Eſt autem duplex reſolutionis genus, quorum vnum ad Theoremata pertinet, cuius finis eſt ſola veritatis inueſtigatio; alterum autem ad Problemata ſpectat; ſi quidem conſtruere docet, & ad conſtructionem demonſtrandam methodum expeditam ſuppeditat; itaque in ipſa reſolutione quod quęritur, vt iam exiſtens, & vt verum conſtituentes per ea, quæ conſequuntur deinceps, & ad aliquod conceſſum procedimus, atque ità concluſionem in ſuas cauſas, ſuaque principia nos artificioſè reſoluimus, quibus ipſamet concluſio demonſtrabitur. Si quęſitum eſt Theorema aſſumimus illud tanquam verum: cum autem eſt Problema aſſumimus illud tamquam factum; hoc eſt ſupponimus illud eſſe verum, hoc autem eſſe factum, atque adeo poſſibile, ex quà ſuppoſitione diſcurrimus per ea, quę ex ſuppoſitis deducuntur, donec occurrat aliquod verum, & conceſſum; nam ſignum eſt etiam conceſſum verum eſſe, vel poſſibile, cum verum non niſi ex vero ſequatur in bona materia, & forma: hęc autem omnia nos exemplis explicabimus. Compoſitionem definitam reliquit idem Euclides eodem loco dicens.

Quid compoſitio, &c.

Compoſitio eſt ſumptio conceſſi per ea, quæ conſequuntur in quæſiti concluſionem, ſeu deprehenſionem. Cuius definitionis ſenſus eſt, quòd ſumpto illo vero inuento retrogrado ordine demonſtrando, progredimur, & ipſius demonſtrationis compoſitionem facimus ratiocinantes ex illo vero inuento ad quæſiti concluſionem. At ſi falſum, vel impoſſibile occurrat ſignum eſt quæſitum falſum eſſe, vel impoſſibile, cum falſum non niſi ex falſo, & ex falſo non niſi falſum in bona materia, & forma ſequatur, quod exemplis inferiùs illuſtrabimus.

Cęterum ad reſolutionem quod attinet; animaduertendum eſt in illo progreſſu à quęſitus

tis ad conceſſa nos bifariam procedere poſſe. Vel enim probationes ita procedentes conceſſa ponunt, & hę reſolutiones propriè nuncupantur; cum reſolutio quęſiti ſit aſſumptio tamquam conceſſi; vel ſunt probationes, quę conceſſa deſtruunt, & hę deductiones ad impoſſibile dicuntur. *Eſt enim Deductio ad impoſſibile aſſumptio eius, quod quæſito contradicit tamquam conceſſo per conſequentia ad id, quod vero conceſſo opponitur.* In hoc enim probationis genere, quod quęſito contradicit ſumimus, quo ſuppoſito progredimur, donec incidamus in aliquod abſurdum per quod deſtructa ſuppoſitione id confirmetur, quod ab initio erat in quęſtione.

Deductio ad impoſſibile.

Duplex eſt autem reſolutionis, atque compoſitionis methodus. Antiqua nimirum, & noua: Antiqua methodus procedit ad quęſito deducendo ea, quę inde conſequi cognoſcuntur ex Elementis; deinde regreditur in componendo, quod exemplis nos explicabimus. Ad hoc autem pręcipuè conducit, maximeque confert illud Euclidis opus Datorum quemadmodum inferius videbimus de Problematum reſolutione tractantes.

Duplex methodus reſolutionis, atq; cõpoſitionis. Methodus antiqua.

Methodus verò noua procedit in reſoluendo, & componendo innixa Algebrę ſpecioſę artificio, vt ex infrà dicendis perſpicuum fiet. Methodus antiqua tàm in Theorematibus, quàm Problematibus reſoluendis, & componendis ità procedit, vt ordine retrogrado per Analyſeos veſtigia componat. Sed noua Methodus tantùm in Problematum compoſitione regreditur, nam in Theorematibus demonſtrandis eodem ordine, quo in reſolutione incedit. Hęc omnia manifeſta fient exemplis.

Methodus noua.

Hoc etſi in omni, in noua tamen præcipuè reſolutione maximè commendabile eſt, quod apertè conſtructionem, ſiue Geometricam doceat effectionem; adeo vt ex Analyſi ipſa effectio deducatur, quę deinde per regreſſum obſeruatis Analyſeos veſtigijs, demonſtretur. Quod cum non intelligeret impudens quidam ſycophanta, qui ſe tamen iactabat Philoſophum, & Mathematicum egregium, irridebat Analyſtam quendam non ignobilem, quòd ſe conſtructionem cuiuſdam Problematis adinueniſſe diceret, cum nondum ſe demonſtrationem contexiſſe, affirmaret; Ita quidem ille, & quid Analyſis ſit, & quid Syntheſis ignorans, hunc ineptè locutum exiſtimabat. O quam bene in eum quadraret Terentianum illud. Facit nimis intelligendo, vt nihil intelligat.

Quid maximè commendabile in vtraq; methodo.

Redeuntes tamen velut in orbem ſermonis; cum priùs de Analyſeos, atque Syntheſeos natura diſſereremus vtriuſq; definitionem attulimus, quam iterum non pigebit accuratiùs perpendere, vt facilior aperiatur via ad Problemata, ac Theoremata reſoluenda. Iam ex eodem Pappo retulimus Locum reſolutum propriam quandam eſſe materiam poſt communium Elementorum conſtitutionem ijs paratam, qui in Geometricis ſibi comparàre volunt vim, ac facultatem inueniendi Problemata ipſis propoſita, vbi etiam, & Theoremata intelligenda ſunt, cum vtrique Propoſitionum generi reſolutiua Ars inſeruiat. Erat autem Reſolutio, vt ſuperius explicatum fuit, via quędam à quęſito tanquam conceſſo per ea, quę deinceps conſequuntur ad aliquod verum conceſſum; ſiquidem in reſolutione id, quod quęritur tanquam exiſtens, & vt verum ponentes per ea, quę deinceps conſequuntur procedimus ad aliquod conceſſum; quid enim indè contingat conſideramus, & rursùs illius antecedens, quouſque progredientes incidamus in aliquod iam cognitum, vel quod ſit è numero principiorum, quo opere concluſionem quęſitam in proprias cauſas, per quas demonſtretur, reducimus; qui quidem proceſſus Reſolutio dicitur velut ex contrario facta ſolutio. His autem reſolutionibus, compoſitiones opponuntur; licet enim à conceſſo illo per eadem reſolutionis veſtigia reperiri; in compoſitione ſiquidem per conuerſionem ponentes tanquam iam factum id, quod poſtremum in reſolutione ſumpſimus, atque ordinantes ſecundum naturam ea antecedentia, quę illic conſequentia erant, mutuaque illorum facta compoſitione, ad quęſiti finem peruenimus, & hic modus eſt, qui Compoſitio vocatur.

Accuratius perpenditur Analyſeos, & Syntheſeos natura.

Duplex verò reſolutionis genus factum fuiſſe iam ſuperius adnotauimus, alterum quidem, quod veritatem perquirit, & contemplativum nuncupatur, diciturque Theorematicum, cuius finis eſt ſola veritatis inueſtigatio, ibique ſiſtit. Alterum verò, quo inueſtigatur id, quod dicere propoſuimus, vocaturque Problematicum, cuius finis eſt rationem conſtructionis, atque demonſtrationis inueſtigare; Conſtruere ſiquidem oblata Problemata docet, atque viam ad conſtructionis demonſtrationem oſtendit. In Theorematico, atque contemplatiuo genere quod quęritur, vt iam exiſtens, & vt verum ponentes

Duplex reſolutionis genus.

per ea, quę deinceps conſequuntur tanquam vera, & quę ex ipſa poſitione ſunt, procedimus ad aliquod conceſſum, quod quidem aliundè cum conſtet verum eſſe; verum erit, & quęſitum, & demonſtratio nimirum in compoſitione reſolutionis ex contraria parte reſpondens vera erit, quod ſi falſo euidenti occurramus; falſum quoque, & quęſitum erit. At in Problematico genere, quod propoſitum eſt, vt cognitum, & vt factum ponentes per ea, quę deinceps conſequuntur tanquam vera procedimus ad aliquod conceſſum, quod ſi fieri, compararique poteſt, (Datum autem id à Mathematicis dici conſueuit,) etiam & illud, quod propoſitũ eſt fieri poterit, atq; rurſus reſolutioni ex contraria parte demonſtratio reſpondens. Quòd ſi euidenti cuidam impoſſibili occurramus, & Problema itidem impoſſibile erit. Hoc autem genus conceſſa deſtruit, atque Deductio ad impoſſibile nuncupatur. Hęc enim eſt aſſumptio eius, quod quęſito contradicit tanquam conceſſi per conſequentia ad id, quod vero conceſſo, opponitur; In ipſa enim deductione ad impoſſibile ſumimus id, quod contradicit quæſito, atque id ſuppponentes progredimur donec in abſurdum aliquod incidamus, per quod ipſa ſuppoſitione deſtructa, confirmetur, quod à principio quærebatur. Illud porrò cuique ſit exploratnm reſolutioni, & deductioni ad impoſſibile id commune eſſe, vt ab incognito ad cognitum eodem progreſſionis ordine procedat, Reſolutio autem definẽs in verum concludit verum eſſe, quod ſupponitur, at Deductio ad impoſſibile deſinens in falſum, arguit falſum eſſe quod ſupponitur, ac ob id quæſitum verum eſſe; vndè tantum ratiocinatione diſcriminari videntur.

Aduertenda quædam.

Quid interſit inter deductionem ad impoſſibile, & conuerſionem.

Animaduertendum eſt autem non rarò confundi conuerſionem ſyllogiſmi cum ſyllogiſmo ad impoſſibile, atque adeò demonſtrationis cum demonſtratione ducente ad impoſſibile; differunt tamen, nam deductio ad impoſſibile nullam ſupponit demonſtrationem præcedentem, ſed ſolùm ſupponit concluſionem probandam, & vt eam probet contradictoriam ſumit, proceditque ſumendo ſimul cum illa propoſitione aliam euidentem, quæ negari non poſſit, vel ſaltem ab eo non negetur, cum quo diſputamus, & infert aliam euidenter falſam; hinc verò colligit præmiſſam aliquam eſſe falſam, quæ cum eſſe non poſſit illa, quæ euidens eſt, aut ſaltem conceſſa; neceſſariò erit contradictoria concluſionis probandę; quòd ſi illa falſa eſt, eius contradictoria vera erit, cum ex duabus contradictorijs vna neceſſariò ſit vera, altera autem falſa.

Conuerſione ſyllogizare quid.

Conuerſio quid.

At verò conuerſione ſyllogizare, atque adeo etiam demonſtrare; eſt ex oppoſito concluſionis, & altera præmiſſarum, alteram interimere; ex oppoſito igitur concluſionis, & altera præmiſſarũ, ſequitur oppoſitum alterius præmiſſæ, quoniam ex vna præmiſſa ordinata cum alia, ſequitur concluſio; quoniam deſtructo conſequente, deſtruitur antecedens; Conuerſio igitur ſupponit demonſtrationem præcedentem & contradictoriam, vel contrariam concluſionis aſſumit, itemque vnam ex pręmiſſis prioris ſyllogiſmi, poſtmodum infert contradictoriam, vel contrariam alterius pręmiſſę iam conceſſę.

Quid interſit inter oſtenſiuam demonſtrationem, & deductionem ad impoſſibile.

Differt autem oſtenſiua demonſtratio à ducente ad impoſſibile; primò ex parte propoſitionum, nam ducens ad impoſſibile accipit vnam tantùm propoſitionem veram, alteram autem falſam, purà contradictoriam concluſionis probandæ; oſtenſiua habet vtramque veram, & conceſſam. Secundò differt ratione concluſionis, quoniam in oſtenſiua non eſt neceſsè pręconcedere concluſionem, ac dicere illam eſse veram, aut falſam; at in deducente ad impoſſibile concedendum eſt, vel concluſionem probandam eſse falſam, vel eius contradictoriam veram.

Veteres ad reſoluenda Problemata Datis vtebantur.

Veteres autem ad reſoluenda Problemata Datorum Elementis vtebantur. Ex Datis enim ratiocinando factà aliquà conſtructione progrediebantur deinceps, vt data fierent, quæ alioquin deerant quouſque tandem peruenirent eo, vt data eſſent omnia, quibus eſt opus ad Problema ipſum efficiendum, quæ quidem exemplis illuſtrabimus; hunc enim in modum reſoluto quæſito in ſuas cauſas, per has deinde componendo, reuertebantur. In Theorematum autem reſolutionibus progrediebantur ex vero quodam ſuppoſito factà aliqua præparatione, ſi opus eſt, donec aliquod verum offenderent non ex reſolutionis vi, ſed aliundè demonſtratum, vt indè regredientes compoſitionem, atque demonſtrationem contexerent. Vndè id licèt aduertere, quod in reſolutione Problematum factum ipſum ſupponebant, quod quæritur, & ex datis curabant, vt fierent etiam data, ratiocinatione, quę deerant ad Problema ipſum efficiendum. At in reſolutione Theorematum verum quod quæritur ſupponębant, vt indè contingeret ad verum aliquod conceſſum, peruenire, vndè

vndè liceret ad componendum regredi.

Id tamen inficiandum non eſt, videlicet quadam imitatione Theorematum veteri methodo Problematum etiam reſolutiones inſtitui poſſe, ſupponendo ſcilicet factum eſſe, quod quæritur, & factà aliquà conſtructione proceſſum inſtituere quouſque perueniatur ad verum aliquod, vndè Problematis effectio conſtet. Ita quidem Archimedes lib. 2. de Sphæra & Cylindro. Vbi hoc intereſt inter reſolutionem Problematis, & Theorematis, quod verum in hac occurrens conceſſum demonſtratione firmatum eſſe debeat, non ex vi reſolutionis comprobatum; non enim ſufficeret, cum progreſſus ſit à vero ſuppoſito, & non conſtanti; at in illà videlicet in reſolutione Problematis verum offendimus ad effectionem Problematis conducens non aliundè firmandum, nec aliundè conſtans, conducens ad effectionem Problematis, quoniam progreſſus eſt ex ſuppoſitione alicuius facti, quod verum eſt, conſtans, ac ratum, non autem ex hypotheſi, quæ nos omnia pluribus exemplis reddere manifeſta tentabimus.

Imitatione Theorematum Problemata reſolui poſſunt.

Quia tamen antiqua methodus in Problematum reſolutionibus perficiendis præſertim innititur Euclidis Datis, horum enim notitia præhabenda eſt, alicuius Problematis reſolutionem aggredienti; propterea viſum eſt operæpretium ipſorum Datorum tractationem præmittere, eo vel maximè, quod illa vulgata non parum commentarijs indigere videarur, vnde vbi opus erat multa quidem addidimus, ut quantùm fieri poſſet omnibus numeris abſoluta redderetur.

Antiqua methodus in reſolutione Problematum vtitur Euclidis datis.

Cæterum multa Veteres congeſſerunt ad Locum reſolutum ſpectantia, inter quæ maximum habet momentum hæc ipſa Datorum conſideratio; Datorum enim præſidio Problematibus ſatisfaciebant, eorum ſcilicet reſolutiones, & compoſitiones contexentes. Verum alia reſolutionis gratià fuerunt adinuenta, de quibus nonnulla ſcripſimus ſupra. Ne redarguas nos, quòd iam ab alijs exculta, quaſi actum agentes, tractemus; ſi quidem nobis in animo eſt tractationem abſolutam tradere, quod ſi quidpiam extiterit iam dudum explicatum, haud prætermittendum videbatur, vt non niſi ab alijs illibata in medium afferre videremur; id enim puerile ducimus, quòd ſe ita ſentiat barbatus puer, nihil magni præter nominis magnitudinem habens, noſtra nihil intereſt; meliori veſcimur aurà, manet illi altà mente repoſtum iudicium ingenui animi; nobis eius plebeia calliditas, ac του χρυσου cupiditas αφαιη.

Multa congeſta à veteribus ad Locum reſolutum ſpectantia.

Non eſt alienum ab inſtituto parumper hìc expendere Mathematicas demonſtrationes; eaſdemque vindicare à quorundam iaculis; tametſi enim Mathematicas diſciplinas præſtantiſſimas fateantur, earundemque demonſtrationes in primo certitudinis gradu conſtitutas exiſtiment; tamen has ipſas inficiantur ſibi vindicare poſſe perfectæ demonſtrationis naturam; re diligentiùs introſpectà.

Non nulli Mathematicas demonſtrationes deteſtantur.

Dicendum potiùs Mathematicas diſciplinas demonſtratiuè procedere, earundemque demonſtrationes eas eſſe, quales Ars reſolutiua quidem expoſcit. Et ex infra dicendis conſtabit, vt opinor ijs diſciplinis ſcientiæ rationem accommodari poſſe.

Mathematicæ Diſciplinæ demonſtratiuè procedunt.

Omnis enim Diſciplina in his tribus eſt occupata. Ariſtotelis teſtimonio, ſubiecto, principijs, & attributis; ita videlicet, vt principia ſubiecti perſcrutetur & paſſiones ac attributa diſquirat, adeò vt attributa ipſa de re propoſita per principia demonſtret. Cuiuſmodi porrò diſciplinas eſſe Mathematicas cuicumque perſpectum erit, etſi vix eas è primo limine ſalutauerit; non erit ijs Diſciplinæ ratio deneganda. In eo autem difficultas poſita eſſe videtur quòd Mathematicæ Diſciplinæ hunc in modum ſe habeant, adeò vt quod aſſumunt conſiderandum ita tractent, vt eius principia perquirant, eademque de re paſſiones oſtendant; hoc itaque nobis operæ eſt pretium demonſtrare; id autem vt aſſequamur, oportet in memoriam redigere demonſtrationis præcepta in eius definitione contenta, quòd ſcilicet Demonſtratio ſit ſyllogiſmus conſtans ex veris, primis, immediatis, notioribus, prioribus, cauſiſque concluſionis; ſi itaque Demonſtrationes quibus Mathematicæ diſciplinæ comparantur fuerint quales modò deſcripſimus; non erit ambigendum nè huiuſmodi diſciplinis ſcientiæ ratio ſit accommodata.

Omnis demonſtratiua ſcientia in tribus eſt occupata.

Demonſtrationes verò, quibus Mathematicus vtitur huiuſmodi eſſe nemini licebit inficias ire; ſiquidem percurrendo commemoratas conditiones id nobis facillimum eſt deprehendere; quod magis etiam conſtabit diluendo difficultates, quæ aduerſus demonſtrandi genus in Mathematicis conſuetum afferri ſolent; cum aliàs ſatis ſuperque perſpicuum ſit

Demonſtrationes Mathematica rectè ſe habent.

C 2 harum

harum diſciplinarum demonſtrationes conſtare ex veris, primis immediatis, notioribus, prioribus, cauſiſque concluſionis; ſaltem vt plurimùm; quod ſi aliquando ab effectu ad cauſam procedunt;non eſt ijs tantum dedecori attribuendum, vt quantum in hoc à Diſciplinæ candore deficiant, tantundem in eodem certitudine, ac euidentia non aſſequantur.

Vexat igitur pleroſque, vt hinc deſumamus exordium, Platonis celebris auctoritas ex ſeptimo de Republica, vbi habet.

Platonis locus in 7 lib. de Republica aduerſus Geometriam *Prima obiectio.*

Αἱ δὲ λοιπαὶ, ἃς τοῦ ὄντος τι ἔφαμεν ἐπιλαμβάνεσθαι, γεωμετρίαν τε καὶ τὰς ταύτῃ ἑπομένας ὁρῶμαι, ὡς ὀνειρώττουσι μὲν περὶ τὸ ὄν. Ὕπαρ δὲ ἀδύνατον αὐταῖς ἰδεῖν, ἕως ἂν ὑποθέσεσι χρώμεναι, ταύτας ἀκινήτους ἐῶσι, μὴ δυνάμεναι λόγον διδόναι αὐτῶν. ᾧ γὰρ ἀρχὴ μὲν ὃ μὴ οἶδε, τελευτὴ δὲ καὶ τὰ μεταξὺ, ἐξ οὗ μὴ οἶδε συμπέπλεκται, τίς μηχανὴ τὴν τοιαύτην ὁμολογίαν ποτὲ ἐπιστήμην γενέσθαι.

Verſio Ficini. Reliquæ vero quas diximus, verarum rerum quoquo modo participes eſſe, Geometria ſcilicet, eiuſque comites, circa ipſam eſſentiam quodammodo ſomniant, ſyncerè autem quicquam ab illis cernere impoſſibile eſt tantiſper dum ſuppoſitionibus hærent,eaſque ratas & immobiles adeò ſeruant, vt illarum rationem reddere nequeant. Nam vbi principium quidem ponitur id quod eſt ignotum, finis autem & media ex ignoto tracta, inuicem connectuntur: collectam inde aſſertionem quònam pacto ſcientiam vocemus?

Verſio noſtra. *Reliquas vero (artes) quas diximus entis aliquam partem attingere, Geometriam duntaxat, & eas quæ ipſam Geometriam comitantur,videmus ſomniare quidem circa ipſum ens, per veram autem viſionem cernere non poſſe, quouſque ſuppoſitionibus adhibitis immobiles eas ſinunt, & nullam earum rationem reddere poſſunt, ſiquidem principium quidem ponitur id quod eſt ignotum, finis autem & media ex ignoto deducta copulantur, qui fieri poteſt vt huiuſmodi aſſertio ſit vnquam ſcientia?*

Platonis ſententia perpenditur. Platonis enim conſilium in eo poſitum eſſe videtur, vt doceat Geometriam,eiuſque comites ſomniare circa id, quod conſiderandum aſſumunt; & quidem de Geometria ipſa loquendo, cùm hæc in quantitatis continuæ meditatione ſit occupata, conſiderandam aſſumit abſtrahendo illam ab omni materia, cùm tamen ſic abſtracta in natura non ſit, ac propterea non introſpicit eius naturam huiuſmodi munus relinquens Phyſico, & Metaphyſico, quorum ille contemplatur quantitatem, quatenus eſt corporis habentis naturam affectio; hic autem, prout ſpecies eſt contenta ſub ente, quod velut adæquatum obiectum perſcrutatur; ac ob id de ipſa, non ſecùs ac de alijs entis ſpeciebus ediſſerit.

Platonis ſententia explicatur. Conſilium enim Platonis eo planè tendebat, vt oſtenderet Geometræ munus in eo poſitum eſſe, vt intra Matheſeos fines contemplaretur quantitatem continuam, nempe conſiderando quid ea eſſet,& vnamquamq;ſpeciem ipſius in ratione menſuræ,& menſurabilis, vt de eadem ſecundum eandem rationem proprietates oſtenderet. Cum autẽ quantitas, in cuius cõtẽplatione verſatur,ſit quid ſpectabile ſecundùm rationes diuerſas,à quibus Geometra,veluti Mathematicus intra proprios fines coercitus,abſtinere debet,cõtentus ea tantum contemplatione perſequi ſua, quæ ſibi ſunt propria; propterea nequit quantitatem ipſam perſcrutari, niſi ſecundum rationem menſuræ, & menſurabilis, ſecundùm quam attingi non poteſt quantitatis natura vndequaque, prout eſt in re, ſed tantùm quatenus ſub ea cadit conſideratione, quæ Mathematici eſt propria; ita fit, vt Geometra naturam eius non aſſequatur ſecundum omnem rationem cognoſcibilem; quemadmodum par eſſet ad intimiora eius principia cognoſcenda, ſed tantùm ſecundùm rationem menſuræ, & menſurabilis, vtpotè illam, quam ſibi Mathematicus adſciſcit.

Secunda obiectio à ratione petita. Plerique demonſtrationes Mathematicas damnant, veluti deſtitutas ijs conditionibus, quę ad veras demonſtrationes requiruntur.

Secundò igitur, quod nonnullis aliquid negotij faceſſit eſt quod huiuſmodi demonſtrationes, quibus Mathematicus vtitur,non procedant per cauſas.Affertur inter cętera inſtantia de prima Euclidis propoſitione,vbi Geometra contendit oſtendere Triangulum eo modo conſtructum per interſectionem circulorum, ęquilaterum eſſe, ac eius latera æqualia eſſe, quoniam ſunt rectæ ductæ à centro ad circumferentiam;Dicunt enim, non ideò lineas illas ęquales eſſe, quia ducantur à centris ad illas circumferentias, quoniam hoc eſt quid

Solutio. poſterius; etſi per impoſſibile circuli illi deſcribi non poſſent, nec rectæ duci à centris ad circumferentias, adhuc rectæ illæ lineæ forent æquales. Sed parum ſcitè hęc dicta videntur; quamuis enim deſcribi circulos ſit quid poſterius ęqualitate linearum illarum, non

tamen

tamen poſſe deſcribi ita ſe habet; cum hoc ſit potiùs natura priùs; quòd ſi repugnaret circulos deſcribi, & rectas illas lineas à centris ad circumferentias duci, repugnaret quoque prædictarum linearum æqualitas; vt ſi repugnaret riſibilitas, ſeu eſſe riſibile, vel aliquid illi neceſſariò connexum repugnaret, quoque homo, hoc eſt natura rationis particeps.

Obiectio ex alia Geometra propoſitione petita, cum ſua ſolutione.

Nec diſſimiliter occurrendum eſt difficultati de propoſitione trigeſima ſecũda primi Libri, vbi probatur triangulum habere tres angulos æquales duobus rectis; Quoniam producto vno latere, angulus externus æqualis eſt duobus oppoſitis, quod vt aiunt nullo pacto vera eſt, & eſſendi cauſa illius concluſionis, & ipſius attributi, quod eſt habere tres angulos æquales duobus rectis; nam ſi nunquam produceretur illud latus, imò ſi non poſſet produci, adhuc tres trianguli anguli forent æquales duobus rectis. Eodem enim modo hæc difficultas diluetur, dicendo ſcilicet produci latus eſſe quid poſterius non ita tamen poſſe produci; hoc enim poſterius non eſt, quod ſi prædicti lateris productio repugnaret, vtique repugnaret quoque triangulo conuenire prædictum attributum conſiſtens in eo, quod eſt habere tres angulos ęquales duobus rectis.

Tertia obiectio.

Tertiò damnantur Mathematicæ probationes, quod non ſint ex prioribus & notioribus naturâ, ſiquidem non ſunt ex cauſis, vt eſſe deberent ſi ex prioribus, atque notioribus naturâ dicendæ forent; quinimò aiunt ſępiſſimè procedere à poſteriori & à ſigno, vt patet quando fit demonſtratio commemorata propoſitionis trigeſimæ ſecundæ, vbi probatur Trianguli quidem attributum per angulum externum.

Solutio.

Hęc tamen parum habent momenti, ſiquidem aliquando fieri progreſſum ab attributo, ſiue ab effectu ad cauſam; commune quidem eſt omnibus Diſciplinis, in quibus, vt conſtat diſcurrendo per ſingulas, hunc licet progreſſum obſeruare; Quamobrem hac difficultate non plus Mathematicis, quàm cęteris Diſciplinis dedecoris inurunt; ſolùm igitur hinc illud licebit inferre, vt Diſciplinę Mathematicæ tantum ſibi nequeant ſplendoris, ac dignitatis arrogare; vt ſemper à cauſa ad effectum procedant, ſed aliquando à cauſa quandoque ab effectu, plerumque verò à concomitanti, quod ſuperiùs etiam tetigimus. Hìc porrò diligenter eſt aduertendum, quod pleroſque decepit, cum dicimus demonſtrationem per cauſam procedere, non ſic vſurpandum, quaſi cauſa neceſſariò eſſe debeat Phyſica; hoc enim adeò à veritate alienum, vt nihil ſupra; iam enim inſinuatum à nobis fuit ad demonſtrationem per cauſam non requiri cauſam omninò Phyſicam realiter ſcilicet diſtinctã ab effectu, ſed ſatis ſuperque eſſe, vt ſit cauſa Metaphyſica, quæ aliàs virtualis appellari conſueuit; itaque opus non eſt, vt tam ſit cauſa, quàm ſe habens per modum cauſæ; & certè niſi res ità ſe haberet illud ſequeretur incommodum, nimirum de Deo nullam ſcientiam eſſe poſſe, ſiquidem attributa, quæ Diuinam naturam comitantur haud reali diſtinctione ab illa diſtinguuntur; formalem autem diſtinctionem ex rei naturâ, hic non commemoro, cum huius non ſit loci cumulatius hac de re diſputationem inire.

Notanda quædam.

Quarta obiectio.

Quartò illud quoque ſolet in medium afferri ad idem ſuadendum, videlicet Mathematicis demonſtrationibus deeſſe perfectionem requiſitam ad optimum demonſtrandi genus. Non contexuntur ex ijs, quę ſunt per ſe; plerumque enim nos in demonſtrando principia quidem adhibemus, quę non ſunt per ſe, vt illud. Quę æqualia ſunt vni tertio, ſunt inter ſe ęqualia; cauſa per ſe vt aiunt cur illa ęqualia ſint, non eſt illud tertium, ſed tanta ipſorum quantitas; & ſi non eſſet illud tertium, vel etiam ſi foret impoſſibile adhuc ęqualia forent illa quanta; quod de principijs alijs quoque dicendum, vt ſi ab ęqualibus ęqualia demas, quę remanent ſunt ęqualia; idem quoque aſſerunt de propoſitione trigeſima ſecunda primi Elementorum, vbi videlicet oſtenditur, Triangulum habere tres angulos ęquales duobus rectis mediante angulo externo, atque adeo per principia, quæ non ſunt per ſe.

Solutio.

His quoque, & conſimilibus operoſum non erit ſatisfacere; propterea quod principium illud e.g. quę ſunt ęqualia vni tertio, ſunt ęqualia inter ſe, eſt propoſitio per ſe ſi rectè explicetur, & quidem huiuſmodi eſt, vt mereatur dici principium demonſtrationis, ſi vera ſunt, quę ſcripſit Philoſophus primo Poſteriorum Capite ſecundo, quòd ſit propoſitio immediata, qua ſcilicet non eſt altera prior; illius autem propoſitionis ſenſus redditur. Habentia equalitatem cum tertio ſunt habentia ęqualitatem inter ſe, vbi prędicatum adeo neceſſariò de ſubiecto affirmatur, vt ſufficiat ad hoc, vt ſit demonſtrationis principium; eſtque adeo immediata, vt per cauſam oſtendi nequeat, eiuſque veritas ſtatim conſtet habità ſignificatione terminorum, ita ut cum ſcientiarum principia complexa ſint in triplici diffe-

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITT. EMANUELE

differentia, quędam ſint, quibus intellectus ſtatim prębet aſſenſum percepta ſignificatiōe terminorum, quędam, quę repetitis experimentis innoteſcunt, quędam tandem quę cognoſcuntur aſſuetudine, principium allatum ad primum principiorum genus pertineat, &c.

Quinta obiectio.

Quintò obiiciunt etiam quia non ſunt ex proprijs; ac Mathematici utuntur principijs communiſſimis, vt e. g. totum eſt maius ſua parte. Si ab ęqualibus ęqualia demas, quę remanent ſunt, ęqualia, & id genus alia; & quamuis illa limitentur ad proprias materias, adhuc tamen ſecundum ſe communia ſunt, nec propria cenſeri debent illius demonſtrationis.

Solutio.

Sed mirum eſt, quàm ineptè loquantur; quando ſiquidem dicimus Demonſtrationem debere ex proprijs non ex communibus procedere, id ſic vſurpandum, vt demonſtratio conſtruatur ex proprijs; communia verò opem ferant demonſtrationi, quod in ipſis Mathematicis diſciplinis fieri conſueuit.

Sexta obiectio.

Sextò nec etiam probantur quibuſdam Mathematicę demonſtrationes, quoniam Mathematicus quantitatem conſiderandam aſſumit abſtrahendo à propria & vera illius natura, cum non conſideret illam quatenus eſt accidens, & vt a ſubſtantia pendet, ſed quatenus imaginationi ſubſtat, in eaque concipi poſſunt varię figurę, & de illis paſſiones probari per quędam principia euidentiſſima, non tamen per veras cauſas.

Solutio.

Sed his iam factum ſatis fuit ſuperiùs; nam ſi de Geometria loquamur hęc profectò quantitatem conſiderat continuam, non conſiderando tamen ipſam niſi ſecundùm abſtractionem ab omni materia ſenſibili, & perſcrutatur attributa, quæ conſequuntur ipſam ſecundum rationem menſuræ & menſurabilis; nec enim quicquam prohibet quantitatem ipſam hunc in modum ſpectari, & de ea ſecundùm huiuſmodi rationem attributa oſtendi, ſi quæ ſunt quæ profectò ſunt inde dimanantia.

Poſtrema difficultates. Prima ſolutio.

Quod ſi plerunque vſurpent hæ diſciplinæ Demonſtrationis illud genus, quod per deductionem àd impoſſibile nuncupatur, hoc nihil eſt; quoniam in hoc ipſæ cum cæteris conueniunt; nec peculiari ratione culpandæ.

Secunda, eiuſque ſolutio.

Nec etiam vitio licebit vertere Mathematicis, quod pręſertim apud Geometras magni nominis in vſu extitiſſe conſpicimus, ſi aliquando ex eo, quia aliquid nec minus, nec maius ſit, concludatur ęquale; quamuis enim id ex communibus prima fronte collectum videatur, tamen ex proprijs id factum fuiſſe quidem intelliges, ſi animaduerteris ea ex rei naturâ de qua agitur petita fuiſſe. In tradendis autem methodis, cum ſe obtulerit occaſio hęc ſpecialiùs proſequemur. Interim id adnotare licet, cum in hoc contigerit deductio ad impoſſibile, inde non plus dedecoris his Diſciplinis accedere, quàm cęteris eodem demonſtrandi genere vtentibus.

Notanda quædam.

Fatendum tamen parum feliciter Propoſitionis alicuius Geometricę demōſtrationem quibuſdam in prima principia reſolutam fuiſſe, vnde non parum dedecoris præſtantiſſimis hiſce diſciplinis inuſtum eſt; quaſi in his candor ille demonſtrationis Peripateticę deſideretur; quoniam propoſitiones, quibus conſtant non ſint iuxta leges, quas Ariſteles in Poſterioribus Analyticis promulgauit optimam tradere demonſtrandi normam contendens; etſi enim ſint de omni vt aiunt, & per ſe, non tamen, earum termini, nempe ſubiectum, & prędicatum reciprocè ſe habeant, cum pręedicatum latius pateat, quàm ſubiectum, &c. ſed Iniquum eſt Arti adſcribere errata, quę ab imbecillitate profeſſorum oriuntur; & quidem Scribimus indocti, doctique poemata paſſim. Si rectè, & vt, par eſt illa reſolutio fuerit inſtituta, in ea nihil erit, quod Philoſophi mentē perturbet, & apud Peripateticos quoque non vulgarem plauſum merebitur; Ità quidem dicendum omne triangulum in quo duo latera ſunt ęqualia vni tertio eſt trium ęqualium laterum, non autem omne triangulum tria latera habens ęqualia, eſt ęquilaterum, &c Non eſt Mathematicis id vitio vertendū ergo, quòd potius ex Artificis alicuius inſcitia proficiſcitur; dabitur enim cuicūq; ad meliorem formam demonſtrationis reſolutionem redigere; quod ſi in ipſis demonſtrationibus contexendis introſpicere rei ſubiectę naturam minimè videantur, id ijs ſummę laudi tribuendum; ſiquidem nefas exiſtimant proprios limites, fineſque ſua peculiari abſtractione ſancitos, tranſilire, quod ſuperiùs haud obſcurè fuit à nobis inſinuatum.

Euclidis, de Datis Liber ſingularis ad Locum pertinens reſolutum, ab Auctore recognitus, & Commentarijs illuſtratus.

DEFINITIONES.

Data magnitudine dicuntur areæ, ſeu ſpatia, lineæ, & anguli, quibus æqualia poſſumus exhibere. I.

HOc igitur modo, & iuxta definitionem hanc oportet intelligere vſitatam loquendi formam in demoſtrationum Analyſi; cum dicimus nimirum lineam aliquam datam eſse magnitudine; ita, & de ſpatijs intelligendum eſt.

Ad angulos autem quod attinet, aliqua difficultas inſurgit; poſset enim, quiſpiam arguere; Quod quantitatem, ſeu magnitudinem non habet, vtique magnitudine dari non poterit, nec ei quicquam ęquale poterit exhiberi; cùm æquale & inęquale, maius & minus, quantitatis, vel magnitudinis attributa eſse videantur. At verò angulum non participare rationem magnitudinis, mox ſuadebitur. Ergo non poterit angulus dici magnitudine datus, nec ei quicquam æquale poterit exhiberi. *Difficultates de Angulo.*

Angulum verò magnitudinem non eſse, hinc facilè quidem intelliges. Quoniam magnitudo omnis, vel linea, vel ſuperficies, vel corpus exiſtit, ita ut quod rationem vnius ex his non habet, nec magnitudinis rationem habere poſſit; ſed hunc in modum ſe ſe habere angulum, cuicumque perſpectum eſt, quamobrem angulus magnitudinis rationem obtinere non poterit. Quod ſi quis ambigeret de veritate illius propoſitionis, videlicet, quod non obtinet rationem vnius ex illis magnitudinibus, nec etiam magnitudinis rationem conſequi poteſt; inde profectò eam veritati conſentaneam eſſe deprehendet, quoniam nulla alia ſupereſt magnitudo, ſiquidem totuplex magnitudo cenſeri debet, quotuplex diuiſibilitas, At hęc tantummodò triplex, vt eleganter oſtendit Ptolemęus in Analemmate; ergo triplex erit etiam magnitudo; quamobrem nemini licebit vltrà lineam, ſuperficiem, & corpus, aliam inuehere in medium magnitudinem. *Angulum non eſſe magnitudinem demonſtratur.* *Suadetur prima propoſitio.*

Deinde illud accedit, quod Angulus planus eſt duarum linearum in plano ſe mutuò tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio; ergo non ad quantitatis, ſeu magnitudinis, ſed potius ad relationis genus pertinebit. Non ſecus enim ſe habet inclinatio, ac Ratio, hęc reſpectus eſt quidam, ſic & inclinatio; & vt inter Rationes datur reſpectus, qui dicitur analogia, ſiue proportionalitas, quæ nil aliud eſt quàm rationum ſimilitudo, ita pariter inter inclinationes ſimilitudo intercedit; vnde non tam Ratio dici debet alteri ęqualis, aut maior, vel minor; quemadmodum nec inclinatio tam debet ęqualis alteri dici, vel maior, vel minor, quàm ſimilis, vel diſſimilis. *Alia ratione demonſtratur angulum quantitatem non eſſe.*

Neque perturbet animum, quòd angulo quantitatis attributa conuenire videantur; ſubit enim diuiſionem in partes, ſiquidem licet in illas diſpeſcere; conuenit eidem eſse ęqualem alteri, itemque maiorem, atque minorem, &c. quæ planè magnitudinis naturam comitantur; non inquam animum perturbet, propterea quod ei commemorata conuenire bifariam intelligi poteſt, vel ſcilicet primo & per ſe, quod omninò negandum, vel ratione alterius, quod vltrò fatendum; intantum enim angulus diuiſionem ſubire poteſt, quatenus diuiſionis eſt capax arcus ille, cui angulus inſiſtit, & penes quem ipſius anguli attenditur menſura. Si enim minor fuerit ille arcus; angulus fit magis acutus; vndè inclinatio dicitur maior, & contra; ratione tamen ipſius arcus; cum alioquin diceretur ſimilis inclinationi aliarum duarum linearum angulum conſtituentium, quando arcus, quibus prædicti anguli inſiſterent forent æquales; diceretur autem diſſimilis quando eſſent arcus inæquales. *Occurritur difficultati.*

Neque dicas merè extrinſecè ſe habere arcus illos, nec ad anguli generationem conducere; quandoquidem res non ita ſe habet; namque ſi intelligamus rectam quandam in pla- *Reſponſionis impugnatio.*

no

no iacentem, in qua punctum quoddam fuerit acceptum, & hoc immobili, ac fixo linea in gyrum agatur, ita vt loco ipſius altera ſit ſubſtituta permanens, quot in ipſa ſunt puncta, tot arcus deſcripti intelliguntur, quemadmodum per illum motum angulus intelligitur genitus, ita etiam & arcus ſimiles, quibus idem angulus inſiſtit. Hoc autem ſufficit ad generationem anguli, preterquamquod quocunque oblato angulo plano, ſatis ſuperque eſt arcum deſcribi poſſe facto centro ad verticem illius, ſecundum arcum prædictum, attendendo ipſarum linearum inclinationem.

Epilogus. Longè itaque meliùs videtur hunc in modum res explicata, quàm ſi dicatur, inſulsè admodũ ut opinor, aliud eſſe quantitatis genus agnoſcendũ, ad quod angulus ipſe pertineat. Illud porrò ſilentio prętereundum minime duxi nihil referre, quo nam pacto ſe habeat huiuſmodi reſpectus, an ſcilicet contradiſtinguatur ab ijs, quæ referuntur, tamquam accidens ſuperadditum; illud enim de omnibus huius ordinis reſpectibus inquiri poteſt; neque hac in re peculiaris eſt difficultas; ſolum illud addendum; non importari, quicquam in re diſtinctum, quod aliàs à nobis demonſtratum abundè fuit. Simile quippiam tractandum occurret circa ſequentem definitionem, qua ſcilicet Rationis explicatur natura.

Explicatio definitionis propoſitæ. Ad propoſitum redeuntes, cum in definitione ait Geometra, angulum magnitudine dari, cùm ei æqualis exhiberi poteſt; eo ſenſu eſt vſurpanda definitio, vt magnitudine datus angulus, & ei æqualis exhibitus dicatur ad eum modum, quo ipſi magnitudinis ratio, & æqualitas aptari poteſt, quod non paucis hactenùs à nobis explicatum fuit.

Voces quædã explicantur. Hìc autem prætermittendum non eſt, quędam eſſe vocabula, quorum ſignificationes apponere abs re non eſſe iudicauimus; & primò quidem Datum dicitur, cui æquale poſſumus exhibere.

Hypotheſis, quid. Υπόθεσις, hypotheſis eſt, quod proponenti vltrò conceditur; ſuppoſitionem enim ſignificat, eo quòd fiat ex ὑπ; nempè ſub, & θεσις hoc eſt poſitio; vndè ὑϖόθεσις, ideſt ſuppoſitio eſt omne id, quod conceditur proponenti, vt dictum eſt.

Ordinatum, quid. Ordinatum, ſiue determinatum dicitur, quod pluribus modis eſſe nequit; cum enim aliquid determinatum fuerit, non patietur ſecus fieri, quàm determinatio ipſa permittat.

Porimon quid. τὸ ϖόριμον, Porimon Græcis, quod actu paratur, in promptuque eſt τὸ πόριμον; enim licet facilè ſuppeditans interpretari conſueuerint: non raró tamen contingit vſurpari pro τὸ ϖόριστον, quod Grecis ſignificat facilè parabile, atque ſuppeditabile, & quod citra difficultatem effici poteſt; adeo ut quandoque apud nonnullos in idem recidant; licet etiam τὸ πόριμον, plerũque ſignificet, quod conſtrui poteſt, & τὸ πόριστον quod parabile eſt ſine difficultate, & quandoque pro eo quod eſt factibile, quodque fieri poſſe non reuocatur in dubium; etiamſi eius effectio ignoretur.

Aporimon, quid. τὸ ἀπόριμον; aporimon accipitur pro eo, cui opponitur ϖόριμον ex à priuatiua, & πόριμον; atque adeò ſignificat id cuius effectio haberi nequit.

Effabile, quid. Effabile dicitur, quod eſt expreſſibile: vt ineffabile idem eſt, quod inexpreſſibile; effabile enim eſt à verbo effari.

Cognitum, quid. Cognitum denique ſignificat, quod numero rationali, vel irrationali exprimi poteſt. Aduerte autem per numerum rationalem intelligi illum, qui exprimi poteſt, vt Verbi gratia 20 quemadmodum per irrationalem, qui exprimi non poteſt, vt ſe habet R. 20. redeamus vnde diſceſſimus. Illud ſilentio præterire non licet; Datum quadrifariam contingere magnitudine nimirum, ratione, ſpecie, & poſitione, de quibus edifferit Euclides. Atq; primò data magnitudine eſſe areas, lineas, & angulos, quibus æqualia nos exhibere poſſumus; cumque Datum generatim acceptum illud ſit, cui æquale poteſt inueniri; ob id magnitudo tunc data dicenda eſt, cum ei poteſt æqualis reperiri; non ſecus datum ſpatium eſſe dicetur, quemadmodum etiam & angulus ſenſu iam explicato.

Ratio dari dicitur, cui poſſumus eandem exhibere.

Definitionis explicatio. TVnc ἀναλογία, analogia, ſiue proportio data eſſe dicetur, cum ei poteſt æqualis reperiri. Quoniam enim in ratione magnitudinis A, ad magnitudinem B, dari poteſt magnitudo C, ad magnitudinem D, propterea proportio magnitudinis A, ad magnitudinem B, data eſſe dicetur.

Quanti referat ad Geometram poſſe in quonam poſita ſit rationum natura, non eſt cur plu-

pluribus explicemus, cùm perſpicuum adeò, vel cuique eſſe poſſit, vt operæ non ſit pretium in hoc immorari. Præſtabit igitur ſtatim aggredi Definitionem rationis, quam Euclides inculcat Elementorum lib. 5. Ait autem

Λόγος δ᾽ ἐςὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις.

Rationis definitio.

Hoc eſt. Ratio eſt duarum magnitudinum eiuſdem generis mutua quædam ſecundum quantitatem habitudo. Huius porrò Definitionis ſenſus, vt probè innoteſcat, iuuabit ſingulas eius particulas diligenter percurrere. Primùm autem videtur id adnotandum, quod Græcus Codex vtitur hac voce, λόγος, quæ quidem optimè redditur latinè, ratio, qua ſignificatur habitudo, ſiuè reſpectus quidam inter duo, & quidem ſi inter ſe conferantur ſecundum quantitatem, in huiuſmodi collatione ſpectari poteſt & Intellectus actus collatiuus, quo ſcilicet vnum, cum alio confertur, & ea, quæ ſecundum quantitatem conferuntur. Illa igitur mutua habitudo non quidem ſe tenens ex parte cognitionis, vt aliqui perperam intellexerunt, ſed potius ex parte eorum, quæ comparantur, ratio dicitur. Dum itaque duæ quantitates, ſiuè diſcretæ, ut numeri, ſiue continuę, vt lineæ, ſuperficies, & corpus inter ſe conferuntur ſecundum quantitatem, habitudo illa ſe tenens ex parte obiecti Ratio eſſe dicetur.

Definitionis explicatio.

Ratio autem commemorata dicitur duarùm magnitudinum eiuſdem generis. Siquidem eſſe debet habitudo inter quantitates eiuſdem generis, quoniam quæ ſunt generis diuerſi nequeunt inter ſe comparari, vnde non eſt in ijs cur exerceatur reſpectus in quo rationem conſiſtere dicebamus. Quamobrem linea cum linea, ſuperficies cum ſuperficie, ſolidum cum ſolido conferri debet; non autem linea cum ſuperficie, &c.

Dicitur deinde ſecundum quantitatem. Hoc eſt ſecundum quod vna maior eſt, aut minor, aut æqualis alteri. Quandoquidem duabus eiuſdem generis quantitatibus propoſitis, neceſſe eſt, aut unam eſſe maiorem, aut minorem altera, aut illi æqualem. Habitudo igitur illa, qua ſeſe vel æqualiter, cum ſunt æquales, vel inæqualiter, cum ſunt inæquales, reſpiciunt, Ratio appellatur. Quare habitudines aliæ non fundatæ in quantitate, vt habitudo patris ad filium, quæcumque illa ſit, vel albi ad album, vel demum quælibet, cuius fundamentum non eſt quantitas, per hanc in definitione particulam poſitam excluditur.

Num proportio quantitas dici mereatur Dubitādi ratio.

Hinc porrò nacta occaſione peritiores Geometræ diſceptationem ineunt; Num proportio quantitas dici mereatur; quod etiam de angulo ſolet inquiri.

Eſt autem, cur id in controuerſiam vocent, propterea quod ratio quantitas non videtur, quoniam hæc creditur adæquatè diuiſa in diſcretam, & continuam; diſcreta in ſuas ſpecies; continua itidem in ſpecies ſuas, lineam, ſuperficiem, & corpus, ad quarum nullam ratio reuocari poteſt.

Rationes quibus oſtenditur ratio participare quantitatis naturā.

Ex aduerſo tamen, non parum negotij faceſſere videtur difficultas, quoniam de rationibus agere munus eſt Geometræ, qui tamen ſolam quantitatem ſua contemplatione perſequitur; & ſi quid eſt, quod præter quantitatem ad ſe adſciſcere videatur, illud profectò cadit ſub ipſius contemplationem, quatenus aliquo modo naturam induit quantitatis, rationemque menſuræ, ac menſurabilis obtinet.

Idque præſertim inualeſcit, quoniam rationi, quicquid conuenit, quantitati conuenire perſpicuum eſt. Quamobrem ſi quanti maximè proprium eſt æquale, & inæquale dici, vt Ariſtoteles pronunciauit de quantitate agens cap. 6. etiam de ratione idem enunciari volunt Geometrę, quibus nihil eſt frequentius, quàm rationem vnam, maiorem, aut minorem alterâ dici, vel vnam alteri ęqualem; quò apud ipſos frequentiſſimè uſurpatur illud, nimirum quantitatem vnam habere maiorem rationem ad alteram, quàm alia ad eandem, vel minorem, vel æqualem.

Iterum idem comprobatur.

Quin imò & rationem ſibi vindicare nedum commemoratas proprietates conſequentes quantitatis naturam; ſed etiam hęc, quæ ſunt maximè quantitatis propria, videlicet poſſe addi, ſubtrahi, multiplicari, ac diuidi. Non minus enim ac de quantitate, de rationibus ipſis dicere ſolemus, vnam alteri addi, ex vna aliam ſubtrahi: vnam per aliam multiplicari; atque demum vnam per aliam diuidi.

Oppoſita ſententia tanquā probabilior defenditur.

Nihilò ſeciùs rectè quidem Petrus Nonius negatiuam ſententiam amplexus eſt, ea ratione ductus, quam primùm attulimus, quoniā ratio neque quantitas eſt diſcreta vt numerus, neque aliqua ſpecies quantitatis continuę; neque enim eſt linea, neque ſuperficies, neque corpus. Quę etiam de angulo intelligenda volumus.

Commentitium planè, ac puerile eſt, quod nonnulli difficultate preſſi protulerunt, di- *Quorundam effugium.* centes tametſi ratio ad nullam ex commemoratis quantitatis ſpeciebus pertinere poſſit, tamen inde haud inferendum eſſe quantitatis eſſentiam à ratione non participari, quoniam aliud eſt quantitatis genus; quod relatiuum dicitur, ſub quo ratio ipſa contineri poteſt.

Ipſos; tamen de ratione loquentes, nulla ratione quidem hoc nouum quantitatis genus *Reijcitur 1.* in medium inuexiſſe facilè quiſque deprehendet, ſi nobiſcum occurrat propoſitis difficultatibus, quibus, nullam ineſſe vim hîc oſtendemus.

Ad primam igitur quod attinet. Vltrò quidem fatemur Geometrę munus eſſe quantitatem perſcrutari; indè tamen non rectè infertur quicquid ſub Geometrica cadit contem- *Reſpõdetur ad ſingula propoſita argumenta.* platione quantitatis naturam ſibi vendicare, atque adeò directè ſub illa contineri. Nam vt inſulsè profectò putaret aliquis, quicquid Phyſicus meditandum aſſumit debere corporis *Ad primum.* naturalis rationem ſibi vendicare; ità non minus ſi crederet nihil eſſe, in quo Geometra occupatur, quod rationem quantitatis non obtineat, ut igitur Geometra & de ratione, & de analogia edifferat ſatis eſt, vt hęc quantitatis naturam intra fines Geometricos, nempe abſtractionis à materia ſenſibili comitentur.

Ad ſecundũ. Ad id verò, quod difficultatem pręſeferebat non vulgarem; reſpondere facillimum erit, multa quidem de aliquibus dici propriè, quę de alijs impropriè, & per quandam translationem dicuntur. Ita planè in re, de qua agimus, contingit; nam ęquale, ac inęquale eſſe, ſicut & maius eſſe, ac minus, proprium eſt quantitatis, ſi proprietate ſermonis vtamur; ſecus autem ſi impropriè loquamur. Quamobrem ratio dicitur rationi ęqualis, vel inęqualis, diciturque vna maior, vel minor alterâ, impropriè tamen loquendo, cum potiùs ratio rationi deberet dici ſimilis, & non ęqualis. Itemque vna non maior, vel minor alterâ, ſed potius diſſimilis. Etſi diſſimilitudinis fundamentum ſit maior, vel minor quantitas, vnde tollerabile eſt, rationem vnam, altera dici maiorem, vel minorem, quatenus hęc diſſimilitudo in maiori, vel minori quantitate fundatur.

Atque demum operoſum non eſt occurrere poſtremę difficultati allatę; propterea quod poſſe addi, ſubtrahi,&c. conuenire rationi bifariam intelligi poteſt. Vel nimirum ratione *Ad tertium.* ſui, vel beneficio quantitatis. Primum quidem admittimus, ſecundum tamen negamus ea ratione ducti, quoniam ſi quę additio, vel ſubtractio, &c. in rationibus ipſis exercetur, profectò contingit, quatenus in quantitate perficiuntur.Cum itaque res ita ſe habeat,conſequens omninò eſt rationi, haud quantitatis naturam ineſſe.

Hęc etiam intelligi volumus de angulo, vt ſupra docuimus, cui quantitatis naturam denegauimus,quoniam ſi quę inditio ſunt,eum participare quantitatis eſſentiam nihil prorſus vrgent, ſi quidem ei conueniunt beneficio arcus,cui inſiſtit; penes enim hunc, angulus dicitur vel ęqualis alteri, aut eo maior, vel minor. Neque quicquam refert ſi arcus actu non ſubtendat angulum ipſum, ſatis enim eſt ſubtendere poſſe; Quamobrem angulum in quadam habitudine poſita in inclinatione conſiſtere dicamus neceſſe eſt. De his tamen ſupra multa nos in medium attulimus.

Cęterum ab initio propoſitam difficultatem, illud dicendum; ſcilicet rationi exhiberi aliam ęqualem, quatenus ęqualitas cum ſimilitudine confunditur, ita ut perinde ſit rationi, rationem ęqualem eſſe, ac eſt illi eſſe ſimilem, itaut ęqualitas, pro ſimilitudine ſumatur; & quidem hunc in modum data erit ratio, cui ſimilis poteſt exhiberi.

III. *Rectilineæ figuræ ſpecie dari dicuntur, quarum, & ſinguli anguli dati ſunt, & laterum rationes ad inuicem datæ ſunt.*



Explicatio. SI itaque fuerit aliqua figura rectilinea, puta triangulum A B C, tunc dicetur ſpecie data, cum ſinguli eius anguli ABC, ACB, BAC, dati fuerint, ſimulque data fuerit ratio lateris A B, ad B C, & B C, ad C A, & C A ad A B. Cæterum neque lineæ, neque anguli ſpecie dari dicuntur; ſed magnitudine, vt ſupra viſum eſt. Hinc autem infertur ſpecie datarum figurarum angulos quoque dari; quemadmodum etiam laterum rationes vti perſpicuum eſt.

Poſi-

Poſitione dari dicuntur puncta, lineæ, atque anguli, quæ eundem ſitum ſemper obtinent. IV.

NNon aliter intelligendum eſt, puncta, lineas, anguloſque poſitione dari, quàm, vt ſitum eundem ſemper obtineant. Puncta itaque lineę, & anguli poſitione dari dicuntur, quæ ſitum eundem ſemper obtinent; quinimo puncta non aliter dari poſſunt, quàm poſitione; at verò anguli dum poſitione dantur etiam, & magnitudine, eo tamen modo quò ipſis magnitudo conuenit, quemadmodum ſupra fuit explicatum. Non ſic autem de lineis ſentiendum eſt rectis; propterea quod, hę quantumuis poſitione dentur, non propterea magnitudine datę eſſe dicentur; poſitio enim ſitum reſpicit, magnitudo non ita.

Circulus magnitudinę dari dicitur, cuius ea, quæ ex centrò datur magnitudine. V.

HÆc definitio ſatis clara eſt, atque perſpicua. Circulus itaque magnitudine datus eſſe dicetur, cum data fuerit recta quidem magnitudine, ex centro ducta, hoc eſt, cum magnitudine data fuerit recta linea, quę nimirum ex ipſius circuli centro ducitur.

Poſitione, & magnitudine dari dicitur circulus, cuius datur centrum poſitione, & ea quæ ex centro, magnitudine. VI.

NOn eſt opus vlteriori declaratione; ſi enim circuli centrum poſitione datum fuerit, eiuſdem verò, quę à centro, magnitudine, non poteſt circulus non dari poſitione, nam à centro poſitio, & ab ea, quę ex centro, magnitudo.

Circuli ſegmenta magnitudine dari dicuntur, in quibus dati ſunt magnitudine anguli, atque ſegmentorum baſes. VII.

TVnc circuli ſegmenta magnitudine dari dicuntur, in quibus anguli magnitudine dati ſunt, datęque ſegmentorum baſes; cum enim ſuper eandem rectam lineam ad eaſdem partes, non conſtituantur duo circuli ſegmenta ſimilia, & inęqualia, circuli verò ſegmenta ſimilia ſint ea in quibus anguli cōſtituti ſunt ęquales, inde fit, vt ſi detur angulus contentus in ſegmento circuli vna cum baſi eiuſdem, neceſſariò etiam detur magnitudine circuli ſegmentum; alioquin ſimilia eſſe deberent illa ſegmenta, eo quod caperent angulos ęquales, & ſi poſſet eſſe alterius magnitudinis maioris, vel minoris; iam duo ſegmenta ſimilia, & inęqualia ſuper eadem recta linea ad eaſdem partes forent conſtituta, quod tamen aduerſatur ijs, quę ab Euclide demonſtrantur ad 23. Prop. Lib.3.

Poſitione, & magnitudine dari dicuntur circuli ſegmenta, in quibus anguli magnidine dati ſunt, & ſegmentorum baſes poſitione, & magnitudine. VIII.

CIrculi ſegmenta poſitione, & magnitudine dari dicuntur, quibus dati ſunt anguli magnitudine ſegmentorumque baſes poſitione, magnitudineque dantur, quod plane conſtat ex ijs, quę iam ſupra diximus; dum enim data eſt ſegmenti baſis, & quidem poſitione, & magnitudine; atque ſuper ipſam nequeant dari circulorum ſegmenta ſimilia, & inęqualia; proinde ſi dantur anguli magnitudine, itemque ſegmentorum baſes poſitione, & magnitudine, etiam poſitione, & magnitudine circulum dari neceſſe eſt.

Magnitudo magnitudine maior eſt datâ, quando ablatâ datâ reliqua eidē æqualis erit. IX.

SSupponamus propoſitas eſſe magnitudines DF, EF; ſitque data magnitudo DE. Per hanc definitionem dicetur quidem DF, magnitudo maior magnitudine EF data magnitudine DE; quoniam ablata data DE reliqua EF, ęqualis eſt magnitudini, qua magnitudo DF maior eſſe dicitur. Itaque ſi duę fuerint magnitudines inęquales, & prima illarum ſuperet

D E F

ſecundam dato exceſſu, prima ſecundâ maior eſſe dicetur, datâ, hoc eſt dato exceſſu. Vnde cum duę ſint magnitudines DF, EF ſuperet autem DF ipſam EF datâ magnitudine, ſiue dato exceſſu D E; ipſa quidem DF maior dicetur minori EF dato exceſſu, ſiue datâ; ſiquidem ablata DE reliqua EF eidem EF ęqualis eſt. Notant Interpretes non intereſſe vtrum binę magnitudines inęquales datę ſint, dummodo datus ſit exceſſus, quo maior minorem excedit.

X. *Magnitudo magnitudine minor eſt, datâ, quando adiuncta data, tota eidem æqualis eſt.*

HÆc definitio ſuperiori quidem eſt affinis; propterea quod illud idem hîc aſſeritur de additione, quod ibi de ſubtractione dicebatur. Supponamus magnitudinem EF minorem eſſe magnitudine DF; ſitque data magnitudo DE; iuxta definitionem hanc E F dicetur magnitudo minor magnitudine D F; & quidem datâ magnitudine D E, eo quod adiuncta hac data ipſi E F, ſit magnitudo D F, ęqualis illi, qua magnitudo E F minor eſſe dicitur datâ magnitudine D E.

D E F

XI. *Magnitudo magnitudine maior eſt datâ, quàm in ratione, quando ablata data, reliqua ad eandem habet rationem datam.*

SVpponamus AD, eſſe magnitudinem datam, & AC maiorem eſſe CB data, quàm in ratione: Ratio D C ad CB eſt data, atque magnitudo AC maior eſſe dicetur magnitudine BC datâ, quàm in ratione ſiquidem ablata data AD reliqua DC ad rectam CB habet rationem quę ſupponitur data. Vel definitionem ſic exponamus. Si fuerint duę magnitudines, & ab vna ipſarum auferatur data magnitudo, reliqua verò magnitudo habeat ad aliam magnitudinem rationem datam ſiue maioris, ſiue minoris inęqualitatis, prima illa magnitudo ſecunda magnitudine dicetur maior eſſe data quam in ratione. Vt duę ſint magnitudines AB,CB, & à magnitudine AB ablata ſit magnitudo A D, reliqua vero DB habeat ad CB rationem datam maioris inęqualitatis v. g. duplam. Dicetur A B ipſa C B maior eſſe datâ quàm in ratione, quandoquidem ablatâ datâ A D reliqua D B ad C B rationem habet datam.

A D C B

XII. *Magnitudo magnitudine minor eſt datâ, quàm in ratione, quando adiunctâ datâ, tota ad eandem, rationem habet datam.*

SVpponamus AD eſſe magnitudinem datam, atque DC minorem eſſe magnitudine CB data, quàm in ratione; ratio AC, ad CB eſt data; magnitudo itaque DC minor eſt magnitudine AC data, quàm in ratione; quoniam ad ipſam D C addita AD fit A C, quæ ad C B rationem habet, quæ data ſupponitur. Vel ſic interpretemur definitionem. Vt ſi fuerint duæ magnitudinis, & vni earum adijciatur data magnitudo, compoſita verò magnitudo habeat ad aliam magnitudinem rationem datam ſiue maioris, ſiue minoris inæqualitatis prima illa magnitudo ſecundâ magnitudine minor eſſe dicetur, data, quam in ratione. Sint duæ magnitudines DC, CB, & alteri ipſarum nempe DC adiecta ſit magnitudo A D, habeat autem ex D C, & A D compoſita magnitudo A C ad C B rationem datam puta duplam, dicetur quidem D C minor eſſe ipsâ C B, data quam in ratione, quoniam magnitudo D C aucta magnitudine A D compoſita A C habet ad C B datam rationem nempè duplam.

A D C B

XIII. *Deducta linea dicitur à dato puncto, ad datam poſitione rectam acta recta in angulo dato.*

Alij vertunt producta.

LInea recta deducta dicitur à dato puncto, ad datam poſitione rectam, cum recta acta fuerit in angulo dato; ſiquidem ad datam poſitione rectam, linea ducitur

à dato

ſi dato puncto, in angulo tamen dato, quem hæc cum illa conſtituit: propterea, hæc linea deducta dicetur à dato puncto, ad datam poſitione rectam.

Educta linea dicitur à dato puncto ad datam poſitione rectam, protracta recta in angulo dato. XIV.

AT verò educta linea dicitur à dato puncto ad datam poſitione rectam, cum illa protracta fuerit in angulo dato; tunc enim linea dicetur educta, ſiquidem a dato puncto ad rectam poſitione datam protrahitur recta in angulo tamen dato, quem hæc, cum illa conſtituit. *Alij vertunt Reducta.*

Contra poſitione eſt, recta per datum punctum parallela acta alteri rectæ. XV.

DIcetur verò contra poſitione recta per datum punctum, cum acta fuerit parallela alteri rectæ; ſiquidem igitur per datum punctum parallela eſt alteri rectæ; linea dicitur qualis modo deſcribitur. *Alij vertunt Appoſitione.*

Definitiones itaque præmittendæ ſunt, qua hactenus attulimus ſupereſt, vt propoſitiones aggrediamur: quæ ſequuntur.

PROPOSITIO PRIMA.

Datarum magnitudinum ad inuicem data ratio eſt.

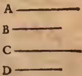


DAtæ ſint magnitudines A, B. Dico rationem A ad B datam eſſe. Quoniam data eſt magnitudo A, poterit æqualis ei exhiberi, ea quæ ſit C. Rurſus quoniam data eſt magnitudo B, poſſibile erit aliam ei æqualem exhibere, ea eſto D. Quoniam itaque A eſt æqualis C, & B æqualis D, erit, vt A, ad B, ita C, ad D, ergo ratio A, ad B, erit data. Si igitur magnitudines dentur, earundem ratio data erit. Quod oportebat oſtendere. Vel quia A æqualis eſt C, & B æqualis D, erit vt A ad C ita B ad D, & [d] alternatim vt A ad B, ita C ad D; quamobrem ipſius A ad B data ratio eſt, cum illi eadem ſit C ad D.

a per primam definit. huius.
b per ſecundā definit. huius.
c 7. 5.
d 16. 5.
e 2. def.

PROPOSITIO II.

Si data magnitudo ad aliam aliquam magnitudinem habeat rationem datam; datur etiam hæc alia magnitudine.

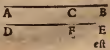


DAta ſit magnitudo A, quę ad quandam aliam magnitudinem, v. g. B, habeat rationem datam Dico B. dari magnitudine. Quoniam igitur data eſt magnitudo A, poterit æqualis ei exhiberi; ea verò ſit C. Cum itaque ratio ipſius A, ad B detur ex hipotheſi poterit ei æqualis dari, exhibeatur igitur, & ſit ipſius C, ad D, ratio; quoniam igitur eſt vt A ad B ita C, ad D, erit vt A, ad C, ita B ad D; at verò A æqualis eſt C proinde B æqualis erit D ergo B magnitudine data erit, quandoquidem ipſi æqualis exhibita eſt D.

a Per primam definit. huius.
b Per ſecundā definit huius.
c per 16 quinti.
d Per 14. 5.
e Per 1. definit. huius.

PROPOSITIO III.

Si quotlibet datæ magnitudines componantur, etiam ea dabitur, quæ ex his componitur, magnitudo.



DAtæ ſint magnitudines AC, CB Operæpretium ſit oſtendere AB datam eſſe; Quoniam A C eſt data poterit illi reperiri æqualis; ergo fiat [a] DF æqualis A C; & quoniam C B eſt

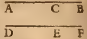
a 3. primi.

b Per 1. defin. huius. c 3. primi. d Per primā definit. huius.

eſt data pŏterit [b] illi reperiri æqualis, ergo F E æqualis c fiat CB. Quoniam igitur DF eſt æqualis AC. & FE ęqualis C B, erit D E æqualis AB, quamobrem AB data d erit.

PROPOSITIO IV.

Si à data magnitudine data magnitudo auferatur, reliqua data erit.



a Per primā definit. huius. b Per 3. communem notionem.

DAta ſit magnitudo A B, à qua auferatur data magnitudo AC. Dico reliquam C B datam eſſe. Quoniam enim datur A B, poterit a ei æqualis exhiberi, quæ ſit DF. Rurſus quoniam datur A C poterit ei æqualis exhiberi, ſitque D E; quoniam igitur A B, æqualis eſt ipſi D F, & A C ipſi D E, reliqua igitur CB reliquæ EF, eſt [b] æqualis. Datur igitur CB quandoquidem ei exhibetur æqualis E F.

PROPOSITIO V.

Si magnitudo, ad ſui ipſius, aliquam partem habeat rationem datam: etiam ad reliquam rationem datam habebit.



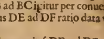
a Per ſecundā definit. huius. b Per ſecundam huius. c Per quartā huius. d Per primam huius. e Per coroll. 19 quinti. f Per coroll. 19. quinti. g Per ſecundā definit huius.

SIt ratio data AB, ad BC. Dico rationem AB, ad AC, datam eſſe. Quoniam proportio AB, ad BC, data eſt poterit a ei æqualis exhiberi; quamobrem ſumatur D E arbitraria, & fiat, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, ergo data eſt ratio DE ad EF, eſt autem DE data; ergo data [b] eſt FE, ergo & reliqua DF data [c] eſt. Data eſt autem DE, igitur ratio ipſius DE ad DF data [d] eſt. Et quia eſt vt DE ad EF ita AB ad BC igitur per conuerſionem rationis erit [e] vt DE ad DF, ita AB ad AC, eſt autē ipſius DE ad DF ratio data vt oſtenſum eſt, igitur ratio AB ad AC data erit Vel.

Quandoquidem eſt DE, ad EF, vt AB, ad BC, ex conſtructione, erit [f] DE, ad DF, vt AB, ad AC; ergo ratio AB, ad AC erit g data.

PROPOSITIO VI.

Si componantur duæ magnitudines habentes, ad inuicem rationem datam, & quæ ex his componitur magnitudo habebit ad vtramq; rationem datam.

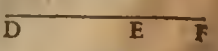


a 12. ſexti. b per ſecundā definit. huius. c Per primā huius. d per 18. quinti. e Per corol. 19 quinti. f per primam definit. huius.

DAtá ratio ſit AC, ad CB. Dico rationem A B, ad CB eſſe datam: & rationem AB ad AC eſſe pariter datam. Fiat DF recta, vt libet; mox verò [a] conſtituatur DE, ad EF, vt AC ad C B; conſtitui autem poterit; cum enim data ſit proportio A C, ad CB, ei poterit [c] exhiberi æqualis. Ergo ratio DE àd EF data eſt. Eſt autem vtraque magnitudinum DE, EF data, ergo ipſius DF ad vtramque ipſarum E F, D E ratio eſt data. Et quoniam ęſt vt AC ad CB ita DE ad EF igitur componendo erit [d] vt AB, ad CB ita DF, ad EF, & vt e AB, ad AC, ita DF, ad DE, & quoniam eſt vt DF ad vtramque ipſarum EF, DE ita AB ad vtramque ipſarum CB, AC, igitur ipſius AB ad vtramque ipſarum CB, AC ratio data [f] erit.

PROPOSITIO VII.

Si data magnitudo, data ratione ſecetur: vtrumq; ſegmentorum datum erit.



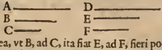
a 6. huius. b Per 2 huius. c per coroll. 19 quinti, & Per 5. huius. d per 2. huius.

Data ſit magnitudo DF; ſit verò data ratio, vt D E, ad EF. Dico D E, EF data eſſe. Quoniam ex hypotheſi ratio DE, ad EF eſt data; ergo a erit ratio DF, ad EF pariter data; eſt autem DF data ex hypotheſi, ergo EF data erit [b]. At verò ratio DF, ad DE eſt c data, & D F ex hypotheſi data eſt; ergo DE eſt [d] data. Vtrumque igitur ſegmentorum datum erit.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Quæ ad idem rationem habent datam, habebunt, ad inuicem rationem datam.

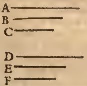


DAta ſit ratio A, ad B, data inſuper ſit ratio C, ad B. Dico rationem A, ad C datam eſſe. Fiat ad libitum recta D, & vt A, ad B, ita fiat D, ad E fieri poterit [a] quia data eſt ratio A ad B.& præterea, vt B, ad C, ita fiat E, ad F, fieri poterit [b] quia data eſt ratio B ad C.Quoniam data eſt ad libitum D, & inſuper data eſt per conſtructionem ratio D,ad E;erit [c] quidem E data;at verò proportio E,ad F per conſtructionem data eſt, eſt autem E data ergo F,erit [d] data, eſt data autem D, ergo data erit [e] ratio D ad F;cùm autem ſit vt A ad B,ita D ad E,& vt B ad C,ita E ad F, erit [f] ex æquo vt A ad C ita D ad F, ſed data eſt ratio ipſius D ad F, vt ſuperiùs oſtenſum eſt, ergo ipſius A ad C ratio data erit.

a Per primam definit. huius.
b Per primam definit huius.
c Per ſecundã huius.
d Per ſecundam huius.
e Per primam huius.
f 22. quinti.

PROPOSITIO IX.

Si duæ, pluresue magnitudines ad inuicem habeant rationem datam, habeant autem illæ magnitudines, ad alias quaſdam magnitudines rationes datas, & ſi non eaſdem, illæ aliæ magnitudines etiam ad inuicem habebunt rationes datas, &c.



RAtiones A,B,C, ſint inter ſe datæ, ratio, A, ad D, & B,ad E, & C, ad F ſint datæ. Dico rationes D, ad E,& E,ad F eſſe inter ſe datas. Quoniam ex hypotheſi ratio D, ad A eſt data, & ratio B, ad A quoque data, erit [a] ratio D, ad B data. Eſt autem ex hypotheſi ratio E, ad B, data, ergo ratio D, ad E erit [b] data; eſt autem ex hypotheſi ratio C,ad B,data,& ratio E ad C, erit [c] data cum ratio E, ad B ſit data; ratio verò F,ad C eſt data ex hypotheſi; ergo ratio E, ad F erit [d] data, & ratio D, ad F erit data per eandem 8.Datorum, cum oſtenſum ſit rationem E, ad F eſſe datam, & rationem D ad E eſſe pariter datam,igitur D,E,F ad inuicem habent rationem datam.

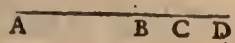
a 8. datorum.
b 8. datorum
c 8. datorum.
d 8. datorum.

PROPOSITIO X.

Si magnitudo magnitudine maior fuerit, data, quàm in ratione, & ſimul vtraque illa eadem 1. magnitudine maior eſt data, quàm in ratione. Sin autem, ſimul vtraque magnitudo eadem 2. magnitudine maior fuerit data, quàm in ratione, & reliqua illa eadem, 3. maior erit, data quàm in ratione; aut reliqua 4. data eſt cum conſequente 5. ad quam habet altera magnitudo rationem datam.

NOnnullæ ſunt, huius propoſitionis particulæ diligenter perpendendæ: ad faciliorem ſenſum conſequendum. Numeris 1. 2. 3. habentur particulæ, illa eádem, & numero 2, habetur ſolum particula eadem; quæ, & altera dicitur magnitudo; intelligi debet conſequens rationis propoſitæ. Numero 4. habetur particula reliqua; per quam intelligitur exceſſus,quo antecedens vna,cum data excedit conſequentem rationis propoſitæ. Numero 5 per particulam,cum conſequente, ad quam intelligitur exceſſus, quo conſequens rationis propoſitæ ſuperat antecedens eiuſdem rationis.

In hac autem propoſitione triplex eſt hypotheſis,ad primam, quod attinet. Sit A B magnitudo data; & A C, ſit maior CD, datâ quàm in ratione. Dico A D, maiorem eſſe CD, datâ quàm in ratione. Quoniam AC ſupponitur maior, quàm C D datâ quàm in ratione,& AB data eſt,erit [*] ratio BC ad CD data, & per decimam octauam quinti, ratio BD, ad CD, data eſt, ergo per vndecimam definitionem huius AD, eſt maior CD datâ quàm in ratione. Nam ablata data AB, reliqua BD ad CD habet rationem datam.



Triplex hypotheſis.

* Per 11. definit. huius.

Se-

Secunda hypotheſis. Secunda hypotheſis. Sit AD, magnitudo data, & AG, maior ſit BG, data, quam in ratione ; Dico AB, maiorem eſſe B G, data quàm in ratione. Quoniam ratio D G, ad

A D B E G

a 11. definit. B G, eſt [a] data ; & per decimam ſeptimam quinti ratio D B, ad BG, eſt data ; ergo AB maior erit BG, data quàm in ratione.

Tertia hypoth. Tertia hypotheſis. Sit AE magnitudo data;A G, verò ſit maior BG data quàm in ratione. Dico rationem B G, ad BE eſſe datam. Quoniam ratio E G, ad BG eſt [b] data ; ergo, & ratio B G, ad BE, data erit;per ea quę habentur ad propoſitionem decimam octauam quinti lib. Elementorum.

A D B E G

b 11. definit.

PROPOSITIO XI.

Si magnitudo magnitudine maior ſit data, quàm in ratione, eadem ſimul utraque maior erit data, quàm in ratione. Et ſi eadem ſimul utraque maior ſit data, quàm in ratione, eadem reliqua magnitudine maior erit data, quàm in ratione.

IN hac propoſitione duplex eſt hypotheſis. Ad primam,quod attinet ; Sit A B, magnitudo data, & A E, & maior E G data, quàm in ratione. Dico AE maiorem eſſe BG data, quàm in ratione. Quoniam ratio BE, ad E G, eſt [a] data, ratio verò B E, ad BG, eſt [b] data ; ergo recta A E maior eſt [c] BG data, quàm in ratione.

A D B E G

a 11. definit. huius. b 18. quinti conu. c 11. definit. huius.

Secunda hypotheſis. Secunda hypotheſis. Data ſit magnitudo A B, & AE, maior BG,data,quàm in ratione,Dico AE,maiorem eſſe EG,data quàm in ratione ; Quoniam enim ratio BE, ad BG, eſt [d] data; ratio autem BE, ad EG, eſt [e] data ; ergo A E, erit maior E G, data, quàm in ratione.

A D B E G

d 11. definit. huius. e Per ea quæ ſcribuntur ad 17. quinti.

Vel hunc in modum. Sit magnitudo A E magnitudine, E G maior data quàm in ratione. Dico magnitudinem eandem A E ipſa magnitudine A G, maiorem eſſe datâ, quàm in ratione. Cum enim maguitudo A E, magnitudine E G maior ſit data, quam in ratione, auferatur magnitudo data AB, ut remaneat B E, ergo BE, ad EG, habebit [f] rationẽ datam, quamobrem inuertendo, & componendo &c. data erit ratio BG, ad EG, fiat autem AB, ad BD, in eadeam ratione [g] ut B G, ad E G,propterea data erit ratio AB ad BD, eſt autem data A B, ob id D B data [h] erit, quapropter reliqua A D data eſt, at verò totius AG ad totam D E data eſt ratio, ut enim unum antecedentium ad unum conſequentium, ità omnia antecedentia ad omnia conſequentia, hoc eſt ſicut BG, ad BE, ita AG ad DE,igitur & ipſius ED,ad AG,data ratio erit,eſt autem data AD,ergo AE, ipſa quidem AG maior eſt data quàm in ratione.

f 11. definit. g 4.18 quinti. h 2. huius.

Sit autem AE ipſa AG maior data quàm in ratione. Dico AE reliqua EG maiorem eſſe data quàm in ratione. Cum enim AE maior ſit ipſa AG data quam in ratione, auferatur magnitudo data A D, ob id reliqua D E ad AG data ratio eſt, quamobrem, & ipſius AG ad DE data eſt ratio. Fiat AB ad BD ut AG, ad DE, propterea data erit ratio AB, ad BD;& per conuerſionem rationis data erit [i] etiam ratio AB ad AD,& inuertendo data erit ratio AD, ad AB, data eſt autem AD, igitur tota A B data eſt: quoniam verò totius AG ad totam DE data eſt ratio, quemadmodum, & ipſius A B, ad B D, data ratio eſt ; cum ſit AG ad DE ità ablata AE ad ablatam BD, igitur reliqua EG, ad reliquã B E, erit ut A G, ad DE, eſt autem ipſius A G, ad DE, ratio data, ergo ipſius EG ad BE data ratio erit, & dividendo [k] ipſius EG ad BE data ratio erit, quamobrẽ, & ipſius BEad EG data ratio erit, eſt autem data A B, igitur AE, ipſa EG maior eſt [l] data, quàm in ratione.

i corol. quinti. k 17. quinti. l 11. definit. huius.

PROPOSITIO XII.

Si fuerint tres magnitudines, & prima quidem, cum ſecunda data ſit ſecunda quoquè cum tertia data ſit, aut prima tertia æqualis eſt, aut altera altera maior data.

SInt tres magnitudines AD, DB, BG, & quidem AD cum DB data ſit, ut A B; item D B, cum B G, data ſit, ut D G. Dico, vel AD, æqualem eſſe BG, vel alteram altera maiorem eſſe datâ. Supponamus primò primam cum ſecunda,nempe AB æqualẽ eſſe ſecundæ, cum tertia, nimirum D G illico perſpicuum eſt A D æqualem eſſe BG; ablatâ ſiquidem communi D B remanebunt AD, BG

A D B G

inter

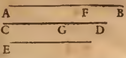
inter ſe æquales.

Supponamus ſecundò AB, maiorem eſſe DG; cum itaq; A B, & DG datæ ſint, ſequitur per quartam huius, differentiam inter A B, & D G datam eſſe; at verò ſi ab inæqualibus A B, D G auferatur communis D B atque adeo auferantur æqualia; reſiduorum A D, B G idem erit exceſſus, ac totarum AB, DG, nempe DB, ſed hic eſt [a] datus; ergo, & reſiduorum A D, BG exceſſus ſiue differentia data erit, quamobrem ſequitur [b] alteram alterâ maiorem eſſe datâ.

a 4 huius.
b 2. huius.

PROPOSITIO XIII.

Si fuerint tres magnitudines, & earum prima ad ſecundam habeat rationem datam, ſecunda autem tertia maior ſit, data, quàm in ratione, prima quoque maior erit tertia, data, quàm in ratione.

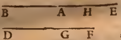


SInt tres magnitudines AB, CD, & E; ſitque data proportio magnitudinis AB, ad magnitudinem CD; præterea magnitudo CD, maior ſit magnitudine E, data, quàm in ratione, Dico magnitudinem AB, maiorem eſſe E magnitudine, data, quàm in ratione. Supponamus datam DG; fiat autem vt DC, ad CG, ita AB, ad AF. Quoniam igitur eſt vt DC, ad GC, ita BA, ad FA erit [a] vt DC, ad BA, ita GC, ad FA, & conſequenter, vt DC, ad BA, ita erit [b] DG, ad BF, ſed ex hypoteſi DG, data eſt; ergo, & B F, per ſecundam huius data erit, [c] eſt autem ex hypoteſi data proportio AB ad CD, & erat, vt DC, ad BA, ita GC, ad FA erit igitur, vt FA, ad GC, ita AB, ad CD; ratio igitur FA, ad G C, data erit; [d] ex hypoteſi verò data eſt ratio GC, ad E ergo data erit [e] ratio FA, ad E; concluſimus autem ſupra BF datam eſſe, ergo A B maior erit E data quàm in ratione.

a 16. quinti.
b 19 quinti.
c 2. huius.
d 2. def huius.
e Per eſtiua 2 huius.

PROPOSITIO XIIII.

Si duæ magnitudines ad inuicem habeant rationem datam, vtrique autem illarum adjciatur data magnitudo tota, ad inuicem, aut habebunt rationem datam, aut altera altera maior erit data, quàm in ratione.

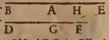


DAtæ ſint duæ magnitudines, A E, G F; dataque ſit ratio, vt A B, ad G D. Dico, vel B E, ad D F rationem, habere datam; vel BE, maiorem eſſe magnitudine DF, data, quàm in ratione. Supponamus primò eſſe, vt AB, ad GD ita AE, ad G F; erit [a] vt B E, ad D F, ita A B, ad G D; eſt autem ex hipotheſi data ratio A B, ad G D, ergo ratio BE, ad GF, data erit. [b] Secundò ſupponamus eſſe, vt A B, ad G D, ita A H, ad G F erit [c] vt BH ad D F, ita A B, ad G D; at verò ex hypotheſi data eſt ratio A B ad GD, eſtque [d] data ratio B H, ad D F; inſuper data eſt [e] A H, eo quod ſuppoſitum ſit eſſe, vt AB, ad GD, ita AH, ad G F, quæ data erat, ergo data eſt [f] HE; quamobrem magnitudo BE maior [g] erit magnitudine DF datâ quàm in ratione.

a 12. quinti.
b 2. definit. huius.
c 12. quinti.
d Per ſecundã definit. huius.
e 2. huius.
f 4. huius.
g Per 11. defin. huius.

PROPOSITIO XV.

Si duæ magnitudines habeant, ad inuicem rationem datam, & ab vtraque earum auferatur data magnitudo: reliquæ magnitudines, ad inuicem habebunt, aut rationem datam, aut altera, altera maior erit, data, quàm in ratione.



DAtæ ſint duæ magnitudines E H; F G, ſitque pariter data ratio B E; ad D F; Dico rationem B H, ad D G, vel eſſe datam vel B H maiorem eſſe D G datâ quàm in ratione.

Supponamus primò, vt BE, ad DF, ita eſſe EH, ad FG ergo erit [a] vt BH ad DG, ita BE, ad DF, at verò ex hypotheſi ratio BE, ad DF, eſt data, ergo ratio BH, ad DG, erit [b] quoq; data.

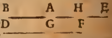
a 19 quinti.
b 2. huius.

c 19. quinti. d 2. huius. e 2. huius. f Per 4. huius.

Supponamus ſecundò, vt BE, ad DF, ita eſſe EA, ad GF; ergo erit [c] AB, ad GD, vt BE [c] ad D F, at verò ex hypotheſi, data eſt ratio B E, ad D F, eſtque [d] data ratio A B, ad GD, & inſuper eſt [e] data E A, cum ſupponeremus eſſe, vt B E, ad D F, ita E A, ad G F, ex hypotheſi quoque data eſt E H, & præterea eſt [f] data HA, ergo per vndecimam definitionem huius BH maior erit DG, datâ quàm in ratione,

PROPOSITIO XVI.

Si duæ magnitudines, ad inuicem habeant rationem datam; & ab vna quidem illarum auferatur data magnitudo, alteri autem ipſarum adyciatur data magnitudo, tota reſidua magnitudine maior erit, data quàm in ratione.



a 12. ſexti. b 2. huius. c 3. huius. d coroll. 4. & 19. quinti. e 2. definit. huius f 12. definit. huius.

DAtæ ſint duæ magnitudines HE, GF; data quoq; ſit ratio BH, ad DF. Dico BE maiorem eſſe DG, data quàm in ratione. Fiat [a] vt D F, ad BH, ita G F, ad A H. Quoniam igitur ex hypotheſi data eſt GF, & præterea data [b] eſt A H; ſiquidem fecimus, vt DF, ad B H, ita G F, ad A H, & quoniam data eſt HE ex hypotheſi; erit & [c] AE, quoque data; quoniam autem eſt, vt DF, ad BH, ita GF, ad AH erit [d] & BH, ad DF, vt BA; ad DG; ſupponebamus autem rationem BH, ad DF, datam eſſe, eſtque [e] data ratio B A, ad DG, ſiquidem ei datur eadem BH, ad DF dicebamus etiam datam eſſe AE, ergo erit [f] B E, maior D G, datâ quam in ratione.

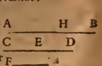
Vel ſic

g 1. huius. h 12. ſexti. i 2. def huius. k 2. huius. l 3. huius. m 19. quinti. n 11. definit. huius.

Datæ ſint magnitudines H B, FD, quæ neceſſariò habebunt [g] rationem datam, & ex F D auferatur data magnitudo G F, & magnitudini H B addatur data magnitudo H E. Dico totam E B reliqua G D maiorem eſſe data, quàm in ratione. Quandoquidem ratio ipſius H B ad FD data eſt, fiat [h] vt H B ad FD, ita A H ad F G, ergo ratio ipſius A H ad F G data erit, [i] eſt autem data FG, igitur A H data erit, [k] eſt autem EH data igitur tota E A data eſt: [l] Et quia eſt vt H B ad F D, ita A H ad F G, ergo reſidua A B ad reſiduam G D rationem habebit [m] datam, eſt antem A E data magnitudo, igitur magnitudo EB magnitudine G D maior eſt, [n] datâ quam in ratione.

PROPOSITIO XVII.

Si fuerint tres magnitudines, & prima quidem, ſecunda maior ſit data quam in ratione; tertia quoque eadem ſecunda maior ſit data quàm in ratione; prima ad tertiam, aut rationem habebit datam; aut altera, altera maior erit data, quàm in ratione.

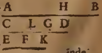


a 11. definit. huius. b 11. definit. huius. c 8. propoſit. huius.

SInt datæ magnitudines BH, & DE, & AB ſit maior F data: quàm in ratione, CD, verò F, maior datâ quàm in ratione. Dico rationem A B, ad C D eſſe datam; vel A B, maiorem eſſe C D, data quàm in ratione. Quoniam ratio AH ad F eſt data; [a] namq; ſupponitur AB maior F datâ quàm in ratione, at verò HB ſupponitur data, ergo ſi hæc auferatur reliqua A H ad ipſam F habebit rationem datam. & ratio CE ad F, eſt data ob eandem rationẽ; & ratio AH, ad CE, pariter data [c] eſt; ergo, vel ratio AB, ad CD, eſt data, vel A B, eſt maior CD datâ quàm in ratione per 14. propoſitionem huius.

PROPOSITIO XIIX.

Si fuerint tres magnitudines, atq; ex his vna vtraque reliquarum maior ſit, data, quàm in ratione reliqua duæ, aut datam rationem habebunt ad inuicem, aut altera, altera maior erit data quàm in ratione.



a 12. propoſit. ſexti.

DAtæ ſint magnitudines DG, & DL, at CD, maior ſit A B, datâ quàm in ratione C D, maior E F data quàm in ratione. Dico rationem AB, ad EF eſſe datam, vel AB maiorem eſſe EF data quàm in ratione; fiat [a] vt ratio CG, ad AB, ita GD, ad BH, & de-

inde,

inde, vt CL, ad EF ita LD ad FK. Quoniam enim eſt, [b] vt C G, ad A B, ita C D, ad A H, ſiquidem, vt CG, ad A B, ita ex cõſtructione eſt G D, ad BH; ratio verò C G, ad A B, [c] eſt data, ratio ergo CD, ad AH, erit [d] data; ratio verò GD, ad B H, eſt [e] data; ſiquidem, vt CG ad AB, ita GD, ad BH ex conſtructione, & ratio CG, ad AB, eſt data; at verò G D, eſt ex hypoteſi data, ergo BH erit, [f] data; cũq; vt CL, ad EF ita ſit LD ad F K; deturq; L D, ergo FK dabitur; itẽ ratio C D, ad E K, data eſt, ratio autem AH, ad EK per 8. huius eſt data. ſiquidem ratio CD, ad E K, & CD, ad AH, eſt data, ergo AB maior erit EF data quàm in ratione; Vel ratio AB ad EF, eſt data per 15. huius.

b 12. quinti.
c 1. def. huius.
d 2. def. huius.
e 2. def. huius.
f 2. huius.

Vel ſic

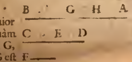
Sint tres magnitudines AB, CD, EF, ex his vna, quæ ſit C D, vtraque reliquarum AB, EF maior ſit, data quàm in ratione. Dico vtramque magnitudinum AB, EF aut ad inuicem habere rationem datam, aut alteram alterà maiorem eſſe data, quam in ratione. Quandoquidem magnitudo CD, magnitudine AB maior eſt, data quam in ratione, auferatur data magnitudo DG, ergo reliquæ GC ad A B data ratio eſt. [g] Fiat autem vt GC ad AB, ità DG ad BH; ergo ratio ipſius GD ad BH data eſt. Eſt autem G D data, igitur BH data eſt; [h] & propterea [i] totius DC ad totam HA data ratio eſt.

Deinde cum D C ipsà F E maior ſit, data quàm in ratione, auferatur data magnitudo DL, ergo reliquæ LC, ad FE data eſt [k] ratio; Fiat autem vt LC ad FE, ità DL, ad KF, igitur ipſius DL, ad KF data ratio eſt; data eſt autem DL, igitur K F data eſt, [l] propterea [m] totius DC ad totam KE data ratio eſt. Ipſius autem DC, ad HA data ratio eſt, igitur, ipſius HA, ad KE data ratio eſt. [n] Sunt autem ablatæ ab ipſis datæ magnitudines HB, KF, igitur A B, ad FE, aut ad inuicem [o] habent rationem datam, aut altera, altera maior erit; data, quam in ratione.

g 11. definit. huius.
h 2. huius.
i 12. quinti.
k 11. definit. huius.
l 2. huius.
m 12. quinti.
n 8. huius.
o 15. huius.

PROPOSITIO XIX.

Si fuerint tres magnitudines, & prima quidem magnitudo, ſecunda magnitudine, maior, data quàm in ratione ſit quoque ſecunda maior tertia, data, quàm in ratione; prima magnitudo, tertia magnitudine, maior erit data quàm in ratione.

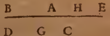


Datæ ſint magnitudines HA, E D; At verò AB, ſit maior D C, data quàm in ratione, D C, maior F datà, quàm in ratione, fiat per 12. ſexti vt C D, ad B H, ita D E, ad H G, Quoniam DE eſt data ex hypotheſi; ratio verò DE ad HG eſt [a] data, cum ſit vt CD, ad BH, ita DE, ad HG, & G H erit [b] data; ex hypotheſi A H eſt data; Et A G erit [c] data; eſt [d] verò eadem ratio H G, ad D E, & BH, ad C D, cum ſit vt C D, ad B H ita D E, ad H G, ita ergo erit, [e] vt G B, ad E C, ita BH, ad CD; At verò ratio BH, ad CD eſt [f] data, & ratio GB, ad EC erit [g] data, ratio autem F, ad EC, eſt [h] quoque data, ergo ratio G B, ad F, erit [i] data proinde ratio A B, ad F, maior erit [k] data, quàm in ratione; per 11. defin. huius, cum AG ſit oſtenſa data.

a 2. def. huius.
b 2. huius.
c 3. huius.
d Corol. 4. 5.
e 19. quinti.
f 11. definit. huius.
g 2. definit. huius.
h 11. definit. huius.
i 8. huius.
k 11. definit. huius.

PROPOSITIO XX.

Si datæ, duæ, fuerint magnitudines, & auferantur ab ipſis magnitudines habentes, ad inuicem rationem datam, reſiduæ magnitudines, aut habebunt ad inuicem rationem datam, aut altera, altera maior erit, data, quàm in ratione.



Datæ ſint B E, D C, & ratio H E, ad G C, ſit data. Dico rationem BH, ad DG, eſſe datam, vel BH maiorem eſſe DG data, quàm in ratione. Primò ſupponatur, vt HE, ad GC, ita eſſe BE, ad DC, Proinde, vt B H, ad D G, ita eſt [a] HE, ad G C, ex hypotheſi verò ratio HE, ad GC eſt data; ergo ratio BH, ad D G erit [b] data.

Secundò ſupponatur vt HE, ad GC, ita eſſe AE, ad DC, ex hypoth. ratio HE, ad GC, eſt data, & ratio AE, ad DC, erit [c] data; ex hypotheſi verò DC, eſt data ergo, & AE eſt [d] da-

a 19. quinti.
b 2. def. huius.
c 2. def. huius.
d 2. huius.

e 4. huius. f 19. quinti. g 2. Datorũ. h 11. definit. datorum.

ta, ex hypotheſi autem BE eſt data,& AB erit e data,vt autem HE ad GC, ita eſt ex ſuppoſitione AE, ad DC quare erit f vt AH,ad DG ita H E, ad GC eritque g ratio A H, ad D G data,cùm ratio HE,ad GC, ſit data; proinde BH. maior h erit DG datá quàm in ratione, quandoquidem AB, eſt oſtenſa data.

PROPOSITIO XXI.

Si fuerint duæ magnitudines datæ, & adyciantur ipſis aliæ magnitudines habentes,ad inuicem rationem datam, totæ, aut habebunt ad inuicem rationem datam, aut altera, altera maior erit data, quàm in ratione.

B A H E

D G C

a 12. quinti. b 2. definit. datorum. c 2.def.huius d 2.datorum. e 4.datorum f 12 quinti. g 2. datorũ.

DAtæ ſint HB, GD, ratio verò HE,ad GC ſit data. Dico rationem BE, ad DC eſſe datam; vel BE maiorem eſſe DC, datà quàm in ratione. Supponatur primò, vt HE, ad GC, ita eſſe HB, ad GD erit, a vt BE, ad D C,ità HE, ad GC, ratio verò HE, ad GC eſt data ex hypotheſi, ergo ratio, BE, ad DC erit b dat a.

Secundò ſupponatur, vt HE, ad GC, ita eſſe HA, ad GD, erit c HA,ad GD, ratio data, at GD ex hypotheſi eſt data;itaq;HA erit d data;at HB ex hypotheſi eſt data,ergo e AB erit data;ſed ex ſuppoſitione ſecũda,vt HE,ad GC,ita eſt HA,ad GD ergo erit,f vt AE,ad DC, ita HE,ad GC,at ratio HE,ad GC,ex hypotheſi eſt data; ratio igitur AE,ad DC erit g data ergo B E, maior erit D C data, quàm in ratione. Per 11. definit.Datorum;quandoquidem A B demonſtrauimus datam.

PROPOSITIO XXII.

Si duæ magnitudines ad aliam aliquam magnitudinem habeant rationem datam, & ſimul vtraque ad eandem habebit rationem datam.

D E F A

a 2 Datorũ. b 6. datorum. c 8 datorum.

DAta ſit ratio DE ad A,& ratio EF,ad A, ſit pariter data. Dico rationem DF ad A eſſe pariter datam. Quoniam ratio DE, ad EF, eſt data, cum ratio DE ad A, & EF, ad A ſit data per 8. Datorum, ſiue huius; ratio verò D F, ad E F eſt b data; & ex hypotheſi ratio E F, ad A eſt data,ergo ratio DF ad A eſt c quoque data.

PROPOSITIO XXIII.

Si totum ad totum habeat rationem datam,habeant autem,& partes ad partes rationes datas, etſi non eaſdem, habebunt omnia, ad omnia rationes datas.

E H A B

C G D

a 12 ſexti. b coroll. 4. quinti. c 19. quinti. d 2. definit. huius. e 8 huius. f 5 huius. g coroll. 4. quinti. h 8.huius. i 6. huius. k 8. huius. l 5. huius. m 8 huius. n 8. huius.

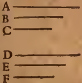
DAta ſit ratio E B, ad CD item ratio EH, ad C G, demum ratio H B, ad G D. Dico rationes EH ad H B, & HB, ad C G, & C G adG D, eſſe datas. Fiat a ut CG, ad E H, ita C D, ad E A. Quoniam igitur eſt, ut EH,ad C G,ita b EA, ad CD, erit c ut GA, ad HD ita EH,ad CG; cum enim ſit, ut tota E A, ad totam C D, ita ablata E H, ad ablatam C G, erit per 19. quinti, reliqua H A, ad reliquam G D, ut tota E A, ad totam C D, & conſequenter, ut E H, ad C G, at verò ex hypotheſi ratio E H, ad C G eſt data; item ratio H A, ad G D eſt d data, ratio verò, H B, ad G D ex hypotheſi data eſt, proinde ratio H B, ad H A, erit e data; hinc verò ſequitur f rationem H B, ad A B datam eſſe; at verò ex hypotheſi data quidẽ eſt ratio EB, ad CD,quemadmodum etiam ratio EA, ad CD eſt g data,quandoquidem, ut E H, ad C G, ita eſt EA, ad CD per coroll. quartæ,Quinti; cum ut C G, ad EH, ita facta ſit CD, ad E A; quamobrem ratio E A, ad EB data h erit; atque adeo ratio EB, ad AB erit i data. Demonſtrauimus autem rationem H B, ad A B datam eſſe, ergo ratio E B, ad H B, erit k data, proinde ratio E B, ad E H erit l data, & inſuper ratio EH, ad HB, data erit m cumque data ſit ex hypotheſi ratio E H, ad CG ſequitur n proinde rationem H B, ad C G datam eſſe; eſt autem ex hypotheſi data ratio H B ad

ad G D ergo per 8. huius data erit ratio C G ad G D, quare omnia ad omnia habebunt rationem datam.

PROPOSITIO XXIV.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; prima autem, ad tertiam habeat rationem datam, & ad ſecundam habebit rationem datam.

VT A, ad B, ita ſit B, ad C, ratio A, ad C, ſit data. Dico rationem A, ad B eſſe datam. Quoniam ratio A, ad C ex hypotheſi eſt data, ut verò A, ad C ita [a] quadratum ex A, ad rectangulum ſub A, & C ergo ratio quadrati ex A, ad rectangulum ſub A, & C erit [b] data; ſed quadratum ex B, eſt [c] æquale rectangulo ſub A, & C ergò ratio quadrati ex A, ad quadratum ex B, erit [d] data, ergo ratio A, ad B, erit quoque data. Sic breuiùs, quàm in textu, &c.

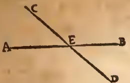


a prima ſexti.
b 1. huius.
c 17 ſexti.
d 7. quinti.
e · l

PROPOSITIO XXV.

Si duæ rectæ poſitione datæ, ſe mutuo inuicem ſecuerint, punctum in quo ſe inuicem ſecant poſitione datum eſt.

SInt duæ lineæ poſitione datæ A B, C D, quæ ſe inuicem ſecent in puncto E, Dico datum eſſe punctum E ſi namque punctum E, diuerſas poſſet habere poſitiones, neceſſe foret ſaltem, & rectarum alteram A B, C D diuerſas habere poſitiones, quod contra hypotheſin eſt, ergo datum, eſt punctum E, Quod oportebat, &c.



SCHOLION.

NOn diſsimili arte oſtendetur punctum interſectionis cuiuſcumque binarum linearum poſitione datarum; ſiue nempe utraque ſit recta, ſiue vna recta, altera curua, & in vno tantum puncto, ſe mutuo ſecantium, eſſe datum, &c.

PROPOSITIO XXVI.

Si lineæ rectæ extremitates poſitione datæ ſint, recta poſitione, & magnitudine data eſt.

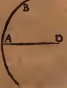
DAta ſint puncta A, & B, poſitione. Dico A B, eſſe datam poſitione, & magnitudine Data eſt A B, poſitione, & magnitudine; namque manente A, ſi intercidet rectæ lineæ, aut poſitio, aut magnitudo, intercid extremum B, Quod eſt abſurdum; non enim intercidit.



PROPOSITIO XXVII.

Si data recta linea poſitione, & magnitudine, data fuerit vna extremitas, & altera extremitas data erit.

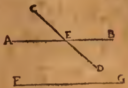
DAta ſit linea D A, & D eſt punctum datum. Dico punctum A eſſe datum. Fiat [a] circulus D A B, Quoniam ſemicirculus A D, eſt [b] poſitione datus; eſt verò D A, data ex hypotheſi ergo punctum A erit [c] datum.



a 3. petitio primi.
b 6. definitio Datorum.
c Scholium. 25. Datorum.

PROPOSITIO XXVIII.

Si per datum punctum contra datam poſitione rectam agatur recta linea; acta recta poſitione data eſt.



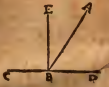
DAtum ſit punctum E ſitque F G linea recta data poſitione, & AEB, ſit parallela rectæ F G. Dico AB eſſe datam poſitione, Supponamus C E D eſſe parallelam ipſi FG, ex dato enim id quidem ſupponendũ, cum manente puncto E poſitio ipſius AEB, quæ parallela ex hypotheſi eſt ipſi FG alibi cadere dicatur, puta in
a 30. primi. CED, ex hypotheſi vero AB eſt parallela rectę FG eſt [a] ergo CD parallela rectæ A B, contra 34. primi definitionem, ergo erit AB data poſitione,

Vel ſic

Per datum punctum E contra datam poſitione rectam FG agatur recta AEB. Dico poſitione datam eſſe lineam A E B Si enim data non ſit, manente puncto E alibi cadet rectæ
b 11. axioma primi. AEB poſitio. Alibi iam cadat manente FG parallela, eaque eſto CED, ergo parallela eſt FG ipſi CED, ſed FG ipſi AEB eſt parallela, igitur AEB ipſi CED parallela erit & ſimul coincidet, quod eſt, abſurdum. Quamobrem poſitio rectæ AEB alibi non cadit, ac proinde recta AEB poſitione data eſt.

PROPOSITIO XXIX.

Si ad poſitione datam rectam, datumque in ea punctum agatur recta linea, quæ faciat angulum datum, acta linea poſitione data eſt.



DAta ſit CD recta linea poſitione, datumque ſit B punctum, ſitque angulus ABD datus. Dico A B, eſſe datam poſitione. Supponamus angulum DBE, æqualem eſſe angulo dato, at ex hypotheſi angulus DBA, æqualis eſt an-
a 1 axioma primi. gulo dato, ergo angulus D B E erit [a] æqualis angulo DBA
b 11. axioma primi. contra nonum axioma primi, ergo BA eſt [b] poſitione data.

Vel ſic

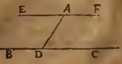
Ad datam poſitione rectam CD, & datum in ea punctum B agatur linea A B, quæ faciat angulum datum DBA. Dico poſitione datam eſſe rectam B A. Quandoquidem ſi poſitione data non ſit, manente puncto B alibi cadet poſitio rectæ BA, ſeruans anguli DBA magnitudinem. Cadat alibi, & eſto B E. Igitur angulus DBA angulo DBE æqualis eſt maior minori, quod eſt abſurdum. Igitur poſitio rectæ A B non cadet alibi. Quamobrem data erit recta AB poſitione.

SCHOLION.

In ipſa propoſitione partes, ad quas angulus datus eſt conſtitutus, debent eſſe datæ.

PROPOSITIO XXX.

Si, à dato puncto in datam poſitione rectam agatur recta linea, quæ faciat angulum datum, acta linea poſitione data eſt.



DAta ſit recta poſitione BC ſitque A punctum datum, & ADC, ſit angulus datus. Dico AD eſſe datam po-
a 31. primi. ſitione, Fiat EAF parallela rectæ B C. Quoniam B C, eſt recta data poſitione ex hypotheſi, & per conſtructionem
b 28. Datorũ EF eſt parallela rectæ BC ergo erit E F, data poſitione; at verò ex hypotheſi angulus ADC, eſt datus, & angulus DAE
c 29 primi. d 2. deſinit. Datorum. eſt [c] æqualis angulo ADC, erit [d] ergo angulus DAE, datus, at punctum A ex hypotheſi

eſt

eſt datum, ob id AD eſt [e] data poſitione. e 29. huius.

PROPOSITIO XXXI.

Si à dato puncto in datam poſitione rectam, data magnitudine recta ducatur, poſitione quoque data erit.



DAtum ſit punctum C, & AB ſit recta data poſitione; CE, ſit recta data magnitudine. Dico CE eſſe datam poſitione. Fiat [a] circulus CEF. Quoniam ſegmentum circuli EDF eſt [b] datum poſitione, ſiquidem eius centrum C poſitione datum eſt, & quæ ex centro eſt linea CE magnitudine eſt data, & ex hypotheſi AB, eſt recta data poſitione; ergo E, & F erunt [c] puncta data poſitione, ſiquidem duæ lineæ poſitione datæ, ſi ſe invicem ſecent poſitione datur punctum interſectionis; ergo CE, & CF, ſunt [d] rectæ datæ poſitione.

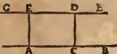
a 3. petitio primi.
b 6. defin. huius.
c Schol. 25. huius.
d 26. huius.

S C H O L I O N.

Si data linea ſit maior perpendiculari CG, non erit data poſitione, niſi præſcribatur, ad quam partem perpendicularis CG ducenda ſit; cum enim CF ſit aqualis CE data recta poterit habere duplicem poſitionem.

PROPOSITIO XXXII.

Si in datas poſitione parallelas rectas, agatur recta linea, qua faciat angulos datos; acta recta magnitudine data eſt.

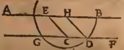


DAtæ ſint poſitione AB, & GF, & AB, & GF ſint parallelæ; ſintque BAE, & AEF, anguli dati. Dico AE eſſe datam magnitudine. Detur punctum C, utcumque in recta AB; fiat [a] autem angulus BCD, æqualis angulo CAE. Quoniam autem per conſtructionem angulus BCD eſt æqualis angulo BAE, & CD eſt [b] parallela rectæ AE, ex hypotheſi verò angulus BAE, datus eſt, ergo angulus BCD erit [c] datus; at AB ex hypotheſi data eſt poſitione, punctumque C per conſtructionem datum eſt, ergo CD eſt [d] poſitione data; at ex hypotheſi GF, eſt poſitione data; ergo punctum D, eſt [e] datum; proinde CD datam eſſe [f] magnitudine neceſſe eſt; cumque AE ſit [g] æqualis CD; ſequitu per primam definitionem huius rectam AE magnitudine datam eſſe.

a 23. primi.
b 29. primi.
c 1. defin. huius.
d 19. huius.
e 25. huius.
f 26. huius.
g 34. primi.

PROPOSITIO XXXIII.

Si in datas poſitione parallelas rectas agatur magnitudine data recta, faciet angulos datos.



DAtæ ſint poſitione AB, & GF, & AB ſit parallela rectæ GF, & EC ſit magnitudine data. Dico angulos BEC; ECF eſſe datos. In recta AB, detur quodcunque punctum H; atque fiat [a] HD parallela rectæ EC; & deſcribatur [b] circulus HBDG, ex centro H. Quoniam igitur HD, & EC ſunt [c] inter ſe æquales, eſt autem ex hypotheſi recta EC data magnitudine erit [d] proinde HD, magnitudine quoque data; at verò per conſtructionem datum eſt punctum H, proinde circumferentiæ pars GDB, erit [e] poſitione data; at verò GF eſt ex hypotheſi poſitione data, ergo punctum D, erit [f] datum poſitione; quamobrem & HD, erit [g] poſitione data; at verò GF, data eſt ex hypotheſi poſitione, angulus igitur, HDF, erit [h] datus; at verò angulus ECF eſt [i] æqualis angulo HDF, ergo angulus ECF, erit [k] datus; quamobrem angulus CEB erit [l] pariter datus.

a 31. primi.
b 3. petitio primi.
c 34. primi.
d 1. definitio huius.
e 6. definit. huius.
f 25. huius.
g 26. huius.
h 5. 4. def. huius.
i 29 primi.
k 1 def. huius.
l 29. primi, & 4. huius.

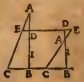
SCHO-

SCOLION.

Rectè demum infertur, angulum CEB datum eſſe; propterea quod, cum AB, GF ex hypotheſi ſint parallelæ; anguli verò FCE, BEC ſimul ſumpti æquales erunt duobus rectis; ſi itaque ab his auferatur angulus datus E C F, remanebit angulus C E B pariter datus per quartam propoſitionem huius.

PROPOSITIO XXXIV.

Si in datas poſitione parallelas rectas, à dato puncto agatur linea recta, ſecabitur data ratione.

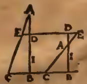


DAtæ ſint poſitione E D, C B; & E D ſit parallela rectæ C B; at verò punctum A ſit datum, & A E C recta ducta ſit. Dico rationem AE, ad EC datam eſſe; Fiat ADB perpendicularis, ad CB. Quoniã igitur ADB, eſt [a] data, nam a dato puncto A ad poſitione datam rectam C B, recta A B acta eſt, quę facit angulum A B C datum, & E D, C B, ſunt ex hypotheſi datæ poſitione, puncta igitur D, & B erunt [b] data; at verò ex hypotheſi datum eſt punctum A ergo, AD & D B erunt [c] datæ, poſitione, & magnitudine; ratio autem A D, ad BD data erit [d] at verò, ut eſt AD, ad D B ita quoque eſt [e] AE ad EC; proinde ratio A E, ad EC data erit per 2. definit. huius.

a 30. huius.
b 25. huius.
c 26. huius.
d 1. definit. huius.
e 2. et 4 ſexti.
f 3. def. huius

PROPOSITIO XXXV.

Si à dato puncto, in datam poſitione rectam agatur recta linea, ſecetur q; data ratione, agatur autem per punctum ſectionis contra datam poſitione rectam, recta linea; acta linea poſitione data eſt.



DAtum ſit punctum A, & C B data ſit recta poſitione; ratio verò AE, ad EC ſit data; & E D, ſit parallela rectæ C B. Dico ED eſſe datam poſitione; fiat [a] A D B perpendicularis ad C B; Quoniam A D B, eſt [b] data poſitione, & CB, ex hypotheſi eſt poſitione data; punctum B erit [c] datum. punctum verò A ex hypotheſi eſt datum; ergo AB, eſt [d] data poſitione &c.; ut autem AE, ad EC ita eſt [e] A D, ad D B, ratio autem AE, ad EC eſt ex hypotheſi data; ergo ratio AD, ad D B, eſt [f] data, ratio autem AB, ad AD eſt [g] data, & A B eſt data, ut oſtendimus magnitudine, ergo & AD eſt [h] data magnitudine, & AD eſt [i] data poſitione, cadit enim in E D parallelam rectæ CB faciens angulum ADE æqualem angulo ABC recto, atque adeò dato, unde datus eſt angulus A D E, quare A D cadens in E D a dato puncto A facit angulum datum, unde A D erit, poſitione data; & ex hypopotheſi punctum A eſt datum; ergo punctum D eſt [k] datum; proinde E D, eſt [l] data poſitione; quandoquidem E D, CB ſunt ex hypotheſi parallelæ. Quod erat oſtendendum.

a 12 primi.
b 30 huius.
c 25 huius.
d 26. huius.
e 2. et 4. ſexti.
f 2. def huius.
g 17. 18. quinti.
h 2. huius.
i 30 huius.
k 27 huius.
l 28. huius.

PROPOSITIO XXXVI.

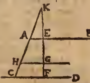
Si à dato puncto in datam poſitione rectam lineam agatur recta linea, adjciatur autem ipſi aliqua recta, quæ ad illam habeat rationem datam per extremitatem autem adiectæ linea agatur contra datam poſitione rectam, linea recta: acta linea poſitione data eſt.

PVnctum A ſit datum, C B ſit recta poſitione data, & A C, ſit linea recta, & C A E ſit recta, ratioq; A E, ad A C, ſit data; E D verò ſit parallela rectæ C B. Dico E D, eſſe datam poſitione. Huius propoſitionis demonſtratio diſſimilis non eſt ei, qua vſi ſumus, ad oſtendendam propoſitionem antecedentem; ſolùm autem illud eſt obſeruandum, nimirum loco primæ figuræ adhibendam eſſe ſecundam.

PRO-

PROPOSITIO XXXVII.

Si in datas poſitione parallelas rectas, agatur recta linea, & ſecetur ratione data, agatur autem per ſectionis punctum contra datas poſitione rectas, linea recta; acta recta linea poſitione data eſt.



DAtæ ſint poſitione AB, CD, & rectæ AB, CD ſint parallelæ; ratio verò AH, ad HC, ſit data, & HG ſit parallela rectæ AB, vel CD, Dico HG eſſe datam poſitione.

Primò ſi AC, EF, non ſint parallelæ, ſed coeuntes ad partes AE, ita; Sit punctum E, ut cunque datum in AB, fiat [a] EF, ad CD perpendicularis. Quoniam AC, & EF, non ſunt parallelæ, & K eſt puncti interſectionis; In hac enim hypotheſi [b] ſupponuntur CA, & FE non parallelæ, ſed coeuntes protractæ ad punctum K, recta EF erit [c] data poſitione, at verò ex hypotheſi CD eſt data poſitione; ergo punctum F eſt [d] datum; at verò punctum E eſt datum, cùm factum ſit arbitrarium in AB, & EF erit [e] data magnitudine; ut autem CH, ad HK, ita eſt [f] FG ad GK, & ut HK, ad AK, ita eſt [g] GK, ad EK; & vt AK, ad HA ita eſt [h] EK ad EG, ergo, vt CH, ad HA, ita eſt [i] FG, ad GE, ratio verò CH, ad HA, eſt ex hypotheſi data; ergo ratio FG, ad GE erit [k] data; at verò FE eſt [l] data, vt oſtenſum eſt ſupra, & FG, GE, erunt [m] datæ; & præterea FE eſt [n] data poſitione; at punctum E eſt datum arbitrarium; ergo Punctum G erit [o] datum, qua propter HG eſt data poſitione per 28. huius.

a 31. primi.
b ex hypoth.
c 30. huius.
d 25. huius.
e 26. huius.
f 2. ſexti.
g Corol. 4. 6.
h 2. ſexti.
i 22. quinti.
k 2. huius.
l 27 huius.
m 7. huius.
n 30. huius.
o 25. huius.

Quòd ſi AC, EF forent parallelæ ſic procederet demonſtratio. Quoniam igitur AC, EF ſunt parallelæ; ex hypotheſi verò parallelæ ſunt lineæ AE, CF, propterea ACFE erit parallelogrammum, quamobrem latus AC lateri EF æquale erit, Rurſus cùm ſint parallelæ rectæ HG, CF, ex hypotheſi; & ſint etiam parallelæ HC, GF, erit & HF parallelogrammum, ideoque latus HC lateri GF æquale erit; quam ob rem æquales AC, EF ad æquales HC, GF eandem habebunt rationem, atque ad eo, vt AC ad CH, ita EF ad GF, & diuidendo vt AH ad HC, ità EG ad GF, &c. eſt autē data ratio CH ad HA, ergo & ratio FG ad GE data erit, at verò FE eſt data, vt oſtenſum eſt ſupra, & FG, GE erunt datæ, & præterea FE eſt data poſitione, at punctum E eſt datum arbitrarium, & punctum G eſt datum, quapropter HG eſt data poſitione per 28. huius.

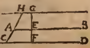
COROLLARIVM.

Ex his infertur per modum corollarij; recta s CF, HG, AE eſſe inter ſe parallelas; nam vt CH, ad HA, ita FG, ad GE, quandoquidem erat, ut CH, ad HA, ita FG, ad GE, ut ſupra oſtendimus.

PROPOSITIO XXXVIII.

Si in datas poſitione parallelas rectas, agatur recta linea; adijciatur autem ipſi quædam recta, quæ, ad illam quæ acta eſt habeat rationem datam, per extremitatem autem adiectæ agatur contra datas poſitione parallelas recta linea; acta recta linea, eſt data poſitione.

DAtæ ſint poſitione AB, CD, & eædem AB, & CD ſint parallelæ; ratio HA, ad AC ſit data; & HG ipſi AB, vel CD, ſit parallela. Dico HG eſſe poſitione datam. Datum ſit punctum E, arbitrarium in recta AB, & [a] fiat EF perpendicularis ipſi CD, protrahatur autem FE uſque ad G [b] Quoniam EF eſt [c] data poſitione; & CD eſt poſitione data ex hypotheſi; punctum ergo F erit [d] datum; & EF erit [e] data; præterea, ut FE, ad EG, ita CA, eſt [f] ad AH, eſt autem ex hypotheſi data ratio CA, ad AH, ergo ratio FE, ad EG erit [g] data; eſt autem [h] FE data, ut ſupra, oſtendimus, ergo EG erit [i] data magnitudine; & EG data erit [k] poſitione, at punctum E eſt datum arbitrarium, ut ſupra dictum eſt; pun-



a 12. primi.
b 2. p ſitio primi.
c 30. huius.
d 25. huius.
e 26. huius.
f Coroll. 37. huius.
g 2. def. huius
h 26. huius.
i 2. huius.
k 29. huius.

F ctum

Secunda hypotheſis. Secunda hypotheſis. Sit AD, magnitudo data, & AG, maior ſit BG, data, quam in ratione: Dico AB, maiorem eſſe B G, data quàm in ratione. Quoniam ratio D G, ad *a 11. definit.* B G, eſt a data; & per decimam ſeptimam quinti ratio D B, ad BG, eſt data; ergo AB maior erit BG, data quàm in ratione.

A D B E G

Tertia hypoth. Tertia hypotheſis. Sit AE magnitudo data; A G, verò ſit maior BG data quàm in ratione. Dico rationem B G, ad BE eſſe datam. Quoniam ratio E G, ad BG eſt b data; ergo, & ratio B G, ad BE, data *b 11. definit.* erit; per ea quę habentur ad propoſitionem decimam octauam quinti lib. Elementorum.

A D B E G

PROPOSITIO XI.

Si magnitudo magnitudine maior ſit data, quàm in ratione, eadem ſimul utraque maior erit data, quàm in ratione. Et ſi eadem ſimul utraque maior ſit data, quàm in ratione, eadem reliqua magnitudine maior erit data, quàm in ratione.

IN hac propoſitione duplex eſt hypotheſis. Ad primam, quod attinet; Sit A B, magnitudo data, & A E, & maior E G da- *a 11. definit. huius.* ta, quàm in ratione. Dico AE maiorem eſſe BG data, quàm in *b 18. quinti conu.* ratione. Quoniam ratio BE, ad E G, eſt a data, ratio verò B E, ad BG, eſt b data; ergo *c 11. definit. huius.* recta A E maior eſt c BG data, quàm in ratione.

A D B E G

Secunda hypotheſis. Secunda hypotheſis. Data ſit magnitudo A B, & AE, maior BG, data, quàm in ratione, Dico AE, maiorem eſſe EG, data quàm in ratione; Quoniam enim ratio BE, ad BG, eſt d data; ratio autem BE, ad EG, eſt e da- *d 11. definit. huius.* ta; ergo A E, erit maior E G, data, quàm in ratione.

A D B E G

e Per ea quæ ſcribuntur ad 17. quinti. Vel hunc in modum. Sit magnitudo A E magnitudine, E G maior data quàm in ratione. Dico magnitudinem eandem A E ipſa magnitudine A G, maiorem eſſe datâ, quàm in ratione. Cum enim maguitudo A E, magnitudine E G maior ſit data, quam in ratione, auferatur magnitudo data AB, ut remaneat B E, ergo BE, ad EG, habebit f rationē datam, quamobrem inuertendo, & componendo &c. data erit ratio BG, ad *f 11. definit.* *g 4.18. quinti.* EG, fiat autem AB, ad BD, in eadem ratione g ut B G, ad E G, propterea data erit ratio *h 2. huius.* AB ad BD, eſt autem data A B, ob id D B data h erit, quapropter reliqua A D data eſt, at verò totius AG ad totam D E data eſt ratio, ut enim unum antecedentium ad unum conſequentium, ità omnia antecedentia ad omnia conſequentia, hoc eſt ſicut BG, ad BE, ita AG ad DE, igitur & ipſius ED, ad AG, data ratio erit, eſt autem data AD, ergo AE, ipſa quidem AG maior eſt data quàm in ratione.

Sit autem AE ipſa AG maior data quàm in ratione. Dico AE reliqua EG maiorem eſſe data quàm in ratione. Cum enim AE maior ſit ipſa AG data quam in ratione, auferatur magnitudo data A D, ob id reliqua D E ad AG data ratio eſt, quamobrem i & ipſius *i corol. quinti.* AG ad DE data eſt ratio. Fiat AB ad BD ut AG, ad DE, propterea data erit ratio AB, ad BD; & per conuerſionem rationis data erit etiam ratio AB ad AD, & inuertendo data erit ratio AD, ad AB, data eſt autem AD, igitur tota A B data eſt: quoniam verò totius AG ad totam DE data eſt ratio, quemadmodum, & ipſius A B, ad B D, data ratio eſt; cum ſit AG ad DE ità ablata AE ad ablatam BD, igitur reliqua EG, ad reliquā B E, erit ut A G, *k 17. quinti.* ad DE, eſt autem ipſius A G, ad DE, ratio data, ergo ipſius EG ad BE data ratio erit, & dividendo k ipſius EG ad BE data ratio erit, quamobrē, & ipſius BE ad EG data ratio erit, *l 11. definit. huius.* eſt autem data A B, igitur AE, ipſa EG maior eſt l data, quàm in ratione.

PROPOSITIO XII.

Si fuerint tres magnitudines, & prima quidem, cum ſecunda data ſit ſecunda quoque cum tertia data ſit, aut prima tertia æqualis eſt, aut altera altera maior data.

SInt tres magnitudines AD, DB, BG, & quidem AD cum DB data ſit, ut A B; item D B, cum B G, data ſit, ut D G. Dico, vel AD, æqualem eſſe BG, vel alteram altera maiorem eſſe datâ. Supponamus primò primam cum ſecunda, nempe AB æqualē eſſe ſecundæ, cum tertia, nimirum D G illico perſpicuum eſt A D æqualem eſſe BG; ablatâ ſiquidem communi D B remanebunt AD, BG

A D B G

inter

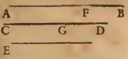
inter ſe æquales.

Supponamus ſecundò AB, maiorem eſſe DG; cum itaq; A B, & DG datæ ſint, ſequitur per quartam huius, differentiam inter A B, & D G datam eſſe; at verò ſi ab inæqualibus A B, D G auferatur communis D B atque adeo auferantur æqualia;reſiduorum A D, B G idem erit exceſſus, ac totarum AB, DG, nempe DB, ſed hic eſt [a] datus;ergo,& reſiduorum A D, BG exceſſus ſiue differentia data erit, quamobrem ſequitur [b] alteram alterá maiorem eſſe datâ.

a 4 huius. b 2. huius.

PROPOSITIO XIII.

Si fuerint tres magnitudines,& earum prima ad ſecundam habeat rationem datam, ſecunda autem tertia maior ſit, data, quam in ratione, prima quoque maior erit tertia, data, quàm in ratione.

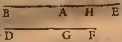


Sint tres magnitudines AB,CD, & E;ſitque data proportio magnitudinis AB, ad magnitudinem CD;præterea magnitudo CD, maior ſit magnitudine E, data,quàm in ratione. Dico magnitudinem AB, maiorem eſſe E magnitudine, data, quàm in ratione. Supponamus datam DG;fiat autem vt DC, ad CG, ita AB, ad AF. Quoniam igitur eſt vt DC, ad GC, ita BA, ad FA erit [a] vt DC, ad BA, ita GC, ad FA, & conſequenter, vt DC, ad BA, ita erit [b] DG, ad BF, ſed ex hypoteſi DG, data eſt; ergo, & B F, per ſecundam huius data erit,[c] eſt autem ex hypoteſi data proportio AB ad CD, & erat, vt DC, ad BA, ita GC,ad FA erit igitur,vt FA,ad GC, ita AB, ad CD; ratio igitur FA, ad G C, data erit;[d] ex hypoteſi verò data eſt ratio GC, ad E ergo data erit [e] ratio FA, ad E; concluſimus autem ſupra BF datam eſſe, ergo A B maior erit E data quàm in ratione.

a 16. quinti. b 19 quinti. c 2. huius. d 2. def huius. e Per octauam & huius.

PROPOSITIO XIIII.

Si duæ magnitudines ad inuicem habeant rationem datam, vtrique autem illarum adijciatur data magnitudo tota, ad inuicem, aut habebunt rationem datam, aut altera altera maior erit data, quàm in ratione.

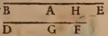


Datæ ſint duæ magnitudines, A E, G F; dataque ſit ratio, vt A B, ad G D. Dico, vel B E, ad D F rationem habere datam; vel BE, maiorem eſſe magnitudine DF, data quàm in ratione. Supponamus primò eſſe,vt AB,ad GD ita AE, ad G F; erit [a] vt B E, ad D F, ita A B, ad G D; eſt autem ex hipotheſi data ratio A B, ad G D,ergo ratio BE,ad GF, data erit.[b] Secundò ſupponamus eſſe, vt A B, ad G D, ita A H, ad G F erit [c] vt BH ad D F, ita A B, ad G D; at verò ex hypotheſi data eſt ratio A B ad GD, eſtque [d] data ratio B H, ad D F; inſuper data eſt [e] A H, eo quod ſuppoſitum ſit eſſe, vt AB, ad GD, ita AH, ad G F, quæ data erat, ergo data eſt [f] HE; quamobrem magnitudo BE maior [g] erit magnitudine DF datâ quàm in ratione.

a 12. quinti. b 2. definit. huius. c 12. quinti. d Per ſecundã definit. huius. e 2. huius. f 4. huius. g Per 11. defin. huius.

PROPOSITIO XV.

Si duæ magnitudines habeant, ad inuicem rationem datam,& ab vtraque earum auferatur data magnitudo: reliqua magnitudines, ad inuicem habebunt, aut rationem datam, aut altera altera maior erit, data, quàm in ratione.



Datæ ſint duæ magnitudines E H; F G, ſitque pariter data ratio B E; ad D F; Dico rationem B H, ad D G, vel eſſe datam vel B H maiorem eſſe D G datâ quàm in ratione.

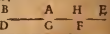
Supponamus primò, vt BE,ad DF,ita eſſe EH,ad FG ergo erit [a] vt BH ad DG, ita BE,ad DF,at verò ex hypotheſi ratio BE, ad DF, eſt data,ergo ratio BH,ad DG, erit [b] quoq; data.

a 19 quinti. b 2. huius.

c 19. quinti. Supponamus ſecundò, vt BE, ad DF, ita eſſe EA, ad GF; ergo erit [c] AB, ad GD, vt BE
d 2. huius. ad D F, at verò ex hypotheſi, data eſt ratio B E, ad D F, eſtque [d] data ratio A B, ad
e 2. huius. GD, & inſuper eſt [e] data E A, cum ſupponeremus eſſe, vt B E, ad D F, ita E A, ad G F, ex
f Per 4. huius. hypotheſi quoque data eſt E H, & præterea eſt [f] data HA, ergo per vndecimam definitionem huius BH maior erit DG, datâ quàm in ratione.

PROPOSITIO XVI.

Si duæ magnitudines, ad inuicem habeant rationem datam; & ab vna quidem illarum auferatur data magnitudo, alteri autem ipſarum adyciatur data magnitudo, tota reſidua magnitudine maior erit, data quàm in ratione.



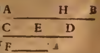
DAtæ ſint duæ magnitudines HE, GF; data quoq; ſit ratio BH, ad DF. Dico BE maiorem eſſe DG, data quàm in ratione.
a 12. ſexti. Fiat [a] vt D F, ad BH, ita G F, ad A H. Quoniam igitur ex hypotheſi data eſt GF, & prætere-
b 2. huius. rea data [b] eſt A H; ſiquidem fecimus, vt DF, ad B H, ita G F, ad A H, & quoniam data eſt
c 3. huius. HE ex hypotheſi; erit & [c] AE, quoque data; quoniam autem eſt, vt DF, ad BH, ita GF, ad
d coroll. 4. & 19. quinti. AH erit [d] & BH, ad DF, vt BA; ad DG; ſupponebamus autem rationem BH, ad DF, da-
e 2. definit. huius tam eſſe, eſtque [e] data ratio B A, ad DG, ſiquidem ei datur eadem BH, ad DF dicebamus
f 11. definit. huius. etiam datam eſſe AE, ergo erit [f] B E, maior D G, datâ quam in ratione.

Vel ſic

g 1. huius. Datæ ſint magnitudines H B, FD, quæ neceſſariò habebunt [g] rationem datam, & ex F D auferatur data magnitudo G F, & magnitudini H B addatur data magnitudo H E. Dico totam E B reliqua G D maiorem eſſe data, quàm in ratione. Quandoquidem ratio ipſius
h 12. ſexti. H B ad FD data eſt, fiat [h] vt H B ad FD, ita A H ad F G, ergo ratio ipſius A H ad F G data
i 2. def huius. erit, [i] eſt autem data FG, igitur A H data erit, [k] eſt autem EH data igitur tota E A data eſt: [l]
k 2. huius.
l 3. huius. Et quia eſt vt H B ad F D, ita A H ad F G, ergo reſidua A B ad reſiduam G D rationem
m 19. quinti. habebit [m] datam, eſt antem A E data magnitudo, igitur magnitudo EB magnitudine G D
n 11. definit. huius. maior eſt, [n] datâ quam in ratione.

PROPOSITIO XVII.

Si fuerint tres magnitudines, & prima quidem, ſecunda maior ſit data quam in ratione; tertia quoque eadem ſecunda maior ſit data quàm in ratione; prima ad tertiam, aut rationem habebit datam; aut altera, altera maior erit data, quàm in ratione.



SInt datæ magnitudines BH, & DE, & AB ſit maior F data quàm in ratione, CD, verò F, maior datâ quàm in ratione. Dico rationem A B, ad C D eſſe datam; vel A B, maiorem eſſe C D, data
a 11. definit. huius. quàm in ratione. Quoniam ratio AH ad F eſt data; [a] namq; ſupponitur AB maior F datâ quàm in ratione, at verò HB ſupponitur data, ergo
b 11. definit. huius. ſi hæc auferatur reliqua A H ad ipſam F habebit rationem datam. & ratio CE ad F, eſt data ob eandem rationẽ; & ratio AH, ad CE, pariter data [c] eſt; ergo, vel ratio AB, ad CD,
c 8. propoſit. huius. eſt data, vel A B, eſt maior CD datâ quàm in ratione per 14. propoſitionem huius.

PROPOSITIO XIIX.

Si fuerint tres magnitudines, atq; ex his vna vtraque reliquarum maior ſit, data, quàm in ratione reliquæ duæ, aut datam rationem habebunt ad inuicem, aut altera, altera maior erit data quàm in ratione.



DAtæ ſint magnitudines DG, & DL, at CD, maior ſit A B, datâ quàm in ratione C D, maior E F data quàm in ratione. Dico rationem AB, ad EF eſſe datam, vel AB maiorem eſſe EF da-
a 12. propoſit. ſexti. ta quàm in ratione; fiat [a] vt ratio CG, ad AB, ita GD, ad bH, & de-

inde;

inde, vt CL, ad EF ita LD ad FK. Quoniam enim eſt,[b] vt C G, ad A B, ita C D, ad A H, ſiquidem, vt CG, ad A B, ita ex cõſtructione eſt G D, ad BH; ratio verò C G, ad A B, [c] eſt data, ratio ergo CD, ad AH, erit [d] data; ratio vero GD, ad B H, eſt [e] data; ſiquidem, vt CG ad AB, ita GD, ad BH ex conſtructione, & ratio CG, ad AB, eſt data; at verò G D, eſt ex hypoteſi data, ergo BH erit, [f] data; cũq; vt CL, ad EF ita ſit LD ad F K; deturq; L D, ergo FK dabitur; itẽ ratio C D, ad E K, data eſt, ratio autem AH, ad EK per 8. huius eſt data. ſiquidem ratio CD, ad E K, & CD, ad AH, eſt data, ergo AB maior erit EF data quàm in ratione; Vel ratio AB ad EF, eſt data per 15. huius.

b 12. quinti. c 2 def. huius. d 2 def. huius. e 2. def. huius f 2. huius.

Vel ſic

Sint tres magnitudines AB, CD, EF, ex his vna, quæ ſit C D, vtraque reliquarum AB, EF maior ſit, data quàm in ratione. Dico vtramque magnitudinum AB, EF aut ad inuicem habere rationem datam, aut alteram alterà maiorem eſſe data, quam in ratione. Quandoquidem magnitudo CD, magnitudine AB maior eſt, data quam in ratione, auferatur data magnitudo DG, ergo reliquæ GC ad A B data ratio eſt. [g] Fiat autem vt GC ad AB, ità DG ad BH; ergo ratio ipſius GD ad BH data eſt. Eſt autem G D data, igitur BH data eſt; [h] & propterea [i] totius DC ad totam HA data ratio eſt.

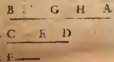
g 11. definit. huius. h 2. huius. i 12. quinti.

Deinde cum D C ipsà F E maior ſit, data quàm in ratione, auferatur data magnitudo DL, ergo reliquæ LC, ad FE data eſt [k] ratio; Fiat autem vt LC ad FE, ità DL, ad KF, igitur ipſius DL, ad KF data ratio eſt; data eſt autem DL, igitur K F data eſt, [l] propterea [m] totius DC ad totam KE data ratio eſt. Ipſius autem DC, ad HA data ratio eſt, igitur, ipſius HA, ad KE data ratio eſt. [n] Sunt autem ablatæ ab ipſis datæ magnitudines HB, KF, igitur A B, ad FE, aut ad inuicem [o] habent rationem datam, aut altera, altera maior erit; data, quam in ratione.

k 11. definit. huius. l 2. huius. m 12. quinti n 8. huius. o 15. huius.

PROPOSITIO XIX.

Si fuerint tres magnitudines, & prima quidem magnitudo, ſecunda magnitudine, maior, data quàm in ratione ſit quoque ſecunda maior tertia, data, quàm in ratione; prima magnitudo, tertia magnitudine, maior erit data quàm in ratione.

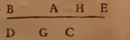


DAtæ ſint magnitudines HA, E D; At verò AB, ſit maior D C, data quàm in ratione, D C, maior F datà, quàm in ratione, fiat per 12. ſexti vt C D, ad B H, ita D E, ad H G, Quoniam DE eſt data ex hypotheſi; ratio verò DE ad HG eſt [a] data, cum ſit vt CD, ad BH, ita DE, ad HG, & G H erit [b] data; ex hypotheſi A H eſt data; Et A G erit [c] data; eſt [d] verò eadem ratio H G, ad D E, & B H, ad C D, cum ſit vt C D, ad B H ita D E, ad H G, ita ergo erit, [e] vt G B, ad E C, ita BH, ad CD; At verò ratio BH, ad CD eſt [f] data, & ratio GB, ad EC erit [g] data, ratio autem F, ad EC, eſt [h] quoque data, ergo ratio G B, ad F, erit [i] data proinde ratio A B, ad F, maior erit [k] data, quàm in ratione; per 11. defin. huius, cum AG ſit oſtenſa data.

a 2. def. huius. b 2. huius. c 3. huius. d Corol. 4. 5. e 19. quinti. f 11. definit. huius. g 2. definit. huius. h 11. definit. huius. i 8. huius. k 11. definit. huius.

PROPOSITIO XX.

Si datæ, duæ, fuerint magnitudines, & auferantur ab ipſis magnitudines habentes, ad inuicem rationem datam, reſiduæ magnitudines, aut habebunt ad inuicem rationem datam, aut altera, altera maior erit, data, quàm in ratione.



DAtæ ſint B E, D C, & ratio H E, ad G C, ſit data. Dico rationem BH, ad DG, eſſe datam, vel BH maiorem eſſe DG data, quàm in ratione. Primò ſupponatur, vt HE, ad GC, ita eſſe BE, ad DC, Proinde, vt B H, ad D G, ita eſt [a] HE, ad G C, ex hypotheſi verò ratio HE, ad GC eſt data; ergo ratio BH, ad D G erit [b] data.

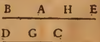
Secundò ſupponatur vt HE, ad GC, ita eſſe AE, ad DC, ex hypoth. ratio HE, ad GC, eſt data, & ratio AE, ad DC, erit [c] data; ex hypotheſi vero DC, eſt data ergo, & AE eſt [d] da-

a 19. quinti. b 2. def. huius. c 2. def. huius. d 2. huius.

e 4. huius. f 19. quinti. ta, ex hypotheſi autem BE eſt data,& AB erit e data,vt autem HE ad GC, ita eſt ex ſuppo-
g 2. Datorũ. ſitione AE, ad DC quare erit f vt AH,ad DG ita H E, ad GC eritque g ratio A H, ad D G
h 11. definit. datorum. data,cùm ratio HE,ad GC, ſit data; proinde BH. maior h erit DG datá quàm in ratione, quandoquidem AB, eſt oſtenſa data,

PROPOSITIO XXI.

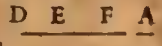
Si fuerint duæ magnitudines datæ, & adjiciantur ipſis aliæ magnitudines habentes,ad inuicem rationem datam, tota, aut habebunt ad inuicem rationem datam, aut altera, altera maior erit data, quàm in ratione.



DAtæ ſint HB, GD, ratio verò HE,ad GC ſit data. Dico rationem BE, ad DC eſſe datam; vel BE maiorem eſſe DC, datá quàm in ratione. Supponatur primò, vt H E, ad GC, ita
a 12. quinti. b 2. definit. datorum. eſſe HB, ad GD erit, a vt BE, ad DC,itá HE, ad GC, ratio verò HE, ad GC eſt data ex hypotheſi, ergo ratio, BE, ad DC erit b data,
c 2. def. huius d 2. datorum. Secundò ſupponatur, vt HE, ad GC, ita eſſe HA, ad GD, erit c HA,ad GD, ratio data;
e 4 datorum at GD ex hypotheſi eſt data;itaq;HA erit d data;at HB ex hypotheſi eſt data,ergo e AB erit
f 12 quinti. g 2. datorũ. data;ſed ex ſuppoſitione ſecũda,vt HE,ad GC,ita eſt HA,ad GD ergo erit,f vt AE,ad DC, ita HE,ad GC,at ratio HE,ad GC,ex hypotheſi eſt data; ratio igitur AE,ad DC erit g data ergo B E, maior erit D C data, quàm in ratione. Per 11. definit.Datorum;quandoquidem A B demonſtrauimus datam,

PROPOSITIO XXII.

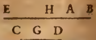
Si duæ magnitudines ad aliam aliquam magnitudinem habeant rationem datam, & ſimul vtraque ad eandem habebit rationem datam.



DAta ſit ratio DE ad A,& ratio EF,ad A, ſit pariter data. Dico rationem DF ad A eſſe pariter datam. Quoniam ratio DE, ad EF,
a 8 Datorũ. b 6. datorum. eſt data, cum ratio DE ad A, & EF, ad A ſit data per 8. Datorum, ſiue
c 8 datorum. huius; ratio verò D F, ad E F eſt b data; & ex hypotheſi ratio E F, ad A eſt data,ergo ratio DF ad A eſt c quoque data,

PROPOSITIO XXIII.

Si totum ad totum habeat rationem datam,habeant autem,& partes ad partes rationes datas etſi non eaſdem, habebunt omnia, ad omnia rationes datas.



DAta ſit ratio E B, ad CD item ratio EH, ad C G, demum ratio H B, ad G D. Dico rationes EH ad H B, & HB, ad C G,
a 12 ſexti. b coroll. 4. quinti. & C G adG D, eſſe datas. Fiat a ut C G, ad E H, ita C D, ad E A.
Quoniam igitur eſt, ut EH,ad C G,ita b EA, ad CD, erit c ut GA, ad HD ita EH,ad CG;
c 19. quinti. cum enim ſit, ut tota E A, ad totam C D, ita ablata E H, ad ablatam C G, erit per 19. quinti, reliqua H A, ad reliquam G D, ut tota E A, ad totam C D, & conſequenter, ut
d 2. definit. huius. E H, ad C G, at verò ex hypotheſi ratio E H, ad C G eſt data; item ratio H A, ad G D
e 8 huius. eſt d data, ratio verò, H B, ad G D ex hypotheſi data eſt, proinde ratio H B, ad H A,
f 5 huius. erit e data; hinc verò ſequitur f rationem H B, ad A B datam eſſe; at verò ex hypotheſi
g coroll. 4. quinti. data quidẽ eſt ratio EB, ad CD,quemadmodum etiam ratio EA, ad CD eſt g data, quan-
h 8. huius. doquidem, ut E H, ad C G, ita eſt EA, ad CD per coroll. quartæ,Quinti; cum ut C G, ad EH, ita facta ſit CD, ad E A; quamobrem ratio E A, ad EB data h erit; atque adeo ratio
i 6. huius. EB, ad AB erit i data. Demonſtrauimus autem rationem H B, ad A B datam eſſe,
k 8. huius. ergo ratio E B, ad H B, erit k data, proinde ratio E B, ad E H erit l data, & in-
l 5. huius. m 8 huius. ſuper ratio EH, ad HB, data erit m cumque data ſit ex hypotheſi ratio E H, ad CG ſequi-
n 8. huius. tur n proinde rationem H B, ad C G datam eſſe; eſt autem ex hypotheſi data ratio H B

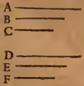
ad

ad G D ergo per 8. huius data erit ratio C G ad G D, quare omnia ad omnia habebunt rationem datam.

PROPOSITIO XXIV.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; prima autem, ad tertiam habeat rationem datam, & ad ſecundam habebit rationem datam.

VT A, ad B, ita ſit B, ad C, ratio A, ad C, ſit data. Dico rationem A, ad B eſſe datam. Quoniam ratio A, ad C ex hypotheſi eſt data, ut verò A, ad C ita [a] quadratum ex A, ad rectangulum ſub A, & C ergo ratio quadrati ex A, ad rectangulum ſub A, & C erit [b] data; ſed quadratum ex B, eſt [c] æquale rectangulo ſub A, & C ergò ratio quadrati ex A, ad quadratum ex B, erit [d] data, ergo ratio A, ad B, erit quoque data. Sic breuiùs, quàm in textu, &c.

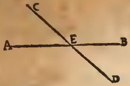


a prima ſexti.
b 1. huius.
c 17 ſexti.
d 7. quinti.
e . . .

PROPOSITIO XXV.

Si duæ rectæ poſitione datæ, ſe mutuo invicem ſecuerint, punctum in quo ſe inuicem ſecant poſitione datum eſt.

SInt duæ lineæ poſitione datæ A B, C D, quæ ſe inuicem ſecent in puncto E, Dico datum eſſe punctum E ſi namque punctum E, diuerſas poſſet habere poſitiones, neceſſe foret ſaltem, & rectarum alteram A B, C D diuerſas habere poſitiones, quod contra hypotheſin eſt, ergo datum, eſt punctum E, Quod oportebat, &c.



SCHOLION.

NOn diſſimili arte oſtendetur punctum interſectionis cuiuſcumque binarum linearum poſitione datarum; ſiue nempe utraque ſit recta, ſiue una recta, altera curua, & in uno tantum puncto, ſe mutuo ſecantium, eſſe datum, &c.

PROPOSITIO XXVI.

Si lineæ rectæ extremitates poſitione datæ ſint, recta poſitione, & magnitudine data eſt.

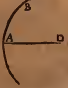
DAta ſint puncta A, & B, poſitione. Dico A B, eſſe datam poſitione, & magnitudine Data eſt A B, poſitione, & magnitudine; namque manente A, ſi intercidet rectæ lineæ, aut poſitio, aut magnitudo, intercid extremum B, Quod eſt abſurdum; non enim intercidit.



PROPOSITIO XXVII.

Si data recta linea poſitione, & magnitudine, data fuerit una extremitas, & altera extremitas data erit.

DAta ſit linea D A, & D eſt punctum datum. Dico punctum A eſſe datum. Fiat [a] circulus D A B, Quoniam ſemicirculus A D, eſt [b] poſitione datus; eſt verò D A, data ex hypotheſi ergo punctum A erit [c] datum.

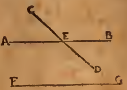


a 3. petitio primi.
b 6. definitio Datorum.
c Scholion.
25. Datorum.

PRO-

PROPOSITIO XXVIII.

Si per datum punctum contra datam poſitione rectam agatur recta linea; acta recta poſitione data eſt.



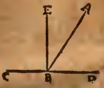
Datum ſit punctum E ſitque F G linea recta data poſitione, & AEB, ſit parallela rectæ F G. Dico AB eſſe datam poſitione. Supponamus C E D eſſe parallelam ipſi FG, ex dato enim id quidem ſupponendũ, cum manente puncto E poſitio ipſius AEB, quæ parallela ex hypotheſi eſt ipſi FG alibi cadere dicatur, puta in
a 30. primi. CED, ex hypotheſi vero AB eſt parallela rectæ FG eſt [a] ergo CD parallela rectæ A B, contra 34. primi definitionem, ergo erit AB data poſitione.

Vel ſic

Per datum punctum E contra datam poſitione rectam FG agatur recta AEB. Dico poſitione datam eſſe lineam A E B Si enim data non ſit, manente puncto E alibi cadet rectæ
b 11. axioma primi. AEB poſitio. Alibi iam cadat manente FG parallela, eaque eſto CED, ergo parallela eſt FG ipſi CED, ſed FG ipſi AEB eſt parallela, igitur AEB ipſi CED parallela erit & ſimul coincidet, quod eſt, abſurdum. Quamobrem poſitio rectæ AEB alibi non cadit, ac proinde recta AEB poſitione data eſt.

PROPOSITIO XXIX.

Si ad poſitione datam rectam, datumque in ea punctum agatur recta linea, quæ faciat angulum datum, acta linea poſitione data eſt.



Data ſit CD recta linea poſitione, datumque ſit B punctum, ſitque angulus ABD datus. Dico A B, eſſe datam poſitione. Supponamus angulum DBE, æqualem eſſe angulo dato, at ex hypotheſi angulus DBA, æqualis eſt an-
a 11 axioma primi. gulo dato, ergo angulus D B E erit [a] æqualis angulo DBA
b 11. axioma primi. contra nonum axioma primi, ergo BA eſt [b] poſitione data.

Vel ſic

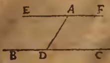
Ad datam poſitione rectam C D, & datum in ea punctum B agatur linea A B, quæ faciat angulum datum DBA. Dico poſitione datam eſſe rectam B A. Quãdoquidem ſi poſitione data non ſit, manente puncto B alibi cadet poſitio rectæ BA, ſeruans anguli DBA magnitudinem. Cadat alibi, & eſto [b] E. Igitur angulus DBA angulo DBE æqualis eſt maior minori, quod eſt abſurdum. Igitur poſitio rectæ A B non cadet alibi. Quamobrem data erit recta AB poſitione.

SCHOLION.

In ipſa propoſitione partes, ad quas angulus datus eſt conſtitutus, debent eſſe datæ.

PROPOSITIO XXX.

Si, à dato puncto in datam poſitione rectam agatur recta linea, quæ faciat angulum datum, acta linea poſitione data eſt.

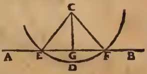


Data ſit recta poſitione BC ſitque A punctum datum, & ADC, ſit angulus datus. Dico AD eſſe datam po-
a 31. primi. ſitione, Fiat [a] EAF parallela rectæ B C. Quoniam B C, eſt recta data poſitione ex hypotheſi, & per conſtructionem
b 18. Datorũ. EF eſt parallela [b] rectæ BC ergo erit E F, data poſitione; at verò ex hypotheſi angulus ADC, eſt datus, & angulus DAE
c 29 primi. d 1. definit. Datorum. eſt [c] æqualis angulo ADC, erit [d] ergo angulus DAE, datus, at punctum A ex hypotheſi eſt

eſt datum, ob id AD eſt [e] data poſitione. *e 29. huius.*

PROPOSITIO XXXI.

Si à dato puncto in datam poſitione rectam, data magnitudine recta ducatur, poſitione quoque data erit.



DAtum ſit punctum C, & AB ſit recta data poſitione; C E, ſit recta data magnitudine. Dico CE eſſe datam poſitione. Fiat [a] circulus C E F. Quoniam ſegmentum circuli EDF eſt [b] datum poſitione, ſiquidem eius centrum C poſitione datum eſt, & quæ ex centro eſt linea C E magnitudine eſt data, & ex hypotheſi AB, eſt recta data poſitione; ergo E, & F erunt [c] puncta data poſitione, ſiquidem duæ lineæ poſitione datæ, ſi ſe invicem ſecent poſitione datur punctum interſectionis; ergo CE, & CF, ſunt [d] rectæ datæ poſitione.

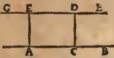
a 3. petitio primi.
b 6. defin huius.
c Schol. 25. huius.
d 26. huius.

SCHOLION.

Si data linea ſit maior perpendiculari G G, non erit data poſitione, niſi præſcribatur, ad quam partem perpendicularis C G ducenda ſit; cum enim CF ſit æqualis CE data recta poterit habere duplicem poſitionem.

PROPOSITIO XXXII.

Si in datas poſitione parallelas rectas, agatur recta linea, quæ faciat angulos datos, acta recta magnitudine data eſt.



DAtæ ſint poſitione AB, & G F, & A B, & GF ſint parallelæ; ſintque BAE, & AEF, anguli dati. Dico A E eſſe datam magnitudine. Detur punctum C, utcumque in recta A B; fiat [a] autem angulus BCD, æqualis angulo C A E. Quoniam autem per conſtructionem angulus BCD eſt æqualis angulo BAE, & CD eſt [b] parallela rectæ AE, ex hypotheſi verò angulus BAE, datus eſt, ergo angulus B C D erit [c] datus; at A B ex hypotheſi data eſt poſitione, punctumque C per conſtructionem datum eſt, ergo C D eſt [d] poſitione data; at ex hypotheſi GF, eſt poſitione data; ergo punctum D, eſt [e] datum; proinde CD datam eſſe [f] magnitudine neceſſe eſt; cumque AE ſit [g] æqualis CD; ſequitur per primam definitionem huius rectam AE magnitudine datam eſſe.

a 23. primi.
b 29. primi.
c 1. definit. huius.
d 29. huius.
e 25. huius.
f 26. huius.
g 34. primi.

PROPOSITIO XXXIII.

Si in datas poſitione parallelas rectas agatur magnitudine data recta, faciet angulos datos.



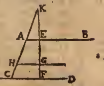
DAtæ ſint poſitione AB, & G F, & AB ſit parallela rectæ GF, & EC ſit magnitudine data. Dico angulos BEC, ECF eſſe datos. In recta A B, detur quodcunque punctum H; atque fiat [a] HD parallela rectæ EC; & deſcribatur [b] circulus H B D G, ex centro H. Quoniam igitur H D, & EC ſunt [c] inter ſe æquales, eſt autem ex hypotheſi recta EC data magnitudine erit [d] proinde H D, magnitudine quoque data; at verò per conſtructionem datum eſt punctum H, [e] proinde circumferentiæ pars GDB, erit [f] poſitione data; at verò GF eſt ex hypotheſi poſitione data, ergo punctum D, erit [g] datum poſitione; quamobrem & HD, erit [h] poſitione data; at verò GF, data eſt ex hypotheſi poſitione, angulus igitur, HDF, erit [i] datus; at verò angulus E C F eſt [k] æqualis angulo H D F, ergo angulus ECF, erit [l] datus; quamobrem angulus CEB erit pariter datus.

a 31. primi.
b 3. petitio primi.
c 34. primi.
d 1. definitio huius.
e 6. definit. huius.
f 25. huius.
g 26. huius.
h 5. 4. def. huius.
i 29 primi.
k 1. def. huius.
l 29. primi, & 4. huius.

SCHO-

PROPOSITIO XXXVII.

Si in datas poſitione parallelas rectas, agatur recta linea, & ſecetur ratione data, agatur autem per ſectionis punctum contra datas poſitione rectas, linea recta; acta recta linea poſitione data eſt,



DAtæ ſint poſitione AB, CD, & rectæ AB, CD ſint parallelæ; ratio verò AH, ad HC, ſit data, & HG ſit parallela rectæ AB, vel CD, Dico HG eſſe datam poſitione.

Primò ſi AC, EF, non ſint parallelæ; ſed coeuntes ad partes AE, ita; Sit punctum E, ut cunque datum in AB, fiat [a] EF, ad CD perpendicularis. Quoniam AC, & EF, non ſunt parallelæ, & K eſt punctũ interſectionis; In hac enim hypotheſi [b] ſupponuntur CA, & FE non parallellæ, ſed coeuntes protractæ ad punctum K, recta EF erit [c] data poſitione, at verò ex hypotheſi CD eſt data poſitione; ergo punctum F eſt [d] datum; at verò punctum E eſt datum, cùm factum ſit arbitrarium in AB, & EF erit [e] data magnitudine; ut autem CH, ad HK, ita eſt [f] FG ad GK, & ut HK, ad AK, ita eſt [g] GK, ad EK; & vt AK, ad HA ita eſt [h] EK ad EG, ergo, vt CH, ad HA, ita eſt [i] FG, ad GE, ratio verò CH, ad HA, eſt ex hypotheſi data; ergo ratio FG, ad GE erit [k] data; at verò FE eſt [l] data, vt oſtenſum eſt ſupra, & FG, GE. erunt [m] datæ; & præterea FE eſt [n] data poſitione; at punctum E eſt datum arbitrarium; ergo Punctum G erit [o] datum, qua propter HG eſt data poſitione per 28. huius.

a 31. primi. b ex hypoth. c 30. huius. d 25. huius. e 26. huius. f 2. ſexti. g Corol. 4. 6. h 2. ſexti. i 22. quinti. k 2. huius. l 27 huius. m 7. huius. n 10. huius. o 25. huius.

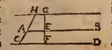
Quòd ſi AC, EF forent parallelæ ſic procederet demonſtratio. Quoniam igitur AC, EF ſunt parallelæ; ex hypotheſi verò parallelæ ſunt lineæ AE, CF, propterea ACFE erit parallelogrammum, quamobrem latus AC lateri EF æquale erit, Rurſus cùm ſint parallelæ rectæ HG, CF, ex hypotheſi; & ſint etiam parallelæ HC, GF, erit & HF parallelogrammum, ideoque latus HC lateri GF æquale erit; quam ob rem æquales AC, EF ad æquales HC, GF eandem habebunt rationem, atque ad eo, vt AC ad CH, ita EF ad GF, & diuidendo vt AH ad HC, ità EG ad GF, &c. eſt autẽ data ratio CH ad HA, ergo & ratio FG ad GE data erit, at verò FE eſt data, vt oſtenſum eſt ſupra, & FG, GE erunt datæ, & præterea FE eſt data poſitione, at punctum E eſt datum arbitrarium, & punctum G eſt datum, quapropter HG eſt data poſitione per 28. huius,

COROLLARIVM.

Ex his infertur per modum corollarÿ; rectas CF, HG, AE eſſe inter ſe parallelas; nam vt CH, ad HA, ita FG, ad GE, quandoquidem erat, ut CH, ad HA, ita FG, ad GE, ut ſupra oſtendimus.

PROPOSITIO XXXVIII.

Si in datas poſitione parallelas rectas, agatur recta linea; adÿciatur autem ipſi quædam recta, qua, ad illam quæ acta eſt habeat rationem datam, per extremitatem autem adiectæ agatur contra datas poſitione parallelas recta linea; acta recta linea, eſt data poſitione.



DAtæ ſint poſitione AB, CD, & eædem AB, & CD ſint parallelæ; ratio HA, ad AC ſit data; & HG ipſi AB, vel CD, ſit parallela. Dico HG eſſe poſitione datam. Datum ſit punctum E, arbitrarium in recta AB, & [a] fiat EF perpendicularis ipſi CD, protrahatur autem FE uſque ad G [b] Quoniam EF eſt [c] data poſitione; & CD eſt poſitione data ex hypotheſi; punctum ergo F erit [d] datum; & EF erit [e] data; præterea, ut FE, ad EG, ita CA, eſt [f] ad AH, eſt autem ex hypotheſi data ratio CA, ad AH, ergo ratio FE, ad EG erit [g] data; eſt autem [h] FE data, ut ſupra, oſtendimus, ergo EG erit [i] data magnitudine; & EG data erit [k] poſitione, at punctum E eſt datum arbitrarium, ut ſupra dictum eſt; pun-

a 12. primi. b 2. p titio primi. c 30. huius. d 25. huius. e 26. huius. f Coroll. 37. huius. g 2. def. huius h 26. huius. i 2. huius. k 29. huius.

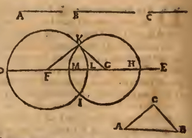
F ctum

l 28. huius. ctum verò G eſt [l] quoque datum; proinde HG eſt data poſitione per 28. huius, &c. nam per punctum G contra datam poſitione rectam AB acta eſt recta H G.

PROPOSITIO XXXIX.

Si trianguli ſingula latera magnitudine data ſint; triangulum ſpecie datum eſt.

SIt triangulum ABC, & rectæ AB, AC, CB, datæ ſint magnitudine. Dico triãgulum ABC eſſe datum ſpecie. Punctũ D arbitrarium ſit datũ, & DE ſit [a] data poſi-



a poſitio 1. b 3. primi. c 3. primi. d 3. primi.
tione; fiat [b] DF, æqualis AB, & FG æqualis AC, & GH, æqualis CB, fiat [c] autem FDKI, circulus, & GHKM itẽ [d] circulus. Quoniam AB eſt ex hypotheſi data, & DF

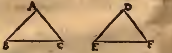
e 1. definit. huius.
per conſtructionem eſt æqualis AB, ergo DF, erit [e] data; at DF, eſt data poſitione per conſtructionem, & etiam ex conſtructione D, eſt punctum datum; ergo F eſt

f 27. huius. g 1. def. huius. h 27 huius. i def. huius. k 27. huius. l 6. def huius. m 25. huius. n 26 huius. o ſch. ium 29. huius. p 1. def huius. q 3. def. huius.
[f] punctum datum; eſt autem FG per conſtructionem æqualis AC; & AC, eſt ex hypotheſi data, ergo; FG eſt [g] data, & punctum G erit [h] datum CB eſt data ex hypotheſi, & GH, æqualis eſt CB, ergo GH erit [i] data, proinde [k], H eſt punctum poſitione datum; & FDK, & GHK, ſunt [l] circuli dati poſitione; ergo K eſt [m] punctum datum, ſunt [n] autem FK, FG, GK datæ poſitione, et magnitudine, triangulum ergo FGK eſt [o] datum ſpecie, triangula ABC, FGK ſunt [p] æqualia, et ſimilia inter ſe, ergo triangulum ABC erit [q] datum ſpecie.

PROPOSITIO XL.

Si trianguli ſinguli anguli magnitudine dati ſint triangulum ſpecie datum eſt.

DAti ſint anguli A, B, C, magnitudine. Dico triangulum ABC eſſe datum ſpecie; ſit ad arbitrium data EF poſitione, et magnitu-



a 23. primi.
dine; angulus autem E fiat [a] æqualis angulo B. angulus F, æqualis angulo C. Quoniam reliquus

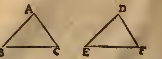
b 32. primi.
angulus D, eſt [b] æqualis reliquo angulo A, anguli itaque E, D, F, ſunt dati magnitudine, cùm

c 1. def huius. d 29. huius. e 25 huius. f 26. huius. g 1 huius. h 4 def huius. i 4 ſexti, & 3. def. huius. k 3. def. huius.
ſint æquales angulis B, A, C, & ED, FD erũt [c d] datæ poſitione, quapropter punctum D eſt [e] datum poſitione, itaque EF, ED, FD, ſunt [f] datæ poſitione, & magnitudine, ſiquidem EF, eſt data poſitione, & magnitudine; rationes verò DE, ad EF, & EF ad FD, & DE, ad DF, ſunt [g] datæ, propterea triangulum EDF eſt [h] datum ſpecie, eſt [i] autem triangulum ABC ſimile triangulo DEF, ergo triangulum ABC eſt [k] datum ſpecie, &c.

PROPOSITIO XLI.

Si triangulum, vnum angulum datum habeat, circa datum autem angulum duo latera ad inuicem habeant datam rationem, triangulum ſpecie datum eſt.

DAtus ſit angulus A, & ratio AB, ad AC ſit data. Dico triangulum ABC eſſe datum ſpecie, ſit ad arbitrium ED poſitione, & magnitu-



a 23. primi. b 12. ſexti.
dine data; fiat [a] verò angulus EDF æqualis angulo A, & ut AB, ad AC. Fiat [b] DE, ad DF, ſit

c 1. poſt. 1.
[c] verò EF linea recta. Quoniam angulus A ex hypotheſi eſt datus, & angulus D, eſt datus, cùm ſit

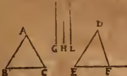
d 29. huius.
æqualis BAC dato; ergo DF [d] erit poſitione data;

cum

cum autem ratio AB, ad AC ſit ex hypotheſi data, ratio D E, ad DF, erit [e] data; quando- e 2. def. huius.
quidem eſt, ut AB, ad AC, ita DE ad DF, & per conſtructionem, data eſt DE, ergo DF eſt f 2. huius.
data [f] magnitudine. Punctum verò F erit [g] datum, cum FD ſit data poſitione, & magni- g 27. huius.
tudine, datumque ſit punctum D, & DF, EF, erunt [h] datæ poſitione, & magnitudine, cùm h 26. huius.
etiam datum ſit punctum E, itaque erit [i] triangulum DEF datum ſpecie; eſt [k] autem trian- i 19 huius.
gulum A B C, ſimile triangulo DEF, cùm anguli ad A, & D ſint æquales, & latera circa k 6. ſexti.
æquales angulos proportionalia; ergo triangulum ABC eſt [l] datum ſpecie, l 3. def. huius.

PROPOSITIO XLII.

Si trianguli latera ad inuicem habeant rationem datam, triangulum ſpecie datum eſt.

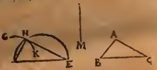


SVpponamus dari triangulum ABC, & rationes AB, ad B C, A B, ad AC, BC, ad CA eſſe datas. Dico triangulum ABC eſſe datum ſpecie. Data ſit, ad arbitrium magnitudo G, & ut A B ad B C, ita fiat [a] G, ad H; & vt B C, ad C A, [b] ita fiat H, ad L, ex tribus autem rectis lineis, G, H, L, conſtituatur [c] triangulum D E F, adeo ut DE ſit equalis G, EF equalis H, & DF equalis L. Quoniam G eſt per conſtructionem data; ſunt [d] ergo H, & L, datę magnitudine, itaque DE, EF, DF ſunt [e] datę; eſt [f] ergo triangulum D E F datum ſpecie, vt autem AB, ad BC, ita eſt ex conſtructione G, ad H, &, ut D E, ad E F ita eſt [g] G, ad H, proinde, vt A B, ad BC, ita erit [h] D E, ad EF; ut verò BC, ad CA, ita eſt ex conſtructione H, ad L, & vt E F, ad F D ita eſt H, ad L; proinde, ut BC, ad CA, ita erit [k] EF, ad FD, qua propter, ut AB, ad AC, ita erit [l] DE, ad DF, ſimile eſt [m] igitur triangulum A B C triangulo D E F, eſtque triangulum D E F [n] datum ſpecie, ut ſupra oſtendimus; ergo triangulum ABC, eſt datum ſpecie per 3. definit. huius,

a 22. ſexti.
b 12. ſexti.
c 22. primi.
d 2 huius.
e 1. def huius.
f 39. huius.
g 7 quinti.
h 11. quinti.
i 7. quinti.
k 11. quinti.
l 22. quinti.
m 5. ſexti.
n 39. huius.

PROPOSITIO XLIII.

Si trianguli rectanguli circa vnum acutorum angulorum latera, ad inuicem habeant rationem datam triangulum ſpecie datum eſt.



SVpponatur triangulum A B C, rectangulum, & angulus B A C rectus; ratio verò B C, ad B⁓⸴ ſit data. Dico triangulum ABC, eſſe datum ſpecie; ſit, ad arbitrium D E, data poſitione, & magnitudine, & fiat [a] ſemicirculus D H E, & fiat [b] ut B⸳ ⸳, ad BA, ita DE, ad M; eſtque [c] B C, maior B A, & D E, maiòr [d] M, D H autem equalis [e] ipſi M; EH, ſit [f] ducta linea recta, DHGk, ſit [g] circulus deſcriptus. Quoniam D H E eſt [h] pars circumferentiæ data poſitione, & GHK, eſt [i] pars circumferentię poſitione data, ergo punctum H, eſt [k] datum; ſunt autem D, & E puncta data; ergo D E, D H, H E, ſunt [l] datę poſitione, & magnitudine; itaque triangulum D E H, eſt [m] datum ſpecie, & triangulum ⸳BC, ſimile eſt [n] triangulo DEH, nã triangulum ABC, DHE, vnum angulum vni angulo æqualem habent, nempe, rectum, circa autem alios CEA, EDH vtrumq; ſimul recto minorem latera proportionalia, ergo triangulum A B C, triangulo DHE, ſimile erit per 7. ſexti, ergo triangulum A B C eſt [o] datum ſpecie.

a 1 pet. primi.
b 12 ſexti.
c 19 primi.
d 14. quinti.
e 1. quarti.
f 1. pet. primi.
g 1 pet. primi.
h 6 def huius.
i 6. def. huius.
k Schol. 25. huius.
l 26. huius.
m 39 huius.
n 7 ſexti.
o 3 def huius.

PROPOSITIO XLIV.

Si triangulum habeat, vnum angulum datum, circa alium autem angulum, latera ad inuicem habeant rationem datam, triangulum ſpecie datum eſt.

SVpponatur triangulum BAC, ſitque angulus ABC datus, & ratio BA ad AC, ſit data. Dico triangulum A B C eſſe datum ſpecie; ſupponatur primò angulus A B C minor recto, & recta AD fiat [a] perpendicularis, ad B C, angulus A D B eſt [b] datus, angulus autem AB C, ex hypotheſi eſt datus, angulus B A D eſt [c] datus, ergo triangulum A D B,

a 12 primi.
b 11. axioma
c Coroll. 32. primi.

eſt [d] datum ſpecie; atque ratio B A, ad A D erit [e] data; ex hypotheſi verò ratio B A, ad A C eſt data; ergo ratio A D ad A C eſt [f] data; at verò angulus A D C, eſt rectus ex conſtructione; ergo triangulum A D C, eſt [g] datum ſpecie, & angulus A C D eſt [h] datus, eſt vero & hypotheſi datus angulus A B C, & angulus BAC eſt [i] datus; ergo triangulum BAC eſt [k] datum ſpecie.



d 40 huius. e corol. 1. def. huius. f 8. huius. g 41. huius. h coroll. 3 def. huius. i 32 primi. k 40 huius.

Supponamus autem ſecundò angulum ABC eſſe maiorem recto; C B protrahatur ad D & [l] AD, fiat [m] perpendicularis, ad CD, angulus ABC eſt datus ex hypotheſi, angulus igitur ABD eſt [n] datus, angulus eſt ADB datus; [o] angulus verò BAD eſt datus [p] ergo triangulum A B D, eſt [q] datum ſpecie, & ratio D A, ad A B, eſt [r] data, ratio verò A C, ad A B, eſt ex hypotheſi data, ergo ratio D A, ad A C erit data, ex conſtructione verò angulus D, eſt rectus; ergo triangulum CAD eſt [t] datum ſpecie, & angulus C erit [u] datus; angulus autem A B C, ex hypotheſi datus eſt, & angulus B A C eſt [x] datus, ergo triangulum ABC eſt [y] datum ſpecie.

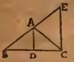


l 2. petitio 1. m 12. primi. n 4. huius. o 12. axioma primi. p 32. primi. q 40. huius. r corol. 1. def. huius. ſ 8 huius. t 41. huius. u corol. 3. def. huius. x 32. primi. y 40. huius.

PROPOSITIO VI.

Si triangulum datum unum angulum habeat, circa datum autem angulum latera ſimul utraque tanquam unum, ad reliquum latus rationem habeant datam triangulum ſpecie datum eſt.

SIt triangulum ABC & angulus BAC ſit datus, ratio verò BA plus AC ad BC ſit data. Dico triangulũ ABC eſſe datum ſpecie. Ducatur [a] BAE linea recta, & AE, fiat [b] çqualis AC, & CE, ducatur [c] rectà; angulus ergo B A D. fiat [d] çqualis D A C, hoc eſt angulus B A C bifariam diuidatur per 9. primi in duos angulos BAD, & D A C, Quoniam B E, çqualis eſt BA plus A C per 2. axioma primi, ut ergo B A, ad A C ita eſt B D, ad D C per 3. ſexti, & ut BA, ad BD, ita eſt [e] A C, ad D C, & ut B E, ad B C, ita eſt [f] B A, ad B D ratio verò B E, ad B C ex hypotheſi eſt data, & ratio B A, ad BD eſt [g] data; angulus BAD eſt datus ut conſtet; ergo triangulum A B D, eſt datum ſpecie per 44. huius; angulus verò B, eſt [i] datus, & angulus BAC ex hypotheſi datur, ut & angulus BCA eſt [k] datus; ergo triangulum ABC eſt [l] datum ſpecie.

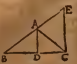


a 1 petitio 1. b 3 primi. c 1 pet primi. d 9 primi. e 16. quinti. f 12. quinti. g 2 def. huius. h 44. huius. i 1. corollar. 3. def. huius. k 32. primi. l 40. huius.

PROPOSITIO VII.

Si triangulum datum, unum angulum habeat, circa alium autem angulum latera, ſimul utraq; tanquam unum habeant, ad reliquum rationem datam, triangulum ſpecie datũ eſt.

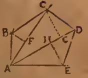
SIt triangulum A B C, ſitque angulus B datus; ratio verò B A plus AC, ad B C ſit data. Dico triangulum A B C, eſſe datum ſpecie; protrahatur [a] recta B A E, & fiat [b] AE æqualis AC, ducaturque [c] C E recta. angulus autem B A D, fiat [d] æqualis angulo DAC. Quoniam BE eſt [e] æqualis BA plus AC, & BA, ad AC, eſt [f] ut B D, ad DC eſtque [g] ut BA, ad BD, ita A C, ad C D, & ut [h] B E, ad B C ita BA, ad B D; eſt autem ex hypotheſi data ratio BE, ad BC; ergo ratio BA, ad BD eſt [i] data, ex hypotheſi verò angulus B, eſt datus, ergo triangulum ABD, eſt [k] datum ſpecie, eſt [l] ergo angulus BAD, datus, itaque angulus B A C eſt datus; [m] angulus verò BCA eſt [n] datus ergo triangulum ABC, eſt [o] datum ſpecie.



a 2. pet primi. b 3. primi. c 1 pet primi. d 9 primi. e 2. axioma primi. f 3. ſexti. g 16. quinti. h 12 quinti. i 2 def. huius. k 41. huius. l corol. 3. def. huius. m per 3 huius. n 32. primi. o 40. huius.

PROPOSITIO IIIL.

Datâ rectilinea ſpecie, in data ſpecie triangula diuiduntur.



REctilineum datum ſpecie ſit ABCDE ducantur verò A C, & A D rectæ. Dico triangula ABC, ACD, ADE eſſe data ſpecie. Quoniam angulus A B C eſt [a] datus; ratio verò A B, ad BC eſt [b] data; ergo triangulum ABC, eſt [c] datum ſpecie, & angulus ACB eſt [d] datus, itemque & angulus BCD eſt datus, ergo angulus ACD, eſt [e] datus, ratio verò BC, ad C D eſt [f] data, itemq; ratio BC, ad AC eſt [g] data, ergo ratio AC, ad CD eſt [h] data, proinde triangulum A C D eſt [i] datum ſpecie, & triangulum A D E erit [k] datum ſpecie, nanque angulus CDE eſt datus, cum ſpecie ſit data rectilinea figura ABCDE, eſt etiam datus angulus C D A, cum triangulum A C D ſit datum ſpecie, ergo angulus ADE erit datus per 4. huius, eſt autem ratio C D ad D E data, cum figura rectilinea ſit ſpecie data, itemque ratio CD ad DA ob eandem rationem, ergo per 8. huius ratio AD ad DE erit data, ac proinde triangulum ADE erit datum ſpecie per 41. huius.

a corol 3 definit huius.
b coroll 3 defin huius.
c 41. huius.
d corol. 3. definit. huius.
e 4. huius.
f coroll. 3 definit. huius.
g 3. def huius
h 8 huius.
i 41 huius.
k 41. huius

PROPOSITIO IIL.

Si ab eadem recta deſcribantur triangula data ſpecie habebunt, ad inuicem rationem datam.

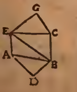


DAta ſpecie triangula ſint A B C, A B D, Dico rationem ABC, ad ABD eſſe datam; fiant EAH, FBG perpendiculares, ad AB, & ECF, ac HDG parallelę fiant rectę AB, Quoniam triangulum ABC eſt datum ſpecie ex hypotheſi; angulus verò CAB, eſt [c] datus, per constructionē verò angulus BAE eſt datus, ergo angulus CAE, eſt [d] datus; angulus verò AEF, eſt [e] rectus, & angulus ACE, eſt [f] datus, ergo, triangulum AEC eſt [g] datum ſpecie; ratio vero A E, ad A C eſt [h] data, & ratio AB, ad A C pariter eſt [i] data cum ex hypotheſi triangulum A B C, ſit datum ſpecie; ergo ratio AE, ad AB eſt [k] data, & ratio AH, ad AB, erit [l] data; non diſſimiliter enim oſtendetur ratio data A H ad AB ac demonſtratum fuit rationem AE ad AB datam eſſe; cum autem ratio A E, ad A H ſit data, ut conſtat; [m] Itaque ratio A E, ad A H, erit data, ut autem A E, ad A H, ita eſt [n] triangulum ABC, ad triangulum ABD, ergo ratio trianguli ABC, ad triangulum ABD, eſt [o] data.

a 11. primi.
b 31. primi.
c 3 def huius.
d 4. huius.
e 8.29 primi
f 32. primi.
g 40 huius.
h corol 3. def. huius.
i 3. def huius
k 8. huius.
l 8 huius.
m 8. huius.
n Schol. 1. ſexti.
o 2. def. huius.

PROPOSITIO IL.

Si ab eadem recta, duo rectilinea qualibet data ſpecie deſcribantur, habebunt ad inuicem rationem datam.



SIt AB linea recta propoſita, & AB GE, ſit rectilineū datum ſpecie, & ABD, ſit rectilineum datu ſpecie. Dico rationem ABCGE, ad ABD eſſe datam, Ducantur [a] rectæ EC, E B. Quoniam EGC, ECB, E B A, ſunt [b] triangula data ſpecie; ratio verò EGC, ad ECB eſt [c] data; ratio autem EGCB, ad E B componendo erit [d] data, & ratio ECB, ad EBA eſt [e] data; ratio igitur EGCBA, ad EBA erit [f] data, & ratio EGCBA, ad EBA, eſt [g] data, & ratio EBA, ad ABD erit [h] data; proinde ratio EGCBA, ad ABD, erit [i] data per 22 quinti.

a 1. petitio.
b 47. huius.
c 48 huius.
d 18. quinti.
e 47. huius.
f 22. quinti.
g 18 quinti.
h 48. huius.
i 22. quinti.

PROPOSITIO L.

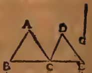
Si duæ rectæ lineæ, ad inuicem habeant rationem datam, & ab illis ſimilia, ſimiliterque deſcripta rectilinea habebunt ad inuicem rationem datam.

RAtio BC, ad CE ſit data, & ABC ſimile ſit DCE, & BC, ſit homologa CE. Dico rationem ABC, ad DCE eſſe datam; fiat [a] vt B C, ad C E, ita CE, ad G, Quoniam a 11. sexti.

ex

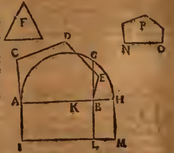
ex hypotheſi ratio B C, ad C E eſt data [b] eſtque ratio C E, ad G data, ergo ratio B C, ad G eſt [c] data, ut verò eſt AB C, ad DCE ita [d] & B C, ad G; ergo ratio A B C, ad D C E eſt [e] data.

b 2. def. huius. c 8. huius. d coroll. 20. ſexti. e 2. def. huius.



PROPOSITIO LI.

Si duæ rectæ lineæ habeant, ad inuicem rationem datam, & ab illis rectilinea quæcunque ſpecie data deſcribantur habebunt, ad inuicem rationem datam.

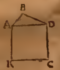


DAta ſit ratio A B, ad N O, & A B L I, & P ſint rectilinea ſpecie data, & A B homologa N O. Dico rationem A B L I, ad P, eſſe datam; fiat [a] A B E D C ſimile P. Quoniam A B E D C eſt [b] datum ſpecie cum factum ſit ſimile ipſi P erit [c] ratio A B L I, ad A B E D C data, præterea ratio P, ad A B E D C [d] data eſt; ergo ratio A B L I, ad P erit [e] data.

a 18. ſexti. b 18 ſexti. c 49. huius. d 50 huius. e 8. huius.

PROPOSITIO LII.

Si à data magnitudine recta, data figura ſpecie deſcribatur, deſcripta figura magnitudine data eſt.

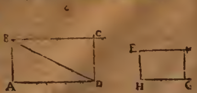


DAta ſit magnitudo AD, & ADB, data ſit ſpecie. Dico ADB datā eſſe magnitudine fiat [a] ex A D quadratum K D. Quoniam quadratum K D eſt [b] datum ſpecie, & magnitudine, ex hypotheſi verò A D B eſt data ſpecie; ergo ratio K D, ad A D B, erit [c] data; proinde A D B eſt [d] data magnitudine.

a 46. primi. b 3. & 1. def. huius. c 49. huius. d 2. prop. huius.

PROPOSITIO LIII.

Si duæ figuræ ſpecie data fuerint, & unum latus unius, ad unum latus alterius habuerit rationem datam, reliqua quoque latera, ad reliqua latera habebunt rationes datas.



SInt A C, H F datæ ſpecie, ratio verò A D, ad HG ſit data. Dico rationem A B, ad H E eſſe datam. Quoniam ratio A D. ad A B eſt [a] data, ex hypotheſi verò ratio AD, ad H G eſt data; ergo ratio A B, ad H G eſt [b] data, ratio verò H E, ad H G eſt [c] data; ergo ratio AB, ad HE, erit [d] data, &c.

a 3. def. huius. b 8. huius. c 3. def. huius. d 8 huius.

PROPOSITIO LIV.

Si duæ figuræ datæ ſpecie, ad inuicem habuerint rationem datam, etiam earũm latera, ad inuicem habebunt rationem datam.

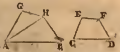


DAtæ ſint ſpecie AC, EH ratio verò A C, ad EH, ſit data. Dico rationem AD, ad EG, eſſe datam. Supponatur EH ſimilis AC, & EF homologa ipſi AB, ut autem AB, ad E F, ita fiat [a] EF ad K, & vt AC, ad EH, eſt [b] ita AB, ad K, eſt autem ex hypotheſi ratio AC, ad EH data, & ratio AB, ad K eſt [c] pariter data; ergo ratio AB, ad EF eſt [d] quoque data, proinde ratio AD, ad E G eſt [e] pariquè data. Supponatur deinde E H non eſſe ſimilem A C; fiat [f] E M ſimilis A C; eſt autem AC ſpecie data; & EM eſt [g] data ſpecie, cum EM, ſimilis ſit AC, at ex hypotheſi EH, eſt data ſpecie, ergo ratio E M, ad EH eſt [h] data; ex hypotheſi verò ratio A C, ad E H eſt data; ob id ratio AC, ad EM, erit [i] data, ſed ratio AB, ad E F eſt [k] data, ſunt enim ſimiles datæ figuræ AC, EM; quare ratio AD, ad EG erit [l] data, Quod oportebat, &c.

a 11. ſexti.
b coroll. 20. ſexti.
c 2. def. huius.
d 24 huius.
e 53. huius.
f 18. ſexti.
g 3 def. huius.
h 49 huius.
i 8 huius.
k 3 d [illegible] huius
l 53 huius.

PROPOSITIO LV.

Si ſpatium magnitudine, & ſpecie datum fuerit eius latera magnitudine data erunt.

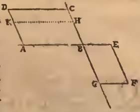


SPatium C D F E datum ſit magnitudine, & ſpecie. Dico CD, CE, EF, FD, eſſe data magnitudine, data ſit ad arbitriũ AB, magnitudine, & ſpecie. Fiat itaque [a] rectilineum ABHG, ſimile dato CDFE. Quoniam CDFE eſt ex hypotheſi datum ſpecie, & A B H G, erit [b] datum ſpecie; & A B H G eſt [c] datum magnitudine; ex hypotheſi verò CDFE, eſt datum magnitudine; ergo ratio ABHG, ad CDFE eſt [d] data; proinde ratio AB, ad CD eſt [e] data; eſt autem per conſtructionem data AB; ergo CD eſt [f] data; Itaque ob eandem rationem CE, EF, FD erunt [g] latera data.

a 18 ſexti.
b 3. def. huius.
c 32. huius.
d 1 huius.
e 14. huius.
f 2 huius.
g 2 huius.

PROPOSITIO LVI.

Si duo æquiangula parallelogramma habuerint, ad inuicem rationem datam, eſt vt primi latus, ad ſecundi latus ita reliquum ſecundi latus ad eam, ad quam alterum primi latus habet rationem datam, quam parallelogrammum, ad parallelogrammum habet.



SIt parallelogrammum A C æquiangulum parallelogrammo BF, ſitque data ratio parallelogrammi A C, ad parallelogrammum BF, producatur [a] recta A B ad E, & ut A B, ad BE ita fiat [b] G B, ad B H, ducaturque [c] K H parallela rectæ A B. Dico rationem C B, ad B H eſſe datã. Quoniam angulus ABC æqualis eſt ex hypotheſi angulo G B E, & linea C B G eſt [d] recta, & parallelogrammum AH æquale eſt parallelogrãmo B F, ex hypotheſi verò ratio parallelogrammi A C, ad B F eſt data, ratio igitur parallelogrammi A C ad parallelogr. AH eſt [f] data, ut verò CB, ad BH ita eſt [g] AC, ad AH, ergo ratio CB, ad BH eſt [h] data.

a 2. et prim.
b 12. ſexti.
c 31. primi.
d 15. primi.
e 14. ſexti.
f 7. quinti.
g 1. ſexti.
h 2. def. huius

COROLLARIUM.

Colligitur verò ex hac propoſitione, quemadmodum, eſt CB, ad BH ita eſſe [i] AC parallelogrammum ad parallelogrammum AH, vel parallelogrammum BF.

i 1. ſexti.

PROPOSITIO LVII.

Si datum ſpatium, ad datam rectam applicatum fuerit in angulo dato, datur latitudo applicationis.



PArallelogrammum A B C D, ſit datum, & A B, ſit recta linea data; angulus verò DAB ſit datus. Dico AD eſſe datam; fiat A E [a] quadratũ ex AB;& FA,& EB protrahãtur ad H & G [b] lineæ rectæ,& DC producatur ad G [c] recta. Quoniã F B, eſt [d] quadratum datum, & ex hypotheſi parallelogrammum ABCD eſt datum; & ratio quadrati FB,ad parallelogrammum ABCD eſt [e] data; at parallelogrammum ABGH, eſt [f] æquale parallelogrammo ABCD, ratio ergo quadrati F B, ad parallelogrammum AG, eſt [g] data; ut verò FB, ad AG ita eſt [h] FA,ad AH,ergo ratio FA,vel AB, ad AH eſt [i] data; Angulus autem HAB eſt [k] datus,& ex hypotheſi angulus DAB eſt datus; ergo angulus DAH, eſt [l] datus at angulus DHA eſt [m] datus, vtpote rectus, itemque angulus D eſt [n] datus per 32. primi ergo triangulum ADH, ſpecie datumeſt, [o] quare ratio D A, ad A H eſt [p] data, ratio autem AD,ad AB eſt [q] data; cùm oſtenta ſit ratio data AB ad A H eſtq; AB data, ex hypotheſi ergo AD eſt [r] data.

a 45. primi. b 2. petitio primi. c 2. pet primi. d 32. huius. e 2. huius. f 35. primi. g 8. huius. h 1. ſexti. i 2. definit. huius. k 13. axioma primi. l 4. huius. m 12. axioma primi. n 32. primi. o 40. huius. p 3. def huius. q 2. def huius & 8. huius prop. r 2. huius.

PROPOSITIO LVIII.

Si datum ad datam rectã applicetur deficiens data ſpecie, figura latitudines defectus, datæ ſunt.



SIt ADHL ſpecie datum. AB ſit data,D B I H ſit datum ſpecie. Dico D B, & DH eſſe datas; factæ ſint [a] A C, C B æquales, & CF, [b] ſimile D I, & C B, homologa [c] D B, & B H E, LI, DG ſint [d] rectæ. Quoniam ex hypotheſi A B, eſt data, erit [e] C B data; eſt autem ex hypotheſi D I, datum ſpecie, & per conſtructionem CF, ſimile eſt D I; ergo C F eſt [f] datum ſpocie; eſt autem C F, datum [g] magnitudine;ã data enim C B magnitudine, utpote dimidio totius datæ A B, data ſpecie figura CF deſcribitur. & A K æquale eſt [h] CI,vel DF,& A H æquale eſt [i] gnomoni KBG,& AH,plus KG,æquale eſt [k] C F, itaque AH plus KG eſt [l] datum, cùm CF ſit per 52. huius datum; eſt autem AH, ex hypotheſi datum, ergo K G eſt [m] datum magnitudine, & KG eſt [n] datum magnitudine, & ſpecie,cùm ſimile ſit ipſi DI, vel C F, ergo KH, vel C D eſt [o] data, ergo D B eſt. [p] data,cùm C B ſit data,vt ſupra oſtendimus, ac proinde cùm ratio DB,ad DH ſit [q] data; eſt enim D I ſpecie data, erit [r] DH etiam data, &c.

a 10. primi. b 18. ſexti. c 18. ſexti. d 2. huius. e 2. huius. f 3. definit. huius. g 52. huius. h 36. primi. i 2. axioma primi. k 2 axioma primi. l def. 1. huius m 1. d. huius. n 24. ſexti. o 55. huius. p 2. & 4. q 3. def huius. r 2. huius.

PROPOSITIO LIX.

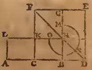
Si datum, ad datam rectam applicetur, excedens data ſpecie figura latitudines exceſsus datæ ſunt.

DAtum ſit ſpatium ADIL, & LH ſit recta data, at BDIH, ſit datum ſpecie, Dico HI, & HB eſſe datas; fiat [a] LK æqualis KH, & CE, ſimile ſit [b] BI, at verò CD, ſiat [c] homologa BD, & FHD, LI, BG ſint [d] rectæ,&c. Quoniam LH, eſt data ex hypotheſi, & KH, eſt [e] data, & BI eſt datum ſpecie ex hypotheſi, & K G, ſimile eſt [f] B I, & KG eſt [g] datum ſpecie, proinde K G, eſt [h] datum magnitudine; at verò A I, ex hypotheſi datum eſt magnitudine, & AK, æquale eſt [i] CH, vel HE, & AI æquale eſt [k] gnomoni K D G, & K G plus A I æquale [l] eſt CE; & CE erit [m] datũ magnitudine, cum GK ſit magnitudine datum ex demonſtratis, & A I magnitudine datum ex hypotheſi; at C E ſimile eſt B I, & C E eſt [n] datum ſpecie, & CD, vel KI erit [o] data magnitudine, at ex hypotheſi K H eſt data, ergo HI data erit [p]; ſed ratio HI ad HB eſt [q] data, ergo HB erit [r] data.

Vel aliter hoc modo.

Datum ſit AI excedens data ſpecie figura BI applicatum ad rectam datam LH. Dico HI, & HB eſſe

a 10. primi. b 18. ſexti. c 29. 6. d 2 primi. e 2. huius. f 24. 6. g 3. def huius h 53. huius. i 36. 43 primi k 2. axiom. 1. l 2. axioma 1. m 4. huius. n 3. def huius o 55. huius. p 4. huius. q 3. def. huius. r 2. huius.



HB eſſe datas. Secetur enim LH biſariam in *K*, & ab *K*H deſcribatur ipſi BI ſimile, ſimiliterque poſitum *K*G, & protrahatur FK ad partes K, donec occurrat BD protractæ ad partes B, occurrat autem in C, itemque protrahatur FG ad partes G donec occurrat DI protractæ ad partes I, occurrat autem in E, & compleatur figura, ut vides. Potuiſſet conſtitui CE ſimile ipſi BI, & reliqua perficere, in idem enim recidit. Quandoquidem BI ſimile eſt ipſi KG, igitur KG circa eandem diametrum exiſtit cum ipſo BI, ut conſtat ex Elementis, eſt autem BI ſpecie datum, ergo KG datum eſt ſpecie, ſed à data recta KH deſcriptum eſt, ergo per 52. huius KG eſt magnitudine datum, eſt autem datum AI, igitur AI, KG magnitudine data ſunt, ſed AI, & KG æqualia ſunt CE, ergo CE magnitudine datum eſt: ſed & ſpecie eſt datum, ſimile enim eſt ipſi BI, igitur ipſius CE per 55. huius latera data ſunt, quare latus KI datum eſt, latus autem *K*H eſt datum, æquale eſt enim ipſi LK, igitur reliqua HI data eſt, habet autem ad HB rationem datam, igitur HB eſt data.

PROPOSITIO LX.

Si datum ſpecie, & magnitudine parallelogrammum dato gnomone augeatur, aut minuatur, latitudines gnomonis datæ ſunt.



SVpponatur primò HE eſſe parallelogrammum datum magnitudine, & ſpecie, & HCE eſſe gnomonem datum. Dico HD, & EB eſſe datas. Quoniam parallelogrammum DB, eſt [a] magnitudine datum, cum ex hypotheſi datum ſit HE, & HCE gnomon ſit datus; at verò [b] parallelogrammum DB ſimile eſt parallelogrammo HE, & eſt HE parallelogrammum datum ſpecie ex hypotheſi, erit [c] parallelogrammum DB, ſpecie datum, ac proinde AD, AB erunt [d] datæ, at AH, AE ſunt quoque [e] datæ ſiquidem HE ex hypotheſi, eſt datum ſpecie, & magnitudine, ergo HD, & EB ſunt [f] datæ.

a 3. huius.
b 24. ſexti.
c 3. def. huius ſeu huius quod idē eſt.
d 55. huius.
e 55. huius.
f 4. huius.

Supponatur ſecundo DB eſſe parallelogrammum datum magnitudine, & ſpecie, & HCE eſſe gnomonem datum. Dico HD, EB, eſſe datas. Quoniam parallelogrammum HE eſt [g] datum magnitudine, cum DB parallelogrammum ſupponatur datum, & gnomon HCE ſit datus; eſtque [h] HE parallelogrammum ſimile parallelogrammo DB, ex hypotheſi autem DB parallelogrammum eſt datum ſpecie, & parallelogrammum HE eſt [i] datum ſpecie; ergo AH, AE erunt [k] datæ, at AD, AB, ſunt [l] datæ, cum parallelogrammum DB ſit datum ex hypotheſi magnitudine, & ſpecie; ergo HD, EB, erunt [m] datæ, &c.

g 4. huius ſeu huius.
h 24. ſexti.
i 3. def. huius.
k 55. huius.
l 55. huius.
m 4. huius.

PROPOSITIO LXI.

Si ad data ſpecie figuræ unum latus applicetur parallelogrammum ſpatium, in angulo dato, habeat autem data figura, ad parallelogrammum rationem datam parallelogrammum ſpecie datum eſt.



SVpponatur GB, AC propoſita figura, & GBDE ſit parallelogrammum applicandum, ſitque datus angulus EGB, & ratio GBAC, ad GD parallelogrammum ſit data. Dico parallelogrammum GD, eſſe datum ſpecie. Protrahatur [a] recta CG, ad F, ut ſit recta CGF, mox verò rectæ CF agatur [b] parallela recta HBL, & CH fiat [c] parallela rectæ GB, & protrahatur ED, ad L, ut fiat recta EDL. Quoniam angulus CGB eſt [d] datus, & ratio CG, ad GB eſt [e] data, & parallelogrammum CGBH eſt [f] datum ſpecie, eſt autem ex hypotheſi ACGB datum ſpecie, ergo ratio ABGC, ad parallelogrammum GH eſt [g] data; eſt autem ratio ABGC, ad parallelogrammum GD data ex hypotheſi; parallelogrammum GD æquale eſt [h] parallelogrammo GL, ergo ratio ad parallelogrammi GH, ad parallelogrammum GL, erit [i] data, ut autem CG, ad GF ita eſt [k] GH, ad GL, ergo ratio CG, ad GF erit [l] data, at ratio CG, ad GB eſt [m] data; ergo ratio GB, ad GF erit [n] quoque data, eſt [o] autem angulus

a 2. pet. primi.
b 31. primi.
c 31. primi.
d 3. def. huius.
e 3. def. huius.
f 34. primi, & 3. def. huius.
g 49. huius.
h 36. primi.
i 8. huius.
k 1. ſexti.
l 2. def. huius.
m 2. def. huius
n 8. huius.
o 13 primi.

gulus B G F datus ; angulus autem B G E eſt ex hypotheſi datus, quare anguli E G F, EFG erunt p dati angulus verò E eſt q datus, ergo triangulum E G F eſt r datum ſpecie; ratio verò E G, àd G F eſt ſ data;ergo ratio E G, ad G B eſt t data, angulus verò E G B datus ex hypotheſi, ergo parallelogrammum GD eſt u datum ſpecie &c.

p huius 13 primi. q 32. primi. r 40. huius. ſ 3. def. huius. t 8. huius. u 3. def. huius.

PROPOSITIO LXII.

Si duæ rectæ ad inuicem habeant rationem datam, & ab vna quidem data ſpecie figura deſcripta ſit ab altera autem ſpatium parallelogrammum in angulo dato, habeat autem figura, ad parallelogrammum rationem datam parallelogrammum ſpecie datum eſt.

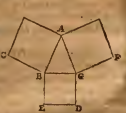


DAta ſit ratio A D, ad E F, & ADB ſit figura data ſpecie, datuſque ſit angulus EFG, & ratio A D B, ad parallelogrammum EG ſit data. Dico parallelogrammum EG eſſe ſpecie datum, fiat a parallelogrammum AC ſimile parallelogrammo EG, & AD, fiat b homologa E F, Quoniam ratio A D, ad EF eſt ex hypotheſi data; ergo ratio AC, ad EG erit c data, ratio autem ADB ex hypotheſi, ad EG, eſt data, ergo ratio ADB, ad AC eſt d data; angulus autem EFG, vel A D C eſt datus, & ex hypotheſi triangulum ADB eſt datum ſpecie, erit e A C datum ſpecie, ac proinde EG eſt f datum ſpecie, eſt enim ſimile ipſi AC quare, &c.

a 18. ſexti. b 18. ſexti. c 50. huius. d 8. huius. e 61. huius. f 3 def. huius.

PROPOSITIO LXIII.

Si triangulum ſpecie datum ſit, quod ab vnoquoque laterum deſcribitur quadratum; ad triangulum habebit rationem datam.



DAtum ſit ſpecie triangulum ABG, & B D, A C, A F ſint quadrata. Dico rationem quadrati BD, ad triangulum A B G datam eſſe; præterea rationem quadrati A C, ad triangulum ABG eſſe datam; ac demum rationem quadrati AF, ad triangulum ABG datam eſſe. Quoniam enim quadratum BD eſt a datum ſpecie, at ex hypotheſi triangulum A B G eſt datum ſpecie, ergo ratio quadrati B D, ad triangulum A B G eſt b data, & ratio quadrati A C, ad triangulum A B G eſt c data eadem demonſtratione, ut etiam eodem pacto oſtenditur ratio quadrati AF, ad triangulum ABG data.

a 3 def. huius. b 49. huius.

PROPOSITIO LXIV.

Si triangulum angulum obtuſum datum habeat, illud ſpatium, quo latus obtuſum angulum ſubtundens magis poteſt, quàm latera obtuſum angulum ambientia, ad triangulum, habebit rationem datam.



SVpponatur triangulum ABC eſſe propoſitum, & angulus A B C ſit maior recto datus, protrahatur a CB, ad D recta, &, ad CD, ducatur b perpendicularis A D, quadratum autem ex AC æquale eſt c quadrato ex C B plus quadrato ex A B plus duplo rectangulo C B D; rectangulum verò ſub CB, AD æquale eſt d duplo triangulo ABC. Dico rationem rectanguli dupli CBD, ad triangulum ABC eſſe datam. Quoniam angulus ABC eſt datus ex hypotheſi, angulus ABD eſt e datus, & angulus D eſt f datus, & angulus BAD eſt g pariter datus; ergo triangulum BAD eſt h datũ ſpecie, quare ratio BD, ad DA eſt i data, ut verò BD, ad DA ita eſt k rectangulum ſub BD, CB, ad rectangulum ſub DA, CB itaque ratio rectanguli ſub BD, CB, ad rectangulum, ſub DA, CB eſt l data, ſed ratio dupli rectanguli CBD, ad rectangulum ſub CB, DA, habet rationem datam, nam duplum rectangulum CBD, ad ſimplum CBD, habet datam rationem, & ſimplum C B D, ad rectangulum ſub C B, D A habet rationem datam, ergo duplum rectangulum CBD, ad rectangulum ſub CB, DA, habet rationem

a 2. poſt. primi. b 12. primi. c 12. ſecundi. d 41. primi. e 13. primi. f 12. axioma primi. g 32. primi. h 40. huius. i 3. def. huius. k 1. ſexti. l 2. def. huius.

tionem datam, ſed rectangulum ſub C B, DA, ad triangulum CBA, habet rationem datam, utpote duplam.

Ergo rectangulū ſub C B, A D, habet datam rationem ad triangulum duplum ABC nempe æqualitatis; ergo duplum rectangulum C B D, ad duplum triangulum ABC habebit m rationem datam. Sed duplum triangulum A B C ad ſimplum triangulum A B C habet rationem datam, utpote duplam; ergo duplum rectangulum C B D, ad ſimplum triangulum A B C habebit n rationem datam, eſt autem duplum rectangulum CBD, exceſſus, quo quadratum CA, ſuperat quadrata laterum C B, B A, ergo ratio illius ſpatij quo latus obtuſum angulum ſubtendens magis poteſt quàm latera obtuſum angulum ambientia ad triangulum habebit rationem datam. m 8. huius. n 8. huius.

MONITVM.

Si Lector aliquando viderit propoſitionem aliquam citatam, cùm tamen potiùs eius corollario propoſito inſeruiat, tam hucuſque quàm deinceps, ne id nobis vitio vertat; ſiquidem arbitramur lectoris induſtriæ poſſe committi, ex ipſa propoſitione corollarium inferre.

PROPOSITIO LXV.

Si triangulum angulum acutum datum habeat, illud ſpatium, quo latus angulum acutum ſubtendens minus poteſt, quam latera angulum acutum ambientia habebit, ad triangulum rationem datam.

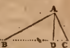


PRopoſitum ſit triangulum A B C, & angulus A C B ſit minor recto datus, fiat a ad B C perpendicularis AD, quadratum verò AB plus rectangulo bis B C, C D, æquale eſt b quadrato AC plus quadrato B C; rectangulum verò ſub B C, A D eſt c æquale duplo triangulo A B C; Dico rationem dupli rectanguli ſub B C, C D, ad triangulum A B C eſſe datam. Quoniam angulus A C D ex hypotheſi eſt datus, angulus autem A D C eſt d datus angulus D A C, eſt e datus ergo triangulum A D C eſt f datum ſpecie; ratio CD, ad DA, eſt g data, ut autem C D, ad A D, h ita eſt rectangulum ſub C D, BC, ad rectangulum, ſub A D, B C ergo data erit i ratio rectanguli ſub CD, BC ad rectangulum ſub AD, BC; ratio ergo dupli rectanguli, ſub B C, CD, ad rectangulum, ſub A B, B C erit k data; quamobrem ratio dupli rectanguli, ſub B C, C D ad duplum triangulū ABC erit l data, cùm rectangulum ſub B C, AD, ſit m æquale duplo triangulo A B C ergo ratio dupli rectanguli ſub B C, C D, ad ſimplum triangulum A B C erit n data, &c.

a 11. primi.
b 13. ſecundi.
c 41. primi.
d 12. axioma primi.
e 32 primi.
f 40. huius.
g Coroll. 3. def. huius.
h 1. ſextis
i 2. def huius
k 8. huius.
l 8. huius.
m 41. primi.
n 8. huius.

PROPOSITIO LXVI.

Si triangulum habuerit angulum datum, quod ſub rectis datum angulum comprehendentibus continetur rectangulum habebit, ad triangulum rationem datam.



PRopoſitum triangulum ſit A B C datuſque ſit angulus C. Dico rationem rectanguli ſub B C, AC, ad triangulum A B C eſſe datam. Ad rectam, B C, ducatur a perpendicularis A D. Quoniam ex hypotheſi, datus eſt angulus C, & angulus A D C eſt b datus angulus D A C, eſt c datus ergo triangulum AD C, eſt d datum ſpecie; ratio igitur A C, ad A D eſt e data; vt autem A C, ad AD, ita eſt f rectangulum ſub A C, B C, ad rectangulum, ſub A D, B C ergo ratio rectanguli, ſub A C, B C, ad rectangulum, ſub AD, B C eſt g data; atque duplum triangulum A B C, æquale eſt h rectangulo, ſub A D, B C, ergo ratio rectanguli ſub A C, B C, ad duplum triangulum A B C, eſt i data, ergo ratio rectanguli ſub A C, B C, ad triangulum A B C eſt k data.

a 11. primi.
b 12. axioma
c 32. primi.
d 40. huius.
e 3. def. huius.
f 1 ſexti.
g 2. def. huius.
h 41. primi.
i 8. huius.
k 8. huius.

PROPOSITIO LXVII.

Si triangulum habuerit datum angulum, illud ſpatium quo duo datum angulum comprehendentia latera tanquam vna recta plus poſſunt, quàm quadratum à reliquo latere ad triangulum habebit rationem datam,

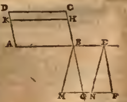


SIt propoſitum triangulum ABG ſitque datus angulus BAG protrahatur [a] BA, ad D, ut ſit recta BAD, & fiat [b] recta AD æqualis AG ducaturque [c] DGE; & rectæ AG fiat [d] parallela BE, angulus autem ADG æqualis eſt [e] angulo AGD, & angulus E eſt [f] æqualis augulo AGD, & BD æqualis eſt [g] BE, recta verò BD æqualis eſt [h] BA plus AG, ad ED perpendicularis agatur [i] BC & EC erit [k] æqualis CD; parallelogrammum autem DGE plus quadrato ex CG æquale eſt [l] quadrato ex CD, & quadratum BD æquale eſt [m] quadrato BG plus rectangulo DGE. Dico rationem rectanguli DGE eſſe, ad triangulum ABG datam. Quoniam ex hypotheſi angulus BAG eſt datus, & angulus GAD eſt [n] datus; angulus verò GAB æqualis eſt [o] angulo D duplo; ergo angulus D eſt [p] datus; atque adeo triangulum AGD eſt [q] datum ſpecie, ratio AD, ad DG eſt [r] data, ergo ratio quadrati DA, ad quadratum DG eſt [ſ] data; rectangulum verò ſub BA, AD, ad quadratum AD, eſt [t] ut BA, ad AD; ut verò BA, ad AD eſt [u] EG, ad GD, & ut EG, ad GD ita eſt [x] rectangulum ſub EG, GD, ad quadratum ex GD rectangulũ itaq; ſub BA, & AD, ad quadratum AD eſt [y] ut rectangulum EG, GD, ad quadratũ GD, & rectangulũ ſub BA, & AD, ad rectãgulũ ſub EG, & GD eſt, [z] ut quadratũ AD, ad quadratũ GD; ergo ratio rectãguli ſub BA, AD, vel rectanguli ſub BA, AG, ad rectangulũ ſub EG, GD; erit [&] data; & ratio rectanguli ſub BA, AD, ad triangulum ABG erit [ſ] data; ergo ratio rectanguli ſub EG, GD, ad triangulum ABG erit [*] data, &c.

- a 2. petitio 1.
- b 3. primi.
- c 1. & 2. pet. 1.
- d 31. primi.
- e 5. primi.
- f 29. primi.
- g 6. primi.
- h 2. axioma 1.
- i 12. primi.
- k 3. tertij.
- l 5. ſecundi.
- m 2. axioma 1.
- n 13. primi.
- o 32. primi.
- p 2. huius.
- q 40. huius.
- r 3. def. huius.
- ſ 50. huius.
- t 1. ſexti.
- u 11. ſexti.
- x 1. ſexti.
- y 11 quinti.
- z 16. quinti.
- & 2. def. huius.
- ſ 66 huius.
- * 9. primi.

PROPOSITIO LXVIII.

Si duo parallelogramma æquiangula habeant, ad inuicem rationem datam, & vnum latus, ad unum latus habeat rationem datam, & reliquum latus ad reliquum latus habebit rationem datam.



SVpponatur parallelogrammum AC, æquiangulum parallelogrammo BF, ratio verò parallelogrammi AC, ad parallelogrammum BF ſit data. Dico rationem CB, ad BG eſſe datam. Sitque data proportio AB ad BE, protrahatur [a] AB, &c. vt AB ad BE ita fiat [b] BG ad BH, rectæ autẽ AB agatur parallela KH. Quoniam ex hypotheſi angulus, ABC eſt æqualis angulo GBE, & CBG eſt [c] recta, cùm ABE, ſit linea recta, (ſunt enim AB, BE in directum conſtitutæ) parallelogrammũ autẽ AH æquale eſt [d] parallelogrammo BF, cũ ut AB ad BE, ita facta ſit BG ad BH, & eſt ex hypotheſi ratio AB, ad BE, vel GB, ad BH data, ergo, & ratio CB, ad HB eſt [e] data, propterea ratio CB, ad BG erit [f] data.

- a 2. petitio primi.
- b 12. ſexti.
- c 2. ſchol. 12. primi.
- d 14. ſexti.
- e 16. huius.
- f 8. huius.

PROPOSITIO LXIX.

Si duo parallelogramma datos angulos habeant, & ad inuicem rationem datam, habeat autem, & vnum latus, ad vnum latus rationem datam, & reliquum latus, ad reliquum latus habebit rationem datam.

Sint

SInt propoſita parallelogramma A C, B N, & A B C, M B E ſint anguli dati; & ratio parallelogrammi A C, ad parallelogrammum B N, ſit data, & ratio AB, ad BE ſit data. Dico rationem B C, ad B M eſſe datam; protrahatur [a] A B, ad E, & CB, ad G, & MN, ad F, & rectæ BG, fiat [b] parallela E F. Quoniam angulus A B C [c] æqualis eſt angulo G B E, & parallelogrammum B N æquale eſt [d] parallogrammo B F, ratio verò AC, ad BN eſt ex hypotheſi data, ratio A C, ad BF eſt [e] data, & ex hypotheſi ratio A B, ad BE eſt data; ergo ratio C B, ad BG eſt [f] data, at ex hypotheſi angulus ABC, vel GBE eſt datus, & ex hypotheſi quoq; angulus MBE, ergo MBG angulus erit [g] datus; angulus autem BMG eſt [h] datus, cum ex hypotheſi angulus MBE, ſit datus; ergo triangulum B M G eſt [i] datum ſpecie. Ratio autem BM, ad B G eſt [k] data; ergo ratio CB, ad BM erit [l] data, cùm ratio CB ad BG ſit [m] data.

Hic adhibeatur figura propoſitionis ſuperioris LXIII.

a 2. pet. primi. b 31. primi. c 15. primi. d 35. primi. e 7. quinti. f 68. huius. g 4. huius. h 29. primi. i 40 huius. k 3. def huius. l 2. huius. m 68. huius

PROPOSITIO LXX.

Si duorum Parallelogrammorum circa æquales angulos, aut circa inæquales quidem, datos tamen, latera ad inuicem habeant rationem datam, & ipſa parallelogramma habebunt, ad inuicem rationem datam.

PRopoſita primò ſint parallelogramma A C, B F, & angulus A B C ſit æqualis angulo GBE, ſitque ratio AB, ad B E data, & ratio C B, ad B G, ſit data. Dico rationem parallelogrammi A C, ad parallelogrammum B F eſſe datam. Protrahatur [a] recta A B, ad E, & ut A B, ad B E ita fiat [b] B G, ad B H, ducaturque [c] ipſi A B parallela recta KH. Quoniam C B G eſt [d] recta cum protracta ſit AB in directum ad E, ratio verò A B, ad B E, vel G B, ad H B eſt ex hypotheſi data, cum facta ſit [e] vt A B, ad B E, ita B G, ad BH, ex hypotheſi verò ratio CB, ad BG eſt data; ergo erit [f] ratio CB, ad B H pariter data; ratio parallelogrammi AC, ad parallelogrammum AH eſt [g] data, & parallelogrammum A H eſt [h] æquale parallelogrammo B F, cùm ut A B, ad B E ita facta ſit BG, ad BH, ergo ratio parallelogrammi AC, ad parallelogrammum BF erit [i] data.

Hic adhibeatur eadem figura propoſitionis LXVIII.

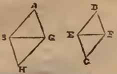
a 2. pet. primi. b 12. ſexti. c 31. primi. d 1. ſchol. 15 primi. e 12. ſexti. f 8. huius. g 1. ſexti. h 14. ſexti. i 7 quinti.

Supponamus ſecundo AC, B N eſſe parallelogrãma propoſita, & angulos A B C, MBE eſſe datos; ſitque ratio AB, ad BE data, & ratio C B, ad B M pariter data. Dico rationem parallelogrammi AC, ad parallelogrammum BN eſſe datam. Protrahantur AB, CB, rectæ in E, & G & MN, in F ducaturq; BG parallela E F. Quoniã angulus ABC, vel GBE eſt ex hypotheſi datus, & angulus MBE eſt datus, & angulus MBG, erit [k] datus, angulus BMG eſt [l] datus cùm ex hypotheſi angulus MBE ſit datus; ergo triangulum BMG erit [m] datum ſpecie, ratio BG, ad BM eſt [n] data & ex hypotheſi verò ratio C B, ad B M eſt data; ergo ratio CB, ad B G erit [o] data, ex hypotheſi verò ratio AB, ad BE data, & ratio A C, ad BF, eſt [p] data, at parallelogrammum B N eſt [q] æquale parallelogrammo B F; ergo ratio paralelogrammi AC, ad parallelogrammum BN erit [r] data.

k 4. huius. l 29. primi. m 40. huius. n 3. def huius. o 8. huius. p 7. quinti per primam partem huius propoſit. q 15. primi. r 7. quinti.

PROPOSITIO LXXI.

Si duorum triangulorum circa æquales angulos aut circa inæquales quidem, datos tamen latera ad inuicem habeant rationem datam, & ipſa triangula habebunt, ad inuicem rationem datam.



PRopoſita ſint triangula ABG, DEF, & angulus A æqualis ſit angulo D, vel A, & D, ſint anguli dati; ratio A B, ad DE ſit data, & ratio A G, ad D F ſit data. Dico rationem trianguli ABG, ad triangulum DEF eſſe datam. Sint [a] facta parallelogrãma A H, E D C; quoniam ratio parallelogrammi AH, ad parallelogrammum DC eſt [b] data, & parallelogrammum AH æquale eſt [c] duplo triangulo ABG & parallelogrammum DC æquale eſt [d] duplo

a 31. primi. b 70. huius. c 34. primi. d 34. primi.

c 15. quinti. Plo triangulo DEF, ergo ratio trianguli ABG, ad triangulum DEF eſt c data, &c.

PROPOSITIO LXXII.

Si duorum triangulorum, & baſes fuerint in ratione data, & altæ, ab angulis, ad baſes, quæ faciant angulos æquales, aut inæquales quidem ſed tamen datos, habeant, ad inuicem rationem datam, & ipſa triangula, ad inuicem habebunt rationem datam.



PRopoſita ſint triangula ABG, & FEC, & angulus A H G æqualis ſit angulo FMC, vel A H G, & FMC ſint anguli dati; ratio BG, ad EC ſit data, & ratio AH, ad FM ſit data. Dico rationem trianguli A B G, ad triangulum F E C eſſe da-
a 31. primi. tam. Ducatur a B D parallela rectæ H A, & E L, agatur pa-
b 31. primi rallela M F, ſiutque facta D G, L C parallelogramma. Quo-
c 31. primi. niam angulus DBG æqualis eſt d angulo L E C, vel D B G, L E C ſunt anguli dati, cum
d 29. primi.
e Sc.7. quinti. AHG, & FMC ſint vel æquales, vel dati, ratio vero AH, ad FM eſt ex hypotheſi data; & ratio D B, ad LE eſt data, item ex hypotheſi ratio BG, ad EC eſt data, ergo ratio parallelo-
f 70. huius. grammi D G, ad parallelogrammum L C erit f data, quambrem ratio trianguli A B G, ad
g 15. quinti. FEC erit g data, &c.

PROPOSITIO LXXIII.

Si duorum Parallelogrammorum circa æquales angulos, aut circa inæquales quidem, ſed tamen datos, latera, ad inuicem ita ſe habeant; ut ſit quemadmodum primi latus, ita reliquum ſecundi latus, ad aliam aliquam rectam, habeat autem, & reliquum primi latus, ad eandem rectam rationem datam, & ipſa parallelogramma habebunt, ad inuicē rationem datam, &c.

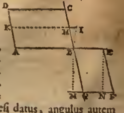
SVpponantur propoſita parallelogramma A C, B F, & anguli A B C, G B E ſint æquales; vt autem A B, ad B E ita ſit GB, ad BH, & ratio C B, ad B H ſit data. Dico rationem A C parallelogrammi ad parallelogrammum B F eſſe datam. Quoniam
a Coroll 53 huius. ut C B, ad B H ita eſt A C, ad BF; ratio autem C B, ad B H eſt
b 1. def huius. ex hypotheſi data, ergo ratio A C, ad BF erit b data.

Hic adhibeatur ea, quæ ſubſequitur figura.

Supponatur ſecundò propoſita parallelogramma A C, BN, & anguli A B C, MBE ſint dati, & vt A B, ad B E ita ſit M B, ad BI, ratio verò C B, ad IB ſit data. Dico rationem parallelogrammi A C, ad parallelogram-
c 31. primi. mum BN eſſe datā. Rectæ AB agatur c parallela IK, & CB, MN ſint rectæ protractæ, in G &
d 34. primi. F rectæ autē B G, ducatur d parallela E F, Quoniā ex hypotheſi angulus M B E vel ABI eſt
e 4. huius. datus; angulus ABH, eſt ex hypotheſi datus; ergo angulus HB I erit e datus, at angulus BHI
f 29 primi. eſt f datus cū ABH ſit ex hypotheſi datus; ergo triangulū BHI erit g datum ſpecie; ratio au-
g 40 huius.
h 3 def huius. tem I H, ad BI, eſt h data, ratio verò CB, ad BI eſt ex hypotheſi data, ergo ratio CB, ad
i 8. huius BH eſt i data ratio autem AC, ad BF eſt k data, & BN æquale eſt l BF ergo ratio AC, ad
k 2. def. huius.
l 35. primi. BN erit m data, &c.
m 7. quinti.

PROPOSITIO LXXIV.

Si duo parallelogramma datam rationem habeant, aut in æqualibus angulis, aut inæqualibus quidem ſed tamen datis, erit ut primi latus, ad ſecundi latus ita alterum ſecundi latus, ad eam, ad quam reliquum primi latus rationem habet datam.



PRopoſita primò ſint parallelogramma A C, B F, & anguli A B C, GBE ſint æquales, & vt A B, ad B E ita ſit G B, ad B H, ratio autem A C, ad BF ſit data. Dico rationem CB, ad
a 56. huius. BH eſſe datam; Ratio CB, ad BH erit a data per 56. huius.

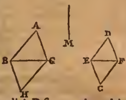
Propoſita ſecundo ſint parallelogramma AC, BN anguli verò ABC, MBE, ſint dati; ut autem AB, ad BE, ita ſit MB, ad BI, ratio autem AC, ad BN ſit data. Dico rationem CB, ad BI, eſſe da-
b 1. pet. primi. tā; Protractæ ſint b AB, MB, in E & I, & rectæ AB, agatur c paralle-
c 31. primi. la IK, ſintq; d protractæ CB, MN, in G & F, & recta BG agatur e
d 2. pet primi.
e 31 primi. parallela E F; Quoniā angulus M B E, vel A B I, eſt ex hypotheſi datus, angulus autem

ABH

ABH, vel BHI ex hypotheſi eſt datus, ergo angulus H B I, erit f datus, ac proinde trian- f 4. huius.
gulum BHI erit g datum ſpecie, itaque ratio BI, ad BH erit h data; at ex hypotheſi data g 40 huius. h 3 def. huius.
eſt ratio A C, ad B N, & parallelogrammum B F eſt i æquale parallelogrammo B N, ra- i 35. primi.
tio, ergo AC, ad BF eſt k data; ex hypotheſi autem, ut A B, ad B E ita eſt M B, ad B I, &, vt k 7. quinti.
M B, ad B I, ita eſt l G B, ad B H, ergo ut M B, ad BE ita erit m recta G , ad B H, quam- l 4. ſexti. m 11. quinti.
obrem ratio CB, ad B H erit n data, cum ratio A C, ad BF ſit o data, ergo ratio C B, ad BI n 50. huius.
eſt data, cum ratio BI, ad BH ſit p data, &c. o 7. quinti. p 3. def. huius.

PROPOSITIO LXXV.

Si duo triangula, ad inuicem habeant rationem datam, aut in angulis æqualibus, aut inæqualibus quidem, ſed tamen datis, erit, vt primi latus ad ſecundi latus, ita alterum ſecundi latus, ad eam rectam, ad quam reliquum primi latus habet rationem datam.



Data ſit ratio trianguli, ABG, ad triangulum D E F angulus A æqualis angulo D vel angulus A, & D ſint dati, at vero ut AB ad DE, ita DF, ad M; Dico rationẽ AG ad M eſſe datam. Fiant a parallelogramma A H, D C. a 11. primi.
Quoniam vt parallelogrammum A H, ad parallelogrammum DC, ita eſt b triangulum ABG, ad triangulum EF b 15. quinti.
& ex hypotheſi ratio trianguli A B G, ad triangulum DEF, eſt data, & ratio parallelogrammi AH, ad parallelogrammum DC eſt c data; ergo ratio AG, ad M erit d data, cùm anguli A, D ſint æquales, vel dati, & vt AB, ad DE ita ſit D F, ad M, &c. Vel c 2. def. huius d 74. huius

ſint triangula A B G, D E F, quæ ad inuicem habeant rationem datam, ſintque anguli BAG, EDF, vel æquales, vel inæquales quidem, ſed tamen dati; ſitque ut AB ad D E ità AG ad M, Dico eſſe ut AB ad DE ità DF ad M ad quam AG habet rationem datam. Compleantur parallelogrãma A H, D C: Quandoquidem triangulum ABG ad triangulum DEF habet rationem datam, ergo & parallelogrammum AH ad parallelogrammum D C aut in angulis æqualibus, aut inæqualibus quidem, ſed tamen datis, habebit rationem datam, quamobrem erit per 74. huius ut AB ad DE ità D F ad M, ad quam nimirum A G alterum primi trianguli latus habet rationem datam.

PROPOSITIO LXXVI.

Si à trianguli dati ſpecie vertice, linea perpendicularis agatur ad baſim habebit rationem datam.

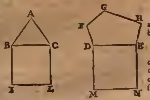


Triangulum A B C datum ſit ſpecie, & ad B C, ſit perpendicularis A D. Dico rationem A D, ad B C eſſe datam. Quoniam triangulum A B C eſt datum ſpecie, & angulus B eſt a datus, angulus A D B eſt b datus, ergo triangulum A D B eſt c datum ſpecie; ratio verò A B, ad A D eſt d data, & ratio AB, ad BC eſt e data; ergo ratio AB, ad BC eſt f data.

a 3. def. huius.
b 12. axio. 1.
c 40. huius.
d 3. def. huius
e 3. def. huius.
f 8. huius.

PROPOSITIO LXXVII.

Si data duæ figuræ ſpecie, ad inuicem habeant rationem datam, & quodlibet latus, vnius harum figurarum, ad quodlibet latus alterius habebit rationem datam.



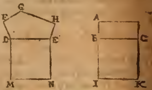
Datæ ſint ſpecie figuræ A B C, & G F D E H, & ratio A B C, ad G F D E H ſit data. Dico rationem B C, ad D E eſſe datam. ſint facta a quadrata B L, D N. Quoniam ratio ABC, ad BL eſt b data, & ex hypotheſi data eſt ratio A B C, ad G D E, ergo ratio B L, ad GDE erit c data, & ratio D N, ad G D E erit d data; proinde ratio B L, ad DN erit e data; atque adeo ratio B C, ad DE eſt f data, &c.

a 46. primi.
b 49. huius.
c 8. huius.
d 49. huius.
e 8. huius.
f 54. huius.

PRO.

PROPOSITIO LXXIIX.

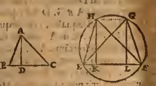
Si data figura ſpecie habeat, ad quod rect angulum rationem datam, habeat autem; & unum latusad unum latus rationem datam, rect angulum ſpecie datum eſt.



DAtæ ſpecie figuræ ſint GFDEH,& ratio G D E,ad rectangulum A C ſit data,& ratio D E ad B C ſit data. Dico rectangulum A C eſſe datum ſpecie, ex DE
a 46. primi. fiat a quadratū D N, & protracta b ſit AB in I,& rectan-
b 2.pet.primi. c 49. huius. gulum B K, fiat æquale quadrato D N. Quoniam ratio G D E, ad D N eſt c data, & ratio GDE, ad AC eſt ex
d 8. huius. hypotheſi data; ergo ratio D N, ad A C eſt d data; per conſtructionē autem DN, eſt æquale BK, ergo ratio BK,
e 7. quinti. ad A C erit e data, at ratio B I, ad A B eſt f data, & ut
f 1. ſexti. g 14. ſexti. D E ad BC, ita eſt g B I, ad DM,& ex hypotheſi ratio DE, ad BC eſt data,ergo ratio BI,ad
h 1.def.huius D M, erit h data; proinde ratio D M, vel D E, ad A B, erit i data, cùm ratio B I, ad A B
i 8. huius. k 1. ſexti. ſit k data,atque adeo ratio AB, ad BC erit l data, cùm ex hypotheſi data ſit ratio D E, ad
l 8. huius. m 3.de.huius B C; quapropter rectangulum A C erit m datum ſpecie, &c.

PROPOSITIO LXXIX.

Si duo triangula vnum angulum, cum angulo æqualem habeant, ab æqualibus autem angulis, ad baſes perpendiculares agantur,ſitque, ut primi trianguli baſis, ad perpendicularem, ita & alterius trianguli baſis, ad perpendicularem,illa triangula æquiangula ſunt.



PRopoſita ſint triāgula ABC,GEF,& angulus BAC ſit æqualis angulo EGF, & A D, ſit perpendicularis ad B C, & GL, ad EF,&, ut B C, ad AD, ita ſit EF,
a 23. primi. ad G L, Dico triangulum ABC æquiangulum eſſe
b 1.pet. 1. c 21. tertij. triangulo G E F, fiat a angulus F E H æqualis angulo B, & protractæ ſint b rectæ H F, H G, & agatur H K, perpendicularis ad E F, Quoniam angulus E H F
d 1. axiom 1. eſt c æqualis angulo EGF;& ex hypotheſi angulus BAC æqualis eſt angulo EGF;ergo EHF,
e 32. primi. æqualis eſt d angulo BAC,angulus HEF eſt æqualis per conſtructionē angulo B;ergo trian-
f 4. ſexti. g 4. ſexti. gulum EHF erit e æquiangulū triangulo ABC,ergo ut EK,ad KH ita eſt f recta BD,ad DA,
h 24. quinti. & vt FK ad KH, ita eſt g CD, ad DA, ergo vt EF, ad KH, ita BC erit h ad D A,at ex hypo-
i 9. quinti. thesi E, ut eſt EF, ad LG, ita BC, ad DA,& KH. LG ſunt i æquales, & K H eſt k parallela
k 28. primi. l 33. primi. rectę LG,ut,& HG parallela eſt l rectæ EF;ergo angulus EGH æqualis erit angulo m G E F
m 29. primi. pars autē circumferentię circuli EH, eſt n æqualis parti FG; ergo angulus EFH eſt o æqua-
n 26. tertij. o 27. tertij. lis angulo GEF,& angulus E H F eſt p æqualis angulo EGF; ergo triangulū EHF,eſt q æ-
p 21. tertij. quiangulum triangulo EGF, & triangulum E H F, eſt æquiangulum triangulo ABC cum
q 32. primi. r 21. ſexti. id ſit ſupra demonſtratum;ergo triangulum A B C erit r æquiangulum triangulo EGF,&c.

PROPOSITIO LXXX.

Si triangulum datum vnum angulum habuerit quod autem ſub lateribus datum angulum comprehendentibus continentur, rectangulum, habeat ad quadratum reliqui lateris rationem datam triangulum ſpecie datum eſt.



SIt propoſitum triangulum A E C angulus verò C ſit datus,ratio autem rectanguli AC, CF, ad quadratum AE ſit data. Dico triangulum A C E eſſe datum ſpecie: Quadratum A E plus quadrato B fiat æquale quadrato A C plus C E. Quoniam Angulus C eſt datus ex hypotheſi, ergo ratio trianguli A C E, ad quadratum B erit
a 67. huius. a data, ac proinde ratio trianguli ACE, ad rectangulum
b 66. huius. c 8. huius. ſub CA, CE erit b data, Itaque ratio quadrati B, ad rectangulum ſub CA, CE eſt c data;

at

At verò ratio quadrati A E, ad rectangulum ſub C A, C E eſt ex hypotheſi data; ergo ratio quadrati B, ad quadratum AE eſt [d] data; propterea ratio quadrati B plus quadrato AE, ad quadratum AE erit [e] data. Quadratum autem B plus quadrato A E; æquale eſt quadrato AC plus CE per conſtructionem, & ratio quadrati AC plus CE, ad quadratum AE eſt [f] data; ergo ratio AC plus CE, ad AE eſt [g] data; angulus verò C eſt datus ex hypotheſi; ergo triangulum AEC eſt [h] datum ſpecie.

d 8. huius.
e 18. quinti.
f 7. quinti.
g 54. huius.
h 46. huius.

PROPOSITIO LXXXI.

Si tres rectæ proportionales, tribus rectis proportionalibus extremas habuerit in ratione data, media quoque habebunt in ratione data, Et ſi extrema, ad extremam media, ad mediam habeat rationem datam; & reliqua, ad reliquam habebit rationem datam.

Sint proportionales A, B, C, & inſuper ſint proportionales D, E, F. Supponamusque primo rationem A, ad D eſſe datam; quemadmodum rationem C ad F, pariter eſſe datam. Dico rationem B, ad E eſſe datam. Quoniam quadratum B æquale eſt [a] rectangulo ſub A, C, cùm A, B, C, ſint proportionales, & quadratum E, ſit [b] æquale rectangulo ſub D, F, cùm D, E, F, ſint proportionales, ratio rectanguli ſub A, C, ad rectangulum ſub D, F erit [c] data, cùm ratio A, ad D, ſit data, & C, ad F, ratio verò quadrati B, ad quadratum E eſt [d] data; ergo ratio B, ad E erit [e] data.


ABC DEF

a 17. ſexti.
b 17. ſexti.
c 70. huius.
d 7. quinti.
e 54. huius.

Supponamus autem ſecundo rationem A, ad D eſſe datam, & etiam B, ad E, Dico rationem C, ad F eſſe datam. Quoniam ratio B ad E eſt ex hypotheſi data, & ratio quadrati B ad quadratum E eſt [f] data; ratio rectanguli ſub A, C ad rectangulum ſub D, F eſt [g] data, & ratio A, ad D eſt ex hypotheſi data, ergo ratio C, ad F eſt [h] data.

f 51. huius.
g 7. quinti.
h 68 huius.

PROPOSITIO LXXXII.

Si quatuor rectæ proportionales fuerint, erit, vt prima, ad eam ad quam ſecunda rationem habet datam, ita tertia, ad eam, ad quam quarta rationem habet datam.

Supponamus, vt A, ad B, ita eſſe D, ad E, & ut B, ad C ita E, ad F, & rationem B, ad C eſſe datam. Dico rationem E, ad F eſſe datam, & vt A, ad C ita eſſe D, ad F. Quoniam, vt B, ad C ita eſt E ad F ex hypotheſi, & ratio B, ad C eſt data; ergo ratio E, ad F eſt [a] data; propterea, vt A, ad C ita erit [b] D, ad E, cùm ſit, vt A, ad B, ita D, ad E, & vt B, ad C, ita E, ad F.


ABC DEF

a 2. def. huius.
b 22. quinti.

PROPOSITIO LXXXIII.

Si quatuor rectæ, ita ad inuicem ſe habeant, vt tribus ex ijs quibuſcumque ſumptis, & quarta ipſis proportionali accepta ad quam reliqua, è quatuor rectis rationem habeat datam, erit, vt quarta, ad tertiam ita ſecunda, ad eam, ad quam habet prima rationem datam.

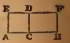
Propoſitæ ſint magnitudines A, B, C, D, & vt A ad B ita C, ad E, ratio verò D, ad E ſit data, & vt D, ad C, ita ſit B, ad F. Dico rationem A ad F eſſe datam. Quoniam, ut A, ad B, ita eſt ex hypotheſi C, ad E erit [a] rectangulum, ſub A, & E æquale rectangulo, ſub B, & C, vt verò eſt rectangulum, ſub A, & E, ad rectangulum ſub A, & D, ita eſt [b] recta E, ad D, at ex hypotheſi ratio E, ad D eſt data; ergo ratio rectanguli ſub A, & E, ad rectangulum ſub A & D erit [c] data; & ratio rectanguli ſub A, & D, ad rectangulum ſub B, & C erit [d] data, cùm rectangulum ſub A, & E ſit æquale rectangulo ſub B, & C; ex hypotheſi verò, vt D, ad C, ita B, ad F, ergo ratio A, ad F, erit [e] data, &c.


FAB CDE

a 1. ſexti.
b 1. ſexti.
c 2. def. huius.
d 7. quinti.
e 56. huius.

PROPOSITIO LXXXIV.

Si duæ rectæ datum ſpatium comprahendant, in angulo dato, ſit autem altera, altera maior data, etiam vnaquaque ipſarum data erit.



PRopoſitæ ſint magnitudines rectæ A B, A E, & EB ſit parallelogrammum datum; angulus verò A ſit datus, & AE ſit æqualis A C, ſitque CB recta data. Dico AE, & A B eſſe datas; ſiat a C D parallela A E, Quoniam angulus A datus eſt ex hypotheſi, & parallelogrammum E C eſt b datum ſpecie; & ex hypotheſi parallelogram. E B eſt datum & ex hypotheſi quoque CB eſt data, ergo A C, vel A E data erit c; at ex hypotheſi C B, eſt data, ergo A B eſt d data.

a 31. primi. b 3. def. huius. c 59. huius. d 5. huius.

PROPOSITIO LXXXV.

Si duæ rectæ datum ſpatium comprahendant in angulo dato, ſit autem ſimul vtraque data, & earum quoque vna quaque data erit.

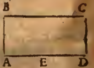


PRopoſitæ ſint rectæ DC, CB, & DB ſit datũ parallelogrammũ, & angulus D C B ſit datus, ſitque B C A recta, & A C æqualis C D, & AB ſit data. Dico D C, C B eſſe datas; ſit protracta F D, ad E, & A E ſiat parallela C D. Quoniam ex hypotheſi A C æqualis eſt C D, & ex hypotheſi quoque angulus, DCB, vel DCA eſt datus, ergo AD eſt c datum ſpecie; & ex hypotheſi AB eſt data; ergo AC, vel CD eſt d data, & CB, eſt e data, &c

a 2. petitio 1. b 31. primi. c 3. def. huius. d 58. huius. e 4. huius.

PROPOSITIO LXXXVI.

Si duæ rectæ datum ſpatium comprahendant in angulo dato quadratum autem vnius quadrato alterius maius ſit dato, quàm in ratione, & vtraque ipſarum data erit.



SVpponamus propoſitas magnitudines A B, & A D, & B D ſit datum parallelogrammum, & angulus A ſit datus, & rectangulum, ſub D A, A E ſit datum, quadratum autem A D, maius ſit quadrato AB, data quàm in ratione. Dico rectas AB, AD eſſe datas. Quoniam parallelogrammum BD eſt ex hypotheſi datum; rectãgulum verò ſub DA, AE eſt ex hypotheſi datum; ergo ratio parallelogrammi BD, ad rectangulum ſub D A, AE erit a data, ac proinde ratio A B, ad A E eſt b data; itaque ratio quadrati A B, ad quadratum A E erit c data; præterea ratio quadrati A B, ad rectãgulũ, ſub A D, ED erit d data; itaque ratio rectanguli, ſub AD, ED, ad quadratum A E erit e data; ob id ratio quadrupli rectanguli ſub AD, ED, ad quadratum AE erit f pariter data; atque adeo ratio quadrupli rectanguli ſub A D, ED, plus quadrato AE, ad quadratum AE erit g data, ſed quadratum A D plus ED æquale eſt h quadruplo rectangulo ſub A D, E D plus quadrato ex A E; ergo ratio quadrati ex A D, plus ED, ad quadratum ex AE erit i data, quo ſit, ut ratio AD plus ED, ad AE ſit k data; itaque ratio dupli, AD, ad AE erit l data; ergo ratio A D, ad A E erit m data; cumque rectangulum ſub A D, & A E, ad quadratum A E ſit n, ut A D, ad A E; ergo ratio rectanguli ſub A D, A E, ad quadratum A E erit o data; ex hypotheſi verò rectangulum ſub AD, A E eſt datum, & quadratum A E eſt p datum; ob id A E eſt q data; ergo AD, eſt r data; ex hypotheſi verò angulus A eſt datus; ergo A B eſt ſ data, &c.

a 1. huius. b 69. huius. c 51. huius. d 11. huius. e 8 huius. f 8. huius. g 18. quinti. h 8 ſecundi. i 2. def. huius k 54 huius. l 18. quinti. m 8. huius. n 1. ſexti. o 2. def huius. p 1. definitio huius. q 55. huius. r 57. huius. ſ 57. huius.

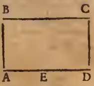
SCHOLION.

Illa conſequentia: ergo quadrati AB ad rectangulum ſub AD, ED, ratio erit data, patet; quadratum enim AD ex hypotheſi maius eſt quadrato AB data, quam in ratione, eſtque etiam ex hypotheſi datum rectangulum ſub AD, AE, quo ſublato ex quadrato AD remanet rectangulũ ADE; ergo per vndecimam definitionem ablato dato rectangulo DAE, reliquum rectangulum ADE ad quadratum AB; atque adeo quadratum AB, ad rectangulum ADE, habebit rationem datam.

PRO-

PROPOSITIO LXXXVII.

Si duæ rectæ datum ſpatium comprehendant in angulo dato, poſſit autem altera, altera maius dato, earum vtraque data erit.



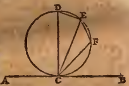
PRopoſitæ ſint rectæ A B, A D, & BD ſit parallelogrammum datum; angulus verò A ſit datus, & rectangulum ſub D A, A E ſit datum. Qnadratum verò AD, minus quadrato AB æquale ſit rectangulo ſub AD, AE. Dico, AB AD eſſe datas. Quoniam parallelogrammum B D eſt ex hypotheſi datum; rectangulum ſub D A, A E eſt datum ex hypotheſi; itaque ratio parallelogrammi B D, ad rectangulum ſub DA, AE erit [a] data, atque adeo ratio A B, ad A E erit [b] data; quo fit, vt ratio quadrati A B, ad quadratum A E, ſit [c] data, atque adeo cùm quadratum AB, ſit [d] æquale rectangulo, ſub AD, ED, ſiquidem quadratum AD minus quadrato A B æquale eſt rectangulo, ſub AD, AE, propterea ratio rectanguli ſub A D, E D, ad quadratum A E erit [e] data, & ratio quadrupli rectanguli ſub AD, ED, ad quadratum AE erit [f] data; ratio ergo quadrupli rectanguli ſub A D, E D plus quadrato A E, ad quadratum A E erit [g] data, ſed quadratum AD, plus ED æquale eſt [h] quadruplo rectangulo ſub AD, ED plus quadrato A E; ergo ratio quadrati AD plus ED, ad quadratum AE eſt [i] data, atque adeo ratio A D, plus E D, ad A E eſt [k] data; ratio vero dupli A D, ad A E eſt [l] data; Idem eſt enim dupla A D, ac AD plus ED, plus AE. ergo ratio A D, ad A E erit [m] data; rectangulum autem ſub AD, AE ad quadratum A E eſt [n] ut ad A D, ad AE; ergo ratio rectanguli ſub A D, A E, ad quadratum A E erit [o] data; rectangulum autem ſub AD, AE eſt ex hypotheſi datũ; ergo quadratum A E, erit [p] datum, itaque A E erit [q] data; ac proinde A D eſt [r] data; at ex hypotheſi angulus A eſt datus; ergo A B erit [ſ] data, &c.

a 8. huius. b 69. huius. c 51. huius. d 1. ſecundi. e 8. huius. f 8. huius. g 18 quinti. h 8. ſecundi. i 2. def. huius. k 54. huius. l 18. quinti. m 8. huius. n 1. ſexti. o 2. def. huius. p 2. huius. q 55. huius. r 57. huius. ſ 57. huius.

PROPOSITIO LXXXVIII.

Si in circulum magnitudine datum, acta ſit recta linea, quæ ſegmentum auferat, quod datum angulum comprehendat, acta recta linea magnitudine data eſt.

SVpponamus CFED eſſe circulum datum, & CE eſſe inſcriptam circulo C F D, angulum C F D, eſſe datum. Dico C E eſſe datam magnitudine; fiat [a] C D diameter, & agatur [b] E D recta. Quoniam angulus C F E eſt ex hypotheſi datus, & angulus C D E eſt [c] datus, angulus CED eſt [d] datus, ergo triangulum C E D eſt [e] datum ſpecie; proinde ratio C E, ad C D eſt [f] data; ex hypotheſi verò C D eſt data; ergo [g] recta C E erit data, &c.



a 1. 2. 3. petitio primi. b 1. pet. 1. c 22. tertij 4. huius. d 31. tertij. e 40. huius. f 3. def. huius. g 2. huius.

PROPOSITIO LXXXIX.

Si in datum magnitudine circulum, data magnitudine recta acta fuerit: auferet ſegmentum, quod angulum datum comprehendet.

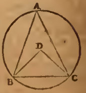
SVpponamus C F E D eſſe circulum datum, & C E eſſe inſcriptam circulo C F E D, & C E eſſe datam. Dico angulum C F E eſſe datum; fiat [a] diameter C D, & E D ducta ſit recta. Quoniam C D, C E, ſunt datæ ex hypotheſi; ergo ratio C D, ad C E eſt [b] data; angulus C E D eſt [c] datus; ergo triangulum CDE eſt [d] datum ſpecie, propterea angulus CDE eſt [e] datus; atque adeo angulus CFE eſt [f] datus, &c.

Repetatur hic ſuperioris propoſitionis figura.

a 1. 2. 3. pet. primi. b 1. huius. c 31. tertij. d 43. huius. e 3. def. huius. f 22. tertij.

PROPOSITIO XC.

Si in Circuli poſitione dati circumferentia datum fuerit punctum, ab eo autem puncto, ad circumferentiam circuli inflexa fuerit recta, quæ datum angulum efficiat inflexæ rectæ altera extremitas data eſt.



SVpponamus Circulum B A C eſſe poſitione datum, & punctum B eſſe datum in parte circumferentiæ, & angulum B A C eſſe datum. Dico punctum C eſſe datum; reperiatur ᵃ punctum D centrum Circuli, & *D*B, DC ſint ᵇ ductæ, rectæ. Quoniam ex hypotheſi B, & D, ſunt puncta data, & BD erit ᶜ data, angulus BAC eſt ex hypotheſi datus, & angulus BDC æqualis eſt ᵈ duplo anguli BAC; ergo angulus B*D*C eſt ᵉ datus, & *D*C eſt ᶠ data poſitione; ex hypotheſi verò circulus ABC eſt datus poſitione; ergo punctum C eſt ᵍ datum poſitione, &c.

a 1. tertij.
b 1. pet. primi.
c 26. huius.
d 20. tertij.
e 2. huius.
f 29. huius.
g 25. huius.

PROPOSITIO XCI.

Si à dato puncto acta recta fuerit quæ datum poſitione circulum contingat, acta linea poſitione, & magnitudine data eſt.

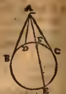


SVpponamus *D*AEB, eſſe circulum poſitione datum, & G eſſe punctum datum, & GA eſſe lineam rectam tangentem circulum, & A eſſe punctum contactus. Dico A G eſſe datam poſitione, & magnitudine; Ducantur ᵃ rectæ DA, *D*G, & fiat ᵇ ſemicirculus DAG. Quoniam ex hypotheſi *D*, & G ſunt puncta data, & angulus ᶜ *D*AG eſt rectus, & punctum A eſt ᵈ in parte circumferentiæ D A G; ergo circulus *D*AG eſt ᵉ datus poſitione; eſt autem ex hypotheſi circulus A E B poſitione datus, ergo punctum A erit ᶠ datum, & punctum G eſt ex hypotheſi datum; ergo AG erit ᵍ data poſitione, & magnitudine, &c.

a 1. pet. primi.
b 3. pet. primi.
c 18. tertij.
d 31. tertij.
e 6. def. huius
f 25. huius.
g 26. huius.

PROPOSITIO XCII.

Si extra circulum poſitione datum accipiatur aliquod punctum, à dato autem puncto, in circulum producatur quædam recta datum eſt id, quod ſub acta linea, & ea, quæ inter punctum, & conuexam peripheriam comprehenditur rectangulum.



SVpponamus B F E eſſe circulum datum, & punctum *A* eſſe datum, lineam AE eſſe arbitrariam. Dico rectangulum EAF eſſe datum; Fiat ᵃ AB, tangens circuli B F E; Quoniam A B data eſt ᵇ poſitione, & magnitudine, & quadratum A B eſt ᶜ datum, rectangulum E A F æquale ᵈ eſt quadrato A B; ac proinde rectangulum EAF erit ᵉ datū.

a 17. tertij.
b 91. huius.
c 52. huius.
d 36. tertij.
e 2. def. huius

PROPOSITIO XCIII.

Si intra datum poſitione circulum ſumatur aliquod datum punctum, per punctum autem, agatur in circulum aliqua recta, quod ſub ſegmentis actæ rectæ lineæ comprehenditur rectangulum datum eſt.



SVpponamus E A B C D eſſe circulum datum, & F, eſſe punctum datum, & AFC eſſe rectam datam. Dico rectangulum A F C eſſe datum. Fiat ᵃ diameter B E F D. Quoniam F, & E ſunt puncta data, ex hypotheſi, ergo FE erit ᵇ data, & E B, vel E *D* eſt ᶜ data, & F B, ac FD erunt ᵈ datæ. Ergo rectangulum D F B eſt ᵉ datum; rectangulum autem A F C eſt ᶠ æquale rectangulo D F B, ergo rectangulum A F C erit ᵍ datum, &c.

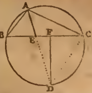
a 1. & 2. pet. primi.
b 26. huius.
c 6. def. huius.
d 3. 4. huius.
e 52. huius.
f 35. tertij.
g 2. def. huius

Vel.

Vel. Quoniam datum eſt vtrumque punctorum E, F ergo recta E F, erit[a] poſitione, & a 26. *huius.*
magnitudine data. Eſt autem circulus E A B C D poſitione datus, ergo utrumque pun-
ctorum B, *D.* datum erit[b]; punctum autem F eſt datum, igitur utraque rectarũ B F, F *D* da-
ta[c] erit, quamobrem rectangulum, quod ſub *D* F, F B continetur datum erit; ſed rectan- b 25. *huius.* c 26. *huius.*
gulum A F C æquale eſt[d] rectangulo D F B ergo rectangulum A F C erit[e] datum. d 35. *tertij.* e 2. *def. huius*

PROPOSITIO XCIV.

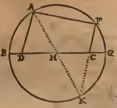
Si in circulum magnitudine datum agatur recta linea, quæ ſegmentum auferat, quod angulum datum comprehendat, angulus autem, qui in ſegmento conſiſtit bifariam ſecetur, ſimul vtraque rectarum, quæ angulum datum comprehendunt, ad lineam, quæ angulum bifariam ſecat, habebit rationem datam, & quod, ſub ſimul vtriſq; quæ datum angulum comprehendunt rectis, & inferne abſciſſa, ab ea, quæ angulum in circumferentia datum bifariam ſecat, rectangulum datum erit.



DAtus ſit circulus *B* A C D, & angulus B A C ſit quoque datus,
præterea angulus, BAD, æqualis ſit angulo D A *C*. Dico ra-
tionem *B*A plus AC, ad AD eſſe datam, & rectangulum ſub BA plus
A C, & E D, eſſe datum; ducatur[a] recta C D; Quoniam angulus
BAC eſt ex hypotheſi datus; ergo BC erit[b] recta data, & angulus a 1. *pet. primi.*
CAD, eſt[c] datus, ergo CD data erit[d]. At verò, vt C A, ad A B b 88 *huius.*
ita[e] eſt C E, ad E B, & ut C A, ad *C* E ita[f] erit A B, ad E B, & vt c 2. *huius.*
CA plus AB, ad CB, ita eſt[g] AB, ad E B, & angulus ABE æqualis d 90. *huius.*
eſt[h] angulo ADC; ex hypotheſi verò angulus BAE æqualis eſt an- e 3. *ſexti.* f 16. *quinti.*
gulo DAC; ergo triangulum A B E æquiangulum eſt[i] triangulo A D C, quare vt AB, ad g 12. *quinti.* h 21. *tertij.*
EB ita eſt[k] AD, ad DC, ergo vt CA plus AB, ad C B ita[l] eſt A D, ad D C; cum fuerit i 32. *primi.*
ut CA plus AB, ad C B, ita A B ad E B id enim ſuperiùs demonſtratum fuit; ergo eſt[m] ut k 4. *ſexti.*
CA plus AB, ad AD, ita *C*B ad DC,[n] eſt autem ratio *C*B per primam huius ad DC, data, l 18. *quinti.*
& ratio C A plus AB, ad AD erit[o] data. Angulus A B E æqualis eſt[p] angulo E D C, & m 16. *quinti.*
angulus AEB æqualis[q] eſt angulo D E C, & triangulum AEB æquiangulum eſt[r] trian- n 1. *huius.* o 2. *def. huius*
gulo DEC, ergo vt CD, ad DE ita[ſ] eſt AB, ad BE, ſed ut AB ad BE ita[t] eſt CA plus AB, p 21. *tertij.* q 15. *primi.*
ad CB, cùm ut CA plus AB, ad CB, ita AB ſit demonſtratum eſſe ad BE, & vt CD, ad DE r 32. *primi.* ſ 4. *ſexti.*
ita[u] eſt CA plus AB, ad C B; ergo[x] rectangulũ ſub C A plus AB, & D E æquale erit re- t 12. *quinti.*
ctangulo ſub CD, CB; ergo rectangulum ſub CD, CB eſt[y] datum; ac proinde rectangu- u 11. *quinti.* x 16. *ſexti.*
lum ſub CA plus AB, & DE, eſt[z] datum. y 52. *huius.* z 1. *def. huius.*

PROPOSITIO XCV.

Si in Circuli poſitione dati diametro ſumatur datum punctum à puncto autem in circulum producatur quadam recta, & agatur, à ſectione ad rectos angulos in productam rectam linea; per punctum autem in quo linea, quæ, ad rectos angulos conſiſtit; occurrit circumferentiæ circuli, agatur parallela productæ rectæ datum eſt illud punctum in quo parallela occurrit ipſi diametro, & quod ſub parallelis rectis lineis comprehenditur rectangulum datum eſt.



SVpponamus circulum B A G *K*, & B G ſit diameter; D,
verò ſit punctum datum; ſitque D A linea arbitraria;
DAE ſit angulus rectus, & EC, AD ſint parallelæ. Dico pun-
ctum C eſſe datum, & rectangulũ ſub AD, EC eſſe datum. Pro-
trahatur[a] recta EC, ad K. ducaturque[b] recta A K. Quoniam a 2. *pet. primi.*
angulus D A E eſt rectus ex hypotheſi; & angulus A E K eſt[c] b 1 *pet primi.*
rectus; & A*K* eſt[d] diameter, & BG eſt diameter, ex hypo- c 29. *primi.*
theſi; & H eſt[e] centrum circuli, punctum H eſt datum ex hy- d 31. *tertij.* e 14. *axio.* 1.
potheſi, ut etiam punctum D; ergo D H erit[f] linea data; an- f 26. *huius.*
gulus autem E K A, æqualis eſt[g] angulo D A K, & angulu g 29 *primi.* h 13. *primi.*
CHK æqualis[h] eſt angulo A H D, & triangulum C H K, æquiangulum eſt[i] triangulo i 32. *primi.*
AHD,

k 15. def. 1. l 26. primi. m 26. huius. n 1. def. huius o 97. huius. p 26. primi. q 93. huius. r 3. ſchol. def. 2. apud Herig. ſ 1. def. huius

AHD, at HK, HA ſunt k æquales, & HC, HD ſunt l æquales; & DH erit m data; ac proinde HC erit n data, punctum autem H eſt ex hypotheſi datum ergo Punctum C erit o datum; at AD æqualis eſt p rectæ CK; & rectangulum ſub KC, CE eſt q datum, itē rectangulū ſub AD, CE, æquale eſt r rectangulo ſub KC, CE ergo rectangulum ſub AD, CE erit ſ datum, &c.

SCHOLION.

Hic porrò conſiderandum eſt in maiorem declarationem eorum, quæ ſuperiùs attulimus, circa Propoſitionem LVI, & alias inde dependentes, vbi habetur; Si duo æquiangula parallelogramma habuerint ad inuicem rationem datam, eſt vt primi latus ad ſecundi latus, ita reliquum ſecundi latus ad eam, ad quàm alterum primi latus habet rationem datam, quam habet parallelogrammū ad parallelogrammum. Cōcluditur autem data ratio CB ad BH; perinde eſt autem ac ſi dicamus, vt eſt AB latus primi parallelogrāmi ad BE latus ſecundi, ita BG reliquū ſecundi latus ad BH, ad quam alterum primi latus, nempe CB habet rationē datā, quam habet parallelogrammū AC ad parallelogrammum BF; eſt enim AH æquale BF, cùm ſit ut AB ad BE, ita BG ad BH; vnde AC ad AH eandem habebit rationem, quam habet ad BF, ſed ut AC ad AH, ita eſt CB ad BH; quare AC ad BF erit, vt CB ad BH; eſt autem data ratio AC ad BF; ergo data eſt etiam ratio CB ad BH. Hoc autem eſt demonſtraſſe, vt eſt primi latus ad ſecundi latus, ita reliquum ſecundi latus ad eam, ad quam alterum primi latus habet rationem datam, quam habet parallelogrammum, ad parallelogrammum. Per Corollarium autem inferrebatur, vt CB, ad BH, ita parallelogrammum AC ad parallelogrammum BF. & non diſſimiliter de alijs, quæ inde ſequuntur, &c.

Cæterum plures ex ſupradictis Propoſitionibus, alia quoque ratione demonſtrari potuiſſent noluimus tamen in ijs demonſtrandis, varias demonſtrationes adhibere; ne tedio Lectorem afficeremus.

In epilogum rediguntur, quæ in Datorum libro tradita ſunt.

SVnt igitur hæc nonaginta Datorum Theoremata, quæ Pappus Alexandrinus initio ſeptimi Libri Collectionum Mathematicarum innuerat, quorum primò quidem vniuersè in magnitudinibus Diagrammata fuerunt viginti tria. Vigeſimum quartum in rectilineis proportionalibus ſine poſitione. Deinceps autem ſequentia quatuordecim, in rectis lineis poſitione datis; decem verò quæ ſequuntur in triangulis ſpecie datis ſine poſitione. Sex reliqua ſequentia in parallelogrammis, & applicationibus ſpatiorum ſpecie datorum. Ex ijs, quæ deinceps ſequuntur, primum quidem eſt in lineis, quatuor autem in ſpatijs triangulis, quòd differentiæ quadratorum laterum ad ipſa triangula datam habeant rationem. Quæ verò ſequuntur ſeptem uſque ad ſeptuageſimum tertium de duobus ſunt parallelogrammis, quòd ob poſitiones in angulis, rationem inter ſe datam habeant. In ſequentibus verò ſex diagrammatibus, vſque ad ſeptuageſimum nonum, duo quidem ſunt in triangulis, quatuor autem in pluribus rectis lineis proportionalibus. Ex iis porrò, quæ deinceps ſequuntur tria ſunt in duabus rectis lineis proportionalibus datum ſpatium continentibus. At vero, qui in omnibus octo, videlicet ad nonageſimum vſque, in circulis oſtenduntur, vel magnitudine tantum datis, vel poſitione quoque, nimirum rectis lineis per datum punctum ductis. De his hactenus.

Libri de proportionis ſectione ab Apollonio conſcripti ad locum reſolutū faciunt. Problema.

Sequebantur autem ex eiuſdē Pappi teſtimonio Lib. Apollonii περί λόγου ἀποτομῆς nempe de proportionis ſectione, qui pariter ad locum faciunt reſolutum, quos tamen præſens ætas non vidit, niſi exiguè reſtitutos Snelij labore. Erat enim duorum librorum propoſitio vna ſubdiuiſa, quarum vnam Pappus ita deſcripſit.

Per datum punctum rectam lineam ducere ſecantem à duabus rectis lineis poſitione datis; ad data in ipſis puncta lineas, quæ proportionem habeant eandem datæ proportioni.

Sed vt ait ipſe contingit figuras differentes eſſe & numero plures ob ſubdiuiſionem factam, & linearum datarum inter ſe poſitionem, & differentes caſus puncti dati, & ob reſolutiones, compoſitioneſque ipſorum, & determinationum. Primus enim liber ipſo referente habebat de proportionis ſectione locos ſeptem, caſus vigintiquatuor, determinationes quinque, quarum tres quidem maximæ, duę verò minimæ erant; maxima autem erat ad tertium caſum quinti loci; minima ad ſecundum ſexti, & ſeptimi loci; maximæ autem ad ſexti, & ſeptimi quartos caſus.

Liber ſecundus de proportionis ſectione locos habebat viginti quatuor, caſus ſexaginta tres, & determinationes ex primo libro, ad quem totus referebatur, & Lemmata habebat

vi-

viginti; Duo verò commemorati libri Theoremata centum, & octoginta vnum, etſi iuxta Periclem etiam plura, ut præfatus auctor teſtatur.

Pappus parũ accuratè horum librorũ retulit argumentum

Pappus non multum explicuit argumenta librorum, quos temporis iniuria periiſſe conſtat,& certè ſi cum iis quoque Datorum liber ex hominum memoria ſublatus fuiſſet,ex relatis à Pappo, nemini profectò datum eſſet Euclidem rediuiuum reddere, atque Datorum doctrinam exuſcitatam efficere. Non mirum igitur ſi cætera, quæ ad locum faciunt reſolutum, eiuſdem atteſtatione ad hanc vſque diem integrè reſtitui minimè potuerint; tametſi in hoc non obſcuri nominis Viri, plurimum laboris pertulerint, plurimumque temporis inſumpſerint.

Ad Libros igitur de proportionis ſectione quod attinet,præter ea,quæ Snellius induſtriosè præſtitit, quiſque poterit eius imitatione Apollonii quidem argumentum verſare, atque adeo Theoremata ad hanc materiam ſpectantia condere,& problemata ſtruere, quod etiam & nos præſtare non grauabimur, cùm ſeſe occaſio obtulerit.

Libri de ſpatij ſectione, quos Apollonius deſcripſit ad locum eundem faciebãt reſolutum. Problema.

Sequebantur Libri Pappo referente eiuſdem Apollonij περὶ χωρίου ἀποτομῆς hoc eſt De ſpatii ſectione. Hi quoque ad locum faciebant reſolutum. Erant autem duo, problema verò vnum bis ſubdiuiſum, vnaquęque propoſitio, quæ alia quidem habet ſuperioris ſimilia, ſed eo tantum differt, quod in illa opportet duas tantum lineas abſciſſas datam habere proportionem, in hac autem datum ſpatium continere. Sic enim ſe habebat. *Per datum punctum rectam lineam ducere ſecantem à duabus rectis lineis poſitione datis, ad data puncta, lineas, quæ ſpatium contineant dato ſpatio æquale.* Quæ quidem propoſitio figuras habet differentes ob cauſam ſuperius allatam, & numero plures; itaque primus liber de ſpatij ſectione habebat locos ſeptem, caſus viginti quatuor, determinationes verò ſeptem,quarum quatuor maximæ, tres verò minimæ, & maxima quidem erat ad primum caſum primi libri, ad primum & ſecundum caſum quarti loci, & ad ſexti loci tertium, minima ad tertium caſum tertii loci, ad quartum caſum quarti loci, & ad primum ſexti loci.

Secundus autem liber de ſpatii ſectione treſdecim habebat locos, caſus ſeptem, determinationes autem ex primo libro, ad quem quidem referebatur; Primus autem liber continebat Theoremata quadraginta octo, ſecundus ſeptuaginta ſex.

Ita quidem Pappus, qui ſi exactiùs horum duorum de ſpatii ſectione retuliſſet argumentum, operoſum fortaſſe non fuiſſet præſtare quæ ab Apollonio tradita fuerunt; Snellius tamen hac etiam in re ſuam interpoſuit induſtriam, quatuor problemata condens, quorum primum. *Datis duabus rectis, per datum in alterutra punctum rectam educere, quæ ad datos in expoſitis terminos, abſumat ſegmenta datum ſpatium comprehendentia*; ſecundum. *Datis duabus rectis per datum punctum educere rectam, quæ ad earum concurſum intercipiat ſegmenta ſpatium datum comprehendentia*; tertium. *A datis duabus parallelis recta per punctum, quod in neutra earum ſit acta, ad datos in ipſis terminos, abſumere ſegmenta datum ſpatium comprehendentia*; quartum. *Datis duabus rectis annuentibus per punctum extra ipſas datum, rectam ducere, quæ ad datos in ipſis terminos abſumat ſegmenta datum ſpatium comprehendentia.*

Libri de determinata ſectione conſcripti quoque ſunt ab Apollonio qui faciebant ad locum reſolutum.

Deinceps ſequebantur libri περὶ διωρισμένης τομῆς,hoc eſt de determinata ſectione, quorũ vna erat propoſitio, eaque diſiuncta, nempe. *Datam infinitam rectam lineam uno puncto ſecare, itaut interiectarum linearum ad data ipſius puncta, vel unius quadratum, vel rectangulum duabus contentum datam proportionem habeat, vel ad rectangulum contentum vna ipſarum interiecta, & alia extra data, vel duabus interiectis contentum, punctis ad utraſque partes datis.* Notat autem Pappus, huius, veluti bis diſiunctæ difficiles determinationes habentis demonſtrationem, per plura fieri neceſſe eſſe, quod bifariam ab Apollonio præſtitum eſſe, ait, vno quidem modo peruulgato, vſitatoque in nudis rectis lineis, ut habetur ſecundo elementorum Libro Euclidis, alio verò magis accomodatè, ac ingenioſè per ſemicirculos. Primus autẽ liber, eodem referente, ſex habebat problemata,Epitagmata,hoc eſt auxiliaria ſexdecim,& determinationes quinque, quarũ quatuor maximæ,atq;vna minima, erant autem maximæ ad ſecundum epitagma ſecundi problematis ad tertium quarti,ad tertiũ quinti,& ad tertiũ epitagma tertij problematis. Secundus verò liber continebat problemata tria, epitagmata nouem, & determinationes tres, quarum quidem, minimæ erant ad tertium primi, & ad tertium ſecundi; maxima autem ad tertium tertii problematis. Lemmata primi Libri erant viginti ſeptem; ſecundi verò Libri viginti quatuor, & in vniuerſum,

vtriuſque

utriuſque libri de determinata ſectione Theoremata erant octoginta tria.

Conatur autem hanc Geometriæ partem reſtituere Snellius, quatuor problematibus; quorum primum. *Datam rectam lineam infinitam vnico puncto ſecare, vt è rectis ad data duo puncta abſumptis vnius quadratum ad rectangulum ſub reliqua, & data externa comprehenſam rationem habeat datam.* Secundum; *Datam rectam lineam infinitam vnico puncto ſecare vt è rectis ad data tria puncta abſumptis, quod ſub vna ipſarum, & data externa ad id quod ſub duabus reliquis comprehenditur rationem habeat datam.* Tertium: *Datam rectam lineam infinitam vnico puncto ſecare, vt è rectis, ad data in ipſa tria puncta abſumptis rectangulum ſub duabus comprehenſum, ad reliqua quadratum rationem habeat datam.* Quartum; *Datam rectam lineam infinitam, vnico puncto ſecare, vt è rectis ad data in ipſa quatuor puncta abſumptis, rectangulum ſub duabus optatis comprehenſum ad rectangulum ſub reliquis rationem habeat datam.*

Nulla Geometriæ pars eſt vtilior, quã ea in qua de lineæ ſectione agitur.

At ſi vlla eſt Geometriæ pars, quam locupletare liceat, hæc profecto eſt; Vnde hęc ætas beneficio ſpecioſæ Analytices Antiquitatem ſuperauit, nec vlla quidem videtur uberior, nulla færacior; Nos autem in hac multum inſudauimus, & infinita propemodum, tam Problemata, quàm Theoremata condidimus, rati hinc plurimum emolumenti Geometram aſſecuturum, cum mirum ſit quantum utilitatis afferat lineę diuiſio, ad omnia, quę in ipſa vniuerſa Geometria tractari poſſunt; ea verò ſi Deo placuerit, atq; adeo hanc Geometriæ partem uberrime tractatam aliquando tandem afferemus. Vnde facile poſſet intelligere, qui ſe magnum iactat Geometram parum admodum eſſe in ipſa Geometria verſatum, cùm Artem Analyticam nec à primo limine ſalutauerit; putat ſe Apolloniũ alterum, & tamen magnifacit ſolutionem trium problematum ſatis vulgarium, dum interim me in his nihil feciſſe arbitror, quamuis plura, quàm tria milliũ propoſitionum proprio marte adinuenerim, adnotandum eſt autem; Veteres per ἐπιτάγμα, intellexiſſe ſubſidiariũ quoddã.

Libri duo de tactionibus ab Apollonio cõſcripti ad locũ faciebant reſolutũ. Auctor uel in his ſe ſeciſſe arbitratur, quamuis plus quam tria mill'ium propoſitionum proprio marte, adinuenerit.

Succedebant deinceps duo libri ἐπαφῶν, hoc eſt tactionum in quibus propoſitiones videbantur plures è quibus vnam tantum attulit Pappus, nimirum. *Punctis, & rectis lineis, & circulis tribus, quibuſcumque poſitione datis, circulum deſcribere per vnumquodque datorum punctorum, qui vnamquamque datarum contingat;* & rectè ipſe obſeruat ob multitudinem datorum huius in propoſitionibus ſimilium particulares propoſitiones differentes fieri neceſſe eſſe; & quæ ſequuntur apud Pappum videri poſſunt. Primus autem liber tactionũ habebat problemata ſeptem, ſecundus problemata quatuor; Lemmata vero ipſorum duorum librorum erãt viginti vnũ theoremata vero ſexaginta; Geometriæ hæc pars Recentiorum labore ſatis copioſè exculta fuit, vnde facta eſt rediuiua, ita ut parum in ea deſiderari poſſit; id autem contigit, quoniam materia ſatis eſt obuia, nec ſubobſcurum argumentum, adeo ut operoſum non fuerit quid hac in re Veteres præſtiterint, abundè conijcere, & mirum eſt, quòd in re facili Pappus magna vſus ſit diligentia, quam in difficilioribus omiſit.

Tres libri poriſmatum Auctore Euclide agnouit antiquitas.

Tres ſequebantur Euclidis Lib. πορισμάτων hoc eſt Poriſmatũ auctore Pappo, quod quidẽ opus commendans ait; *Opus quidem artificioſiſſimum, ac perutile ad reſolutionem obſcuriorum problematum, ac eorum generum, quæ haud comprehendunt eam, qua multitudinem præbet naturam.* Hiſce autem verbis non exigua ſubeſt obſcuritas, vel propter græci textus corruptionem, vel propter interpretis mendoſam verſionem. Hieronymus Vergerius Iuſtinopolitanus claritate generis illuſtris, ac multiplici refertus eruditione, quem dilexi quo die cognoui, meque ab eo ita diligi iudicaui, vt auſim dicere mihi cum fortunam dediſſe amplificatorem dignitatis meæ; oſtendit mihi Pappi Græcum codicem, quem amicus illi commodauerat. Codex autem ſic legebat. πορισματα ἐστὶ πολλοῖς ἄθροισμα, φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμβυθεστέρων προβλημάτων καὶ τῶν γένων ἀπερίληπτον ἡ φύσεως αὐτῶν παρεχομένης πλῆθος; quæ quidem lectio ſuperiori non congruit interpretationi; quædam enim verba videntur omiſſa, & caſus vnus pro altero vnius dictionis: hoc eſt verſio illorum verborum πορίσματα ἐστὶ πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον prætermiſſa fuit, & caſum adhibet ἀπεριλήπτων pro ἀπερίληπτον; tunc autem verſio non ſic; quæ haud comprehendunt, ſed potius, quæ haud comprehenduntur, non in actiua, ſed in paſſiua ſignificatione, quinimo quidam ſuſpicatur in illis verbis καὶ τῶν γενῶν ἀπερίληπτον ἡ φύσεως παρεχομένης πλῆθος deeſſe aliquid, cùm non conſtet cuius φύσιν hoc in loco auctor intelligat qui ad Poriſmatum naturam retuliſſe videtur; vnde codex iuxta ipſum ſic reſtituendus πορίσματα ἐστὶ πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμβυθεστέρων προβλημάτων καὶ τῶν

γε-

γενῶν ἀπερίληπτον τῆ φύσεως αὐτῶν παρεχομένης πλῆθος, quorum verborum latina verſio ſic ſe haberet. *Poriſmata à multis ſic intelliguntur, ut artificioſa collectio, videlicet propoſitionum ſit ad analyſin grauiorum, ſeu difficiliorum problematum, & generum, incomprenſibilem multitudinem, prabente ſcilicet ipſorum poriſmatum natura.* Adhuc tamen Pappus quid ſibi velit hiſce verbis obſcurum eſt; non deeſt qui putet eorum ſenſum eſſe, videlicet, ut poriſmata conferant ad analyſin obſcuriorum problematum, & generum, nempe generalium problematum, cùm ex dictis appareat, poriſmatum propoſitiones generaliſſimas eſſe; quando autem Pappus ſubiungit. *Cum natura multitudinem, qua vix poteſt animo comprehendi ſubminiſtret,* videtur Bullialdo, infinitas eiuſdem problematis ſolutiones indicare; mihi tamen potiùs multitudo ipſa referenda videtur ad problemata, adeo ut ſenſus reddatur Poriſmata ſuppeditare materiam ad analyſin obſcuriorum problematũ multitudinis infinitę, ut dubitare non liceat, an τὸ γένος vſurpauerit Pappus pro γενικοτάτων, & an ſubaudienda ſit vox ἀναλύσεων, ut ſenſus reddatur poriſmata ex natura ſua multitudinem ſolutionum eiuſdem problematis præbere; id enim parum rationi conſentaneum eſt; non enim inficiandum multitudinem quoque ſolutionum uniuſcuiuſque problematis illinc ſuppeditari, tamen nullum problema eſt, quòd ſolutionum multitudinem infinitam patiatur. Vt autem ſummatim dicam, exiſtimo Pappi conſilium eò tendere, vt doceat poriſmatum opus tribus Libris comprehenſum, nil aliud fuiſſe quàm congeriem plurium propoſitionum maximè conducentium ad reſolutionem problematum, quibus difficillimum eſt modica induſtria ſatisfacere; Quatenus enim ex eius verbis conijcere licet, cuique facillimum erit intelligere eius ordinis propoſitiones illas fuiſſe, vt late ſe extenderent, eodem ſemper modo ſe ſe habentes, adeo ut hinc multum adiutus Analyſta obſcuriorum problematum ſolutiones aggreſſus, feliciſſimè tandem abſolueret. Cæterum Pappi verba ita mihi videntur vertenda. *Poriſmata multis, ſeu apud multos, eſt collectio artificioſiſſima ad reſolutionem obſcuriorum problematum, & eorum generum naturá ſic ſe habentis incomprehenſibilis multitudo.* Quaſi græcus Codex videatur ſupplendus, & ita legendus τῆ φύσεως ἔτος παρεχομένης.

Pappi ſententia ex Bullialdo.

Ex ſententia Auctoris quid Pappus docuerit.

Vt autem præfatus Auctor magis explicatam redderet nobis poriſmatis naturam, hunc in modum proſequitur. *horum autem ſpecie, omnes neque theorematum ſunt, neque problematum, ſed mediam quodammodo inter hae formam, ac naturam habent, ita vt eorum propoſitiones formari poſſint, ut theorematum, vel ut problematum. Quo factum eſt, ut ex multis Geometris, alij quidem ea genere eſſe theoremata, alij verò problemata opinati ſint, dum ad ſolam tantùm propoſitionis formã reſpicerent.* Vnde conijcere licet, ad quem propoſitionum ordinem pertineant, videlicet medium tenere locum inter theoremata, atque problemata, eâ ratione, quia formari poſſunt, ut theoremata, videlicet per modum theorematum enunciari, ita ut in ſola rei contemplatione ſiſtant, ac in affectionis inueſtigatione verſentur, & inſuper per modum problematum, in quibus rei alicuius ortum intra Mathematicos limites docemur; cum itaque medium locum obtineant poriſmata, quamuis ad enunciationis formam externam, quæ ijs accidentaria eſt, vtriuſque naturam induant, intrinſecè tamen inter theoremata, ac problemata medium obtinent locum, ita ut Theorematibus ſuccedant, & Problematibus præeant, atque adeo per ipſa à theorematibus ad problemata greſſus fiat, vnde poriſmatum talis natura ſit, vt à theoria ad effectionem tendat, rationem atque modum oſtendat id efficiendi, quod theoremate demonſtratur quod eſt; ita Bullialdus ratiocinatur, immo, & addit has propoſitiones dum conſiderantur, vt media ad finem, pura theoremata non eſſe; quoniam efficiendi modum exhibent, non eſſe autem problemata, quia nondum in ipſis efficitur propoſitum, ſed ſolummodo ad illud alio in loco efficiendum afferuntur. Hanc ſuam explicationem confirmat ijs, quæ ſequuntur Pappi verbis: *horum autem trium differentiam Veteres multo melius cognouiſſe ex definitionibus perſpicuum eſt. Dixerunt enim theorema eſſe, quod proponitur in ipſius propoſiti demonſtrationem. Problema, quod affertur in conſtructionem propoſiti. Poriſma verò, quod proponitur in poriſmum, hoc eſt in inuentionem, & inueſtigationem propoſiti.* Hæc Pappus, ex qua poriſmatis definitione colligit Bullialdus Veteres Geometras, eo nomine propoſitiones aliquas connotaſſe quatenus ad effectionem, & inuentionem dirigebantur, & rationem efficiendi problemata continebant, atque adeo eſſe, ut media ad finem. Vnde colligit humodi propoſitiones ſeorſim acceptas, nec ad inuentionem quæſiti, & effectionem problematis, cui inueniendo inſeruire poſſint, adhibitas, poriſmata amplius eſſe, ſed pura theo-

Ad quem propoſitionum ordinem pertineant poriſmata.

theoremata; quod ſi rationem cuiuſdam effectionis contineant, in problemata conuerti poſſe, quibus aliquid efficietur; quod ſi ad aliud, ut medium ad finem applicabitur, problema ſine ipſo haud facilè efficiendum, abſoluturum, atque poriſmata propoſitiones illas eſſe futuras. Affert poſtmodum eiuſdem Pappi alia verba, videlicet. *immutata eſt autem hæc poriſmatis definitio à iunioribus, qui nequeunt omnia inueſtigare, ſed his elementis vtuntur, & oſtendunt ſolummodo, quod hoc eſt quod quæritur; non autem illud ipſum inueſtigant; Cumque ex definitione ipſa, & ex ijs quæ nobis tradita ſunt redarguerentur, ab accidente ſic poriſma definierunt. Poriſma eſt, quod hypotheſi deficit à locali theoremate;* Conquæritur igitur quòd iuniores poriſmatis definitionem antiquam immutauerint, cauſam afferens immutationis, quòd videlicet omnia poriſmata neceſſaria ad inuentionem propoſiti inueſtigare non poſſent; vnde oſtendebant tantummodo hoc eſſe quod quæritur, nec illud inueſtigabant, quamobrem Geometricam effectionem aſſequi minimè poterant; non aduerterunt igitur poriſmatis naturam, veluti mediam inter naturam theorematis, atque problematis, nec agnouerunt in ijs theoriam cum effectione connecti, cum per id, quod illis propoſitionibus efficitur propoſitum ipſum problema abſoluatur, ita Bullialdus ratiocinatur exiſtimans illa Pappi verba: *ſed his elementis vtuntur*; ſic intelligenda eſſe, ut iuniores Euclidis poriſmatibus velut elementis vſi ſint, non vt propoſitionibus ad effectionem Geometricam immediatè conducentibus: atque adeo nullus erit admirationi locus quòd poriſmatum naturam ignorauerint, cum eius finem, ac uſum perſpectum non habuerint, utpote neſcientes propoſitiones illas in poriſmum, ſiue propoſiti inueſtigationem afferri, nouam autem definitionem poriſmatis effinxerunt, dicentes videlicet Poriſma eſſe; quod hypotheſi deficit à locali theoremate ne reprehenſionem incurrerent eorum, qui veterem definitionem amplectebantur; vnde ſibi ſuaſerunt poriſma eſſe propoſitionem, in quà pauciora data ſupponerentur, quam in locali theoremate. Explicat autem Bullialdus huiuſmodi theorema dicens, Propoſitionem eſſe, in qua oſtenditur aliquid in tali loco eſſe, & ad eum pertinere, ut punctum eſſe in linea, circulo, parabola, ellipſi, &c. Quòd autem id univerſim rectè dictum ſit, haud facilè mihi perſuadeo, cum ſatis liqueat ex iis, quæ ſuperius tradita fuerunt, id hac in re dicendum, præſertim iuxta ea, quæ ex Proclo retulimus; non inficiandum tamen id ex parte concedendum eſſe.

Vt probe autem innoteſcat ipſius poriſmatis natura iuuabit aduertere illud deriuari à verbo πορίζω quod latinè vertitur pluribus modis, & præſertim aditum patefacio, viam aperio, ſuppedito, copiam facio, item quæro, acquiro, inuenio ſiue comparo, & aliquando quæſtum facere, ut apud Ariſtotelem Polit. primo Cap. quinto. Budæus verò loquens de hac voce Poriſma, in Commentariis Græcæ linguæ, hæc habet πόρισμα verbum eſt Dialecticorũ, & ſignificat proloquium vel problema quod conſecutionem habet neceſſariam atq; hærentem iis, quæ iam probata ſunt & comperta. Philoponus enarrans illa verba Ariſt. ex 1. Poſt. εἰ δὲ φανερὸν οὕτος, φανερὸν καὶ ὅτι οὐκ ἔστι τὰς ἑκάστου ἰδίας ἀρχὰς ἀποδεῖξαι. πόρισματι (inquit Philoponus) κατὰ τοὺς γεωμέτρας ἐκ τῶν εἰρημένων συνάγει. εἰ γὰρ μὴ ἐνδέχεται, φησὶν, ἀποδεῖξαι τι εἰ μὴ ἐκ τῶν ἰδίων ἑκάστου ἀρχῶν, φανερὸν ἂν εἴη ὡς οὐκ ἐνδέχεται οὐδεμίαν ἐπιστήμην τὰς οἰκείας ἀρχὰς ἀποδεικνύναι εἴγε τὴν ἀπόδειξιν ἐκ τῶν ἰδίων δεῖ γίνεσθαι ἀρχῶν, τῶν δὲ ἀρχῶν ἀρχὰς εἶναι οὐκ ὄντων. Alibi ſuperiùs explicans illud dictum eiuſdem, οὐκ ἄρα ἐστὶν ἐκ τοῦ ἄλλου γένους μεταβάντα δεῖξαι, διὸ τὸ γεωμετρικὸν ἀριθμητικῇ. πόρισματι συνάγει (inquit idẽ Philop.) τὸ νῦν δεικνύμενον. eſt autem πόρισμα additamentum, & quaſi corollarium τῆς ἀποδείξεως. Hoc autem præhabito, & in memoriam etiam reuocato diſcrimine, quod ſuperiùs attulimus inter theorema, & problema, conſiderandum occurrit propoſitionem eandem pluribus modis ſpectari poſſe, & ſecundùm rationem diuerſam, diuerſam ſibi quoque nomenclaturam vindicare; vna igitur eademque propoſitio theorema dici poterit, itemque poriſma, & quidem theorema dicetur, quatenus in ea aliquod attributũ alicui conuenire oſtenditur, nullo habito reſpectu ad aliud, at verò poriſma nuncupabitur reſpectu ad id, quod aſſumitur conſtruendum, quodq; eſt problematis propoſitum, illique inſeruit, aditum patefacit, viam aperit, modumque ſuppeditat ad propoſiti nimirum inueſtigationem, ſi tamen in formam theorematis enuncietur. Quod ſi efferatur ad modum problematis, adhuc ex hoc capite à problemate diſtinguetur. Neque propterea credendum hoc idem conuenire poſſe cuicunque propoſitioni elementari, nam hoc intereſt inter hæc, quod elementis nimis remotè ſit illud accomodatum, his autem immediatè videlicet ad effectionem Geometricam conducere,

Budæus in commentarijs Græca lingua

Auctoris ſententia de Poriſmatis natura.

Vt verò ſuperiùs aduertimus illud idem verbum πορίζω ſignificat inter cætera quæſtum facio, vnde non mirandum ſi Proclus etiam in tertium librum Euclidis ita ſcripſcrit. Τὸ δὲ πόρισμα λέγεται μὲν καὶ ἐπὶ προβλημάτων τινῶν, οἷον τὰ Εὐκλείδῃ γεγραμμένα. λέγεται δὲ ἰδίως ὅταν ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων ἄλλο τι συναφανῇ θεώρημα μὴ προθεμένων ἡμῶν. ὃ καὶ διὰ τοῦτο πόρισμα κεκλήκασιν ὥσπερ τι κέρδος ὂν τῆς ἐπιστημονικῆς ἀποδείξεως. *Procli auctoritas in 3. lib. Euclidis.*

Poriſma etiam de quibuſdam problematibus dicitur, qualia ſunt ab Euclide conſcripta poriſmata. propriè verò talia dicuntur quando ex demonſtratis aliud quodlibet theorema nobis non proponentibus emergit, & offertur; quod propterea poriſma appellarunt, quaſi lucrum ex ſcientifica demonſtratione, obiter, & præter expectationem factum.

Itaque iuxta definitionem hanc poriſma dicetur theorema aliquod ex demonſtratiuo ſylogiſmo neceſſariò deductum, & quaſi lucrum eius dicendum ſit, quoniam non ex profeſſo theorematis huius inſtituta ſit demonſtratio, ſed tamen ex demonſtratis rectè ſequatur; itaque ex eo dictum videtur Proclo, quod obiter, & aliud agendo, nouum theorema lucri faciamus. Atque hunc in modum explicari poriſma poſſe perſpicuè conſtat, cum verbum illud πορίζω præter cætera illud quoque ſignificet, quæſtum facio. *Poriſmatis definitio ex Proclo.*

Id autem prætereundum non videtur hac tempeſtate vſum obtinuiſſe, ut poriſma dicatur id, quod ex analyſi conſequimur, nam analyſi quidē inſtituta propoſitionem inferimus nobis præſcribentem, quo pacto ſit operandum ad abſolutionem problematis, & qua ratione Geometrica effectio perficienda ſit, quod utique non lucrifacimus, quaſi aliud agendo, ſed potius ex inſtituto nos aſſequi operando contendimus, cū non aliā ob cauſam, nec ob alium finem analyſis ipſa inſtituta ſit; eadem itaque ratione poriſma dicetur, quatenus videlicet quidam eſt quæſtus, nihil autem refert, quod illum ex inſtituto conſequamur. Conuenit porro poriſmati hoc modo accepto Veterum definitio, ſiquidem immediatè conducit ad effectionem tamquam ad finem, vnde purum theorema non videtur, quoniam efficiendi modum exhibet, nec purum problema, quia nondum in ipſo propoſitum efficitur, ſed tantummodo ad illud efficiendum affertur. Cæterum ad theorema locale quod attinet, quid illud ſit iam ſuperiùs innuimus; admitti tamen poſſe videtur quod iuniores tradiderunt diſcriminis inter poriſma, & theorema locale, ex Pappi ſententia vbi habet. *Huius autem generis poriſmatum loci ipſi ſunt vna ſpecies; atque de hac ipſa abundè tractatur in reſoluto loco, ſeorſum autem à poriſmatibus collecta, inſcriptaquè, ac tradita ſunt, quod magis, diffuſa, ac copioſa ſit cateris ſpeciebus*; itaque is quandam ſpeciem poriſmatis agnouit, quæ deficiat hypotheſi à locali theoremate; ſed hoc ſpecificum accidens, immeritò quidem refertur ad genus. Sed hactenus de natura poriſmatis, ſolùm addam, non propterea illud, prout à nobis explicatur cum Lemmate confundi; tametſi enim hoc quoque videatur aliquando acceptum pro lucro, tamen, vt à Mathematicis vſurpatur pro Sumptione, quæ propoſitio eſt fide indigens; cum enim vel in conſtructione, vel in demonſtratione, aliquod ſumimus eorum quæ oſtenſa non ſunt, ſed ratione indigent, tunc id quod ſumptum eſt, veluti per ſe ambiguum inquiſitione dignum eſſe arbitrati, Lemma nos appellamus. Non autem ſic poriſma, quemadmodum ex ſupra traditis facilè conſtat. Illud inſuper non prætermittam ſcilicet à pleriſque confundi poriſma cum Deductione, quod à noſtra explicatione alienum eſt. Quid autem Deductio ſit iam ſuperiùs à nobis fuit explicatum; eſt enim tranſitus ab vno problemate, vel theoremate ad aliud, quo cognito, vel comparato, etiam illud quod propoſitum eſt apparet, cuius exemplum inter cætera habetur apud Pappum Libro ſeptimo propoſitione octogeſimaquinta, quando ait. *Hac tempeſtate quid per Poriſma intelligatur.* *Poriſma non confunditur cum Lemmate.* *Perperam aliqui Poriſma confundunt cū Deductione.*

Ergo deueniendum eſt ad aliquam determinatam ſectionem, &c.

Pergit verò idem Auctor dicens locorum igitur ſpecies ſunt decem ex Comandini verſione, & ita quidem ſi Græcus Codex habet τῶν τόπων οὖν εἴδη ἐστὶ δέκα ſed fortaſſe non ſic legendum, ſed potius εἴδη ἐστὶ δ, vt rectè notat Bullialdus, & congruit ſequentibus verbis, nam locorum quatuor ſpecies enumerat tantummodo, videlicet planorum, ſolidorum, linearium, & eorum, quæ ad medietates pertinent: Vnde ita vertendum. Locorum igitur ſpecies ſunt quatuor, ſiquidem alii ſunt planorum, alij ſolidorum, alij linearium, & in ijs quæ ad medietates pertinent.

Illud etiam facit ad maiorem poriſmatum notitiam, quod Pappus ſubiungit ijs videlicet contingere propoſitiones diſſectas ob difficultatem multarum rerum, quæ ſubintelligi conſueuerunt, ità videlicet, ut complures Geometræ aliqua ex parte ea aſſequantur,

quæ verò magis neceſſaria ſunt, ſignificata ignorant. Teſtatur verò facillimum eſſe multa in his vna propoſitione complecti; Cum ipſemet Euclides non multa de vnaquaque poſuerit ſpecie; ſed de his præfatus Auctor pauca ſcripſit; vnde ex iis minimè licet præciſè coniicere, quæ eo in opere ab Euclide tradita fuerunt, accedit etiam quod mendoſus codex non permiſit, ut interpres integram nobis ſententiam exprimeret: Vnde præſtat, quæ ipſe vniuerſalius tradidit attendere, ut. *Si quotcunque rectæ lineæ ſe ſe mutuo ſecent, non plures, quàm duæ per idem punctum, omnia autem in una ipſarum data ſint, relinquorum multitudinem habentium triangulum numerum huius latus ſingula habet puncta tangentia rectam lineam poſitione datam, quorum trium non ad angulum exiſtens trianguli ſpatij, vnumquodque reliquum punctum rectam lineam poſitione datam, tangere.* Ait vero veriſſimile non eſſe Euclidem hoc ignorare, ſed principium dumtaxat ſtatuere, & in omnibus poriſmatibus apparere principia. & ſeminaria ſola multarum, ac magnarum multitudinum ab eo iacta, quorum vnumquodque non iuxta poſitionum differentias diſtinguere oportet, ſed iuxta differentias accidentium, & quæſitorum. Reliqua autem omitto, ſiquidem apud Pappum ipſum cuique legere licebit, apud quem etiam extant aliqua ſpectantia ad proportionis ſectionem, quædam ad ſpatij ſectionem, item Lemmata in libros de determinata ſectione, in libros Inclinationum, tactionum, planorum locorum, poriſmatum, in libros conicorum, &c.

Libri duo de locis planis.

Succedebant autem libri duo de locis planis, quorum argumentum apud eundem quiſque intueri poteſt, quorum doctrinam rediuiuam reddidit Franciſcus à Schooten, ſatis quidem induſtrioſè.

De Inclinationibus.

De inclinationibus quoque ſcripſerat Apollonius libros duos, quorum meminit idem Pappus, & quorum doctrinam rediuiuam fecit Marinus Gheraldus, quatenus tamen licuit ex ijs coniicere, quæ Pappus tradiderat.

Libri octo Conicorum.

Faciebant quoque ad locum reſolutum octo libri conicorum Apollonij, quorum quatuor iamdiu evulgati fuerunt, & Commentariis illuſtrati à Federico Comandino, & a Maurolyco etiam paraphraſi explicati, qui pariter duos libros proprio marte adiecit; quatuor autem relinqui libri iuxta candorem quo ab Apollonio deſcripti fuerunt deſiderantur, nam tres ſaltem ipſorum nempe quintus, ſextus, & ſeptimus vulgati extant, ex Arabico in Latinum conuerſi.

Libri de proportionis ſectione. De ſpatij ſect. De determinata ſectione. De tactionib. Libri Poriſmatum.

Ex ijs, quæ pertinent ad libros de proportionis ſectione, item de ſpatij ſectione, nonnulla iam ſunt reſtituta, vt ſuperiùs innuimus, nec operoſum eſt uberius idem argumentractare. Ad libros autem de determinata ſectione quod attinet, hæc ætas profectò non inuidet antiquitati, ſiquidem mirâ facilitate innumera ſunt, quæ beneficio Speciosæ analytices reperiri poſſunt.

Ad ea vero quod attinet, quæ in libris tactionum tradita fuerunt, maximum adiumentum trahitur ex veteri analyſi, beneficio Datorum.

Ad poriſmatum verò libros multum conducit vetus analyſis, nec tamen minus nouiter inuenta. Vnde illud exploratum eſto beneficio ſpecioſæ Logiſtices, innumera poriſmata reperiri poſſe, quæ ad effectiones Geometricas conducant.

Ad loca plana reſtituenda, & vetus, & noua reſolutiua conducit;

Ad libros inclinationum, æque etiam utraque, & fortaſſe magis noua, quàm vetus.

Nec diſſimiliter ſentiendum de Conicis.

Tractandorũ, Argumentum ac Auctoris partes.

Noſtræ autem erunt partes utramque methodum reſolutiuam, ſcilicet antiquam, & nouam explicare, ut quantum fieri poterit theoremata condere, eorumdemque demonſtrationes contexere ſumma facilitate liceat; problematibus verò, quamuis difficillimis, ac obſcurriſſimis quam citiſſimè ſatisfacere. Illud porrò non prætermittam animaduerſione dignum, cùm quis fuerit utramque methodum aſſecutus, vni non adeo ſe adigat, vt alteram deijciat; mutuò enim ſe adiuuant, imò plerumque aptior eſt vna altera, ad aliquod theorema oſtendendum, vel problema ſoluendum; Prudentis igitur Analyſtæ erit theorematis, vel problematis occaſione oblatâ, utramque experiri, ſeu de utraque periculum facere, eam verò ſeligere, quam opportuniorem aduerterit: Vnde nulla iis eſt adhibenda fides, qui putant noua methodo omnia perficienda eſſe, cùm potiùs plerumque contingat, quod nos frequenter experti ſumus, noua methodo per longas ambages, & tricas perfici, quæ alias, antiquâ expeditè præſtantur. Cautè itaque in hoc ſe gerat Analyſta, ne irri-

ſionem

ſionem incurrat; quod animaduertiſſe operæpretium duximus. Nunc proximum eſt, ut in arenam deſcendentes methodos ipſas explicemus, initio facto ab antiqua, & primò quatenus in theorematibus exercetur, nec immerito, nam theorema naturâ quidem problemati antecedit.

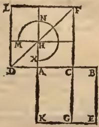
Quæ hactenus dicta ſunt de methodo antiquâ exemplis illuſtrantur quantum ad Reſolutionem, & compoſitionem Theorematum.

CAPVT SECVNDVM.

AD explicandam doctrinam Reſolutionis, & Compoſitionis Theorematum, quã in primis excoluit Antiquitas; primùm exordientes à ſimplicioribus illam illuſtrabimus exemplis Theorematum, quæ plana dicuntur, & quidem priori loco; Vtemur autem ad id primò vnâ, vel altera Reſolutione, & Compoſitione, quarum meminit Euclides lib. xiii Elementorum. Primum autem Theorema ſic ſe habet.

THEOREMA.

Si recta linea extremâ, ac media ratione ſecta fuerit maior portio aſſumens dimidium totius quintuplum poteſt eius, quod à dimidia ſit quadrati. Exemplum I.



REcta AB extremâ, ac mediâ ratione ſecetur a in C, ſitque AC portio maior, & producatur b vſque ad D, ità ut A D ſit dimidia ipſius A B. Dico quadratum ex C D quintuplum eſſe quadrati ex A D. Deſcribantur c quadrata D C, & A B, nempe DCFL, & ABEK; ducaturque d per A récta K H parallela alterutri ipſarum DL, CF, quæ diametrum D F ſecet in puncto H, & per H ducatur e HM recta alterutri ipſarum LF, DC parallela, & producatur f FC ad G. Quoniam ergo AB extremâ, ac mediâ ratione ſecatur in C, erit g rectangulum ſub A B, B C comprehenſum æquale quadrato ex A C; ſed rectangulum quod ſub A B, B C continetur eſt C E, & quadratum, quod ſit ex A C eſt FH, ergo rectangulum CE erit æquale quadrato F H. Quoniam verò AB dupla eſt ipſius DA, eſtque æqualis ipſi AK, & DA æqualis ipſi AH; erit ob id KA dupla eiuſdem A H. Quia autem H C, A G ſunt rectangula ſub eadem altitudine poſita, nempe inter eaſdem parallelas; erit h A G ad H C vt K A ad A H, atque adeo duplum; Cum vero L H, HC ſint i æqualia, erunt LH, HC ſimul ſumpta duplum ipſius HC, ob id k æqualia rectangulo AG; Oſtenſum eſt autem CE æquale quadrato HF; ergo MNX gnomon erit l æqualis quadrato A E; cum autem A B dupla ſit ipſius DA, erit m quadratum ex A B, nempe AE quadruplum quadrati DH. ſc. ex DA, ſed gnomon MNX æqualis eſt quadrato AE; ergo & idem gnomon quadruplus erit quadrati DH, ergo totum quadratũ, nempè DF quintuplum erit ipſius DH, quadrati ſed D F eſt quadratum ex DC, & DH ex DA, ergo quadratum ex DC quintuplum erit quadrati ex DA. Quod erat demonſtrandũ.

a 30. ſexti.
b 2. pet primi.
c 46. primi.
d 31. primi.
e 31. primi.
f 2 pet. primi
g 17. ſexti.
h 1. ſexti.
i 43. primi.
k 9. quinti.
l 2. axioma 1.
m cor. 20. 6.

Antecedentis Theorèmatis Reſolutio.



REcta AB extremâ, ad mediâ ratione ſecetur in C, & portio ſit maior A C, minor autem C B; ponatur A D ipſius A B dimidio æqualis. Dico quadratum ex C D, quadrati ex DA quintùplum eſſe. Quoniam igitur quadratum ex C D quintuplum eſt quadrati ex D A; quadrato autem ex C D æqualia ſunt quadrata ex C A, AD vna cum eo, quod bis CA, AD continetur; erunt quadrata ex CA, AD vna cum eo, quod bis CA AD continetur, quadrati ex AD quintupla; ergo diuidendo quadratum ex CA vna cum eo, quod bis continetur CA AD quadruplum

eſt

eſt quadrati ex AD; ſed ei, quod bis C A, A D continetur æquale eſt rectangulum B A C; cum B A ſit dupla ipſius A D, quadrato autem ex AC æquale eſt rectangulum A B C, cum AB extremâ, ac mediâ ratione ſecta ſit in C; Rectangulũ ergo B A C, vnà cum rectangulo ABC, quadruplum eſt quadrati ex AD. Sed rectangulum BAC vna cum rectangulo ABC eſt id, quod fit ex AB quadratum, ergo quadratum ex A B quadruplum eſt quadrati ex AD, Quod quidem ita ſe habet; eſt enim AB dupla ipſius AD.

Reſolutionis examen.

PRimò ergo ponitur linea AB ſecta extremâ, ac mediâ ratione in C, ſupponit autem reſolutio tamquam verum, quadratum ex CD quadrati ex DA quintuplum eſſe; hoc eſt ſi maior portio aſſumat dimidium totius quintuplum poſſe eius, quod à dimidia fit quadrati, ex hoc vero ſuppoſitu per ea, quæ conſequuntur ipſa reſolutio procedit; Cum enim quadrato ex C D æqualia ſint quadrata ex CA, AD vna cum eo, quod bis CA AD continetur; ſequitur quadrata ex CA, AD vna cum eo, quod bis CA AD continetur; quadrati ex AD quintupla eſſe. Hinc ſequitur diuidendo quadratum ex CA vna cum eo, quod bis CA AD; continetur quadruplum eſſe quadrati ex AD. Hinc verò ſequitur rectangulum BAC vna cum rectangulo A B C quadruplum eſſe quadrati ex AD. Per hæc itaque conſequentia reſolutio procedit donec hoc verum occurrat; quod inde quoque deducitur quadratum ex A B quadruplum eſſe quadrati ex AD; quod quidem verum eſt, cum AB ſit ipſius AD dupla. Vides ergo quo pacto Reſolutio ſit ſumptio quæſiti tamquam conceſſi per ea, quæ conſequuntur in aliquod verum conceſſum.

Eiuſdem Theorematis Compoſitio.

QVoniam igitur quadruplum eſt quadratum ex AB quadrati ex A D quadratum autem ex AB eſt rectangulum BAC vna cum rectangulo ABC; erit igitur rectangulum BAC vnà cum rectangulo ABC quadrati ex AD quadruplum; Sed rectangulum BAC æquale eſt ei, quod bis DA, AC continetur; Rectangulum verò ABC æquale eſt quadrato ex AC, ergo quadratum ex AC vna cum eo, quod bis continetur DA, AC quadruplum eſt quadrati ex AD; proindè quadrata ex DA, AC vna cum eo, quod bis DA, A C continetur quintuplum eſt quadrati ex D A; ſed quadrata ex D A, A C vna cum eo, quod bis continetur D A, A C eſt id quod fit ex D C quadratum, ergo quadratum ex DC quadrati ex DA quintuplum erit. Quod oportebat oſtendere.

Compoſitionis examen.

VIdes ergo quo pacto compoſitio ſit quædam ſumptio conceſſi per ea, quæ conſequuntur in quæſiti concluſionem, ſeu deprehenſionem; ſumit enim hoc verum conceſſum, nempè quadratum ex AB quadruplum eſſe quadrati ex A D; ex hoc autem ſequitur rectangulum BAC vna cum rectangulo ABC quadrati ex AD quadruplum eſſe, ex quo ſequitur quadratum ex AC una cum eo, quod bis continetur DA, AC quadruplum eſſe quadrati ex AD, atq; adeo quadrata ex DA, AC vna cum eo quod bis DA, AC continetur quintuplum eſſe quadrati ex DA. Per hæc autem ratiocinatur, atque procedit Analyſta donec in quæſiti Concluſionem perueniat; nempè quadratum ex CD quadrati ex DA quintuplum eſſe.

SCHOLION.

Notãda quædam. *IN ſuperiori autem reſolutione illud occurrit animaduerſione dignum, quod ſemper eſt etiam obſeruandum videlicet Analyſtam in reſoluendo ſiſtere ubi adinuenerit verum aliquod conceſſum utpotè non ui reſolutionis, ſed aliunde conſtans, quia ſcilicet aliàs deprehenditur firmâ demonſtratione uerum id eſſe, ut in hac preſenti reſolutione ſiſtit ibi; quadratum ex A B quadruplum eſt quadrati ex AD, quod inde perſpectum ſit quia AB dupla eſt ipſius A D. Illud quidem uerum, quod nos in reſoluendo offendimus aliunde nobis conſtare debet non ex reſolutionis ui; quandoquidem illud inferimus ex eo, quod in quæſtione poſitum eſt, atque adeo non licet eo uti in compoſitionis regreſſu; ſed cum in aliquod uerum incidimus alio argumento demonſtratum, ac propterea conceſſum ſtatim poſſumus per reſolutionis filum demonſtrationem componendo perficere.*

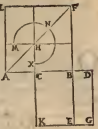
Animaduerſione digna. *Initio autem Compoſitionis afferri ſolet ratio ipſius veri, quod nos in reſoluendo offendimus, ut paſſim videre licet apud Pappum. Plerumque verò contingit ut illud uerum, quod nobis reſoluentibus occurrit conſtet ex hypotheſi, unde nulla alia quærenda eſt ratio, quià iam ſupponimus quod ueriſſimum eſt: perindè enim eſt, imò plus quam ſi fuerit demonſtratum, cum id iam in dato ſit Theorematis, quod in ſequentibus planum fiet.*

THEOREMA.

Exemplum. *Si recta linea partis ipſius quintuplum poſſit dupla dictæ partis extrema, ac media ratione ſecta, maior portio reliqua pars eſt eius, quæ a principio recta linea.*

Recta

REcta AB partis AC quintuplum poſſit, hoc eſt quadratum rectæ A B quintuplum ſit quadrati ipſius A C, & eiuſdem AC ſit dupla CD. Dico ſi CD extremà, ac medià ratione ſecetur, CB eſſe partem maiorem. Deſcribantur [a] ex utraque ipſarum AB, C D quadrata A B FL; CDGK, & perficiatur figura ut ſupra, &c. producaturque [b] FB vſque ad E. Quoniam ergo quadratum AF eſt quintuplum quadrati A H, hoc eſt quadrati ex A C; proinde gnomon M N X quadruplus erit eiuſdem quadrati A H; Cum autem DC dupla ſit ipſius C A; quadratum ex DC quadruplum erit [c] quadrati ex C A, nimirum quadratum C G quadrati AH; at verò demonſtratum eſt gnomonẽ MNX quadruplum eſſe quadrati AH; proindè gnomon idem M N X æqualis erit [d] quadrato CG. Rurſus quoniam D C dupla eſt ipſius C A, & D C eſt æqualis ipſi CK, & AG ipſi CH, erit [e] ob id K C ipſius C H dupla; quapropter parallelogrammum KB duplum erit parallologrammi B H; ſunt enim inter eaſdem parallelas ſuntque [*] parallelogramma LH, HB ipſius HB duplum; ergo K B eſt [f] æquale ipſis L H, HB ſimul ſumptis; at verò totus gnomon MNX toti C G eſt æqualis ut ſupra demonſtratum eſt; ergo reliquũ HF æquale erit [g] reliquo BG; ſed BG eſt quod CD, DB continetur; cùm CD, D G ſint æquales; H F autem eſt quadratum ex C B; ergo rectangulum C D B æquale erit quadrato ex CB; proindè ut DC ad CB ita eſt [h] C B ad B D; at verò maior eſt DC quam CB, ergo etiam CB maior erit quam BD. Recta igitur linea C D extremà, ac medià ratione ſecta; portio maior eſt CB. itaque ſi recta linea partis ipſius quintuplum poſſit &c. Quod erat demonſtrandum.



a 46 primi.
b 2. post primi.
c coroll. 10. ſexti.
d 9 quinti.
e prim ſexti.
* 41 primi.
f 9. quinti.
g 3. axioma primi.
h 17. ſexti.

Supereſt oſtendendum duplam ipſius AC maiorem eſſe, quàm BC, namque, ut CB euadat pars eius, quæ dupla eſt ipſius AC, neceſſe eſt duplam AC maiorem eſſe ipſa BC, quod hoc pacto demonſtrabitur.

Si dupla ipſius AC maior non ſit quàm CB. ſit, ſi fieri poteſt, BC ipſius CA dupla. igitur quadratum ex BC quadruplum erit [a] quadrati ex C A; proindè quadratorum utrumque ſimul ex BC, CA quintuplum erit quadrati ex CA; at verò quadratum ex BA ponitur quintuplum quadrati ex AC, ergo quadratum ex BA æquale erit quadratis ex B C, C A, quod eſſe non poteſt, non eſt ergo B C dupla ipſius C A. Neque diſſimili modo oſtendemus minorem B C non eſſe duplam ipſius C A, &c. ergo A C dupla maior eſt quàm B C. Quod oportebat oſtendere.

a 1. Corol. 20. ſexti.

Antecedentis Theorematis Reſolutio.

D A C B

REcta enim quædam C D partis ipſius D A quintuplum poſſit, ipſiusque D A dupla ponatur A B; Dico A B extremà, ac medià ratione ſectam eſſe in puncto C, maioremque partem eſſe A C, quæ reliqua pars eſt eius, quæ à principio rectæ lineæ. Quoniam autem A B extremà, mediaque ratione ſecta eſt in C, & AC eſt portio maior, erit rectangulum ABC æquale quadrato ex AC, at verò rectangulum B A C æquale eſt ei, quod bis D A, AC continetur, ſiquidem BA dupla eſt ipſius AD, ob id rectangulum A B C vna cum rectangulo B A C, quod quidem eſt ipſius AB quadratum, æquale eſt ei, quod bis D A, A C continetur vna cum quadrato ex AC, ſed quadratum ex AB quadruplum eſt quadrati ex A D, ergo quod bis DA, AC continetur vna cum quadrato ex AC quadruplum eſt eius, quod fit ex AD quadrati, ergo & quadrata ex DA, AC, vna cum eo quod bis ſub D A, A C continetur rectangulo hoc eſt quadratum ex CD quintuplũ erit quadrati ex DA, Quod ex hypotheſi ità ſe habet.

Reſolutionis Examen.

SVpponit hæc Reſolutio rectam AB extremà, ac medià ratione ſectam eſſe in C, &c. Si CD partis ipſius DA quintuplum poſſit, & ipſius DA dupla ſit AB, &c. deducit rectangulum A B C quadrato ex A C æquale eſſe, deindè autem infert rectangulum ABC vna cum rectangulo BAC æquale eſſe ei, quod bis DA, AC continetur, vna cum quadrato ex AC, ex quo reſolutio deducit illud, nempè quod bis D A, AC continetur, vna cum quadrato ex A, C quadruplum eſſe huius quadrati, quod fit ex

AD,

AD, hinc tandem colligit quadrata ex DA, AC vna cum eo, quod bis D A, A C continetur, hoc eſt quadratum ex C D quintuplum eſſe quadrati ex A D, quod verum eſt. Patet ergo reſolutionem eſſe ſumptionem quæſiti tanquam conceſſi per ea, quæ conſequuntur in aliquod verum conceſſum.

Eiuſdem Theorematis compoſitio.

QVuoniam igitur quadratum ex CD quintuplum eſt quadrati ex DA; quadrato autem ex CD æqualia ſunt quadrata ex DA, AC vna cum eo, quod bis DA, AC continetur rectangulo; erunt ergo quadrata ex DA, AC vna cum eo, quod bis ſub DA, AC continetur rectangulo, quintuplũ ipſius quadrati ex D A, & diuidendo, quod bis ſub DA, AC continetur, vna cum quadrato ex AC quadruplũ erunt quadrati ex A D; eſt autem & quadratum ex AB quadrati ex AD quadruplum; cùm A B dupla ſit ipſius A D; ergo quod bis continetur DA, AC, vna cum quadrato ex A C æquale eſt quadrato ex A B; ſed quadratum ex AB eſt rectangulum ABC vna cum rectangulo BAC; rectangulum igitur BAC vna cum rectangulo ABC eſt æquale duplo rectangulo D A C vna cum quadrato ex A C ſed rectangulum BAC æquale eſt duplo rectangulo D A C; ablatis æqualibus rectangulis BAC, & duplo rectangulo D A C erit reliquum rectangulum A B C reliquo quadrato ex AC æquale; eſt igitur, vt BA ad AC, ita AC ad CB, maior eſt autem BA, quàm AC, ergo & AC maior erit, quàm CB; quamobrem AB extremà, ac medià ratione ſecta eſt in C, & AC eſt maior portio; &c.

Compoſitionis Examen.

COmpoſitio iſta ſumit conceſſum hoc, nimirum quadratum ex DC quintuplum eſſe quadrati ex DA, ex quo infert quadrata ex DA, AC vna cum eo, quod bis continetur DA, AC quintuplum eſſe quadrati ex DA, & diuidendo, quod bis D A, AC continetur vna cum quadrato ex AC quadruplum eſſe quadrati ex AD, & indè deducit quod bis continetur DA AC, quod eſt rectangulum BAC vna cum quadrato ex AC æquale eſſe quadrato ex AB, ex quo arguit rectangulum B A C, vna cum rectangulo ABC æquari duplo rectangolo D A C vna cum quadrato ex AC vnde infert ablatis æqualibus rectangulis BAC, & duplo rectangulo DAC reliquum rectangulum A B C quadrato ex AC eſſe æquale; vndè colligitur eſt AB ad AC, ità AC ad CB, vndè infert AC maiorem eſſe, quàm CB, ac demum AB extremà, ac medià ratione ſectam eſſe in C, & AC maiorem eſſe portionem, &c. quod eſt quæſitum.

Vides itaque, quàm bene in Compoſitionem quadret illa definitio. Cõpoſitio eſt ſumptio conceſſi per ea, quæ conſequuntur in quæſiti concluſionem, ſeu deprehenſionem; ſumit enim illud conceſſum; nempè quadratum ex C D; quintuplum eſſe quadrati ex DA, & per ea, quæ conſequuntur ratiocinatur donec perueniat ad hoc, quod eſt quæſitum, nimirum AB extremà, ac media ratione ſectam eſſe in C, & A C maiorem eſſe portionem.

Supradictorum Theorematum reſolutionibus, atque compoſitionibus in medium allatis non erit abs re alia quoque reſoluere, ſimulque componere maioris doctrinæ gratia.

Primum autem occurrit Theorema illud reſolutum, atque compoſitum a Pappo Alexandrino Lib. 4. Collectionum Mathematicarum prop. 4. Illud autem erit ut infra.

SCHOLION.

Ex hactenus facilè conſtant, quæ ſuperius attulimus de Reſolutione, & Compoſitione Theorematum, cùm diceremus Reſolutionem eſſe ſumptionem quæſiti tamquam conceſſi per ea, quæ conſequuntur in aliquod verum conceſſum. Compoſitionem autem eſſe ſumptionem conceſſi per ea quæ ſequuntur in quæſiti concluſionem, ſeu deprehenſionem.

Præceptũ ad Reſolutionem.

Itaque ad Reſolutionem, quod attinet illud eſto præceptum, ut quæſitum tanquam conceſſum ſupponatur, ex qua ſuppoſitione diſcurramus per ea, quæ ex ſuppoſitis deducuntur donec occurrat aliquod verum, & conceſſum, quòd ſcilicet aliunde, quam ex vi reſolutionis illud eſſe verum conſtet,

Præceptũ ad Compoſitionẽ.

Hoc autem vero inuento, atque conceſſo retrogrado ordine per analyſeos veſtigia incedendo, ac demonſtrando progrediamur ipſiuſque demonſtrationis compoſitionem faciamus ratiocinantes, ex illo vero invento, atque conceſſo ad quæſiti concluſionem; & hoc eſto præceptum pro Compoſitione.

De præcepto demonſtrationis ducentis ad impoſſibile, paulò infra loquemur.

THEOREMA.

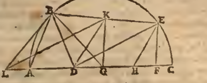
Sit ſemicirculus A B C, & inflectatur A B D, ſitque A B aqualis B D, ipſi verò B D ducatur ad rectos angulos D E, & B E iungatur; cui ad rectos angulos ducatur E F, ſitque centrum G, & vt A G ad G D ità ſit D H ad H F; & iungatur H E, Dico angulum B E D, angulo DEH aqualem eſſe. Exemplum III. Ex Pappo lib. 4 prop. 12

Præparatio.

DVcatur [a] à puncto G ad BE, perpẽdicularis GK, & iũgatur [b] KD, ergo BK eſt [c] æqualis K E, atque eſt angulus B D E rectus, tres igitur rectæ lineæ K B, K D, KE inter ſe æquales ſunt, [d] ſi namq; centro K, & interuallo KB circulus deſcribatur tranſibit is per punctum D, atque adeò KD ipſi KB erit æqualis, itemque KE; & GK parallela eſt ipſi EF.

a 11. primi. b 1. per primi. c 3. tertij. d 1. Axioma primi.

Reſolutio.



Quoniam igitur angulus KED eſt æqualis angulo DEH, atque eſt DK æqualis K E, erit [e] angulus K D E æqualis angulo KED; & propterea KDE angulus æqualis [f] eſt angulo DEH, & DK parallela eſt [g] EH, ducatur [h] ipſi DE parallela KL, & CD, ad L producatur [i], iungaturque [k] B L. Quoniam igitur K L ipſi DE parallela eſt, & K G ipſi EF parallela eſt; quemadmodum KD parallela eſt ipſi EH, erit [l] triangulum KLG æquiangulum triangulo EDF, & triangulum DKG triangulo HEF; quare [m] vt LG ad GK, ità DF, ad FE, & ut KG ad GD ità EF ad FH, ergo ex æquali [n] ut LG ad GD ità DF ad FH, & diuidẽdo ut LD ad DG ita DH ad FH, ponebatur autem & vt DH ad FH ità A G ad GD, ut [p] igitur L D ad DG ità D H ad FH, hoc eſt AG ad GD, quapropter LD ipſi AG eſt [q] æqualis, & ob id ablata communi AD remanebit [r] LA ipſi DG æqualis. Sed & AB eſt [ſ] æqualis BD, ergo LB ipſi BG æqualis erit; Quoniã enim AB eſt ęqualis BD erunt [u] anguli BAD, BDA inter ſe æquales, & æquales itidem qui ex duobus rectis relinquuntur BAL, BDG, latera verò LA, AB æqualia ſunt lateribus G D, DB, utrumq; vtriq; ergo & baſis BL baſi BG eſt æqualis, at verò BG æqualis eſt vtrique LD, AG, cum LD oſtenſa ſit æqualis AG, & AG ipſi BG æqualis eſt, cum à centro ad circumferentiam ducantur, ergo BL ipſi LD æqualis [x] eſt.

e 3. primi. f 1. axioma primi. g 27. primi. h 31. primi. i 2. axioma primi. k 1. per primi. l 29. & 32. 1. m 4. ſexti. n 22. quinti. o 17. quinti. p 11. quinti. q 9. quinti. r 3. axioma primi. ſ ex hypotheſi. t 4. primi. u 5. primi. x 1. axioma primi.

Quod ita ſe habet, & ſic oſtenditur. Quoniam K L parallela eſt D E, & D K ipſi KE æqualis, erit BKL angulus æqualis angulo LKD, [y] & quoniam B K æqualis eſt K D, & angulus BKL angulo DKL, erit [z] & BL ipſi LD æqualis; ſi quidẽ cùm KL, DE ſint parallelæ, ſitque DK æqualis K E, erit angulus B K L æqualis angulo KED, & angulus KED æqualis angulo KDE, hoc eſt angulo LKD, igitur angulus BKL æqualis erit angulo L K D, atque adeo baſis BL baſi LD.

y 29. 5. 29. & 1. axioma 1. z 4. primi.

Compoſitio.

QVoniam igitur DK æqualis eſt KE, & angulus KDE angulo quidẽ [α] KED eſt æqualis; angulus autem KED æqualis [β] eſt angulo BKL, & angulus KDE ipſi DKL ob lineas parallelas KL, ED; ergo & angulus BKL æqualis [γ] erit angulo D K L; ſed & BK æqualis [δ] eſt KD, baſis proinde BL baſi LD æqualis [ε] erit; quãobrem [ζ] & angulus LBD angulo BDA, [η] hoc eſt angulo DAB, hoc eſt angulo ABG, communis autem auferatur angulus ABD, reliquus igitur LBA æqualis [θ] eſt reliquo DBG, ſed & BD G æqualis [ι] eſt ipſi BAL, ergo duo triangula B D G, B A L duos angulos duobus angulis æquales habent, & latus AB æquale lateri BD, quapropter BG ipſi BL, & DG ipſi LA æqualis [κ] erit; reliquus enim angulus erit æqualis reliquo angulo, & triangulum triangulo ſimile; [λ] quamobrem ut AB ad BD ità LB ad BG, & LA ad DG, [μ] eſt autẽ AB æqualis B D, ergo & L B ipſi BG, & LA ipſi DG eſt æqualis; proptereàq; L D æqualis [ν] eſt A G, Quoniam igitur ut A G ad GD,

α 5. primi. β 29. primi. γ 1. axioma primi. δ ex conſtructione. ε 4. primi. ζ 5. primi. η 15. def primi, & 5. primi. θ 3. axioma primi. ι 3. axioma 1 & 32. primi. κ 26 primi. λ 4. ſexti. μ ex hypotheſi. ν 2. axioma primi.

ξ 7. quinti. ο 18. quint. GD, ità ponitur eſſe DH ad HF, atque eſt A G æqualis LD, ξ erit ob id ut L D ad D G ità DH ad HF, & ο componēdo ut LG ad GD ità D F ad F H; eſt autem vt L G ad GK ità DF ad FE ob quartam Sexti Elementorum; ſiquidem rectæ lineæ LK, DE parallelæ ſunt, itemque ſunt parallelæ K G, E F, erunt propterea triangula inter ſe ſimilia π, & erit tandem ut KG ad GD, ità E F ad F H, cùm ſit enim, ut L G ad G K, ità D F ad F E, ob ſimilitudinem triangulorū LKG, & DEF, ρ & conuertendo ut KG ad GL ita EF ad FD, ſed ut L G ad GD ità DF ad FH, ut oſtēdimus; ergò σ ex æquali ut KG ad GD ità EF ad FH, τ eſt autē angulus EFH æqualis angulo KGD ob lineas parallelas E F, K G; ergo angulus E H F æqualis erit angulo KDG, ſiquidem eſt ut K G ad G D, ità E F ad F H, & angulus ad G æqualis eſt angulo ad F, undè reliqui anguli reliquis angulis ęquales υ ſunt ex ſextà propoſitione Libri ſexti; ergo recta KD rectæ EH erit parallela, quare angulus KDE, hoc eſt KED erit æqualis angulo DEH.

π vt in Reſolutione uiſum eſt.
ρ 4. quinti.
σ 22. quinti.
τ 29. primi.
υ 6. ſexti.

S C H O L I O N.

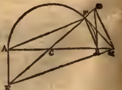
H*ic porrò, quod ſuperius etiam innuimus, aduertendum eſt reſolutionem ſiſtere ibi*, ergo BL æquabitur DL *quod ità eſſe conſtat ex eo, quia K L parallela eſt ipſi D E, & D K æqualis eſt ipſi K E; propterea angulus B K L æqualis eſt angulo L K D, & quia B K eſt æqualis K D, & angulus BKL angulo DKL propterea BL æquabitur LD, vnde vides reſolutionem progredi donec perueniat ad aliquod verum conceßum, quod cum nos ratiocinando offendimus aliundè conſtare debet, ut hic cernis, aliàs non liceret eo aßumpto compoſitionem contexere, etenim illud ex quæſito deduximus, quod in quæſtione eſt poſitum, & nondum liquet, ità neque illud, quod tanquam verū aßumeremus; eo vſque igitur per reſolutionis viam progrediendum eſt, donec aliquod occurrat, quod aliundè nobis verum eſſe perſpectum ſit. Ita quidem in ſuperiori exemplo cùm reſolutio peruenerit ad illud, quod latera LB, LD, ſint æqualia, neceſſe eſt oſtendere id verùm eſſe, quod præſtatur vt viſum eſt. Hæc autem non erant ſilentio prætereunda, ne id reliquiße videremur intactum, quod magnoperè facit ad reſolutionis naturam perfectè comparandam.*

Libro 7. Propoſit. 157. Deſumamus itidem aliud exemplum ex Pappo reſolutionem tamen, quemadmodum compoſitionem nonnihil mutatis verbis afferemus cum is ſuboſcurus videretur.

T H E O R E M A.

Exemplum IV. *Sit Semicirculus in recta linea AB, atque a punctis A, B, ipſi ACB ad rectos angulos agantur recta lineæ BD, AE, & ducatur utcunque D E, a puncto autem F ipſi D E ad rectos angulos agatur FG, quæ cum A B in puncto G conueniat. Dico rectangulum contentum A E, B D rectangulo AGB æquale eſſe.*

Reſolutio.



QVoniam igitur rectangulum contentum A E, B D æquale eſt rectangulo A G B, erit ut A E ad AG, ità B G ad B D per 16. ſexti; ſunt autem circà æquales angulos latera proportionalia, ſiquidem anguli ad A, B ponuntur recti; propterea triangulum AEG triangulo BGD æquiangulū erit; a quāobrem angulus A G E erit æqualis angulo B D G; ſed angulus quidem AGE ęqualis eſt b angulo AFE, qui in eadem portione conſiſtit; c angulus verò BDG rurſus æqualis eſt, ipſi BFG, qui eſt in eadem portione; Cùm enim EAG, EFG recti ſint, ſi circa diametrum E G deſcribatur ſemicirculus, is tranſibit per puncta A, F, atque erit angulus AFE æqualis angulo AGE, qui in eàdem eſt portione; & ſimiliter, cum anguli GBD, GFD ſint recti, circulus circa diametrum GD deſcriptus per B, F tranſibit, d eruntque anguli BFG, BDG inter ſe æquales, ergo angulus AFE æqualis erit angulo BFG; quod quidem ità ſe habet; cùm enim angulus AFB rectus, ſit æqualis recto EFG, dempto ab utriſque communi angulo E F B, erit reliquus AFE, reliquo BFG æqualis.

a 6. ſexti.
b 21. tertij.
c 21. tertij. 31. tertij.
d 21. tertij.

Compoſitio.

QVandoquidem uterq; angulorum AFB, EFG α eſt rectus, dempto communi angulo EFB β erit angulus AFE æqualis angulo BFG, ſed angulo quidem AFE æqualis eſt angu-

α 31. tertij, & ex hypotheſi.
β 3. axioma.

ꝭ angulus AGE, cùm in eadem portione conſiſtant, angulo autem BFG eadem ratione æqualis eſt angulus BDG; angulus igitur AGE angulo BDG [δ] eſt æqualis; atque eſt EAG rectus, æqualis recto GBD; quare & reliquus æqualis reliquo, & triangulum [ε] triangulo ſimile erit. Vt igitur [ζ] EA ad AG, ſic GB ad BD; & propterea rectangulum, quod continetur AE, BD, rectangulo AGB [η] eſt æquale.

γ 31. & 21. tertij. δ 1. axioma. ε 32 tertij. ζ 4. ſexti. η 16. ſexti.

AVCTORIS EXEMPLA.

PRætermiſſis Veterum exemplis, quæ noſtra ſunt aſſeremus. Lubet autem primùm adducere Theorema, quod apud Archimedem reperitur in Aſſumptis, à nobis tamen longè aliter demonſtratum; eius igitur Reſolutio & Compoſitio à nobis contexitur ad eum, qui ſequitur modum.

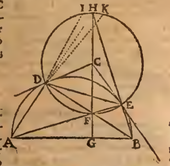
THEOREMA.

Exemplum V.

Si fuerit ſemicirculus ſuper diametrum AB; & educta fuerint ex C duæ lineæ tangentes illum in duobus punctis D, & E; iunctaque fuerint EA, DB, ſe mutuò ſecantes in F; & iuncta fuerit CF, & producatur ad G. Dico CG perpendicularem eſſe ipſi AB.

Præparatio.

SVpponatur ita eſſe; & intelligatur protracta GC ad partes C in infinitum, & BE ad partes E, donec occurrat ipſi GC protractæ in H; Intelligatur per puncta F, E, H, circulus deſcriptus, qui neceſſariò tranſibit etiam per D, vt paulò poſt demonſtrabimus; ducaturque DE.



Reſolutio.

QVoniam igitur angulus CGB, ſeu FGB eſt rectus; ergo [a] æquabitur angulo ADB; communis autem eſt angulus ad B vtrique triangulo ADB, & FGB; ergo angulus DAB [b] æquabitur angulo BFG; ſed angulus DFC æqualis eſt [c] angulo BFG; ergo angulus DFC [d] æquabitur angulo DAB; [e] eſt autem angulus CDF æqualis angulo DAB; eſt enim DC tangens, & DB ſecans; ergo angulus DFC, ſeu DFH [f] æquabitur angulo CDF; ſed angulus DFH æqualis [g] eſt angulis FHB, FBH; ergo angulus CDF æqualis eſt [h] duobus angulis FHB, FBH; ſed angulus EDB, ſeu EDF æqualis eſt [i] angulo FHE; in eodem enim ſunt circuli ſegmento; ergo angulus CDF [k] æquabitur duobus angulis EDB, & DBE: angulus verò CDF æqualis eſt duob. CDE, & EDF angulis; erit ob id angulus CDE; æqualis angulo DBE; nam totus angulus CDF æquatur ſuis partibus, nēpè angulis CDE; & EDF, æqualis eſt etiam demonſtratus duobus angulis EDB, & DBE, vtrinq; ablato cōmuni angulo EDB; reliquus CDE [l] æquabitur reliquo DBE. Quod ita ſe [m] habet; ſiquidē CD tāgit circulum, & DE [n] ſecat eundem; angulus verò DBE, eſt in alterno circuli ſegmento.

a 32. axioma. primi. b 32. primi. c 15. primi. d 1. axioma primi. e 32. tertij. f 1. axioma primi. g 32 primi. h 1. axioma primi. i 21. tertij. k 1. axioma. l 3. axioma primi. m 32. tertij. n 32. tertij.

Lemma.

Quod autem, ſi fuerit circulus deſcriptus per FEH, tranſire debeat per punctum D; ſic oſtendo. *Quoniam enim angulus DFE æqualis eſt [a] angulis DAF, & ADF; ſed angulo ADF, vtpotè recto, æquales ſunt [b] anguli EAB, & EBA; ergo angulus DFE æquabitur [c] angulis DAE, EAB, et EBA, hoc eſt angulis DAB, & EBA; Sed angulus CDB æqualis eſt [d] angulo DAB, & angulus CEA æqualis eſt [e] angulo EBA; ergo anguli CDF, & CEF æquales ſunt [f] angulo DFE, hoc eſt angulis DFC, CFE. Vel igitur angulus CDF æqualis eſt angulo CFD, vel non eſt æqualis. Si primum, habetur intentum; nam CD æquabitur [g] CF; ſed CD æqualis eſt [h] CE; vtraque enim eſt tangens; ergo CD, CE, CF, erunt inter ſe æquales; ergo circulus tranſiens per puncta H, E, F, tranſibit [i] per D. Si non eſt æqualis, eſto maior angulus CDF. Quoniam igitur quatuor ſunt quantitates, quarum prima angulus CDF, ſecunda angulus CFD, tertia angulus CFE, quarta angulus CEF; aggregatum autem primæ, & quartæ æquale eſt aggregato ſecundæ, & tertiæ; ſi prima, nempè*

a 32. primi. b 32. primi. c prim. ax. pr. d 32. tertij. e 32. tertij. f prim. ax. primi. g 6 primi. h 36. tertij. i 9. tertij.

k 19. primi. l 36 tertij, & 2. ax. primi. m prim. ax. primi. n 18 primi.

angulus CDF fuerit maior ſecundà, ſcilicet angulo CFD; etiam tertia, nempè angulus CFE, maior erit quartà, videlicet angulo CEF; ergo latus CE maius erit [k] *latere CF; ſed latus CE æquale eſt* [l] *lateri CD; ergo latus CD maius erit* [m] *latere CF; ergo angulus CFD maior erit* [n] *angulo CDF; ſed ſupponebatur minor; ergo foret minor, & maior, quod eſt inconueniens. Non diſſimiliter ſi angulus CDF ſupponeretur minor.*

Angulos quantitates appello ſenſu ſupra explicato.

Compoſitio.

α 32. tertij. β 21 tertij. γ 17. primi. δ 2. axioma primi. ε 32. tertij. ζ 1. axioma. η 13. primi. θ 32. primi.

QVoniam igitur CD tangit circulum, & eundẽ ſecat DE; erit α angulus CDE æqualis angulo DBE; ſed angulus CDF æqualis eſt duobus CDE, EDF; ergo angulus CDF æquabitur duobus angulis EDB, & DBE; ſed EDB, ſeu EDF æqualis eſt β angulo FHE; in eodem enim ſunt circuli ſegmento; ergo angulus CDF æqualis eſt duobus FBH, & FHB; ſed his æqualis γ eſt externus DFH, ſeu DFC; ergo angulus DFC δ æquabitur angulo CDF, ſed angulus CDF ε eſt æqualis angulo DAB; ergo ãgulus CFD æqualis erit ζ angulo DAB; at verò angulus DFC η eſt æqualis angulo BFG; ergo angulus DAB æqualis erit angulo BFG; communis eſt autẽ angulus ad B; ergo reliquus FGB θ æquabitur angulo ADB; hic autem eſt rectus; ergo & FGB rectus erit.

ι 10. def. 1. κ 31. tertij. λ 12. axioma primi.

Hinc ſequitur, quòd AD protracta debeat peruenire ad pũctũ H, & hũc in modũ cõfirmabitur. Si non peruenit ad H, vel ſuprà, vel infrà. Si ſuprà, vt ad punctum I; Quoniam igitur ADI eſt linea recta; eſtque angulus ADB rectus; ob id rectus erit ei ι deinceps angulus IDB, ſeu IDF; ſed ſi à puncto D ad pũctum H recta ducatur, fiet κ angulus HDF rectus; cùm ſit in ſemicirculo; ob id angulus HDF λ æquabitur angulo IDF, pars toti; quod eſt abſurdum. Non diſſimiliter ratiocinandum, ſi dicatur peruenire ad K; angulus enim KDB, rectus erit; ſiquidem ADK recta eſſe ſupponitur; angulus verò ADB rectus; ob id angulus deinceps illi KDB rectus quoque erit. Atſi ſupponatur ducta DH, vtique cum DF faciet angulum rectum: quare angulus KDB, ſeu KDF æquabitur angulo HDF, pars toti; quod eſt impoſſibile.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Initium Reſolutionis, & finis Compoſitionis.

Quoniam angulus CGB, ſeu FGB, eſt rectus; ergo
Angulus FGB, æquabitur angulo ADB; ſed
Angulus ad B, communis eſt vtrique triangulo ADB, FGB; ergo
Angulus DAB, æquabitur angulo BFG; ſed
Angulus DFC æqualis eſt angulo BFG, ergo
Angulus DFC, æquabitur angulo DAB. ſed
Angulus CDF, æqualis eſt angulo DAB, (eſt enim DC tangens & DB ſecans) ergo
Angulus DFC, ſeu DFH, æquabitur angulo CDF; ſed
Angulus DFH æqualis eſt angulis FHB, FBH. ergo.
Angulus CDF, æqualis erit duobus angulis FHB, FBH; ſed
Angulus EDB, ſeu EDF, æqualis eſt angulo FHE; in eodem enim ſunt circuli ſegmento; ergo
Angulus CDF, æquabitur duobus angulis EDB, DBE;
Angulus verò CDF, æqualis eſt duobus angulis CDE, & EDF, ergo

Finis Reſolutionis, & initium Compoſitionis.

Angulus CDE, æqualis erit angulo DBE; ſiquidem totus angulus CDF, æquatur ſuis partibus, nempè angulis CDE, & EDF; æqualis eſt etiam demonſtratus duobus angulis EDB, & DBE; vtrinque ablato communi angulo EDB, reliquus CDE, æquabitur reliquo DBE. Quod ita ſe habet, &c.

Aduertendum autem omnem Analyſin deſinere in propoſitionem illatam, & hoc præ oculis habendum, non autem in aſſumptam; ità fit vt cùm ea fuerit ex antecedentibus deducta, & aliunde veritas eius comprobetur, ſtatim Analyſis ſiſtat, nec vlteriori indigeat progreſſu, ac proinde tunc primùm liceat Analyſeos repetendo veſtigia, Syntheſin ipſam perficere.

THEOREMA.

Exemplum VI.

Si ſuper AB rectam ex centro E deſcriptus ſit ſemicirculus ACB, & in eo aptata ſit AC æqualis ſemidiametro, nempè AE, vel EB; ſitque AC bifariam diuiſa in D; & ex E ducta ſit ED, quæ protracta perueniat ad peripheriam in F: ductæque ſint BF, AF. Dico BF, EF, AF, eſſe in continua ratione.

Reſolutio

Reſolutio.



DVcatur CF. Quoniã igitur eſt, vt BF ad EF, ita EF ad AF; & eſt EF æqualis tàm EB, quàm AC; item CF æqualis eſt AF; ergo erit vt BF ad BE, ita AC ad CF; a ſunt autem anguli ACF, ABF, ſeu EBF, inter ſe æquales, vtpote exiſtentes in eodẽ circuli ſegmento; ergo æquiangula ſunt triangula ACF, EBF; per ſextam Sexti; Quod ita ſe habet; angulus enim FBE ęqualis b eſt angulo ACF, angulus verò CAF ęqualis c eſt angulo ACF, cùm triangulum ACF ſit iſoſcele, & angulus EFB æqualis d eſt angulo EBF, cũ triangulum EBF ſit iſoſcele; quare angulus EFB æquabitur e angulo FAC, & reliquus AFC f æquabitur reliquo BEF. Cæterùm triangulum EBF eſſe iſoſcele facilè conſtat; ſiquidem EF, EB ex centro E ad peripheriam terminantur. Triangulum AFC huiuſmodi eſſe ſic demonſtratur. Quoniam enim ex centro E ducta eſt EF, quæ bifariã g diuidit AC, h faciet cum ipſa AC in puncto D angulos rectos; quare quadratum AF i æquabitur quadratis AD, DF, ſed DC æqualis eſt ipſi AD, & DF eſt communis vtrique triangulo rectangulo ADF, CDF; ergo k quadratum AF ęquabitur quadratis CD, DF; ſed huiuſmodi quadratis ęquale eſt k quadratum CF; ergo quadratum AF æquabitur quadrato CF; quare AF æquabitur CF.

a 21. tertij.
b 21 tertij.
c 5. primi.
d 5. primi.
e 1. axioma primi.
f 32. primi.
g 3. tertij.
h 3. tertij.
i 47. primi.
k 47. primi.

Compoſitio.

QVoniam igitur triangula ACF, & FBE æquiangula ſunt; ſiquidem angulus FBE æqualis eſt angulo ACF; angulus verò CAF æqualis eſt angulo ACF, cùm triangulum ACF ſit iſoſcele, & angulus EFB æqualis eſt angulo EBF, cùm triangulum EBF ſit iſoſcele; quare angulus EFB æquabitur angulo FAC; ergo reliquus α æquabitur reliquo; atque adeò æquiangula erũt triãgula; propterea ſimilia, vnde β erit, vt BF ad BE, ſeu EF, ita AC, ſeu EF ad CF, ſeu AF; ſunt igitur BF, EF, AF in continua ratione.

α 32 primi.
β 4. ſexti.

Conſpectus Reſolutionis, atq; Compoſitionis.

Quoniam igitur eſt vt BF, ad EF, ita EF, ad AF; eſtque EF, æqualis tàm EB, quàm AC; item CF, eſt æqualis AF; erit ergo — Initium Reſolutionis, & finis Compoſitionis.

Vt BF, ad BE, ita AC ad CF. At verò

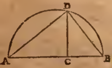
Anguli ACF, ABF, ſeu EBF, ſunt inter ſe æquales, vtpotè exiſtentes in eodem circuli ſegmento; ergo triangula ACF, & EBF, erunt æquiangula per 6. ſexti. — Finis Reſolutionis, & initium Compoſitionis.

THEOREMA.

Exemplum VII.

Si rectã linea extremã, ac mediã ratione ſecetur. Dico quadratum totius; rectangulum ſub tota, & ſegmento maiori; rectangulum ſub tota, & ſegmento minori in continua eſſe ratione.

Præparatio ad Reſolutionem.



SIt recta AB ſecta in C extremã, ac mediã ratione; itã vt pars maior ſit AC, pars minor CB. Dico vt eſt quadratum AB ad rectangulum BAC, ita eſſe rectangulum BAC ad rectangulum ABC. a Deſcribatur ſemicirculus ADB ſuper AB & ex puncto C b excitetur perpendicularis CD; c agantur que AD, BD.

a 3. pet prim.
b 11. primi.
c 1. pet primi.

Reſolutio.

QVoniam igitur eſt, vt quadratum AB, ad rectangulum BAC, ita rectangulum BAC ad rectangulum ABC; eſt autem rectangulum BAC d æquale quadrato ex AD; rectangulum verò ABC æquale e eſt quadrato ex BD; propterea erit vt quadratum AB ad quadratum AD, ita quadratum AD ad quadratum BD; quare f vt AB ad AD, ita AD ad DB; ſed g vt AB ad AD, ita AD ad AC; ergo AC, & BD erunt inter ſe æquales; atque adeò earum quadrata æqualia erunt. Quod ita ſe habet; nam rectangulum ABC æquale eſt quadrato AC, cùm AB ſit in C diuiſa extremã, ac mediã ratione; eſt autem

d Per corol. 8. ſexti. & 17. eiuſdem.
e 17. ſexti.
f 22. ſexti.
g Per corol. 8. ſexti.

idem rectangulum ABC æquale quadrato ex BD, cùm triangulum ABD ſit rectangulum; & recta DC perpendicularis ſit ipſi AB.

Compoſitio;

QVoniam igitur quadrata AC, BD æqualia ſunt; rectangulum enim ABC æquale eſt quadrato ipſius AC; ſiquidem AB in C extremâ, ac mediâ ratione diuiſa eſt, & idem rectangulum ABC æquale α eſt quadrato ex BD ob triangulũ ADB, &c. propterea AC, BD erunt inter ſe æquales; β eſt autem vt AB ad AD, ita AD ad AC; ergo erit vt AB ad AD, ita AD ad DB; ob id γ erit vt quadratũ AB ad quadratum AD, ita quadratum AD ad quadratum BD; δ eſt autem rectangulum ABC æquale quadrato BD; rectangulum verò BAC æquale quadrato AD; erit proinde vt quadratum ex AB ad rectangulum BAC, ita rectangulum BAC ad rectangulum ABC. Quod erat operæ pretium oſtendere.

α Per Coroll. 8. ſex. & 17. eiuſdem.
β Per Coroll. 8. ſexti.
γ 22. ſexti.
δ Per coroll. 8. ſex. et 17. eiuſdem.

Non diſſimili modo ac ſupra fiet conſpectus reſolutionis, & compoſitionis.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Initium Reſolutionis, & finis Compoſitionis.

Quoniam eſt vt quadratum AB, ad rectangulum BAC, ita rectangulum BAC ad rectangulum ABC. Sed rectangulum BAC æquale eſt quadrato AD, & rectangulum ABC æquale eſt quadrato BD; propterea erit, vt quadratum AB ad quadratum AD, ita quadratum AD, ad quadratum BD; quare

Finis Reſolutionis, & initium Compoſitionis.

Vt AB ad AD, ita AD, ad DB; ſed

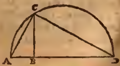
Vt AB ad AD, ita AD ad AC; ergo AC, & BD erunt inter ſe æquales; ergo earum quadrata æqualia erunt. Quod ita ſe habet, &c.

THEOREMA.

Exemplum VIII.

Si fuerint tres quantitates proportionales, aggregatum quadratorum ex media, & maiori extrema ad rectangulum ſub ijſdem contentum rationem habet vt aggregatum extremarum ad mediam.

Reſolutio.



SInt tres proportionales AB, BC, BD, & earum extremæ ſint AB, BD, è quibus maior ſit BD. Diſponantur in directum, vt conſtituant rectam AD; ex puncto B * erecta ſit perpendicularis media BC, a erunt quidem A, C, D puncta in circulo, actis igitur AC, DC; conſideretur triangulum ACD, item & BCD. Quoniam igitur aggregatum quadratorum à media, & maiori extrema ad rectangulum ſub ijſdem contentum rationem habet, vt extremarum aggregatum ad mediam; eſt autem AD aggregatum extremarum AB, BD, media verò BC, rectangulum autem ſub media, maiorique extrema continetur ſub BC, & BD, quarum quadratis æquale b eſt quadratum CD; igitur eſt vt AD, ad BC, ita quadratum CD ad rectangulum ſub BC, & BD; c eſt autem rectangulum ADB ad rectangulum ſub BC, & BD, in eadem ratione vt AD ad BC, propter communem altitudinem BD; ergo rectangulum ADB d æquabitur quadrato CD; quamobrem e erit, vt AD ad CD, ita CD ad DB; eſt autem angulus ad punctum D communis vtrique triangulo; propterea triangulum ADC æquiangulum f erit, & ſimile triangulo CDB. Quod ita ſe habet, vt conſtat ex Elementis.

* 11. primi.
a ex Elementis.
b 47. primi.
c 1. ſexti.
d 9. quinti.
e 17. quinti.
f 6. ſexti.

Compoſitio.

QVoniam igitur triangulum ADC æquiangulo eſt triangulũ CDB, eidemque ſimile; propterea α erit vt AD ad CD, ita CD ad DB, ergo rectangulum ADB β æquabitur quadrato CD, γ eſt autem rectangulum ADB ad rectangulum ſub BC, & BD in eadem ratione, in qua eſt AD ad BC, propter communem altitudinem BD, ergo erit δ vt AD ad BC, ita quadratum CD ad rectangulum ſub BC, & BD, ſed quadratum CD æquale ε eſt quadratis ipſarum BD, & BC, nempè maioris extremæ, & mediæ; rectangulum verò ſub BC, & BD ſub ijſdem continetur; eſtque AD aggregatum extremarum AB, BD, media verò eſt BC; ergo aggregatum quadratorum à media, & maiori extrema ad rectangulum ſub ijſdem contentum rationem habet, vt aggregatum extremarum ad mediam.

α 4. ſexti.
β 17. ſexti.
γ 1. ſexti.
δ 9. quinti.
ε 47. primi.

Com-

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Quoniam igitur aggregatum quadratorum, &c. Initium Reſolutionis, & finis Compoſitionis.

Eſt autem AD aggregatum extremarum A B, B D, media verò B C; Rectangulum autem ſub media, & maiori extrema, continetur ſub B C, BD, quarum quadratis eſt æquale quadratum CD, igitur eſt

Vt AD ad BC ita quadratum CD ad rectangulum ſub BC & BD.

Rectangulum autem AD B ad rectangulum ſub B C & B D eſt in eadem ratione vt A D, ad BC ob communem altitudinem BD ergo

Rectangulum ADB, æquabitur quadrato CD. erit ergo

Vt A D ad C D ita C D ad D B.

At verò angulus ad punctum D, communis eſt vtrique triangulo; ergo Finis Reſolutionis, & initium Compoſitionis.

Triangulum ADC, æquiangulum erit, ac ſimile triangulo CDB. Quod ita ſe habet, &c.

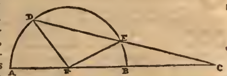
T H E O R E M A.

Exemplum IX.

Sit ſemicirculus in recta AB, ita ut ſit protracta hæc ad quodcunq; punctum C, & ab eo ducta ſit CD, occurrens conuexo peripheriæ in E. Dico Arcum AD maiorem eſſe arcu BE.

Reſolutio.

Sit centrum F, & agantur rectæ FD, FE. a ex Elementis.



QVoniam igitur arcus A D maior eſt arcu BE, a erit angulus AFD, maior angulo BFE, ſed angulus AFD æqualis b eſt angulis FDC, & FCD; ergo anguli FDC, FCD maiores erunt angulo E F C, at verò angulus F D C ſeu F D E æqualis c eſt angulo DEF; ergo angulus DEF vna cum angulo E C F maior erit angulo EFC. Quod ita ſe habet; angulus enim ſolus DEF maior eſt d angulo EFC; ob id multò maior erit idem D E F, vnà cum ECF, multo maior inquam erit ipſo EFC.

b 32. primi. c 5 primi. d 16 primi.

Compoſitio.

QVoniam angulus ECF vna cum angulo DEF maior α eſt angulo CFE; angulus verò F D E æqualis β eſt angulo FED; ergo angulus F D E, ſeu F D C vna cum angulo DCF maior erit angulo C F E; ſed angulis FDC, & DCF æqualis γ eſt angulus A F D; ergo angulus A F D maior eſt angulo C F E, ſeu B F E; ergo arcus A D, cui inſiſtit angulus AFD maior δ erit arcu BE, cui inſiſtit angulus BFE. Quod oportebat oſtēdere.

α 16. primi. β 5. primi. γ 32. primi. δ ex Elementis.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Quoniam igitur arcus A D, maior eſt arcu B E. ergo Initium Reſolutionis, atque finis Compoſitionis.

Angulus A F D, maior erit angulo B F E, ſed

Angulus AFD, æqualis eſt angulis FDC, & FCD, ergo

Anguli FDC, & F C D, maiores erunt angulo EFC, at verò Finis Reſolutionis & initium Compoſitionis.

Angulus FDC, ſeu FDE, æqualis eſt angulo DEF. ergo

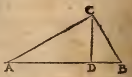
Angulus DEF, vna cum angulo ECF, maior erit angulo EFC. Quod ita ſe habet, &c.

T H E O R E M A.

Exemplum X.

In omni triangulo rectangulo ut eſt hypothenuſa ad aggregatum laterum ambientium angulum rectum, ita hoc aggregatum ad aggregatum ex hypothenuſa & duplo catheto.

Sit



SIt triangulum rectangulum A C B, cuius hypothemuſa A B, latera verò circa angulum rectum ſint AC, BC; cathetus verò CD; Dico, ut eſt A B ad aggregata ex A C, & B C, ita eſſe huiuſmodi aggregatum ad aggregatum ex A B, & dupla DC.

Reſolutio.

Quoniam igitur eſt, ut AB ad aggregatum ex AC, & B C, ita huiuſmodi aggregatum ad aggregatum ex AB, & dupla D C propterea rectangulum ſub AB & ſub compoſita ex AB, & dupla DC æquabitur a quadrato aggregati ex AC,& BC.Sed rectangulum ab A B in aggregatum ex AB, & dupla DC æquale eſt quadrato ex AB, vna cum rectangulo ſub A B & dupla DC; ergo quadratum aggregati ex A C, & B C æquabitur quadrato ipſius A B, vnà cum rectangulo ſub AB, & dupla DC, hoc eſt quadratis ex AC, & BC vnà cum rectangulo ſub AB & dupla DC, hoc eſt vnà cum rectangulo duplo ſub AB, & C D, ſeu ſub A C, BC duplo, (vt ſimplum enim rectangulum ſub A B, & DC æquale eſt ſimplo ſub A C, & BC, ita duplum æquale eſt duplo) id autem ita ſe habet per quartam ſecundi.

a 16. ſexti.

Compoſitio.

QVoniam igitur ſi intelligatur BC in directum poſita ipſi AC, ſit recta quædam diuiſa in C utcumque; propterea per quartam ſecundi, quadratum huiuſmodi aggregati æquale eſt quadratis A C, B C, plus duplo rectangulo ſub A C, & B C; at verò duplum rectangulum ſub A C & B C, æquale eſt rectangulo duplo ſub A B & DC, idem eſt enim rectangulum ſub AC & BC, ac eſt rectangulum ſub AB.& CD; quare duplum æquatur duplo, ſeu quod idem eſt rectangulum duplum ſub AC & BC æquatur rectangulo ſub AB,& dupla CD; ergo quadratum compoſitæ, ſeu aggregati ex AC,& BC æquabitur quadratis AC, BC, hoc eſt quadrato A B, & rectangulo ſub A B, & dupla C D ſed quadrato AB vna cum rectangulo ſub AB & dupla CD æquatur rectangulum ſub AB, & ſub aggregato ex AB, & dupla CD, ergo quadratum aggregati ex AC, & BC æquale eſt rectangulo ſub AB, & compoſita ex AB, & dupla CD; quamobrem erit; vt A B ad aggregatum ex A C, B C, ita huiuſmodi aggregatum ad aggregatum ex AB & dupla CD. Quod erat operæ pretium demonſtrare.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Initium Reſolutionis, & finis Compoſitionis.

Quoniam igitur vt AB ad aggregatum ex AC, & B C, ita huiuſmodi aggregatum ad aggregatum ex AB, & dupla DC; propterea

Rectangulum ſub A B, & ſub compoſita ex AB, & dupla DC, æquabitur quadrato aggregati ex A C, & BC. Sed

Rectangulum ſub A B in aggregatum ex A B & dupla C D æquale eſt quadrato ex A B, vnà cum rectangulo ſub A B, & dupla C D; ergo

Quadratum aggregati ex A C & B C æquabitur quadrato ipſius A B, vna cum rectangulo ſub A B & dupla C D, hoc eſt quadratis ex A C & B C, vnà cum rectangulo ſub A B & dupla CD.

Finis Reſolutionis, & initium Compoſitionis.

Hoc eſt vnà cum rectangulo duplo ſub A B, & C D, ſeu ſub A C, B C duplo, &c.

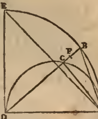
THEOREMA.

Exemplum XL.

In quadrante D E A, & ſemicirculo D C A, ſit ducta vbilibet D C B, & D B ad B F, ſit in duplicata ratione arcus E B A, ad arcum A B. Dico punctum F, cadere vltra punctum C verſus B.

Intelligantur ductæ AE, AB, AC.

Reſolutio.



QVoniam igitur punctum F cadit ultra C. verſus B; erit FB, minor quàm CB; quare D B ad B F, maiorē habebit [a] rationem, quàm ad CB, ſed ex hypotheſi D B, ad F B, eſt in duplicata ratione, arcus EBA, ad arcum B A, propterea duplicata ratio arcus E B A, ad arcum B A, maior eſt, quàm ratio D B ad C B; ſed ut D B, ad C B ità rectangulum [b] ſub dupla D B,& DB, ad rectangulum ſub eadem dupla D B, & B C, ob communem altitudinem ſcilicet, quæ eſt dupla DB;hoc eſt [c] ita duplum quadratum D B, ſeu D A, hoc eſt quadratum E A, ad quadratum A B; eſt enim dupla D B, diameter circuli, cuius centrum D, & ad ipſam cadit [d] perpendicularis A C, eſtque A B, accommodata in circulo; proinde ratio duplicata arcus EBA,ad arcum AB, maior erit ratione quadrati EA, ad quadratum AB; ergo maior erit duplicata ratione rectæ E A, ad rectam A B, quare ſimplex ratio arcus EBA, ad arcum AB maior erit ratione EA ad A B;Quod quidem ita ſe habet, arcus enim ad arcum maiorem habet rationem, quàm chorda, ad chordam, &c.

a 8 quinti.
b 1. ſexti. & coroll. 8 ſexti.
c 47. primi.
d 31. tertij.

Compoſitio.

QVoniā ſimplex ratio arcus EBA, ad arcum BA, maior eſt ratione chordæ EA, ad cordam B A, ergo ratio duplicata arcus ad arcum maior eſt ratione duplicata chordæ ad chordam; ergo ratio duplicata arcus E B A, ad arcum B A, maior erit [α] ratione quadrati rectæ EA, ad quadratum rectæ AB, hoc eſt [β] dupli quadrati D A, ſeu D B, ad quadratum A B, hoc eſt rectanguli ſub dupla D B, & D B, ad rectangulum [γ] ſub eadem dupla DB, & BC, cùm DB, dupla, ſit diameter circuli, cuius centrum D, & A C cadat perpendicularis ad illam, ſitque AB,accomodata in circulo,ſed vt rectangulū ſub dupla DB & D B,ad rectangulum ſub eadem dupla DB,& BC,ita eſt DB ad BC ob communem altitudinem ſcilicet, quæ eſt dupla D B; ergo ratio duplicata arcus E B A, ad arcum B A, maior erit ratione DB, ad B C, ſed ratio D B ad B F; ex hypotheſi eſt duplicata arcus E B A, ad arcum B A, ergo ratio DB, ad BF, maior erit ratione DB, ad BC, ergo B F, minor eſt,quàm B C; quare punctum F, cadit vltra C verſus B Quod opportebat oſtendere.

α Coroll. 20. ſexti.
β 47. primi.
γ Coroll. 8. ſexti.

Superius Theorema mihi reſoluendum fuit propoſitum a P. Stephano de Angelis Geometra præſtantiſſimo.

Conſpectus Reſolutionis atque Compoſitionis.

Initium Reſolutionis, & finis Compoſitionis.

Quoniam igitur punctum F cadit vltra C verſus B; ergo
F B minor erit quàm CB: ergo
D B ad BF maiorem habebit rationem quàm ad CB, ſed ex hypotheſi
DB ad FB eſt in duplicata ratione arcus EBA ad arcum B A; propterea
Duplicata ratio arcus EBA ad arcum BA maior erit, quàm ratio DB ad CB, ſed
Vt DB ad CB, ita rectangulum ſub dupla D B, & D B ad rectangulum ſub eadem dupla D B, & BC, ob communem altitudinem ſcilicet quæ eſt dupla D B.
Hoc eſt ita duplum quadratum DB, ſeu D A,
Hoc eſt quadratum EA ad quadratum AB; eſt enim dupla D B, diameter circuli, cuius centrum D, & ad ipſam cadit perpendicularis AC, eſtque A B accommodata in circulo; ergo
Duplicata ratio arcus E B A ad arcum A B, maior erit ratione quadrati EA ad quadratum A B; ergo
Duplicata ratio arcus EBA ad arcū AB. Maior erit duplicata ratione recta EA ad rectā AB; ergo
Simplex ratio arcus EBA ad arcum AB maior erit ratione EA ad AB. Quod ita ſe habet, &c.

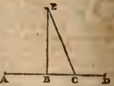
Finis Reſolutionis & initium Compoſitionis.

THEOREMA.

Exemplum XII.

Sit BE perpendecularis recta BD, quæ biſariam ſecta ſit in C, & protracta ad partes B in A, vt CA æqualis ſit CE. Dico eſſe A B ad BE, vt B E ad A D.

Reſolutio.



QVoniam igitur eſt vt A B ad B E, ita B E ad A D, ergo rectangulum D A B æquabitur [a] quadrato B E, addito communi quadrato B C, ergo rectangulum D A B, vna cum quadrato B C æquabitur [b] quadrato B E, vna cum quadrato B C, ſed quadratum B E, vna cum quadrato B C æquale eſt quadrato C E, ergo rectangulum D A B, vna cum quadrato B C æquabitur quadrato C E, ſed quadratum C E æquale eſt [c] quadrato A C, ſiquidem A C facta eſt æqualis CE, ergo rectangulum DAB, vnà cum quadrato BC æquabitur quadrato AC. Quod ita ſe habet; [d] eſt enim BD biſariam diuiſa in C, & ei addita A B, vnde rectangulum D A B vna cum quadrato BC, per ſextam ſecundi Elem. æquabitur quadrato A C.

a 17. ſexti.
b 2. axioma primi.
c 47. primi.
d 6. ſecundi.

Compoſitio.

QVoniam igitur rectangulum D A B, vnà cum quadrato B C æquale eſt [α] quadrato A C, eſt autem quadratum A C æquale quadrato E C, ſiquidem A C ſupponitur æqualis E C, ergo rectangulum DAB, vna cum quadrato BC æquabitur [β] quadrato E C, ſed quadratum E C æquale eſt [γ] quadratis E B, B C, ergo rectangulum DAB, vnà cum quadrato B C æquabitur quadrato E B plus quadrato B C, ablato communi quadrato BC, ergo reliquum rectangulum D A B æquabitur [δ] reliquo quadrato E B; quamobrem erit [ε] vt A B ad E B, ita E B ad AD, Quod initio propoſitum erat oſtendendum.

α 6. ſecundi.
β 2. axioma primi.
γ 47. primi.
δ 3. axioma primi.
ε 17. ſexti.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Initium Reſolutionis, & finis Compoſitionis.

Quoniam igitur eſt ut A B ad B E, ita B E ad A D; ergo
Rectangulum D A B æquabitur quadrato B E,
Addito communi quadrato B C; ergo
Rectangulum D A B, vnà cum quadrato B C æquabitur quadrato B E, vnà cum quadrato B C, ſed
Quadratum B E, vna cum quadrato BC æquale eſt quadrato CE; ergo
Rectangulum D A B vna cum quadrato B C æquabitur quadrato C E, ſed
Quadratum C E æquale eſt quadrato AC, ſiquidem AC facta eſt æqualis CE; ergo
Rectangulum DAB vna cum quadrato B C, æquabitur quadrato A C. Quod ita ſe habet, &c.

Finis Reſolutionis & initium Compoſitionis.

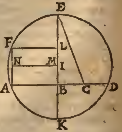
THEOREMA.

Exemplum XIII.

Iiſdem poſitis.

Si per puncta A, E, D, tranſeat circuli peripheria, & ex puncto A erecta ſit perpendicularis AF occurrens peripheriæ in F. Dico quatuor rectas A F, A B, BE, A D eſſe proportionales in continua ratione.

Præparatio.



EX circuli centro M cadat [a] MN perpendicularis ipſi A F, & protrahatur [b] ad partes M donec in puncto I occurrat rectæ E B, quæ protrahatur [c] ad partes B donec occurrat peripheriæ in K, agatur [d] autem FL parallela ipſi NI. Manifeſtum eſt [e] ex Elem. N F, & N A eſſe inter ſe æquales, quibus, cùm æquales [f] ſint I L, I B, etiam I L, I B inter ſe æquales eſſe, quibus ſublatis ex æqualibus IE, IK, remanere [g] æquales LE, BK.

a 12. primi.
b 2. poſt. primi.
c 2. petitio.
d 31. primi.
e 3. tertij.
f 34. primi.
g 3. axioma

Reſolutio.

QVoniam igitur AF, AB, BE, AD ſunt proportionales in continua ratione, erit quidem AB media [a] proportionalis inter A F, & B E, quare quadratum A B, æquabitur rectangulo ſub A F, & B E hoc eſt rectangulo E B L, eſt [b] enim

a 17. ſexti.
b 34. primi.

BL

BL æqualis AF,)additis æqualibus [c] rectangulis ABD, & KBE, ſeu BEL, (eſt [d] enim EL æqualis BK) ergo quadratum AB, vnà cum rectangulo ABD æquabitur [e] rectangulo EBL plus rectangulo BEL, ſed quadratum AB plus rectangulo ABD æquale eſt rectangulo DAB, & rectangulum EBL plus rectangulo BEL, æquale eſt [f] quadrato BE; ergo rectangulum DAB æquabitur [g] quadrato BE, quare addito communi quadrato BC, rectangulum DAB plus quadrato BC æquabitur [h] quadrato BE, vna cùm quadrato BC, ſed rectangulum DAB plus quadrato BC æquatur [i] quadrato AC, & quadratum BE plus quadrato BC æquatur [k] quadrato EC; ergo quadratum AC æquabitur [l] quadrato EC; ergo AC æquabitur EC, Quod ita ſe habet ex conſtructione,

c 35. tertij. d 3. axioma primi. e 2. axioma 1. f 2. ſecundi. g 1. axioma primi. h 1. axioma primi. i 6. ſecundi. k 47. primi. l 1. axioma primi.

Compoſitio.

QVoniam igitur AC æqualis eſt EC, ergo quadratum AC æquabitur quadrato EC, ſed quadratum AC æquale eſt [α] rectangulo DAB vna cum quadrato BC, & quadratum EC æquale eſt [β] quadrato BE vna cum quadrato BC; ergo rectangulum DAB plus quadrato BC æquabitur [γ] quadrato EB plus quadrato BC; ablato communi quadrato BC; ergo rectangulum DAB æquabitur [δ] quadrato BE; ſed rectangulo DAB æquale eſt quadratum AB, vna cum rectangulo ABD, & quadratum BE æquale eſt [ε] rectangulo EBL plus rectangulo BEL; ergo quadratum AB plus rectangulo ABD æquabitur [ζ] rectangulo BEL ſeu KBE plus rectangulo EBL, ſeù ſub BE, & AF; ſunt [η] autem rectangula ABD, & KBE inter ſe æqualia, ſublatis igitur æqualibus rectangulis ABD, KBE, reliquum quadratum AB æquabitur [θ] reliquo rectangulo ſub AF, & BE. Quare [ι] vt AF ad AB, ita AB ad BE; erat autem, ut AB ad BE, ità BE ad AD, ergo AF, AB, BE, AD, ſunt quatuor quantitates in continua ratione, Quod initio propoſitum erat oſtendere.

α 6. ſecundi. β 47. primi. γ 1. axioma primi. δ 3. axioma primi. ε 2. ſecundi. ζ 1 axioma. η 35. tertij. θ 1. axiom. 1. ι 17. ſexti.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

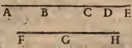
Quoniam igitur AF, AB, BE, AD, ſunt proportionales in continua ratione; ergo — Initium Reſolutionis, & finis Compoſitionis.
AB media proportionalis erit inter AF, & BE; quare
Quadratum AB æquabitur rectangulo ſub AF, & BE, hoc eſt rectangulo EBL (eſt enim BL æqualis AF)
Additis æqualibus rectangulis ABD, & KBE, ſeu BEL (eſt enim EL æqualis BK;) ergo
Quadratum AB, vnà cum rectangulo ABD æquabitur rectangulo EBL, plus rectangulo BEL; ſed
Quadratum AB, plus rectangulo ABD æquale eſt rectangulo DAB.
Et rectangulum EBL plus rectangulo BEL æquale eſt quadrato BE; ergo
Rectangulum DAB æquabitur quadrato BE; quare
Addito communi quadrato BC
Rectangulum DAB plus quadrato BC æquabitur quadrato BE vnà cum quadrato BC, ſed
Rectangulum DAB plus quadrato BC æquatur quadrato AC.
Et quadratum BE plus quadrato BC, æquatur quadrato EC; ergo — Finis Reſolutionis, & initium Compoſitionis.
Quadratum AC æquabitur quadrato EC; ergo
AC æquabitur EC. Quod ita ſe hàbet, &c.

THEOREMA.

Si ſit quædam recta AE diuiſa in punctis, B, C, D, ea lege vt AB ad CD ſit in ratione FH ad FG, & BD ad BE ſit in ratione GH ad FH. — Exemplum XIV.
Dico AE ad CE in ratione eſſe, vt FH, ad FG.

Reſolutio.

QVoniam igitur eſt ut FH ad FG, ita AE ad CE, ut verò FH ad FG, ita ſupponitur AB ad CD; ergo vt [a] AB ad CD, ita AE ad CE. & permutando [b] & conuertendo, ut AE ad AB ita CE ad CD, & diuidendo [c] vt BE



a 11. quinti. b 16. & corol. 4. quinti. c 18 quinti.

d 4. quinti. e 46. quinti. f 11. quinti. g coroll. 19. quinti. h coroll. 4. quinti.

ad AB, ita DE ad CD, & d conuertendo, vt AB ad BE ita CD ad DE, & permutando e vt AB ad CD, ita BE ad DE; ſed ut A B ad C D ita F H ad F G; ergo f ut FH ad F G, ita BE ad DE, & per conuerſionem g rationis, ut FH ad GH, ita BE ad BD, & inuertendo h ut GH ad F H, ita B D ad B E. Et ita eſt; hunc enim in modum ſuoponitur linea diuiſa ex conſtructione.

Compoſitio.

α coroll. 4. 5. β coroll. 19. quinti. γ 8. quinti. δ 16 quinti. ε corollar. 4. quinti. ζ 17. quinti. η corollar. 4. quinti. θ 11 quinti.

QVoniam igitur ſupponitur diuiſa A E ea ratione, vt ſit B D ad B E, quemadmodum GH ad FH, erit α conuertendo vt FH ad G H, ita BE ad B D, & per conuerſionem β rationis, vt FH ad FG, ita BE ad DE; eſt autem ut A B ad C D, ita F H ad F G ex hypotheſi; ergo γ vt AB ad CD, ita BE ad D E; & permutando δ ut A B ad B E, ita C D ad D E, & ε conuertendo vt B E ad A B, ita D E ad C D, & ζ componendo vt A E ad A B, ita C E ad C D, & conuertendo η & permutando, vt A B ad C D, ita A E ad CE; eſt autem ex hypotheſi vt F H ad F G, ita A B ad C D; ergo θ vt F H ad F G, ita A E ad C E. Quod erat operæ pretium oſtendere.

S C H O L I O N.

QVando ſunt conſequentiæ numero multæ præſtat huic in modum reſolutionis conſpectum adhibere, in quo deſcendendo reſoluimus & aſcendendo componimus, vt ſuperius etiam obſeruauimus.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

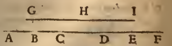
Quoniam igitur eſt, vt F H ad F G, ita A E ad C E, &
Initium Reſolutionis, & finis Compoſitionis. *Vt F H ad F G, ita A B ad C D, ergo*
Vt A E ad C D, ita A E ad C E, permutando & conuertendo
Vt A E ad A B, ita C E ad C D, & diuidendo
Vt B E ad A B, ita D E ad C D, & conuertendo
Vt A B ad B E, ita C D ad D E, & permutando
Vt A B ad C D, ita B E ad D E, ſed
Vt A B ad C D, ita F H ad F G, ergo
Vt F H ad F G, ita B E ad D E, & per conuerſionem rationis
Vt F H ad G H, ita B E ad B D, & conuertendo
Finis Reſolutionis, & initium Compoſitionis. *Vt G H ad F H, ita B D ad B E. Et ita eſt cùm hunc in modum*
Linea A E ſupponeretur diuiſa ex conſtructione.

T H E O R E M A.

Exemplum XV.

Si ſit recta A F diuiſa in partes A B, B C, C D, D E, E F, ita ut A B ſit æqualis E F, ſit autem ut F C, ad C E, ita A C, ad C D, & ut G H media proportionalis inter B C, C E, ad C E, ita C D ad G I. Dico eſſe G H, C E, C D, G I quatuor diſcretè proportionales, ita vt H I differentia extremarum ad DE differentiam mediarum, rationem habeat, vt AB vel E F ad G H.

Reſolutio.



a 14. ſexti. b 1. axioma primi. c 1. ſecundi. d 1. Axioma primi.

QVoniam G H, C E, C D, G I, ſunt quatuor diſcretè proportionales, ita ut IH differentia extremarum G H, & G I, ad D E differentiam mediarum CE, CD ſit, vt FE ad GH; ergo rectangulum IHG æquabitur a rectangulo FED, communi addito rectangulo ſub FE, CD; ergo rectangulũ IHG plus rectangulo ſub FE, CD, æquabitur b rectangulo FED plus rectangulo ſub FE, CD, ſed rectangulum FED plus rectãgulo ſub F E, C D, ex Elementis, æquale eſt c rectangulo F E C; ergo rectangulum I H G plus rectangulo ſub F E, C D, æquabitur rectangulo F E C, vtrinque addito communi rectangulo B C E; ergo rectangulum B C E plus rectangulo I H G, plus rectangulo ſub F E, C D æquabitur d rectangulo F E C plus rectangulo B C E; ſed rectangulo B C E æquale

E eſt

eſt e quadratum GH,& quadrato GH plus rectangulo IHG æquale eſt f rectangulum IGH; e 8. ſexti. & 17. eiuſdem.
ergo per ſubſtitutionem æqualium rectangulum IGH plus rectangulo ſub FE,CD æquabitur rectangulo FEC, plus rectangulo BCE,ſed quia AB, & EF, ſunt æquales; vnde rectangulum FEC plus rectangulo BCE æquatur rectangulo ACE,ob id per ſubſtitutionẽ æqualis, rectangulum IGH,plus rectangulo ſub FE, CD, æquabitur rectangulo ACE, vtrinque f 3. ſecundi.
addito rectangulo DCE, fiet g rectangulum IGH plus rectangulo D C E, vnà cum rectangulo ſub FE,CD,æquale rectangulo DCE vna cum rectangulo ACE; eſt autem ex Elemẽtis g 2. axioma primi.
h rectangulum F C D æquale rectangulo D C E plus rectangulo ſub FE, CD, facta ſubſtitutione rectanguli F C D in locum rectanguli D C E plus rectangulo ſub F E, C D, rectangulum I G H plus rectangulo F C D, æquabitur rectangulo D C E plus rectangulo h 3. ſecundi.
A C E. Et quoniam ex hypotheſi eſt, vt G H ad C E, ita C D ad G I, erit i rectangulum I G H æquale rectangulo D C E; erat autem rectangulum I G H plus rectangulo F C D, æquale rectangulo D C E plus rectangulo A C E; ergo rectangulum F C D æquabitur rectangulo A C E, hoc eſt rectangulum ſub F C, C D æquabitur rectangulo ſub A C, C E; quamobrem erit, vt F C ad C E, ita A C ad C D. Quod ita ſe habet; ſuppoſuimus enim lineam hunc in modum eſſe diuiſam. i 16 ſexti.

Compoſitio.

QVoniam G H eſt media inter B C, C E, propterea rectangulum B C E æquabitur α quadrato G H; Deinde cùm ſit, ut F C, ad C E, ita A C ad C D, erit β rectangulum ſub extremis C D, & F C, æquale rectangulo ſub medijs C E, & A C, hoc eſt α 17. ſexti. β 16. ſexti.
rectangulum F C D æquabitur rectangulo A C E. Et quoniam etiam eſt, vt G H ad C E, γ 16. ſexti.
ita C D ad G I, erit γ rectangulum I G H æquale rectangulo D C E; quamobrem rectangulum I G H vnà cum rectangulo F C D æquabitur δ rectangulo D C E, vnà cum rectangulo A C E; vtrinque ſublato communi rectangulo D C E; (eſt enim, vt conſtat ε ex Elementis,rectangulum F C D æquale rectangulo D C E vnà cum rectangulo ſub F E, & C D). Quibus ſubſtitutis in locum rectanguli F C D fiet rectangulum I G H plus rectangulo D C E plus rectangulo ſub F E, & C D, æquale rectangulo D C E vnà cum rectangulo A C E, vtrinque (inquam) ſublato rectangulo D C E remanebit ζ rectangulum I G H plus rectangulo ſub F E, C D, æquale rectangulo A C E; ſed quia A B, & E F, ſunt æquales, propterea rectangulum F E C plus rectangulo B C E æquabitur rectangulo A C E; huius igitur loco ijs ſubſtitutis fiet rectangulum I G H plus rectangulo ſub F E, C D æquale rectangulo F E C plus rectangulo B C E. At verò rectangulum I G H æquale eſt η quadrato G H vnà cum rectangulo I H G, rectangulum verò B C E æquale eſt θ quadrato G H, per ſubſtitutionem æqualium, fiet rectangulum B C E plus rectangulo I H G, vnà cum rectangulo ſub F E, C D æquale rectangulo F E C plus rectangulo B C E; vtrinque ſublato communi rectangulo B C E,remanebit ι rectangulum I H G plus rectangulo ſub FE, C D æquale rectangulo F E C, ſed rectangulum FEC per Elementa æquale eſt κ rectangulo ſub F E, C D, vnà cum rectangulo F E D, ergo rectangulum I H G plus rectangulo ſub F E, C D, æquabitur rectangulo F E D, plus rectangulo ſub F E, C D ablato communi rectangulo ſub F E & C D, reliquum rectangulum I H G æquabitur λ reliquo F E D. quamobrem μ vt I H ad D E, ita F E ad G H; ſed I H eſt differentia extremarum G H, & G I, & inſuper D E eſt differentia mediarum C E, C D, ſuntque lineæ ipſæ G H, C E, C D, G I proportionales diſcretè. Id autem oportebat oſtendere.

δ 1. axioma primi. ε 1. ſecundi. ζ 3. axioma primi. η 3 ſecundi. θ 14 ſexti. ι 3. axioma primi. κ 1. ſecundi. λ 3. axioma primi. μ 16. ſexti.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Initium Reſolutionis, & finis Compoſitionis.

Quoniam igitur I H eſt differentia extremarum G H, G I, atque
D E, eſt differentia mediarum C E, C D, ſuntque quatuor diſcretè proportionales, G H, C E, C D, G I. vtque I H ad D E, ita eſt A B vel F E ad G H. ergo
Rectangulum I H G aquabitur rectangulo F E D. addito communi rectangulo ſub F E, CD.
Rectangulum I H G, vna cum rectangulo ſub F E, C D, aquabitur
Rectangulo F E D plus rectangulo ſub F E, CD. ſed
Rectangulum F E C, per Elementa aquale eſt rectangulo ſub F E, C D vna cum rectangulo F E D. ergo

Re-

Rectangulum IHG, plus rectangulo ſub FE, CD, æquabitur rectangulo FEC. vtrinque addito communi rectangulo BCE; ergo

Rectangulum BCE plus rectangulo IHG vna cum rectangulo ſub FE, CD, æquabitur rectangulo FEC, plus rectangulo BCE

Rectangulum verò BCE, æquale eſt quadrato GH, & quadrato GH plus rectangulo IHG æquale eſt rectangulum IGH; ergo per ſubſtitutionem æqualium.

Rectangulum IGH plus rectangulo ſub FE, CD æquabitur rectangulo FEC, vna cum rectangulo BCE; ſed quia AB, & EF, ſunt æquales.

Rectangulum FEC, plus rectangulo BCE, æquale eſt rectangulo ACE; propterea eorum loco hoc ſubſtituto.

Rectangulum IGH, vna cum rectangulo ſub FE, CD æquabitur rectangulo ACE.

Vtrinque addito rectangulo DCE, fiet

Rectangulum IGH, vna cum rectangulo DCE, plus rectangulo ſub FE, CD, æquale rectangulo DCE, plus rectangulo ACE.

Eſt autem ex Elementis rectangulum FCD, æquale rectangulo DCE, plus rectangulo ſub FE, CD, hoc ſubſtituto in locum rectanguli DCE, plus rectangulo ſub FE, CD, fiet

Rectangulum IGH plus rectangulo FCD, æquale rectangulo DCE, plus rectangulo ACE,

At vero ex hypotheſi ut GH ad CE, ita CD ad GI, ergo

Rectangulum IGH æquabitur rectangulo DCE.

Erat autem rectangulum IGH plus rectangulo FCD æquale rectangulo DCE, plus rectangulo ACE, ergo

Finis Reſolutionis, & initium Compoſitionis. *Rectangulum FCD æquabitur rectangulo ACE, hoc eſt*

Rectangulum ſub FC, CD æquabitur rectangulo ſub AC, CE ergo

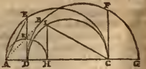
Vt FC ad CE, ita AC ad CD. Quod ita ſe habet ex hypotheſi, &c.

THEOREMA.

Exemplum XVI. *Sit circulus DBFG, cuius diameter DG diuiſa ſit in puncto C, vnde ſit erecta perpendicularis CF, diameter vero GD producta ſit ad partes D, vſque ad A, ita vt rectangulum GAD ſit æquale quadrato CF; per puncta verò A, & C deſcripto ſemicirculo ABC, itemque DIC, & circumferentia AKH ſumpta DH æquali ipſi AD, erectiſque HI, DE, atque ductis CI, AE.*

Dico eſſe, vt AE ad CF, ita CI ad CD.

Reſolutio.



a 11. quinti. QVoniam igitur eſt, ut AE ad CF, ita CI ad CD;
b 22. ſexti. eſt autem ut CI ad CD, ita HC ad CI; ergo
c 16 quinti. erit, [a] vt AE ad CF, ita HC, ad CI; vt [b] ergo quadratum AE ad quadratũ CF, ita quadratum HC ad
d Corollar. 8. ſexti, & 17. eiuſdem. quadratum CI; quare permutando erit [c] ut quadratũ AE ad quadratũ HC, ita quadratum CF ad quadratũ CI; Re-
e Coroll. 8. & 17. eiuſdem. ctangulum autem DAC æquale eſt [d] quadrato EA, &
f 16. quinti. rectangulum DCH æquale eſt [e] quadrato CI; ergo, ut
g 36. tertij. rectangulum DAC ad quadratum HC, ita quadratum
h 7. quinti. CF ad rectangulum DCH; & permutando erit, [f] ut rectangulum DAC ad quadratum
i 1. ſexti. CF, ita quadratum HC ad rectangulum DCH. Eſt [g] autem rectangulum GAD æquale quadrato CF; quamobrem erit, [h] vt rectangulum DAC ad rectangulum GAD, ita qua-
k 1. ſexti. l 16. quinti. dratum HC ad rectangulum DCH; eſt [i] autem, vt HC ad DC, ita quadratum HC ad rectangulum DCH, & vt AC ad AG, ita quoque eſt [k] rectangulum DAC ad rectangulum GAD; quare vt AC ad AG, ita HC ad DC; & permutando erit [l], vt ablata AC ad abla-
m 19. quinti. n 16. ſexti. tam HC, ita tota AG ad totam DC, ſeu vt tota AG ad totam DC, ita ablata AC ad abla-
o 8. ſexti, & 17. eiuſdem. tam HC; ergo, [m] ut tota AG ad totam DC, ita reliqua GC ad reliquam DH, quæ eſt æqualis AD; quamobrem rectangulum GAD æquabitur [n] rectangulo DCG. Quod ita ſe habet, nam quadratum CF æquale eſt [o] rectangulo DCG; & rectangulum GAD factum eſt æquale quadrato CF; ergo rectangulum GAD æquabitur rectangulo DCG.

Com-

Compoſitio.

QVoniam igitur quadratum ex C F æquale eſt α rectangulo D C G. At verò rectangulum G A D factum eſt æquale quadrato C F, proinde rectangulum G A D æquale erit β rectangulo D C G; quamobrem erit γ reciprocè; vt AG ad D C, ita C G ad AD, cum itaque ſit, ut tota AG ad totam D C, ita ablata C G ad ablatam D H, quæ eſt æqualis AD; ob id vt tota AG ad totam D C, ita reliqua A C ad reliquam H C, ſeu reliqua A C ad reliquam H C, erit δ vt tota AG ad totam D C; quare permutando ε, vt AC ad AG, ita H C ad D C. At verò, vt A C ad AG, ita eſt ζ rectangulum C A D ad rectangulum G A D, & vt HC ad D C, ita eſt η quoque quadratum H C ad rectangulum D C H; quamobrem erit, θ ut rectangulum C A D ad rectangulum G A D, ita quadratum HC ad rectangulum D C H; eſt ι autem rectangulum G A D æquale quadrato C F; proinde erit vt rectangulum DAC ad quadratum C F; ita quadratum H C ad rectangulum D C H; & permutando erit κ vt rectangulum D A C ad quadratum H C, ita quadratum C F ad rectangulum D C H; ſed rectangulum D A C æquale eſt λ quadrato A E, & rectangulum D C H æquale eſt μ quadrato C I; ergo erit, ut quadratum A E ad quadratum H C, ita quadratum C F ad quadratum C I; quare permutando ν, vt quadratum A E ad quadratum C F, ita quadratum HC ad quadratum C I; ergo erit, ο vt AE ad CF, ita H C, ad CI; ſed ut H C ad C I, ita CI, ita C I ad C D, ergo erit ρ ut A E ad CF, ita C I ad C D. Quod oportebat oſtendere.

α 16. tertij.
β 1 ax primi.
γ 14 ſexti.
δ 14 quinti.
ε 16. quinti.
ζ 1. ſexti.
η 1. ſexti.
θ 11. quinti.
ι 36. tertij.
κ 16 quinti.
λ corol. 8 ſexti, & 17 eiuſdem.
μ corol 8 ſexti, 17. eiuſdē.
ν 16. quinti.
ο 22. quinti.
ρ 11. quinti.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Quoniam vt A E ad C F, ita C I ad C D; eſt autem
Vt C I ad C D, ita H C ad C I; ergo
Vt A E ad C F, ita H C ad C I; ergo
Vt quadratum A E ad quadratū C F, ita quadratū HC ad quadratū C I; ergo permutando erit,
Vt quadratum A E ad quadratum H C, ita quadratum C F ad quadratum C I; ſed
Rectangulum D A C æquale eſt quadrato A E, &
Rectangulum D C H æquale eſt quadrato C I; ergo
Vt rectangulum D A C ad quadratum H C, ita quadratum C F ad rectangulum D C H, & permutando erit,
Vt rectangulum D A C ad quadratum CF, ita quadratum HC ad rectangulum DCH; ſed
Rectangulum G A D æquale eſt quadrato C F; ergo
Vt rectangulum D A C ad rectangulum G AD, ita quadratum H C ad rectangulum DCH; ſed
Vt H C ad D C, ita quadratum H C ad rectangulum D C H, &
Vt A C ad A G, ita rectangulum D A C ad rectangulum G A D; ergo
Vt A C ad AG, ita HC ad D C; & permutando
Vt ablata A C ad ablatam H C, ita tota AG ad totam D C; ergo
Vt tota AG ad totam DC, ita reliqua G C ad reliquam D H, quæ eſt æqualis A D; quare
Rectangulum G A D æquabitur rectangulo D C G. Quod ita ſe habet; nam quadratum C F æquale eſt rectangulo D C G, & rectangulum G A D; factum eſt æquale quadrato C F, ergo rectangulum GAD æquabitur rectangulo DCG.

Initium Reſolutionis, atque finis Compoſitionis.

Finis Reſolutionis & initium Compoſitionis.

S C H O L I O N.

COntingit autem plerumque, ut Tyrones aliquod ſuperfluum intrudant in Theorematibus concinandis, à quo præcipuè abſtinendum, vt ſi præſcriberetur duci à puncto A tangentem peripheriam, ita ut æqualis foret recta C F eaque adhiberetur tanquam potens rectangulum GAD; nihil afferret noui, vnde perinde eſt quod natura prius, rectangulum ipſum adſciſcere; inire autem demonſtrationem gratia æqualitatis inter duas rationes, quarum vna ſit A E ad prædictam tangentem, altera vero C I ad C D puerile foret, ſiquidem perinde eſt ac inter AE, & CF, illam concipere conferendam cum ea quæ eſt C I ad C D.

Aduertenda quadam.

Illud etiam paſſim contingit in reſoluendo, minus exercitatis, vt in progreſſu inſtituta Analyſeos

Aliud notandum.

hiſcos tandem eò, deueniant, vt credant ibi ſiſtendum, tanquam ad verum conceſſum, cum tamen id quidem verum ſit, ſed iam ſuperius adhibitum; vnde paralogizzant oſtendendo idem per idem; non aduertentes eo perueniſſe ex illatione inde deducta, non ſecus ratiocinantes, ac ſi ex A, tanquam ſuppoſito vero, inferant B, deinde hinc inferant C, poſtmodum inferant A, quod verum ſit; nec aduertunt A deductum ex A fuiſſe, Vt ſi rectam diuiſam ſupponant in duas partes æquales, & ex hac diuiſione multa deducant, atque tandem hoc verum offendant, quod linea illa bifariam diuiſa ſit, per diuerſas conſecutiones deductum, illudque confirment, quoniam hunc in modum linea fuerit initio diuiſa. Hoc plane deteſtabile; permittendum tamen quotieſcunque, nos ratiocinando, ad aliquod conſtructum peruenimus, tanquam aliunde tamen deductum, quod confirmare licebit, quia ita ex conſtructione ſe habeat; vel ut exploratum iam conſtet; nam illud quod verum ſupponimus ita ſit verùm, vt non ſit quæſitum, ſed nobis manifeſtè pateat. Vnde ſi exempli gratia triangulum foret æquilaterum, hoc ipſo ſupponimus, & latera, & angulos æquales, ſi quæſitum fuerit huiuſmodi, ut ex eius ſuppoſitione ratiocinantes deueniamus ad hoc verùm, quod duo ipſius trianguli æquilateri latera ſint æqualia; illudque confirmemus, quoniam trianguli æquilateri latera ſunt, ac propterea æqualia, bene habet.

Quo pacto Analyſta ſuppoſitis vti debeat Hypotheſis nõ officit, niſi ſit in quæſtione.

Imò è pluribus ſuppoſitis veris, quorum neutrum quæſitum ſit, optime quidem adhibitis uno vel pluribus ex ijs, ſi tandem ad unum peruenimus, tanquam verum ex antecedentibus deductum ratiocinatione; poterimus ſyntheſin deinde auſpicari, eo confirmato, quod ita ſe habeat, ex hypotheſi.

Non enim hypotheſis officit, niſi quæ in quæſtione poſita eſt, tunc ſiquidem inde nobis regredientibus non licet eodem regredi velut ab explorato, quod tantummodo innotuit, quatenus ex ſemetipſo deductum; nihil enim magis inſulſum, cùm idem ſui ipſius comparatione notius, ac ignotius foret; ad eum tamen, quem explicuimus modum, ſternitur optima ad reſoluendum via; unde quam maximè etiam idonea ad componendum. Hæc autem ſunt in primis habenda præ oculis, ne crimen incurramus violatæ legis Analyſtarum, quibus nihil eſt carius, nec magis quidquam in delitijs, quàm adeo candidam demonſtrationem contexere, ut nihil in ea dedecoris notari queat, atque adeo nihil ſuperfluum in ſe contineat, nec aliqua ex parte deficiat, ne paralogyſmo, nec alio vitio laboret.

Ad demonſtrandi candorem magis iuuant Artis præcepta, quã aſſuetudo.

Ad huiuſmodi demonſtrandi candorem ſi quis etſi præceptis deſtitutus artiſque luminibus orbatus ſe peruenturum aſſuetudine demonſtrandi, & imitatione Veterum, qui in hoc plurimum excelluerunt, exiſtimet, toto quidem aberrat Cælo; nam caſu, non artificioſa differendi ratione dum operatur, non raro decipiatur oportet; quamobrem opera erit pretium, vt in hoc incumbat, quod ſi exercitatio acceſſerit tuto in reſoluendo procedet, quod animaduertiſſe non fuit ab inſtituto prorſus alienum.

THEOREMA.

Exemplum XVII.

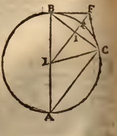
Sit circulus ABC, cuius centrum L, diameter autem AB, & recta FB tangat illum in B, & FC, in C, ductaque ſit BC, & inſuper FL, quæ occurrat peripheriæ in K, & ipſi BC in I, ducta inſuper AC. Dico eſſe vt FK ad KI, ita BA ad AC.

Reſolutio.

a 4. ſexti.

QVoniam igitur eſt vt FK ad KI, ita BA ad AC, eſt [a] autem, vt BA ad AC, ita BL, ad LI, cum triangula BAC, BLI ſint æquiangula, atque adeo ſimilia, vt mox demonſtrabo, quamobrem vt FK ad KI, ita BL, ad LI; ergo circulus cuius diameter BL tranſibit [b] per I; ergo anguli ad I recti erũt, [c] unde æquales & BI æquabitur [d] IC; latera igitur BI, IL, cũ æqualia ſint lateribus CI, IL, vtrunque vtrique; ergo angulus BLI æquabitur [e] angulo CLI, ſeu BLF æquabitur angulo CLF; in duobus igitur triangulis BLF, CLF, cum duo latera BL, LF æqualia ſint duobus lateribus CL, LF vtrunque vtrique, & anguli ad verticem L ſunt inter ſe æquales; ergo baſis BF æqualis erit [f] baſi CF: Quod ita ſe habet [g] ex Elementis.

b Ex Auctore in Libro de Circulo per conuerſã propoſitionis 129
c 31. tertij.
d 3. tertij.
e 4. primi.
f 4. primi.
g 17. tertij.



L E M M A.

Dico triangulum BLI ſimile eſſe triangulo BAC.

Quoniam enim in duobus triangulis BLF, CLF duo latera BL, LF æqualia ſunt duobus lateribus CL, LF vtrunque vtrique, & baſis BF æqualis eſt baſi CF; ergo angulus BLF æquabitur [a] angulo CLF, ſeu B L I æquabitur angulo CLI; ergo angulus BLC duplus eſt anguli a 8 primi.
B L I, ſed angulus BLC, duplus eſt [b] anguli B A C. cum ſit ad centrum, & angulus B A C b 20. tertij.
ſit ad peripheriam; ergo angulus B L I æquabitur [c] angulo BAC, angulus autem ad B communis eſt vtrique triangulo; ergo reliquus angulus æquabitur [d] reliquo; quamobrem c 7. ax. primi. d 32 primi.
triangulum B L I æquiangulum erit, atque adeo ſimile triangulo B A C.

Compoſitio.

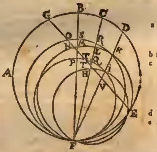
QVoniam igitur baſis BF eſt [α] æqualis baſi C F, & latera BL, LF æqualia [β] ſunt lateri- α 36. tertij, & 1. ax. pr.
bus CL, LF utrunque utrique in duobus triangulis B L F, C L F; ergo angulus BLF β 15. def. 1.
[γ] æquabitur angulo C L F, atque adeo angulus B L I æquabitur angulo C L I in γ 8. primi.
duobus triangulis BLI, CLI; [δ] ſunt autem latera BL, LI æqualia lateribus CL, LI vtrunque δ 15. def. pri.
vtrique in iiſdem triangulis; ergo & BI [ε] æquabitur I C, & anguli ad I erunt recti; ergo ε 4. primi.
circulus, cuius diameter BL [ζ] tranſibit per I; quamobrem ut BL ad LI, [η] ita F K, ad K I; ſunt ζ 31. tertij.
autem, vt ſuperius demonſtratum fuit, triangula B L I, B A C æquiangula: vnde, vt BL, ad η Ex Auctore in Libro de Circulo, Prop. 129.
LI, [θ] ita BA ad AC; ergo ut BA ad AC, [ι] ita FK ad KI. Quod oportebat oſtendere. θ 4. ſexti.

T H E O R E M A. ι 11 quinti.

Sint Circuli FOK, FPI interius tangentes circulum ABE in puncto F, ſint deinde circuli ſecantes priores iam dictos in punctis F & E. Ducta ſit FC occurrens peripherijs in punctis H, Q, L, R, C. Dico eſſe, vt HL ad LC, ita QR ad RC, atque ita omnia intercepta linearum ſegmenta inter arcus circulorum tangentium proportionalia eſſe omnibus interceptis inter arcus circulorum ſecantium. Exemplum XVIII.

Ducatur FB, tranſiens per centra tangentium circulorum, agatur FD, per puncta I, & K, in quibus ſecantes ſecant tangentes, &c.

Reſolutio.



QVoniam igitur eſt, vt HL ad LC, ita QR ad R C, ſed ut H L ad LC; ita IK ad KD, vt mox demonſtrabitur, proinde erit ut IK ad KD, ita [a] QR
ad R C, at verò vt IK ad K D, ita P S ad S B, propterea a 11. quinti.
vt P S ad S B, ita [b] QR ad R C, proinde latera F B, F C
erunt in punctis S, R, P, Q, proportionaliter ſecta, atque b 11. quinti.
adeo rectæ B C, S R, P Q erunt [c] inter ſe parallelæ, ſed c 2. ſexti.
FB eſt diameter, ergo angulus B C F, item SRF, & PQF
erunt inter ſe æquales. Quod ita ſe habet; ſunt enim
anguli in ſemicirculo, atque adeò recti [d] vnde inter [e]
ſe æquales. d 31. tertij. e 14. primi.

L E M M A.

Quod autem ſit ut IK ad KD, ita HL ad LC ſic oſtenditur. *Ducatur E G per punctum H ſecans FD in V, & occurrens peripherijs in punctis T, N, O, G. Quoniam igitur rectangulum H V E æquale eſt [ƒ] rectangulo I V F, erit [g] vt FV ad V E, ita H V ad V I, & ita N V* ƒ 35. tertij.
ad V K, atque GV ad V D; quamobrem etiam erit vt H V ad V I, ita NH ad I K, & GV ad g 16. ſexti.
V D, hoc eſt GN ad KD; atque adeo vt IK ad HN, ita K D ad G N. Rurſus autem quoniam rectangulum NHE æquale eſt rectangulo FHL, erit ut F H ad H E, ita NH ad HL; quemadmodum etiam & GH ad HC; quapropter vt NH ad HL ita erit [h] G N ad L C. Erat autem vt I K ad H N, ita K D ad NG, modo verò ut H N ad H L, ita NG ad LC; proinde h 19. quinti.

M erit

i 22.quinti. *erit; ex æquali vt IK ad HL, ita KD ad LC, atque adeo,* [k] *vt IK ad KD, ita HL ad L C,*
k 16.quint. *Hac autem nobis erant propoſita demonſtrare.*
l 11.quinti.

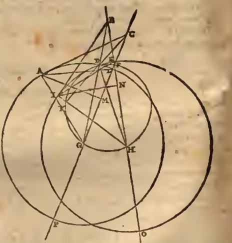
Compoſitio.

DVcatur FB tranſiens per centra tangentium circulorum, agatur FD, &c.
Quoniã igitur FB, eſt diameter, angulus BCF quippe qui in ſemicirculo rectus erit
α 31. tertij. [α] ita etiam angulus SRF, ut & PQF; Omnes itaque anguli erunt inter ſe æquales, ac proinde
β 28. primi. rectæ BC, SR, PQ erunt [β] inter ſe parallelæ atque adeo latera FB, FC erunt [γ] in punctis
γ 4. ſexti. S, R, & P, Q proportionaliter ſecta, vnde conſequenter eſt, vt PS ad SB, ita QR ad RC; at vero vt PS ad SB, ita eſt IK ad KD; proinde erit, ut IK ad KD, ita QR ad R C; ſed vt IK ad KD, ita HL ad LC, ut modo oſtendimus; proinde erit vt HL ad LC, ita QR ad R C.

T H E O R E M A.

Exemplum XIX. *Sit circulus KDFHG, in cuius circumferentia duobus aſſumptis punctis D, & F, itemque duobus æqualibus arcubus K G, G H itaut ductis rectis K D, G F; atque continuatis ad C, item GD, HF, & continuatis ad B, ductaque DH centro H interuallo HD, deſcripto circulo DEO, & centro G interuallo GD, deſcripto circulo ADP, ductis tangentibus CA, BI, & perpendicularibus AM, LN, item AL, & IE, chordis, quæ angulos CAM, BIN bifariam ſecent. Dico circulum, cuius centrum G, ad circulum cuius centrum H, rationem habere, vt quadratum chordæ AL, ad quadratum chordæ IE.*

Reſolutio.



QVoniam igitur eſt circulus IEO ad circulum AL P, ut quadratum chordæ IE ad quadratum chordæ AL; eſt autẽ quadratũ circumſcriptum
a 2. 12 Elem. ad quadratũ circumſcriptum, [a] vt circulus ad circulum, circa quos nimirũ quadrata circumſcripta ſunt; ob id vt quadratum circumſcriptum circulo I E O, ad quadratum circumſcriptum circulo ALP, ita [b] erit quadratũ
b 11. quinti. IE ad quadratum A L. Et permutando, [c] ut quadratum circumſcriptum
c 16. quinti. circulo I E O, ad quadratum chordæ IE, ita quadratum circumſcriptum circulo A L P, ad quadratum chordæ A L, & ſubduplatis antecedentibus, erit, ut quadratum inſcriptum circulo IEO, ad quadratum chordæ I E, ita quadratum inſcriptũ circulo ALP, ad quadratum chordæ A L. Sed ut
e ex Auctore Lib. de Circulo prop. 67. HB ad BE, [e] ita G C ad CL, & ut G C ad C L, ita quadratum circulo A L P inſcriptum ad quadratum chordæ A L, vt mox
f 1. quinti. demonſtrabitur. Propterea ut H B ad B E, [f] ita quadratum circulo IEO inſcriptum
g corell. 8. ſex. & 17. eiuſd. ad quadratum IE; at vero rectangulo ſub EO, & EN æquale eſt [g] quadratũ I E, rectangulo
h 7. quinti. ſub EO, & HE, æquale eſt quadratum circulo inſcriptum; ergo, vt HB, ad B E, ita [h] rectangulum ſub EO, & EH ad rectangulum ſub E O, & E N, at verò ut rectangulum ſub E O, &
i 1. ſexti. H B, ad rectangulum ſub EO, & BE, ita [i] eſt HB, ad BE; erit igitur ut rectangulum ſub E O,
k 11. quinti. & H B, ad rectangulum ſub eodem E O, & B E, [k] ita rectangulum ſub E O, & H E ad rectangulum ſub E O, & E N; aſſumpta autem ſemel ipſa H E dimidia ipſius E O,

erit

erit l vt H E ad EN, ita HB ad BE,& proinde per conuerſionẽ rationis, m ut H E ſeu I H ad HN, ita BH ad HE ſeu IH,& præterea vt BE ad EN, ita BI, ad IN. Quod ita ſe habet ex ijs quæ demonſtrauimus in Elementis. l 1. ſexti. m coroll. 19. quinti.

L E M M A.

Quod autem ſit ut GC ad GL, ita quadratum inſcriptum circulo A L P ad quadratum chordæ AL ſic oſtenditur.

Rectangulum P L G, æquale eſt quadrato inſcripto circulo A L P. Rectangulum verò P L M æquale eſt a quadrato A L, ergo quadratum inſcriptum ad quadratum chordæ A L, erit vt rectangulum PLG ad rectangulum PLM. Sed rectangulum PLG ad rectangulum PLM b eſt vt G L ad LM, ergo quadratum inſcriptum ad quadratum chordæ AL, c erit vt G L ad L M; Quoniã verò ut eſt G M ad G L, d ita eſt GL, ad G C; ergo erit vt G M ad G L, e ita M L ad LC, & permutando f vt G M ad M L, ita G L ad LC; & componendo g ut G L ad M L, ita GC ad LC, ſed vt GL ad ML, ita erit quadratum inſcriptum circulo A L P ad quadratum chordæ A L; ergo erit vt G C ad CL, ita quadratum inſcriptum circulo ALP ad quadratũ chordæ AL. Quod ita ſe habet, &c.

a coroll. 8 ſex. & 17. eiuſd. b 1. ſexti. c 11. quinti. d 4 ſexti. e 19. quinti f 16. quinti. g 17. quinti.

Compoſitio.

QVandoquidem ex alibi demonſtratis α eſt ut BH, ad HD, ita C G ad GD, eſt autem HE, æqualis H D, & G L æqualis GD; proinde erit ut BH ad HE, ita C G ad GL, & per conuerſionem rationis β erit ut HB, & B E, ita G C, ad C L. Ex puncto A cadit perpendicularis A M ſuper C G; & ex puncto I cadit perpendicularis I N ſuper B H. Quoniam igitur eſt, vt conſtat ex Elementis; γ ut BE ad EN, ita BI ad IN, & præterea δ IH, hoc eſt EH ad HN, vt BH ad H I, hoc eſt ad H E, erit proinde, vt E H, ad H N, ita B H ad HE, & per conuerſionem rationis ε vt HE ad E N, ita H B ad B E, aſſumptaque ipſa H E dupla, nempe diametro E O; erit quidem, ut rectangulum ſub E O, & HB, ad rectangulum ſub eadem E O, & BE, ita rectangulum ſub E O, & H E, ad rectangulum ſub EO, & E N; at verò vt rectangulum ſub E O, & HB ad rectangulum ſub E O, & B E, ita ζ eſt H B ad B E; ergo vt H B, ad B E, η ita rectangulum ſub E O, & E H ad rectangulum ſub EO, & EN. Rectangulo autem ſub E O, & E H æquale eſt quadratum circulo inſcriptum; rectangulo verò ſub EO, & EN æquale θ eſt quadratum IE; proinde, ut H B ad BE, ι ita quadratum circulo inſcriptum ad quadratum IE, ſed ut H B, ad B E, vt ſupra oſtenſum eſt, ita G C ad CL, & vt G C ad C L ita quadratum circulo ALP inſcriptum, ad quadratum chordæ A L. Quamobrem erit, ut quadratum inſcriptum circulo I E O, ad quadratum chordæ I E, κ ita quadratum circulo A L P inſcriptum ad quadratum chordæ A L. Duplatis autem antecedentibus, ut quadratum circumſcriptum circulo I E O, ad quadratum chordæ I E, ita quadratum circumſcriptum circulo ALP, ad quadratum chordæ AL. Et permutando, ut λ quadratum circumſcriptum circulo IEO, ad quadratum circumſcriptum circulo A L P, ita erit quadratum IE ad quadratum AL, ſed quadratum circumſcriptum, ad quadratum circumſcriptũ, eſt μ ut circulus ad circulum, circa quos nimirum quadrata circumſcripta ſunt; proinde erit vt circulus I E O, ad circulum ALP, ν ita quadratum I E, ad quadratum AL. Id autem nobis erat propoſitum demonſtrare.

α ex Auctore Lib. de Circulo prop. 67. β 19. quinti. γ 1. ſexti. δ 6. ſexti. ε Corollar. 19 quinti. ζ 1. ſexti. η 11. quinti. θ Corol 8. ſex. & 17. eiuſd. ι 7. quinti. κ 11. quinti. λ 16. quinti. μ Ex Elem. ν 11. quinti.

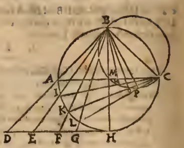
T H E O R E M A.

Si circulus ABC cuius centrum M, diameter BH, & recta DH tangat illum in H ductis quotcumque B D, BE, BF, BG proportionalibus occurrentibus peripheriæ in punctis A, I, K, L, & accepto quouis puncto C, ductiſque AC, IC, K C, L C, atque ducta B C, circa hanc deſcripto circulo, qui ſecet prædictas rectas in punctis M, N, O, P. Exemplum XX.

Dico LP, KO, IN, AM proportionales eſſe in eadem ratione cum rectis DB, EB, FB, GB.

Reſolutio.

QVoniam DB, EB, FB, GB ſunt proportionales in eadem ratione in qua L P, K O, I N, AM, videlicet, ut DB, ad EB, ita I N, ad A M, & vt E B ad F B, ita K O ad I N, & ut FB ad GB, ita L P ad K O; α ſunt autem, ut D B ad E B, ita I B ad A B; ergo ut IN ad α Ex Auctore Lib. de Circulo prop. 3.



b 12. quinti. AM, [b] ita IB ad A B; vt vero EB ad F B, [c] ita KB ad IB; ergo vt KO ad IN, [d] ita KB ad I B, & vt F B ad G B, [e] ita L B ad K B; ergo ut L B ad K B, [f] ita L P ad K O; & permutando, [g] vt A M ad A B, ita I N ad IB, & ut I N ad I B, ita KO ad KB, & vt KO ad kB, ita LP ad LB. Quod ita ſe habet. Quoniam enim anguli BLC, BKC, BIC, B A C, [h] ſunt in eodem circuli ſegmento inter ſe æquales, anguli vero BPL, BOK, BNI, BMA [i] ſunt recti, vnde æquales; ergo reliqui [k] erunt æquales; triangula igitur ſunt æquiangula, atque adeo ſimilia; unde latera [l] erunt proportionalia circa æquales angulos L, K, I, A, &c.

c Ex Auctore Lib. de Circulo Prop. 3.
d 12. quinti.
e Ex Auctore Lib. de Circulo prop. 3.
f 12. quinti.
g 16 quinti.
h 21. tertij.
i 31. tertij.
k 32 primi.
l 4. ſexti.

Compoſitio.

α 21. tertij.
β 31. tertij.
γ 10. ax. pr.
δ 32. primi.
ε 4. ſexti.
ζ 16. ſexti.
η Ex Auctore Lib. de Circulo prop. 3.
θ 12. quinti.

QVoniam anguli BLC, BKC, BIC, & BAC, ſunt in eodem circuli ſegmento, α erunt inter ſe æquales; anguli verò ad P, O, N, M, β ſunt recti, atque adeo γ æquales; ergo reliqui L B P, K B O, IBN, ABM, δ erunt inter ſe æquales; ſimilia igitur ſunt triangula, quare circa angulos æquales L, K, I, A, latera ε erunt proportionalia, unde ut LP ad LB, ita KO ad KB, ita IN ad IB, ita AM ad AB; & ζ permutando ut L P ad K O, ita LB ad KB, & ut KO ad IN, ita KB ad IB, & vt IN ad AM, ita IB ad AB, ſed ut L B ad K B, η ita F B ad G B, & ut K B ad I B, ita E B ad F B, & ut I B ad A B, ita D B ad E B; ergo ut LP ad KO, θ ita FB ad GB, & ut EB ad FB, ita KO ad I N, & ut DB ad E B, ita I N ad A M; Quod oportebat oſtendere.

THEOREMA.

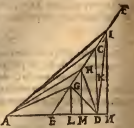
Exemplum XXI.

Sit AD diuiſa bifariam in E, & ad extremum D erecta ſit perpendicularis D C, & ex E ducta ſit EC, quæ ſit protracta ad partes C, mox autem acceptis quotcunque punctis G, H, I, &c. à punctis autem G, H, I, ductæ ſint ad punctum A, rectæ GA, HA, CA, IA, & ad punctum D ductæ ſint GD, HD, ID. ſitque DC bifariam diuiſa in K.

Dico differentiam quadratorum AG, GD, ad triangulum AGD; vel differentiam quadratorum AH, HD ad triangulum AHD, & ſic de reliquis, rationem habere ut AD ad DK.

Ex punctis G, H, I ad rectam AD protractam etiam, cum opus fuerit, cadant perpendiculares GL, HM, IN. Plerunque contingit, ut opus ſit demonſtrare eandem eſſe rationem in quibuſdam magnitudinibus; præſtat autem tunc illam præfinire, iuxta quam eſt instituenda Analyſis. Præfinita ſit ratio AD ad DK.

Reſolutio.



QVoniam præfinita eſt ratio A D, ad D K, in qua ita ſe habet differentia quadratorum AG, GD ad triangulum AGD vel differentia quadratorũ A H, HD, ad triangulum A H D; & ſic de reliquis, in eadem ratione ſupponitur; propterea differentia quadratorum A G, GD, ad triangulum AGD, ſic vt A D ad D K.

a Ex Lemmate.
b 1. ſexti
c 11. quinti.
d 9 quinti.

Quoniam igitur differentia quadratorum A G, GD, ad triangulum A G D ſupponimus eſſe, ut AD ad DK; eſt autem [a] rectangulum ſub dupla A D & E L differentia quadratorum AG, GD; ergo rectangulum ſub dupla AD, & EL ad triangulum AG D, erit ut A D ad D K; eſt autem rectangulum ſub dupla A D, & E L ad rectangulum [b] ſub E L, & D C, ut AD ad DK dimidium ipſius DC, ſeu ut dupla AD ad DC; ergo rectangulum ſub dupla AD, & EL ad triangulum AGD eandem habet [c] rationem, quam habet ad rectangulum ſub EL, & DC; quare rectangulum ſub EL, & DC æquabitur [d] triangulo

AGD

A G D, ſed rectangulo ſub E L, & D C æquale eſt [e] rectangulum ſub G L, & E D (cùm e 16. ſexti.
ſit [f] ut EL ad LG, ita ED, ad CD) ergo rectangulum ſub L G & E D æquabitur triangulo f 4. ſexti.
A G D. Quod ita ſe habet; eſt enim triangulum A G D duplum trianguli E G D, ſiquidem g 1. axio. pr. h 1. ſexti.
AD baſis dupla eſt baſeos ED, ſuntque eiuſdem altitudinis, at verò rectangulum ſub L G, i Ex Elementis.
& ED duplum eſt [h] trianguli EGD, cùm ſint ſuper eadem baſi, & eiuſdem altitudinis; er- k 6. axio. pri.
go rectangulum ſub LG, & ED æquale erit [k] triangulo AGD.

Compoſitio.

QVoniam igitur rectangulum ſub LG, & E D duplum eſt [α] trianguli E G D, cùm ſint α Ex Elementis.
ſuper eadem baſi, & eiuſdem altitudinis; triangulum verò AGD duplum eſt [β] trian- β 1. ſexti.
guli EGD; ſiquidem AD baſis dupla eſt baſeos E D; ſuntque eiuſdem altitudi- γ 6. axio. pri.
nis; ergo rectangulum ſub LG, & ED æquabitur [γ] triangulo AGD; ſed rectangulum ſub δ 16. ſexti.
E L, & D C æquale eſt [δ] rectangulo ſub L G, & E D (cùm ſint [ε] ut E L ad L G ita E D ad ε 4. ſexti.
D C); ergo rectangulum ſub EL & DC æquabitur [ζ] triangulo A G D; quare rectangu- ζ 1. axio. pr.
lum ſub dupla AD, & EL ad triangulum AGD, eandẽ habebit [η] rationem, quam habet ad η 7. quinti.
rectangulum ſub EL & DC; eſt [θ] autem rectangulum ſub dupla A D, & E L ad rectangu- θ 1. ſexti.
lum ſub E L, & DC, vt dupla A D ad D C, ſeu vt A D ad D K dimidium ipſius D C; ergo ι 11. quinti.
rectangulum ſub dupla AD & EL ad triangulum AGD, erit [ι] vt AD ad DK; eſt [κ] autem κ Ex Elem.
rectangulum ſub dupla AD & E L differentia quadratorum AG, G D; ergò differentia qua-
dratorum AG, GD ad triangulum AGD rationem habebit, vt AD ad DK.

Atque hunc in modum deinde permutando differentia quadratorum A G, G D ad differentiam quadratorum AH, HD, & ſic de reliquis, erit vt triangulum AGD ad triangulum AHD.

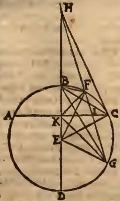
C O R O L L A R I V M.

Hinc facilè intelliges, tam triangulum AGD ad triangulum AHD, quam differentiam quadratorum AG, GD, ad differentiam quadratorum AH, HD, in eadem eſſe ratione, in qua EG ad EH.

T H E O R E M A.

Sit circulus A B C D per cuius centrum E tranſeat recta H D, atque HC tangat ipſum in C, recta verò C A ſecet BD ad rectos angulos in K, ducta verò ſit H G, Dico eſſe vt G I ad I F, ita quadratum H C ad quadratum H F. Exemplum XXII.

Reſolutio.



QVoniam igitur eſt ut G I ad I F, ita quadratum H C ad a 36. tertij.
quadratum H F; quadrato autem H C æquale [a] eſt b ex Elem.
rectangulum GHF; ergo ut GI ad I F, ita [b] rectan-
gulum GHF ad quadratum H F, ſed vt rectangulum GHF, c 1. ſexti.
ad quadratum HF, ita [c] eſt GH ad HF; ergo ut GI ad IF, ita d 16. ſexti.
GH ad H F; quare rectangulum ſub G I, & H F [d] æquabitur e 1. ſecundi.
rectangulo ſub HG, & FI, hoc eſt [e] rectangulo HIF plus re- f 2 axiom. pr.
ctangulo G I F, communi addito rectangulo I H F, [f] erit re- & 1. ſecundi.
ctangulum quidem G H F æquale rectangulo GIF plus
rectangulo H I F, plus rectangulo I H F; at vero qua-
dratum H I æquale [g] eſt rectangulo H I F plus rectangu- g 2. ſecundi.
lo I H F; proinde rectangulum G I F vnà cum quadrato H I
æquale [h] erit rectangulo G H F; eſt autem quadrato H C [i] h ex Elem.
æquale rectangulum G H F; ergo rectangulum G I F, vna i 36. tertij.
cum quadrato HI, æquale [k] erit quadrato HC; Cùm itaque k 1. axio. pr.
quadratum H C, æquale ſit quadrato H I plus rectangulo
GIF, ſeu [l] quod idem eſt AIC; quadratum autem HK plus quadrato KI æquale [m] eſt qua- l 35. tertij. m 47 primi.

drato

n 1. ax. pr. drato H I, ergo quadratum H C æquale [n] erit quadrato H K plus quadrato K I, vna cum
o 3. tertij, & rectangulo AIC; ſed quadratum KC æquale [o] eſt rectangulo AIC plus quadrato KI, ergo
5. ſecundi. quadratum HC æquale [p] erit quadrato H K plus quadrato K C. Quod ita ſe habet per 47.
p 1. axiom. pr. primi; eſt enim angulus H K C, rectus.

In Analyſi, ſubintelligitur ex Elementis, quod rectangulum G H F, ſit æquale rectangulo ſub GI, HF, plus rectangulo IHF. Cæteræ autem in Schemate lineæ hic non adhibitæ, alibi erunt vſui.

Compoſitio.

QVoniam igitur quadratum HC æquale [α] eſt quadratis H K, K C; quadratum verò
α 47 primi. KC æquale [β] eſt rectangulo AIC, plus quadrato K I, ergo quadratum H C æquale
β 5. primi. erit [γ] quadrato H K, plus quadrato K I, vna cum rectangulo A I C; ſed quadrato
γ 2. ax. pr.
δ 47. primi. H K, plus quadrato K I æquale [δ] eſt quadratum H I; proinde quadratum HC [ε] erit æquale
ε 1. ax. pr. quadrato H I, plus rectangulo A I C, ſeu quod idem [ζ] eſt G I F; cùm autem rectangulum
ζ 35. tertij. GIF, vnà cum quadrato HI æquale ſit quadrato H C; quadrato autem HC æquale [η] eſt re-
η 36. tertij. ctangulum GHF, proinde rectangulum G I F, vna cum quadrato H I æquale [θ] erit rectan-
θ 1. axiom. pr. gulo GHF; at verò quadratum HI æquale [ι] eſt rectangulis HIF, IHF, propterea rectangu-
ι 2. ſecundi. lum GIF plus rectangulo HIF, vnà cum rectangulo I H F, æquale [κ] erit rectangulo G H F;
κ 1. axiom. pr. ſed rectangulum GHF æquale [λ] eſt rectangulo ſub G I, & H F plus rectangulo I H F; com-
λ 1. ſecundi. muni ſublato rectangulo IHF, [μ] remanebit rectangulum ſub GI, & HF æquale rectangulo
μ 3. axiom. pr. H I F, plus rectangulo G I F, hoc eſt [ν] rectangulo ſub H G, & F I, atque adeo vt G H, ad
ν 1. ſecundi. H F, [ξ] ita GI ad IF; ſed ut GH ad H F [ο] ita rectangulum G H F, ad quadratum H F; ergo
ξ 16. ſexti. ut GI ad IF, [π] ita rectangulum GHF, ad quadratum HF; ſed rectangulum GHF æquale [ρ] eſt
ο 1. ſexti. quadrato tangentis HC; ergo ut GI ad IF, [σ] ita quadratum H C, ad quadratum H F.
π 11. quinti.
ρ 36. tertij.
σ 7. quinti.

T H E O R E M A.

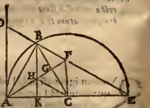
Sit triangulum æquilaterum ABC, producto latere A C, vſque ad E, itaut AC, CE, ſint æquales, excitata AD, perpendiculari, ductaque E B, quæ illi occurrat in D, ex B, cadat BK, perpendicularis ad A C.

Exemplum XXIII.

Dico DB, eſſe ſemidiametrum circuli, in quo triangulum ABC, inſcribi poteſt.

Ex C excitetur CF perpendicularis ipſi AE; agatur AF occurrens BK in H, ducatur HC.

Reſolutio.



QVoniam HA æqualis eſt HC, anguli verò ad K ſunt æquales, utpote recti ex conſtructione, & angulus HAK æqualis [a] eſt angulo HCK, ob
a 5. primi. æqualia latera HA, HC; ergo latus A K [b] æquabitur la-
b 26. primi. teri KC. Quod ita ſe habet, nam in duobus triangulis ABK, C B K, anguli ad A, & C ſunt æquales, utpotè anguli trianguli æquilateri, & anguli ad K ſunt æquales, ut-
c 26. primi. pote recti, & latus B K eſt commune; ergo A K [c] æquabitur K C.

d 5. primi. Quoniam HB eſt æqualis HC; ergo angulus HBC [d] eſt æqualis angulo HCB; quare re-
e 3. axiom. pri. liquus angulus A B H [e] reliquo angulo A C H; ſunt autem anguli ad A æquales, cum
f 32. & 5. pr. BAC [f] ſit duplus ipſius F A C, latus verò A H, eſt commune; ergo AB [g] æquabitur AC.
& 1. ax. pr.
g 26. primi. Quod ita ſe habet ſunt enim latera trianguli æquilateri.

h 5. primi. Quoniam B H eſt æqualis BF; ergo angulus B H F [h] erit æqualis angulo B F H; angulus
i 32. & 5 pri. autem HBG [i] eſt æqualis angulo G B F; eſt enim angulus B A C duplus anguli F E A, ſeu
7. ax. primi. GBF, ſicuti duplus eſt anguli HBG, cuius eſt duplus angulus A B C, qui æqualis eſt angulo
k 26. primi. BAC; ergo HG [k] æquabitur GF. Quod ita ſe habet, nam angulus HBC [l] eſt æqualis angu-
l 28. & 29. pr. lo FCB, ob parallelas BH, FC; anguli verò ad G [m] ſunt æquales, utpote ad verticem; ſunt-
m 15. primi. que BG, GC, æquales; ergo HG [n] æquabitur G F.
n 26. primi.

o 31. tertij. Quoniam BF æqualis eſt B D, anguli verò ad B [o] ſunt recti, atque adeo æquales, & latus
p 4. primi. AB commune; ergo baſis AD [p] æquabitur baſi A F; quare angulus D A B æqualis erit an-
q 12. tertij. gulo FAB. Quod ita ſe habet, nam angulus DAB æqualis [q] eſt angulo BEA, ſeu [r] FAE, ſed
r 4. & 5. pri. FAE æqualis eſt angulo BAF, cùm angulus BAC ſit duplus ipſius FAC; ergo angulus DA
ſ 1. ax. primi. B [ſ] æquabitur angulo F A B.

Com-

Compoſitio.

ET quoniam in duobus triangulis ABK, CBK anguli ad A, & C ſunt æquales, vtpote anguli triãguli æquilateri, & anguli ad K ſunt æquales vtpote recti, & latus BK eſt cõmune; ergo AK α æquabitur KC, KH eſt commune; ergo latera A K, K H æqualia erunt lateribus C K, K H, & anguli ad K ſunt æquales, vtpote recti, ex conſtructione; ergo H A β æqualis erit H C. *α 26. primi.* *β 4. primi.*

Et quoniam A B, A C ſunt latera trianguli æquilateri, erunt inter ſe æqualia, ſunt autem anguli ad A æquales, cum BAC ſit duplus ipſius F A C, latus verò A H commune; ergo angulus ABH γ æquabitur angulo ACH; ergo reliquus angulus H B C δ erit æqualis reliquo angulo HCB; ergo HB ε erit æqualis HC. *γ 4. primi.* *δ 3. axiom. pr.* *ε 6 primi.*

Et quoniam angulus HBG æqualis eſt angulo FCG, ob parallelas BK, F C, anguli vero ad G ζ ſunt æquales, & BG, eſt æqualis CG ergo H G η æquabitur GF; ergo BH, æquabitur BF, per 4. Propr. primi. *ζ 15. primi.* *η 26. primi.*

Vel quoniã angulus HBG æqualis eſt angulo GBF, cùm angulus BAC duplus θ ſit anguli F E A, ſeu GBF, ſicuti duplus eſt anguli HBG, cuius eſt duplus angulus A B C, qui æqualis eſt angulo B A C: & anguli ad G ſunt æquales, utpote recti, & latus BG commune eſt; ergo angulus BHF, ι erit æqualis angulo BFH; quare B H, erit κ æqualis B F. *θ 32. & 5. pr. & 1. axim. pr.* *ι 26. primi.* *κ 6. primi.*

Quoniam igitur angulus DAB æqualis λ eſt angulo BEA, ſeu μ FA E, ſed F A E æqualis eſt angulo BAF, cum angulus BAC ſit duplus anguli F A C; ergo angulus DAB ν æquabitur angulo FAB; latus autem A B commune eſt, anguli vero ad B ſunt ξ recti, atque adeo ο æquales; ergo BF æqualis erit π BD &c. *λ 32. tertij.* *μ 4. & 5. pri.* *ν 1. ax. pr.* *ξ 31. tertij.* *ο 12. axio. pr.* *π 26. primi.*

S C H O L I O N.

SVprapoſitum Theorema nos in exemplum attulimus, vt inde cautus fiat Analyſta, nam in eius reſolutione minori adhibita cura facilè incurret vitium: vnde reſolutionem ipſam minus benè perficiet; In huiuſmodi enim caſibus reſolutio ita procedit, vt in conſequentibus aſſumantur tanquam vera, quæ in antecedentibus fuerunt deducta, ac propterea in compoſitione, cùm reſolutionis conſequentia, euadant antecedentia inuerſo ordine probationes conſequuntur; vnde ipſius reſolutionis greſſus impeditur. Quamobrem erit opera pretium induſtriã omnem adhibere in hoc vitio vitando, ad quod praſtat membratim reſolutionem perficere, ut quodlibet quæſitum ſuum habeat Analyſin, ita ut cùm primùm facta fuerit hypotheſis per ea, quæ conſequuntur in aliquod verum incidamus, ſiſtat Analyſis; atque iterum alia repetita hypotheſi, iterum per ea quæ conſequuntur dum verum aliquod offendimus itidem Analyſis ſiſtat; atque hoc toties fiat, quoties Theorematis natura expoſcit, ità ut tandem ad hypotheſin illam perueniatur, principalis quæſiti, & per ea, quæ inde conſequuntur perueniamus ad aliquod verum conceſſum, vnde liceat repetitis Analyſeos veſtigijs, compoſitionem ipſam contexere, quæ toties, quoties reſolutio intercidet, atque hunc in modum ipſius Theorematis Analyſis erit abſoluta primùm, deinde verò Compoſitio. *Notãda quædam.*

Simile quid occurret infra in Theoremate, quod ad ſectiones conicas pertinet.

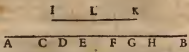
T H E O R E M A.

Sit recta AB diuiſa in punctis D, E, F, G, H, & vt IK ad HE, ita ſit E H, ad F H, & vt IK plus FH, ad FH, ita A E, ad E D. At vero D G poſſit rectangulum B D E. ſitque vt IK, ad EH, ita KL ad EG *Exemplum XXIV.*

Dico eſſe aggregatum quadratorum KL, AG, æquale rectangulo EAB.

Fiat C D, æqualis ipſi D E.

Reſolutio.



QVoniam igitur ſumma quadratorum KL, AG æqualis eſt rectangulo EAB, vtrinque ſubtracto quadrato AE; ergo ſumma quadratorum K L, E G, vna cum duplo rectangulo A E G æquabitur [a] rectangulo A E B; ſed rectangulum C G E æquale eſt rectangulo D E B, vt mox demonſtrabimus; ergo vt rectangulum CGE ad ſummam quadra- *a 3. ax primi.* *Lemma prim.*

dratorũ KL,EG, vna cum duplo rectang. AEG, ita rectangulũ BED ad [b] rectang AEB; & inuertendo, vt [c] ſumma quadratorum KL, EG, vnà cum duplo rectangulo AEG ad rectang. CGE, ita rectangulum AEB ad rectangulum DEB; ſed vt rectangulum AEB, ad rectangulum DEB, ita eſt [d] AE ad ED, ſeu ita ſumma quadratorum KL, EG ad quadratum EG; ergo ut ſumma quadratorũ KL, EG ad quadratum EG, ita [e] ſumma quadratorum KL, EG; vnà cum duplo rectangulo AEG ad rectangulum CGE, hoc eſt ad quadratum EG, vnà cum rectangulo CEG; ergo ut ſumma quadratorum KL, EG ad quadratum EG, ita erit [f] duplum rectangulum AEG ad rectangulum CEG; quare vt AE ad ED, ita [g] duplum rectangulum AEG, ad rectangulum CEG, hoc eſt ad duplum rectangulum GED, ſeu ità rectangulum ſimplex AEG, ad ſimplex rectangulum GED. Quod ita ſe habet ex prima ſexti Elementorum.

b 2
c coroll. 4. 5.
d ut mox demonſtrabitur.
e 11. quinti.
f 19. quinti.
g 11. quinti.

Lemma primum.

Quod autem rectangulũ CGE æquale ſit rectangulo DEB ſic oſtenditur. *Quoniam DG poteſt rectangulum BDE, ex hypotheſi, rectangulum autem CGE plus quadrato DE æquale eſt [a] quadrato DG; ergo rectangulum CGE, plus quadrato DE æquabitur [b] rectangulo BDE; ſed rectangulum BDE æquale eſt [c] quadrato DE, plus rectangulo DEB, vtrinque ſubtracto quadrato DE, reliquum rectangulum CGE, æquabitur [d] reliquo rectangulo DEB. Quod oportebat oſtendere.*

a 6 ſecundi.
b 1. axiom pr.
c 3. ſecundi.
d 3. axiom pr.

Lemma ſecundum.

Quod autem ſumma quadratorũ KL, EG ad quadratum EG ſit, ut AE ad ED, ſic demonſtrabitur. *Quoniam igitur eſt, vt IK ad EH ex hypotheſi, ita EH ad FH; ergo erit [a] vt IK ad FH, ita quadratum IK ad quadratum EH; quoniam verò eſt ut IK ad EH, ex hypotheſi, ita kL ad EG; ergo erit, [b] vt quadratũ Ik ad quadratum EH, ita quadratum kL ad quadratum EG; ſed quadratum Ik ad quadratum EH erat, vt Ik ad FH; ergo quadratum kL ad quadratum EG, erit [c] ut Ik ad FH; ergo componendo erit [d] ut Ik, plus FH, ad FH, ita quadratum kL, plus quadrato EG, ad quadratum EG; ſed vt Ik plus FH, ad FH, ita ex hypotheſi eſt AE ad ED; ergo, ut AE ad ED, ita erit [e] quadratum KL plus quadrato EG ad quadratum EG; quamobrem vt AE ad ED, ita ſumma quadratorum KL, EG ad quadratum EG. Quod oportebat oſtendere.*

a corollar. 20. ſexti.
b 22 ſexti.
c 11. quinti.
d 17. quinti.
e 11. quinti.

Compoſitio.

QVoniam igitur eſt, vt IK ad EH ex hypotheſi, ita EH ad FH; ergo ut IK ad FH, ita [α] quadratum IK ad quadratum EH, ſeu ita [β] quadratum KL ad quadratum EG, cum ſit [γ] vt IK ad EH, ita KL ad EG; igitur componendo erit, [δ] vt Ik plus FH, ad FH hoc eſt (cum ſit [ε] vt Ik plus FH ad FH, ita AE ad ED) vt AE ad ED, ita ſumma quadratorũ kL, EG ad quadratum EG; Quoniam autem ut AE ad ED, ita [ζ] rectangulum AEG ad rectangulum GED, vel ita [η] duplum rectangulum AEG ad duplum rectangulum GED, hoc eſt ad rectangulum CEG; ergo ſumma quadratorum kL, EG ad quadratum EG, erit vt duplum rectangulum AEG ad rectangulum CEG; igitur per 12. quinti, vt [θ] ſumma quadratorum KL, EG, plus duplo rectangulo AEG, ad ſummam quadrati EG, cum rectangulo CEG, hoc eſt ad rectangulum CGE, ita ſumma quadratorum KL, EG, ad quadratum EG, ſeu ut AE ad ED; ſed vt AE ad ED, ita quoque eſt [ι] rectangulum AEB ad rectangulum DEB, quo circa, [κ] ut ſumma quadratorũ KL, EG, vna cum duplo rectangulo AEG ad rectangulum CGE, ita rectangulum AEB ad rectangulum DEB, & inuertendo, ut rectangulum CGE ad ſummam quadratorum KL, EG, vna cum duplo rectangulo AEG, ita rectangulum DEB ad rectangulum AEB; ergo cùm rectangulum CGE æquale ſit oſtenſum rectangulo DEB, ſumma quadratorum KL, EG, plus duplo rectangulo AEG æquale erit [μ] rectangulo AEB, utrinque addito quadrato AE; ergo ſumma quadratorum KL, AG æqualis erit [ν] rectangulo EAB. Quod erat operæ pretium oſtendere.

α coroll. 20. ſexti.
β 22. ſexti.
γ ex hypotheſi.
δ 18. quinti.
ε ex hypotheſi.
ζ prima ſexti.
η 15. quinti.
θ 12. quinti.
ι prima ſexti.
κ 11. quinti.
λ corollar. 4. quinti.
μ 16. quinti.
ν 2. axio. pri.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Quoniam igitur ſumma quadratorum KL, AG æqualis eſt rectangulo EAB, vtrinque ſubtracto quadrato AE, ergo

Sum-

Summa quadratorũ k L EG, vnà cum duplo rectangulo AEG, æquabitur rectangulo AEB. ſed Rectangulum CGE, æquale eſt rectangulo DEB; ergo — *Initium Reſolutionis, & finis Compoſit.*

Vt rectangulum CGE ad ſummam quadratorum k L, E G, vnà cum duplo rectangulo A E G ita rectangulum DEB ad rectangulum AEB, & inuertendo

Vt ſumma quadratorum kL, EG, vnà cum duplo rectangulo A E G ad rectangulum C G E. ita rectangulum AEB, ad rectangulum DEB. ſed

Vt rectangulum AEB, ad rectangulum D E B, ita eſt AE ad E D, ſeu ita eſt ſumma quadratorum k L, E G ad quadratum EG. ergo

Vt ſumma quadratorum k L, EG, ad quadratum E G; ita ſumma quadratorum KL, EG, vnà cum duplo rectangulo AEG, ad rectangulum CGE, hoc eſt ad quadratum EG, plus rectangulo CEG. ergo Vt ſumma quadratorum K L, EG, ad quadratum EG, ita erit duplum rectangulum A E G ad rectangulum C E G. quare

Vt AE ad ED, ita duplum rectangulum A E G ad rectangulum C E G, hoc eſt ad duplum rectangulum G E D. ſeu

Ita rectangulum ſimplex A E G ad ſimplex rectangulum G E D. Quod ita ſe habet ex prima ſexti, &c. — *Finis Reſolutionis, & initium Compoſ.*

De Theorematibus pertinentibus ad Sectiones conicas, aliaſque lineas Cap. III.

VTiliſſimum eſt linearum omnium geneſim habere perſpectam, nam cum quiſpiam ex earum natura ſolerti quadam indagine nonnulla deprompſerit attributa, continuata ſerie conſecutionum, ad plurima Theoremata demonſtranda syntheſin inſtituere commodiſſime valet. Hoc enim inter oblatum Theorema, & aliud propria induſtria parandum intereſſe videtur, quod illi reſolutione quidem occurrimus, atque adeo ſatisfacimus, eo ſiquidem tanquam vero ſuppoſito per ea, quæ conſequuntur, in aliquod verum conceſſum incidimus; indeque redeuntes ad propoſitum tandem ſyntheticè peruenimus; ſubiecto ſiquidem ineſſe paſſionem ſupponentes, tantummodò cauſam inquirimus; quam reſoluendo conſequimur, quod non ſemel à nobis inculcatum fuit; ſed huic, non ea eſt ſatisfaciendi ratio, cum nondum illud eſſe conſtet, ſed ſimul & quod ſit, & cauſam indagamus; priori enim modo, ne dum quid nomen ſignificet, ſed quod inſit, atque exiſtat, prænoſcimus, cum ineſſe, ſit eius eſſe, at ſecundo modo, nominis tantummodo notione habita, & quod inſit, atque adeo ſit, & cauſam cur inſit inquirimus. Huc ſpectat illud Philoſophi dogma, de affectione, non quod ſit, ſed quid nomen ſignificet, prænoſcendum. — *Intereſt Analyſta linear. omnium naturam habere perſpectam.*

Itaque non erit illi laboris, naturam ipſarum introſpicere, harum ſiquidem contemplatio Geometrica eſt; Vt enim Arithmeticus numerum, Geometra magnitudinem, velut ſubiectam materiem, ſua contemplatione perſequitur; vnde rectè Philoſophus; λέγω δὲ ἐκ προθέσεως, οἷον μονὰς οὐσία ἄθετος, στιγμὴ δὲ οὐσία θετὸς, ταύτην ἐκ προθέσεως. *Dico autem ex poſitione, vnitas ſubſtantia non poſita, punctum verò ſubſtantia poſita hanc ex poſitione.* Numerum enim, atque magnitudinem, ſubſtantias appellat, non quod veræ ſubſtantiæ ſint cùm accidentis naturam obtineant, ſed quoniam affectionibus ſubſunt, & quatenus huiuſmodi ab ipſis conſiderantur, ſecundum naturam, intra limites tamen, quos vtraq; ſibi ipſi præſcribit prænoſcendam, quod ex eo quiſque ſibi perſuaſum habebit, quoniam vniuerſæ ſubiectum eſt diſciplinæ; inde ſiquidem affectiones dimanant, ac ob id per illud innoteſcũt. Hæc tamen obiter dicta ſint; hac enim de re iterum infra. — *Primo Poſt. lib. partic. 27.*

Cum in ſecundo huius tractationis Libro de Problematum reſolutione ſit nobis futurus ſermo, eaque, cum linearum rectarum, & angulorum, quos illæ comprehendunt; & rectilinearum figurarum inde naſcentium, circulique naturam, ſolerti quadam indagine Veterum explicatam ſupponat, quamuis è paucis eorundem primordijs Recentiorum induſtria Problemata ad planum locum pertinentia tractanda ſuſceperit, haud infelici ſucceſſu; propterea non erit abs re, ſi hactenus traditis præceptis Theorematum planorum, nonnulla prælibemus, antequam de Theorematibus ſolidis alijſq; verba faciamus. — *De quibus agendum.*

Rectè quidem Veteres linearum geneſin conſiderantes ad motum illam retulerunt; quamobrem ijs lineę rectę puncti fluxus, circulus verò vnius rectæ lineæ extremo manente, alio autem in orbem acto, videbatur; ſimpliciora videlicet primordia ſpectantes, cùm alioquin ex planorum ſectione, recta linea, & ex cylindri, vel coni ſectione facta per planũ — *Veteres geneſim linearum ad motum retulerunt.*

baſi parallelũ circulus ortum ducat. Verùm enimvero altiùs mentis aciem attollentes, cæterarum linearum curuarum naturam, earundemq; ſymptomata perſcrutaturi ad ſolidorum ſectiones reſpexerunt; ſimpliciorem ortum omittentes quem, vel non peſpectum habuerunt, vel neglexerunt iniuria; nam ſi quæ ſunt, quæ profectò pauca non ſunt, vel longa meditatione ſunt aſſecuti, ſalebroſam viã ſuã calcando, per expeditiorem ad idem, imo & ad maiora perueniſſent. Tanti refert introſpicere diligenter naturam eorum, de quibus eſt diſſerendum, ut qualia ſint cognoſcantur, quæ enim facili perſcrutatione perquiri poſſunt iuxta genium naturæ, ſimpliciſſimis legibus adſtrictæ, inſulſum eſt implicata meditandi ratione confundere; quod fortaſis cùm ex parte fuiſſet Archimedi exploratũ, de Helice tractationẽ initurus, illius ortũ ab implicato vnius puncti motu explicat, vt inde facilè, ac expeditè præclara quidem ſymptomata depromeret, quod & etiam Conchoidi, Ciſſoidi, & alijs eiuſdem ordinis commune eſt lineis, quamuis per ſectiones quoque ſolidorum quorundam operoſum non foret explicare; Id autem etiam & ſectionibus conicis accidere non paucis innotuit, qui cum earum naturam, paulo alacriori animo perſecuti eſſent, Veterum induſtriam, etſi laudibus in Cœlum efferendam, minus plauſibilem duxerunt, exiſtimantes ab ijs initam viam implicatiorem, & obſcuriora principia perquiſita fuiſſe; cum alioquin idem alia ratione longè faciliori, conſequi liceat; etenim vniuſcuiuſque ſectionis ortum in plano per ſimpliciora principia, non inſulsè notarunt, cùm ijs quoque ab vnius puncti implicato motu procreari conueniat, quam quidem geneſim, ſi quis diligenter aduerterit eorum ſententia multa, & præclariſſima quidem animo comprehendet, quæ harum conſequuntur naturam; id autem hunc in modum ſe habere mihi videtur planum fieri Veterum monumentis inſpectis; Apollonius enim qui in his principem obtinuit locum Propoſit. 11. Libri Primi habet.

Conicarum ſectionum ortus in plano.

Si conus plano per axem ſecetur: ſecetur autem, & altero plano ſecante baſin coni ſecundùm rectam lineam, quæ baſi trianguli per axem ſit perpendicularis: & ſit diameter ſectionis trianguli per axem vni lateri æquidiſtans: recta linea quæ à ſectione coni ducitur æquidiſtans communi ſectioni baſis ſecantis, & baſis coni vſque ad ſectionis diametrum; poterit ſpatium æquale contento linea, quæ ex diametro abſciſſa inter ipſam, & verticem ſectionis intercipitur, & alia quadam, quæ ad lineam inter coni angulum, & verticem ſectionis interiectam, eam proportionem habeat, quàm quadratum baſis trianguli per axem ad id, quod reliquis trianguli lateribus continetur. Dicatur autem huiuſmodi ſectio Parabole.

Apollon. lib. 1 prop. 11.

Hæc tamen nimis implicata ſunt, atque adeò huius ſectionis ortus valdè eſt obſcurus, plurimiſque tricis inuolutus.

Parabolæ ortus in plano.

Vide quanto elegantiùs, & clariùs geneſis eiuſdem ſectionis habeatur iuxta recentiorem modum, ſi recta quæpiam ſibi perpetuò parallela certo ſui puncto, nempe extrẽmò concipiatur moueri per quandam immotam rectam, eodemque motu ſecum ducere crus anguli cuiuſdam circulariter mobilis circa punctum quoddam determinatum, adeò vt crus illud iam dictum ſemper tranſeat per commemoratæ lineæ ſibi ſemper parallelæ punctum paulò antea deſignatum, ſimulque cruris alterius dictæque lineæ interſectione curua linea deſcribatur. Huius igitur ſectionis ortus ſimpliciſſimo quidem modo, rationeque cernitur, eademque ſymptomata ſectionem ipſam conſequuntur, quod ſi Veteribus perſpectum exploratumque fuiſſet, implicatiori neglecta uia magis hanc expeditam calcaſſent, atque contemplationem ineuntes eadem minori labore fortaſſe præſtitiſſent, atque facilius ſymptomata demonſtraſſent; & quidem hac ratione celebriora Theoremata faciliùs oſtenduntur; Quæ verò ſuperius attulimus, in omnibus caſibus ſic locum habent, ut nulla exceptione recipienda ſint.

At ne dum in parabole, ſed etiam in hyperbole hæc eadem contingunt; apud enim Veteres difficilis admodum, ac implicatus eſt eius ortus, vt videre licet apud Apollonium.

Apollonius prop. 12.

Si conus plano per axem ſecetur; ſecetur autem, & altero plano ſecante baſim coni ſecundum rectam lineam, quæ ad baſim trianguli per axem ſit perpendicularis; & ſectionis diameter producta cum vno latere trianguli per axem, extra verticem coni conueniat; recta linea quæ à ſectione ducitur æquidiſtans communi ſectioni plani ſecantis, & baſis coni vſque ad ſectionis diametrum, poterit ſpatium adiacens lineæ, ad quam ea, quæ in directum conſtituitur diametro ſectionis, ſubtenditurque angulo extra triangulum, eandem proportionem habet, quàm quadratum lineæ, quæ diametro æquidiſtans à vertice ſectionis vſque ad baſim trianguli ducitur, ad re-

rectangulum baſis, partibus, quæ ab ea fiunt, contentum: latitudinem habens lineam, quæ ex diametro abſcinditur inter ipſam, & verticem ſectionis interiectam, excedenſque figura ſimili, & ſimiliter poſita ei, quæ continetur linea angulo extra triangulum ſubtenſa, & ea iuxta quam poſſunt, quæ ad diametrum applicantur. Vocetur autem huiuſmodi ſectio Hyperbole.

Huius etiam ſectionis longè facilior eſt geneſis ea, quæ per motum unius puncti comparatur, vt ſi recta quæpiam circa punctum aliquod circulariter moueri concipiatur, ſuoque motu promouere, ſecumque ducere angulum quendam, ita ut eius crus vnum applicatum perpetuò maneat immotę rectæ cuidam, prędictaque mobilis linea ſemper tranſeat per idem punctum iam dicti cruris, ſimulque alterius cruris, & initio dictæ lineæ interſectione deſcribatur curua linea, ſitque ducta quædam ſecundo cruri parallela, neceſſariò euenit quò magis initio iam dicta linea ad hanc ipſam parallelam accedit, eò minorem fieri angulum interſectionis, quo curua deſcribitur, vt demum ea ad parallelam perueniente euaneſcat, &c. & ex hac geneſi Theoremata eadem, quæ ex Veteri ortu depromuntur. *Hyperbole ortus in plano.*

Nec diſſimiliter de altera conica ſectione cenſendum, quæ ellipſis dicitur, cuius antiqua geneſis eſt illa, quam Apollonius tradit. *Lib. 1. prop. 13*

Si conus plano per axem ſecetur, & ſecetur altero plano conueniente cum vtroque latere trianguli per axem, quod neque baſi coni æquidiſtet, neque ſubcontrariè ponatur; planum autem, in quo eſt baſis coni, & ſecans planum conueniat ſecundùm rectam lineam, quæ ſit perpendicularis, vel ad baſim trianguli per axem, vel ad eam, quæ in directum ipſi conſtituitur; recta linea quæ à ſectione coni ducitur æquidiſtans communi ſectioni planorum vſque ad diametrum ſectionis, poterit ſpatium adiacens lineæ, ad quam ſectionis diameter eam proportionem habeat, quam quadratum lineæ diametro æquidiſtantis à vertice coni vſque ad trianguli baſim ductæ; habet ad rectangulum contentum baſis partibus, quæ inter ipſam, & rectas trianguli lineas interijciuntur: latitudinem habens lineam, quæ ex diametro ab ipſa abſcinditur ad verticem ſectionis, deficienſque figura ſimili, & ſimiliter poſita ei, quæ diametro, & linea iuxta quam poſſunt continetur. Dicatur autem huiuſmodi ſectio Ellipſis.

In plano etiam huius ſectionis ortus contingit, ſi duo fuerint rectæ lineæ mutuò ſe ſecantes, atque triangulum fuerit effectum, cuius latus ſubtendens angulum, quem prædictæ lineæ in communi ſectione efficiunt, vt ſi interſectio fuerit ad angulos rectos, latus ſubtendens rectum angulum moueatur, ita vt extremum vnum dum tendit ad punctum interſectionis, ſeu ad verticem trianguli rectanguli, aliud extremum recedat à prædicto vertice, &c. Comparabitur ſectio prædicta, & hinc etiam antiqua Theoremata deducuntur; ſed hęc cumulatiùs in ſequentibus perſequemur. *Ellipſis ortus in plano.*

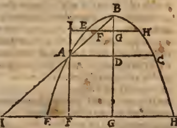
De his enim ſecundo Libro iterum redibit ſermo; interim ſuperiora adnotaſſe non fuit alienum prorſus ab inſtituto.

T H E O R E M A.

Data ſit parabole ABC, in qua diametrorum vertices ſint A, & B, ducta verò ſit A B, & E H ordinatim applicata ſit ad diametrum BD, ut protracta, quæ ſupra AC, occurrat alteri diametro protractæ ad partes A, in I & quæ infra, occurrat BA protractę ad partes A in I; ea tamen lege ducta ſit vtraque ordinatim applicata, vt IE ſit æqualis FG. Exemplum XXV.

Dico ſuperiorem ſemiordinatam ab AB, & inferiorem à diametro AF diuidi in F extremâ, ac mediâ ratione.

Reſolutio.



QVoniam igitur recta E G diuiſa eſt in F extremâ ac mediâ ratione, propterea erit, vt EG ad GF, ita G F ad F E; quamobrem rectangulum GEF æquabitur [a] quadrato F G; eſt autem ex hypotheſi IE æqualis FG; ergo rectangulum ſub G E, & F E æquale erit rectangulo ſub I E, & FG; ergo erit, [b] vt G E ad IE, ita F G ad F E, & componendo, [c] ut G I ad I E, ita G E ad F E, & permutando, [d] vt G I ad E G, ita IE ad FE, & conuertendo, [e] vt EG ad GI, ita FE ad I E; eſt autem H G æqualis E G; proinde vt HG ad GI, ita FE ad IE, & componendo erit, [f] ut

a 17. ſexti
b 16 ſexti.
c 18 quinti.
d 16. quinti.
e Corol. 4. 5.
f 18. quinti.

g 16. ſexti. HI ad GI, ita IF ad IE; ergo rectangulum HIE æquabitur g rectangulo GIF, vtrinque ad-
h 3. axio. pr. dito quadrato EG, erit h rectangulum HIE vnà cum quadrato EG æquale rectangulo GIF plus quadrato EG; eſt autem rectangulum IGF æquale quadrato EG; (vt mox oſtende-
i 2. axio. pr. tur) ergo rectangulum HIE plus quadrato EG æquabitur i rectangulo GIF plus rectangu-
k 1. ſecundi. lo IGF; ſed rectangulum GIF vnà cum rectangulo IGF æquale k eſt quadrato IG; ergo
l 1. axio. pri. rectangulum HIE vnà cum quadrato EG l æquabitur quadrato IG. Quod ita ſe habet ex ſexta ſecundi Elementorum. Diuiſa eſt enim EH bifariam in G, & ei adiecta eſt IE, propterea rectangulum HIE vnà cum quadrato EG æquabitur quadrato IG.

LEMMA.

Eſt autem rectangulũ IGF æquale quadrato EG. *Quoniam enim eſt vt DB ad BG, ita quadratum AD ad quadratum EG (ex natura parabolæ)* m *eſt autem AD æqualis IG, atque*
m 34. primi & n 7. quinti. o 29. primi, & 4. ſexti. *adeò quadratum AD æquale quadrato IG; proinde vt BD ad BG,* n *ita quadratum IG ad quadratum EG; ſed vt DB ad BG,* o *ita eſt AD, hoc eſt IG ad FG; ergo quadratum IG ad quadratum EG* p *erit vt IG ad FG; quamobrem IG, EG, FG erunt continuæ proportionales,*
p 11. quinti. q 17. ſexti. *atque adeò rectangulum IGF* q *æquabitur quadrato EG.*

Non diſſimiliter in diuiſione inferiori; dicemus enim, vt DB ad BG, ita quadratum AD, ſeu FG ad quadratum EG, atq; adeò vt AD, ſeu FG ad IG, ita quadratum FG ad quadratum EG; quare FG, EG, IG erunt proportionales; vnde rectangulũ IGF æquabitur quadrato EG.

Quod nos offendimus reſoluendo probatione indigens, à qua tunc declinamus, nè reſolutionis curſum remoremur, cum tamen omninò ad fidem faciendam ſit demonſtrandum; quatenus reſolutioni auxiliari poteſt, βοηθηματικὸν rectè diceretur, quod fortaſſe non inrationabiliter antiquà voce retenta ἐπίταγμα appellari poſſet.

Compoſitio.

α 5. ſecundi. QVoniam EH diuiſa eſt bifariam in G, & ei adiecta eſt IE, erit α rectangulum HIE
β 1. ſecundi. vnà cum quadrato EG æquale quadrato IG; at verò quadrato IG æquale β eſt re-
γ 1. ax. pr. ctangulum GIF vnà cum rectangulo IGF; ergo rectangulum HIE plus quadrato EG æquale γ erit rectangulo GIF plus rectangulo IGF; ſed rectangulum IGF æquatur
δ 1. axiom. pr. quadrato EG (vt ſupra demonſtratum fuit;) proinde rectangulum HIE vnà cum quadrato
ε 3. ax. pr. EG δ erit æquale rectãgulo GIF plus quadrato EG, vtrinq; ſublato quadrato EG ε remanebit
ζ 16. ſexti. rectangulum HIE æquale rectangulo GIF; quamobrem erit, vt HI ad GI, ζ ita IF ad IE, at-
η 17. quinti. que adeò diuidendo, η vt HI minus GI, hoc eſt HG ad GI, ita IF minus IE, hoc eſt FE ad
θ 7. quinti. ι Coroll. 4. 5. IE; eſt autem HG æqualis EG, proinde erit, ut EG, ad GI, θ ita FE ad IE, atque adeò con-
κ 16. quinti. uertendo, ι ut GI ad EG; ita IE ad FE, & permutando, κ vt GI ad IE, ita GE ad FE;
λ 17. quinti. μ 16. ſexti. & diuidendo λ vt GI minus IE, hoc eſt GE ad IE, ita EG minus FE hoc eſt FG ad FE. Quamobrem rectangulum ſub GE, & FE æquale μ erit rectangulo ſub IE, & FG; eſt autem ex hypotheſi IE æqualis FG; ergo rectangulum ſub GE, & FE, hoc eſt rectan-
ν 17. ſexti. gulum GEF æquale erit quadrato ex FG; ergo vt EG ad FG, ita ν GF ad FE; quamobrem recta EG diuiſa erit in F extremà, ac medià ratione; Quod operæ pretium erat oſtendere.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Initium Reſolutionis, & finis Compoſitionis.

Quoniam ergo recta EG diuiſa eſt in F extremà, ac medià ratione; propterea
Vt EG ad GF, ita GF ad FE. quamobrem
Rectangulum GEF æquabitur quadrato FG; eſt autem ex hypotheſi IE æqualis FG; ergo
Rectangulum ſub GE, & FE æquale erit rectangulo ſub IE, & FG; erit ergo
Vt GE ad IE, ita FG ad FE; & componendo
Vt GI ad IE, ita GE ad FE; & permutando
Vt GI ad EG, ita IE ad FE, & conuertendo
Vt EG ad GI, ita FE ad IE; eſt autem
HG æqualis EG; ergo
Vt HG ad GI, ita FE ad IE. & componendo erit
Vt HI ad GI, ita IF ad IE; ergo
Rectangulum HIE æquabitur rectangulo GIF.
Vtrinque addito quadrato EG, erit

Re-

Rectangulum H I E, vnà cum quadrato E G æquale rectangulo G I F plus quadrato E G; eſt autem

Rectangulum I G F æquale quadrato E G; ergo

Rectangulum H I E plus quadrato E G, æquabitur rectangulo G I F plus rectangulo I G F, ſed

Rectangulum GIF vnà cum rectangulo I G F æquale eſt quadrato I G; ergo

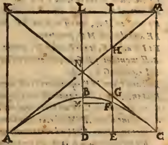
Rectangulum H I E, vnà cum quadrato E G, æquabitur quadrato I G. Quod ita ſe habet, &c. Finis Reſolutionis, & initium Compoſitionis.

T H E O R E M A.

Sit parabole ABC, cuius baſis AC, tangens vero CK, diametro autem ſit æquidiſtans AK, & in AC ſumpto quolibet puncto E, & eidem diametro ducta parallela E G; quæ parabolæ occurrat in F. Dico eſſe vt A K ad E G, ita E G ad G F. Exemplum XXVI.

Intelligatur a ducta KM parallela baſi AC, ſitque A M tangens altera ipſius paraboles in A, quæ occurrat C K in N, & protracta occurrat K M in M, ſitque ducta MC, quæ, ut patet ex Elementis, erit parallela ipſi AK, atque adeò diametro paraboles, quæ quidem diameter protracta in L neceſſariò tranſibit per N, vt etiam conſtat ex Elementis.

Reſolutio.



QVoniam igitur eſt, vt AK ad EG, ita EG ad FG; eſt autem vt A K ad E G, b ita A C ad E C; ergo vt AC ad E C, c ita E G ad F G; ergo per d conuerſionem rationis vt C A, ad A E, ita G E, ad E F; ſed vt M C ad H E, ita e eſt A C ad A E, ergo ut M C ad H E, ita eſt G E ad F E; ſed I E æqualis f eſt M C, propterea, vt I E ad H E, ita G E ad F E. Quamobrem rectangulum I E F, æquale g erit rectangulo H E G; eſt autem I H æqualis G E; ergo rectangulum I E F æquale erit rectangulo I H E; ſed rectangulum L D B æquale eſt rectangulo LND, eſt enim DN ex natura paraboles diuiſa bifariam in B, & LD bifariam in N, propterea, vt rectangulum LDB ad rectangulum IEF, ita rectangulum LND ad rectangulum I H B; ſed ut rectangulum ANM ad rectangulum AHM, ita rectangulum LND ad rectangulum IHE, ex iiſdem enim rationibus componuntur; ergo vt rectangulum A N M ad rectangulum AHM, ita rectangulum L D B ad rectangulum IEF, ſeu quod idem eſt, rectangulum LDB ad rectangulum IEF, k rationem habebit, vt rectangulum ADC ad rectangulum AEC; ut autem B D ad F E, ita rectangulum ADC ad rectangulum AEC, vt infra demonſtrabitur; ergo rectangulum LDB ad rectangulū IEF, erit l ut BD ad FE; Quod ita ſe habet; ſunt enim rectangula eiuſdem altitudinis.

a 31. primi. b 4. ſexti, & 16. quinti. c 11. quinti. d 19. quinti. e 4. ſexti, & 16. quinti. f 34. primi. g 16. ſexti. k 11. quinti. l 11. quinti.

L E M M A.

Quod autem ſit vt BD ad FE, ita rectangulū ADC ad rectangulū AEC. *Facilè ſit oſtendetur. Ducta ſit V F ordinatim applicata, atq; a adeò parallela ipſi AC. Quoniā igitur propter parabolen, vt eſt DB ad V B, b ita quadratū D C ad quadratū V F, ſed quadrato DC æquale c eſt rectangulum AEC plus quadrato DE; ergo ut DB ad V B, d ita rectangulum AEC plus quadrato DE ad quadratum V F, ſeu quadratum DE, & per conuerſionem rationis, e vt BD ad DV, ita rectangulum AEC plus quadrato DE, hoc eſt quadratum DC, hoc eſt rectangulum ADC ad rectangulum AEC; eſt f autem FE æqualis V D; ergo vt BD ad FE, g ita rectangulum ADC ad rectangulum A E C.*

a 31. primi. b ex Apol. prop. 20. lib. primi. c 5. ſecundi. d 7. quinti. e per corol. 19. quinti. f 34. primi. g 7. quinti.

Compoſitio.

QVoniam eſt rectangulum L D B ad rectangulum I E F (cùm ſint eiuſdem altitudinis) α vt baſis BD ad baſim FE, ſed ut BD ad FE, ita rectangulum ADC ad rectangulum AEC (ut paulò ſupra demonſtrauimus); ergo rectangulum L D B ad rectangulum IEF rationem habebit, β ut rectangulum ADC ad rectangulum A E C, ſeu erit, ut rectan-

α 1. ſexti. β 11. quinti.

ctangulum ANM ad rectangulum A H M; ex iiſdem enim rationibus componuntur huiuſ-
γ 11. quinti. modi rectangulorum rationes, vt cuique perſpectum eſt ex elementis; ſed ut rectangu-
δ 1. ſexti, & 1. axiom. pri. lum ANM ad rectangulum AHM, ita rectangulum LND ad rectangulum IHE, propterea,
ε 16. ſexti. ut rectangulum LDB ad rectangulum IEF, γ ita rectangulum LND ad rectangulum I H E;
ζ 14 primi. ſed rectangulum LDB æquale eſt rectangulo LND; ergo rectangulum I E F æquale erit re-
η 7 quinti. θ 4. ſexti, & ctangulo IHE, eſt autem IH æqualis GE, propterea rectangulum IEF æquale δ erit rectan-
16. quinti. gulo HEG; quamobrem, ut IE ad HE, ε ita GE ad FE, ſed I E æqualis ζ eſt M C; ergo ut
ι 11. quinti. MC ad HE, η ita eſt G E ad F E, ſed ut M C ad H E, ita θ eſt A C ad A E; ergo ut A C ad
κ 19 quinti λ 4. ſexti, & A E; ι ita G E ad FE, & κ per conuerſionem rationis, vt AC ad CE ſic EG ad GF; ſed ut A
16. quinti. μ 11. quinti. C ad EC; ita λ eſt AK ad EG; ergo ut AK ad EG, μ ita EG ad F G. Quod oportebat oſten-
dere.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Initium Reſolutionis, & finis Compoſit. *Quoniam igitur eſt; Vt AK ad EG, ita EG ad FG;*
Eſt autem vt AK ad EG ita AC, ad EC; ergo
Vt AC ad EC, ita EG ad FG. ergo erit per conuerſionem rationis
Vt AC ad AE, ita G E ad F E; ſed
~~*Vt MC ad HE, ita eſt AC ad AE, ergo*~~
Vt M C ad H E, ita eſt G E ad F E; ſed
I E æqualis eſt M C. propterea
Vt I E ad H E, ita GE ad F E; quare
Rectangulum I E F æquale erit rectangulo H E G; eſt autem
I H æqualis G E; ergo
Rectangulum IEF æquale erit rectangulo IHE, ſed
Rectangulum LDB æquale eſt rectangulo LND. propterea
Vt rectangulum LDB ad rectangulum IEF, ita rectangulum LND ad rectangulum IHE; ſed
Vt rectangulum ANM ad rectangulum AHM, ita rectangulum LND ad rectangulū IHE; ergo
Vt rectangulum ANM ad rectangulum AHM, ita rectangulum L D B ad rectangulum IEF, ſeu rectangulum L D B, ad rectangulum I E F, rationem habebit, vt rectangulum ADC ad rectangulum A E C.
Sed vt rectangulum ADC ad rectangulum AEC, ita eſt BD ad F E, ergo
Vt B D, ad FE, ita erit rectangulum LDB, ad rectangulum IEF. Quod ita ſe habet, &c.

Finis Reſolutionis, & initium Compoſ.

T H E O R E M A.

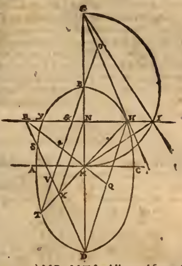
Exemplum XXVII. *Sit ellipſis ABCD, cuius centrum M; maior axis B D, minor verò A C, producto maiori axe DB ad partes B, ſit acceptum quodcunque punctum G, ex quo ducta ſit GH tangens perimetrum ſectionis in H, per H ducta ſit ad BD perpendicularis H N, ſuper G M ſit deſcriptus ſemicirculus G I M, ſitque protracta N H ad partes H, donec peripheriæ occurrat in I, acta ſit MI.*

Dico MI, MB eſſe inter ſe æquales.

Præparatio.

PRotrahatur I N ad partes N, & occurrat ſectionis perimetro in Y, agatur H D, cui per B ducta ſit parallela OT, ex T, & H ductæ ſint T M, H M, quæ erunt in directum poſitæ, vt paulò poſt oſtendam, diuidatur HD biſariam in Q; ducaturq; per M diameter QMR, occurrens rectæ HY in R, ducatur R D occurrens ellipſi in S, & rectæ O T in V, item rectæ T M in X; & ad I ducta ſit G I.

Reſolutio.



QVoniam M I æqualis eſt MB, & eadem MI cum G I facit angulos rectos in I; ergo centro M, interuallo MB, deſcriptus circulus tranſibit per punctum protractæ, N H ad partes H, vbi rectæ eductæ ex M & G, faciunt angulos rectos. & ab ipſa GI circulus tãgitur;[a] quare[b] vt DN ad NB, ita DG ad GB, ſed[c] ut DH ad &B, ita DN ad NB; ergo[d] ut DG ad BG, ita DH ad &B, ſed[e] ut D G ad B G, ita D H ad B O; ergo[f] ut D H ad & B, ita D H ad B O; ergo & B, & BO erunt[g] inter ſe æquales; ſunt autem TV, &B, inter ſe æquales, ut mox conſtabit, vnde B O, & T V erunt æquales inter ſe; communi addita B V; ergo O V æquabitur[h] BT, ſed B T æqualis eſt D H; ergo O V æquabitur[i] DH; eſt autem O T parallela ipſi DH, quare DS erit[k] parallela ipſi tangenti GH: vnde poſita erit[l] ordinatim ad diametrum TH, atque adeò DS erit biſſecta in X, quemadmodum H Y eſt ex hypotheſi biſſecta in N. Vnde YS, T B, X N, D H, erunt inter ſe parallelæ; ſcilicet N X æquidiſtabit[m] B T; at verò M B, M T ſemidiametri ſecant H Y, DS, in N, & X; ergo YS æquidiſtabit[n] BT; ſed BT eſt parallela ipſi D H, ex conſtructione; ergo ducta YS erit[o] parallela ipſi DH; ſed rectæ per H, & D occurrunt diametro QR in R; quare HD erit ordinatim applicata ad diametrum QR. ex Elementis conicis. Quod itá ſe habet ex conſtructione.

a 31. tertij.
b Ex Auctore lib. de Circulo.
c 4 ſexti, & 16. quinti.
d 11. quinti.
e 4. ſexti, & 16. quinti.
f 11. quinti.
g 7. quinti.
h 2. axiom. pr.
i 1. ax. primi.
k 33. primi.
l Ex Element. conicis Apol.
m Ex Auctore in lib. de Ellipſi.
n Ibidem.
o 30. primi.

Lemma primum.

Demonſtrabitur autem BT æqualis DH. *Nam RQ biſſecat BT, DH ordinatim applicatas; ſunt autem aMB, DMQ triangula ſimilia; propterea; vt DM ad DQ, ita*[a] *B M ad Ba, & permutando,*[b] *vt DM ad MB, ita DQ ad Ba; eſt autem DM æqualis MB; ergo DQ æquabitur aB, quare DH, & BT earum dupla erunt inter ſe æquales.*

a 4. ſexti.
b 16. quinti.

Lemma ſecundum.

Sunt autem TM, HM in directum poſitæ. *Nam in duobus triangulis TaM, & H QM, duo latera Ta, aM, æqualia ſunt duobus lateribus QH, QM; anguli verò TaM, H QM, inter ſe æquales; ergo angulus a M T æquabitur angulo H M Q; addito communi angulo a M H ergo angulus T Ma, plus angulo a M H, æquabitur angulo a M H vna cum angulo H M Q. ſed hi ſunt æquales duobus rectis, ergo & illi quare T M, H M, erunt*[c] *in directum conſtituta.*

Lemma tertium.

Quod autem TV ſit æqualis &B; *ſic oſtenditur. Eſt enim aB, æqualis aT, & quidem ex Elementis Conicis, cum T B ſit ordinatim applicata ad diametrum QR, eſt etiam a& æqualis aV, cum ſit DQ ad QH ita ſit Va ad a& ergo reliqua &B æquabitur reliqua TV.*

Compoſitio.

QVoniam igitur HD ex conſtructione poſita eſt ordinatim ad diametrum QR, rectè autē per H, & D occurrunt diametro prædictæ in R, ergo ducta YS erit[α] parallela ipſi HD, ſed BT eſt parallela ipſi D H; ex conſtructione ergo Y S æquidiſtabit[β] B T; at

α Ex Elem. conicis.
β 30 primi.

at verò MB,MT ſemidiametri ſecant HY,DS in N,& X;ergo NX ęquidiſtabit * BT;unde SY, TB,X N,DH erunt γ inter ſe parallelæ;Quare cùm HY ſit ex hypotheſi biſſecta in N,ergo DS erit biſſecta in X,vnde SD poſita erit δ ordinatim ad diametrũ TH,ob id DS erit ε parallela ipſi tangenti GH,eſt autẽ OT parallela ipſi DH; ergo OV ζ æquabitur DH,ſed BT æquatur DH; ergo OV η æquabitur BT, cõmuni ablata BV θ remanebit TV æqualis BO, ſunt autem TV, &B, inter ſe æquales, ut oſtenſum fuit; ergo &B, BO, ι erunt inter ſe æquales; ergo ut DH ad &B, ita κ erit DH, ad BO, ſed ut DH ad BO. ita λ DG ad B G; ergo ut DG ad BG, ita μ DH ad &B,ſed vt DH ad &B, ν ita DN ad NB; ergo ut DN ad NB, ita ξ D G ad GB; Centro igitur M, interuallo MB deſcriptus circulus ο tranſibit per punctum rectæ N I, ad quod ducta recta ex M cum ducta ex G ſecante NH protractam ad partes H, facit angulos rectos, ſed MI cum GI facit π angulos rectos in I; ergo MI ρ æquabitur MB. Quod oportebat oſtendere.

* ex conicis
γ 30. primi.
δ Ex Element. Conicis.
ε Ex Element. Conicis.
ζ 34. primi.
η 1. ax. pr.
θ 3. axiom pr.
ι 1. ax. primi.
κ 7. quinti.
λ 4. ſexti; & 16. quinti.
μ 11. quinti.
ν 4. ſexti, & 16. quinti.
ξ 11. quinti.
ο Ex Auctore Lib. de Circulo Prop. 45.
π 31. tertij.
ρ 15. def pri.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Initium Reſolutionis, & finis Compoſit.

Quoniam igitur MI æqualis eſt MB, & eadem
MI cum GI facit angulos rectos in I; ergo
Centro M interuallo M B, deſcriptus circulus tranſibit per punctum protractæ NH, ad partes H, vbi rectæ eductæ ex M & G faciunt angulos rectos, & ab ipſa GI, circulus tangitur, ergo.
Vt D N ad N B, ita D G ad G B; ſed.
Vt D H ad & B, ita D N ad N B; ergo
Vt DG ad B G, ita D H ad & B, ſed
Vt D G ad B G, ita D H ad BO; ergo
Vt D H ad & B, ita erit D H ad B O; ergo
& B, & BO erunt inter ſe æquales,
Sunt autem TV, & B inter ſe æquales, ergo
BO, & TV erunt æquales inter ſe
Communi addita BV; ergo
OV æquabitur BT, ſed
BT eſt æqualis D H; ergo
OV æquabitur DH; eſt autem
OT parallela ipſi DH; ergo
DS erit parallela ipſi tangenti GH: vnde poſita erit ordinatim ad diametrum TH, atque adeo DS erit biſſecta in X, ut HY eſt biſſecta ex hypotheſi in N: vnde S Y, T B, X N, D H, erunt inter ſe parallelæ; ſcilicet
NX æquidiſtabit BT. ſed
MB, MT ſemidiametri ſecant H Y, DS, in N, & X; ergo.
Y S æquidiſtabit B T, ſed
BT eſt parallela ipſi DH, ergo ducta YS erit parallela ipſi H D, cum recta per H, & D occurrant diametro Q R in R; ergo

Finis Reſolutionis, & initium Compoſ.

HD erit ordinatim applicata ad diametrum Q R. Quòd ità ſe habet, &c.

THEOREMA.

Exemplum XXVIII.

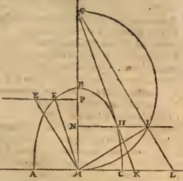
Sit ſemi ellipſis ABC, cuius centrum M, minor axis AC, & ſemimaior BM, in quo protracto ad partes B ſit acceptum punctum G, à quo ducta GH, tangens perimetrum in H, protracta ad partes H occurrens in K axi minori, ductaque ſit MF æquidiſtans tangenti GH.
Dico quadratum GH ad quadratum MF rationem habere, vt GH ad H K.

Præ-

Præparatio.

SVper GM intelligatur deſcriptus ſemicirculus GIM, & ex H ad eam [a] cadat perpendicularis HN, quæ protracta ad partes H perueniat ad I peripheriæ punctum; agatur MI, item GI, quæ protracta perueniat ad L, & ex F, ducatur [b] perpendicularis FP, quæ protracta ſit ad partes F in infinitum, & agatur ME æqualis MI.

a 12. primi.
b 11. primi.



Reſolutio.

QVoniam igitur eſt, vt quadratum GH ad quadratum æquidiſtantis MF, ita GH ad HK; ergo vt GH ad MF, [a] ita MF ad HK; ergo vt HK ad MF, [b] ita MF ad GH, ſed vt ME ad GI, ita MF ad GH, vt mox conſtabit; ergo vt ME ad GI, [c] ita HK ad MF, ſed vt IL ad ME, [d] ita ME ad GI, (eſt [*] enim ME æqualis MI) ergo vt IL ad ME, ita HK ad MF, [e] permutando [f] vt IL ad HK, ita ME ad MF, ſed vt IL ad HK, [g] ita GI ad GH; ergo erit vt GI ad GH [h] ita ME ad MF, cùm igitur anguli MFP, & GHN æquales [i] ſint, atque adeò reliqui GHI, & MFE; ergo triangulum GHI ſimile [k] erit triangulo MFE; quare erit, vt GH ad HI, [l] ita MF ad FE, eſt autem, vt GH ad NH, [m] ita MF ad FP; ergo vt NH ad HI, [h] ita FP ad EF; conuertendo ergo vt HI ad NH, [o] ita EF ad FP; & componendo vt NI ad NH, [p] ita EP ad FP; & conuertendo, vt NH ad NI, [q] ita FP ad EP; & permutando [r] vt NH ad FP, ita NI ad EP; ergo puncta I,B,E, [s] pertinent ad circulum &c.

a per cõuerſũ corol. 10. ſexti
b ſ cor. 4 quït.
c 11. quinti.
d 8. ſexti, & 7. quinti.
* ex anteced.
e 11. quinti.
f 16. quït. & corol. 4. eiuſd.
g 2. ſexti, & 16. quinti.
h 11. quinti.
i 29. & 32. primi.
k 7. ſexti.
l 4. ſexti.
m 4. ſexti.
n per ſubductionẽ æqualium rationũ.
n cor. 4 quït.
p 18. quinti.
q cor. 4. quït.
r 16. quinti.
ſ Ex doctrina Conica.

L E M M A.

Quod autem ſit vt ME ad GI, ita MF ad GH ſic oſtendo. *Quoniam triangula GNH, MFP,* [a] *ſunt æquiangula, vnde anguli ad H, & F ſunt æquales; ergo vt GH ad HN,* [b] *ita MF ad FP, ſed ex natura ellipſeos, cuius axis idem ſit cum diametro circuli, eſt,* [c] *vt NH ad HI, ita PF ad FE, ergo ex æquali vt GH ad HI,* [d] *ita MF ad FE. ſunt autem anguli GHI, MFE æquales; ergo triangula GHI, & MFE* [e] *erunt ſimilia; ergo* [f] *vt ME ad MF, ità GI ad GH; & permutando vt ME ad GI,* [g] *ità MF ad GH.* Quod &c.

a 29. & 32. primi.
b 4. ſexti.
c Ex doctrina Conica.
d 22. quinti.
e 6. ſexti.
f 4. ſexti.
g 16. quinti.

Compoſitio.

QVoniam MF eſt parallela ipſi GH; ergo angulus MGH [α] æquabitur angulo PMF, ſed anguli ad P, & N ſunt recti, atque adeò [β] æquales, ergo reliquus [γ] æquabitur reliquo; itaque angulus MFP æquabitur angulo GHN; quare triangula GNH, MPF erunt ſimilia; ergo vt GH ad HN, [δ] ità MF ad FP. Quoniam verò MI, MB, & ME, [ε] ſunt inter ſe æquales; ergo puncta I,B,E, [ζ] pertinent ad circulum; ergo vt NH ad FP, [η] ita NI ad EP, & permutando vt NH ad NI, [θ] ita FP ad EP; & conuertendo, vt NI ad NH, [ι] ita EP ad FP; & diuidendo, vt HI ad NH, [κ] ita EF ad FP, & conuertendo, vt NH ad HI, [λ] ita FP ad EF; erat autem vt GH ad NH, ita MF ad FP; ergo ex æquali, vt GH ad HI, [μ] ita MF ad FE, ſed anguli MFP, & GHN ſunt æquales; ergo reliqui GHI, MFE [ν] æquales erunt, circa quos latera cùm ſint proportionalia; ergo triangulum GHI ſimile [ξ] erit triangulo MFE; ergo erit vt GI ad GH, [ο] ita ME ad MF, ſed vt GI ad GH, [π] ita IL ad HK; ergo vt IL ad HK, [ρ] ita ME ad MF; & permutando vt IL ad ME, [σ] ita HK ad MF, ſed, vt IL ad ME, [τ] ita ME ad GI; eſt enim ME æqualis MI, eſtque vt IL ad MI, [υ] ita MI ad IG; ergo, vt ME ad IG, [φ] ita HK ad MF; ſed vt ME ad GI, ita MF ad GH, vt vidimus; ergo vt HK ad MF, [χ] ita

α 29. primi.
β 12. axiom. pri.
γ 32 primi.
δ 4 ſexti.
ε Ex antecedenti, & ex conſtructione.
ζ 9. tertij.
η Ex doctrina Conica.
θ 16. quinti.
ι cor. 4. quït.
κ 17. quinti.
λ cor. 4. quït.
μ 22. quinti.
ν 1. ax. pr.
ξ 6. ſexti.
ο 4. ſexti.
π 2. ſexti, & 16. quinti.
ρ 11. quinti.
σ 16. quinti.
τ 8. ſexti, & 7. quinti.
υ 8. ſexti.
φ 11. quinti.
χ 11. quinti.

ƚ cor 4. quin. MF ad GH; & conuertendo, vt GH ad MF, ƚ ita MF ad HK; ergo vt quadratum GH ad
ɑ cor. 20 ſext. quadratum æquidiſtantis MF, ɑ ita GH ad HK.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Initiũ Reſolutionis, & finis Compoſitionis.

Quoniam igitur eſt vt quadratum GH ad quadratum æquidiſtantis MF, ita GH ad Hk; ergo
Vt GH ad MF, ita MF ad HK; ergo
Vt HK ad MF, ita MF ad GH, ſed
Vt ME ad GI, ita MF ad GH, ergo,
Vt ME ad GI, ita HK ad MF, ſed
Vt IL ad ME ita ME ad GI, (eſt enim ME æqualis MI) ergo
Vt IL ad ME ita HK, ad MF; & permutando
Vt IL ad HK, ita ME ad MF, ſed
Vt IL ad Hk, ita GI ad GH; ergo erit
Vt GI ad GH, ita ME ad MF. cùm igitur anguli MFP, & GHN æquales ſint, atque adeò reliqui GHI, & MFE; ergo
Triangulum GHI ſimile erit triangulo MFE; quare erit
Vt GH ad HI, ita MF ad FE; Eſt autem
Vt GH ad NH, ita MF ad FP; ergo
Vt NH ad HI, ita FP ad FE; conuertendo ergo
Vt HI ad NH, ita EF ad FP, & componendo
Vt NI ad NH, ita EP ad FP, & conuertendo
Vt NH ad NI, ita FP ad EP, & permutando
Vt NH ad FP, ita, NI ad EP, ergo
Puncta I, B, E, pertinent ad circulum. Quod ita ſe habet ex conſtructione
Et quoniam vt GH ad NH, ita MF ad FP, & anguli MPF, GNH ſunt inter ſe æquales, vtpote recti; propterea
Triangula MFP, GHN, erunt inter ſe ſimilia; ergo
Angulus MFP æquabitur angulo GHN, & reliquus æquabitur reliquo; nempe angulus HGN æquabitur angulo FMP. Quod ita ſe habet, ob parallelas GH, FM.

Finis Reſolutionis, & initium Compoſitionis.

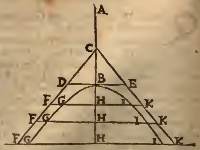
THEOREMA.

Exemplum XXIX.

*Sit hyperbole GBI, cuius diameter ABH, latus tranſuerſum AB, centrum C, recta DE tangat verticem B, cui ductæ ſint æquidiſtantes Fk. ſic Vt rectangulũ AHB, ad rectangulũ AHB, plus quadrato CB. ita quadratum HG ad quadratum HF; erit * enim CDF linea recta.*
Dico CF ſemper propius accedere ad perimetrum hyperboles, nunquam tamen punctum F coincidere cum puncto G.

* quod ab aliis oſtensũ eſt.

Reſolutio.



QVoniam recta HI maior eſt, quàm recta HI; ergo quadratum HI maius erit quadrato HI; ſed rectangulum AHB maius eſt rectangulo AHB, vt conſtat ex elementis; ergo ſi rectangulum AHB ſuperat rectangulum AHB, etiam quadratum HI ſuperat quadratum HI. Quod ita ſe habet; nam vt rectangulum AHB ad rectangulum AHB, ita quadratum HI ad quadratum HI, ex natura hyperboles.

Rurſus quoniam FH maior eſt, quàm FH, ſed CH maior eſt, quàm CH; ergo ſi CH ſuperat CH, ita etiam FH ſuperat FH. Quod ita ſe habet; vt enim eſt CH ad CH, ª ita FH ad FH,

ª 4. ſexti.

Rurſus

Rurſus quoniam FG maior eſt, quàm FG, ſed rectangulum IFG æquale eſt rectangulo IFG, vt mox demonſtrabimus; ergo tota FI maior [b] erit, quàm tota FI. Quod ita ſe habet; eſt enim HI maior, quàm HI, & FH maior quàm, FH. b 16 ſexti.

Rurſus quoniam aſymptoti ſemper propius accedunt in infinitum ad perimetrum ipſius hyperboles; propterea, eò erit minor FG, quò magis ab ipſa DE recedit, & eò erit maior FI, quò magis recedit ab eadem DE, ſemper in infinitum procedendo. Quod ita ſe habet ex modo demonſtratis.

Tandem quoniam punctum F nunquam congruit puncto G; ergo recta FH ſemper maior erit recta GH; ergo quadratum FH ſemper maius erit quadrato GH. Quod ita ſe habet; quadratum enim FH ſemper [c] excedit quadratum GH, eodem rectangulo FGK, hoc eſt IFG. c 6 ſecundi.

L E M M A.

Quod autem rectangulum IFG æquale ſit rectangulo IFG ſic oſtendo

Quoniam enim eſt, vt quadratum CH ad quadratum CH, [a] ita quadratum FH ad quadratum FH, ſi à proportionalibus proportionalia auferantur, quæ remanent [b] erunt proportionalia; vt autem rectangulum AHB ad rectangulum AHB, [c] ita quadratum GH ad quadratum GH, hæc igitur proportionalia ſi à proportionalibus auferantur, quæ remanet erunt proportionalia; remanent [d] autem quadrata CB, & rectangula FGK; ergo vt quadratum CB ad quadratum CB, ita rectangulum FGK ad rectangulum FGK, ſed quadratum CB eſt æquale quadrato CB; ergo rectangulum FGK æquabitur rectangulo FGK, ſed rectangulum FGK æquale eſt rectangulo IFG, ergo rectangulum IFG æquabitur rectangulo IFG.

a 4. ſexti 16. quinti, & 22. ſexti. b ex elementis. c ex doctrina Conica. d 6. ſecundi.

Compoſitio.

Quoniam igitur eſt vt rectangulum AHB ad rectangulum AHB, ita quadratum HI ad quadratum HI; ex natura hyperboles; propterea ſi rectangulum AHB maius eſt rectangulo AHB, etiam quadratum HI maius erit quadrato HI, ſed rectangulum AHB maius eſt rectangulo AHB; ergo quadratum HI maius erit quadrato HI; ergo recta HI maior erit, quàm recta HI.

Rurſus quoniam eſt, vt CH ad CH, [a] ita FH ad FH; propterea ſi CH maior eſt, quàm CH, etiam FH debet eſſe maior quam FH, ſed CH maior eſt quam CH; ergo, & FH maior erit quam FH. a 4. ſexti, & 16. quinti.

Rurſus quoniam HI maior eſt, quàm HI, item FH maior eſt, quàm FH, vt vidimus; ergo tota FI maior erit, quàm tota FI; ſed rectangulum IFG æquale eſt rectangulo IFG, vt ſuperiùs oſtendimus; ergo FG maior erit, [β] quàm FG. β 16. ſexti.

Rurſus quoniam ſic in infinitum procedendo, eò eſt maior FI, [γ] quò magis recedit ab ipſa DE, & eò eſt minor FG, quò magis ab eadem DE recedit; propterea ſemper aſymptoti propiùs accedent in infinitum ad perimetrum ipſius hyperboles. γ eadem demonſtratione.

Tandem, quoniam ſemper quadratum FH [δ] excedit quadratum GH eodem rectangulo IFG, ſeu quod idem eſt FGK; ergo quadratum FH ſemper maius erit quadrato GH, & recta FH maior ſemper erit recta GH; ergo punctum F nunquam congruet puncto G. Quod oportebat oſtendere. δ 6. ſecundi.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Quoniam recta HI maior eſt quàm recta HI, ergo — Initium Reſolutionis, & finis Compoſitionis.
Quadratum HI maius erit quadrato HI; ſed
Rectangulum AHB maius eſt rectangulo AHB, vt conſtat ex elementis; ergo
Si rectangulum AHB ſuperat rectangulum AHB, etiã quadratum HI ſuperat quadratum HI.
Quod ita ſe habet: nam vt rectangulum AHB ad rectangulum AHB, ita quadratum HI ad quadratum HI ex natura hyperboles.
Rurſus quoniam FH maior eſt quam FH, ſed
CH maior eſt quam CH; ergo

Si CH ſuperat CH, ita FH debet ſuperare FH. Quod ita ſe habet; vt enim eſt CH ad CH, ita FH ad FH.

Rurſus quoniam igitur FG minor eſt quam FG; ſed

Rectangulum IFG æquale eſt rectangulo IFG, ergo

Tota FI maior erit, quàm tota FI. Quod ita ſe habet; eſt enim HI maior, quàm HI, & FH maior, quàm FH

Rurſus quoniam autem aſymptoti ſemper propius accedunt in infinitum ad perimetrum ipſius hyperboles; propterea

Eò erit minor FG, quò magis ab ipſa DE recedit, &

Eò erit maior FI, quò magis ab eadem DE recedit, ſemper in infinitum procedendo. Quod ſic ſe habet ex natura &c.

Tandem quoniam punctum F nunquam congruit puncto G; ergo

Recta FH ſemper maior erit recta GH; ergo

Finis Reſolutionis, & initium Compoſitionis.

Quadratum FH ſemper maius erit quadrato GH. Quod ita ſe habet; quadratum enim FH ſemper excedit quadratum GH eodem rectangulo FGH, ſeu IFG.

THEOREMA.

Exemplum XXX.

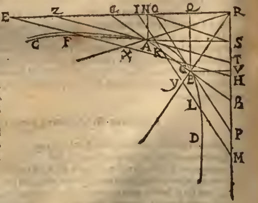
Si rectæ quædam contingant hyperbolen cum aſymptotis conuenientes à punctis verò contactuum ducantur parallelæ vtrique aſymptoto, & diametri, per has rectas vnaquæque diameter ſibi vendicat quatuor triangula æqualia, tùm inter ſe, tùm ijs, quæ per huiuſmodi lineas, alijs diametris debentur.

Sit hyperbole CABD, cuius centrum R, diametri verò, RAX, RBY; aſymptoti autem RE, RM: recta verò ZT tangat hyperbolen in A, quemadmodum OP in B: ex A agatur AN parallela aſymptoto RM, & ex B ducta ſit BV parallela aſymptoto RE; per A ducta AS parallela ipſi ER, & per B acta BQ parallela ipſi RM.

Dico diametro RA quatuor deberi triangula ZAN, NAR, RAS, SAT, facta per ſupradictas lineas, tùm inter ſe æqualia, tùm æqualia ijs totidem, quæ alteri diametro RB debentur, ſcilicet OBQ, QBR, RBV, VBP, & ſic de alijs diametris in infinitum.

Tangenti ZT per quodcunque diametri punctum X agatur parallela EXH, occurrens perimetro ipſius hyperboles in punctis F, G: inſuper per quodcunque diametri punctum Y agatur IYM occurrens perimetro hyperboles in K, & L. & per A, B, ducta αβ

Reſolutio.



Litera k in ſchemate intelligatur aliquantulum eleuati ſurſū.

Conuerſione.

a 1. ſexti.

b 2. ſexti.

c 4. ſexti.

d 4. ſexti.

QVoniam igitur triangulum ZAN æquale eſt triangulo ANR, ſunt autem inter eaſdem parallelas AS, ZR; ergo baſis ZN [a] æquabitur baſi NR, ſed vt ZN ad NR, [b] ita ZA ad AT; ergo * ZA æquabitur AT, ſed EX æqualis eſt XH, vt mox conſtabit; ergo vt ZA ad AT, ita EX ad XH; Eſt autem vt AR ad AT, [c] ita XR ad XH, ergo per ſubductionem æqualium rationum erit, vt ZA ad AR ita EX ad XR. Quod ita ſe habet [d] ex Elementis; eſt enim EX parallela ipſi ZA.

LEMMA.

Quod autem EX ſit æqualis XH ſic oſtendo. *Quoniam FG*

æquidiſtat ZT hyperbolen tangenti in A, ergo FG [a] *erit ordinatim applicata ad diame-* a ex Elem. Co.
trum RX, ergo tota EX [b] *æquabitur toti XH; itemq; interceptum ſegmentum EF* [c] *æquale* b ex iiſdem.
intercepto ſegmento GH, c ax. primi.

Rurſus quoniam triangulum ANS æquale eſt triangulo NSR; ergo vtrunque triangulo-
rum ANS, NSR [a] eſt dimidium figuræ ANRS. Quod ita ſe habet; cùm enim AN, & RS a 7. ax primi.
ſint inter ſe parallelæ, quemadmodum AS, & NR; propterea figura ANRS [b] eſt parallelo- b 35. def. pri.
grammum, cuius vtrunque prædictorum triangulorum [c] eſt dimidium. c 34. primi.

Rurſus, quoniam triangulum AST æquale eſt triangulo ARS, ſunt autem inter eaſdem d 1. ſexti.
parallelas; ergo baſis RS [d] æquabitur baſi ST, ſed vt RS ad ST, [e] ita ZA ad AT; ergo ZA e 2. ſexti.
æquabitur AT. Quod ita ſe habet, nam ZT intra aſymptotos comprehenſa tangit hyper-
bolen in A.

Tandem quoniam triangulum ARS æquale eſt triangulo BQR; ergo & eorum dupla
æqualia erunt; quamobrem rectangulum ANRS [f] æquabitur rectangulo BQRV; ergo vt f 34. primi.
BQ prima ad AN ſecundam, [g] ita AS tertia ad BV quartam; ſed vt AS ad BV, [h] ita Aβ ad g 16. ſexti.
Bβ: eſtque vt BQ ad AN, [i] ita αB ad αA: ergo erit, vt αB ad αA, [k] ita Aβ ad Bβ. Quod ita h 4. ſexti.
ſe habet; ſunt enim intercepta ſegmenta αA, & Bβ inter ſe æqualia; [l] quare vt αB ad αA, i 4. ſexti. k 14. quinti.
ita Aβ ad Bβ. Sic de alia diametro. &c. l ex El. Conic.

Compoſitio.

QVoniam igitur EX eſt parallela ZA; ergo vt EX ad XR, [α] ita ZA ad AR, ſed vt XR α 4. ſexti.
ad XH, [β] ita AR ad AT; ergo ex æquali, vt EX ad XH, [γ] ita ZA ad AT, ſed EX eſt β 4. ſexti. γ 22. quinti.
æqualis XH, ergo * ZA æquabitur AT, ſed vt ZA ad AT, [δ] ita ZN ad NR; ergo ZN æquabitur δ 2. ſexti.
NR ergo triãgulũ AZN [ε] æquabitur triangulo ANR: cùm inter eaſdẽ ſint parallelas ZR, AS. ε 1. ſexti.

Rurſus quoniam AN eſt parallela RS, & AS eſt parallela RN; ergo AN RS [ζ] eſt paral- ζ 35. def. pri.
lelogrammum, cuius vtrunque triangulorum ANS, NSR [η] eſt dimidium; ergo triangula η 34 primi.
ANS, & NSR [θ] ſunt inter ſe æqualia. θ 7. ax. primi.

Rurſus quoniam vt ZA ad AT, [ι] ità RS ad ST ob parallelas ZR, & AS; eſt autem ZA ι 2. ſexti.
æqualis AT; ergo RS æquabitur ST; quare triangulum ARS [κ] æquabitur triangulo AST. κ 1. ſexti.

Tandem quoniam eſt vt αB ad αA, [λ] ita Aβ ad Bβ; eſt autem, vt αB ad αA [μ] ita BQ ad λ ex El. Con.
AN; ergo vt Aβ ad Bβ, ita [ν] BQ ad AN: ſed vt Aβ ad Bβ, [ξ] ita AS ad BV; ergo erit vt BQ μ 4. ſexti. ν 11. quinti.
prima ad AN ſecundam, [ο] ita AS tertia ad BV quartam; Quamobrẽ rectangulum ANRS [π] ξ 4. ſexti.
æquabitur rectangulo BQRV; ergo, & eorum dimidia æqualia erunt, ac proinde triangu- ο 11. quinti. π 16 ſexti.
lũ ARS [ρ] æquabitur triangulo BQR &c. Quod oportebat oſtendere. Sic de alia diametro. &c. ρ 34. primi.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Quoniam triangulum AZN æquale eſt triangulo ANR, & ſunt inter eaſdem parallelas; ergo Initium Reſolutionis atque finis Compoſit.
Baſis ZN æquabitur baſi NR, ſed
Vt ZN ad NR, ita ZA ad AT, ergo
* *ZA æquabitur AT, ſed*
EX æqualis eſt XH, ergo
Vt ZA ad AT, ita EX ad XH: eſt autem
Vt AR ad AT, ita XR ad XH, ergo per ſubductionem æqualium rationum
Erit, vt ZA ad AR, ita EX ad XR. Quod ita ſe habet.
Rurſus quoniam triangulum ANS æquale eſt triangulo NSR, ergo
Vtrunque triangulorum ANS, NSR eſt dimidium figuræ ANRS. Quod ita ſe habet; cùm AN, & RS ſint inter ſe parallelæ &c.
Rurſus quoniam triangulum AST æquale eſt triangulo ARS, ſed
Prædicta triangula inter eaſdem ſunt parallelas; ergo
Baſis RS æquabitur baſi ST, ſed
Vt RS ad ST, ita ZA ad AT, ergo
ZA æquabitur AT. Quod ita ſe habet.
Tandem quoniam triangulum ARS æquale eſt triangulo BQR, ergo
Et eorum dupla æqualia erunt; ergo

Rectan-

Rectangulum ANRS æquabitur rectangulo BQRV, ergo
Vt BQ prima ad AN ſecundam, ita AS tertia ad BV quartam; ſed
Vt AS ad BV, ita Aβ ad Bβ, &
Vt BQ ad AN, ita αB ad αA, ergo

Finit Reſolutio, & initium Compoſ.

Erit vt αB ad αA, ita Aβ ad Bβ, Quod ita ſe habet; ſunt enim intercepta ſegmenta αA, & Bβ inter ſe æqualia; quare vt αB ad αA, ita Aβ ad Bβ.

SCHOLION.

Non pigebit hic adiungere quædam in ſupradictorum gratiam, atque adeò admonere lectorem de eo, quod diximus ſupra in Reſolutione Theorematis, quod inter exempla decimum octauum obtinuit locum; Erat autem huiuſmodi.

Aduerte quod in prædicto exemplo 18. prætermiſſa ſunt verba hæc *Item IK in directū cum F* typographi quidē incuria.

Sint circuli FOP, EPI, interius tangentes circulum ABE in puncto F. Sint deinde circuli ſecantes priores iam dictos in punctis F, E, Item IK in directum cum F; Ducta ſit FC occurrens peripherijs in punctis H, Q, L, R, C. Dico eſſe, vt HL ad LC, ita QR ad RC, atque ita omnia intercepta linearum ſegmenta inter arcus circulorum tangentium proportionalia eſſe omnibus interceptis inter arcus circulorum ſecantium.

Admonitio ad Lectorem pro ijs, quæ dicta ſunt in Exemplo 18.

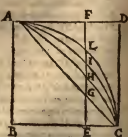
Ibi igitur ex eo, quod latera FB, FC ſint proportionaliter ſecta in punctis S, R, P, Q, deduximus rectas BC, SR, PQ, eſſe inter ſe parallelas, quod non ſic vſurpandum, quaſi id à nobis deductum fuerit ex ſimplici proportionali diuiſione FB, FC in punctis prædictis S, R, P, Q, mala ſiquidem foret conſecutio, cùm paſſim contingat, vt rectæ quædam proportionaliter diuiſa ſint, & rectæ nihilominus connectentes diuiſionum puncta non ſint parallelæ; ſed nos id ex hac ſpeciali diuiſione proportionali deduximus, facta nimirum à circulorum peripherijs tranſeuntibus per punctum F, nunquam enim continget, vt duæ illæ rectæ ſint proportionaliter ſectæ ab huiuſmodi circumferentijs, quin ductæ illæ diuiſionum puncta connectentes ſint parallelæ. Neque contra parallelæ erunt, niſi illa ſegmenta fuerint proportionalia &c.

Hæc porrò demonſtrare magni laboris non eſt, ac propterea tamquam ex Elementis petenda prætermittimus. Nos hæc eadem oſtendimus in libro de Circulo.

Humanum quidem ingenium plùs æquo luxurians præſens hæc ætas inſpexit; non enim contentum ijs, quæ hactenus in Geometricis magna dexteritate, ſummaque perſpicacitate excogitauit Antiquitas, altius progrediens per huiuſmodi diſciplinarum Oceanum, fortunato ſydere nauigans, veteres fines tranſiliuit; Quamobrem Conicas illas decantatas ſectiones pertinaci labore meditans præclariſſima quædam eſt conſecutum: qua in re egregiè ſe geſſit P. Bonauentura Cauallerius Mediolanenſis, in hiſce ſtudijs præclariſſimum Italiæ lumen, cui ſucceſſit D. Stephanus de Angelis Venetus, Geometra præſtātiſſimus, haud mediocri cum laude, quorum ope inſtituta eſt de ijs ampliſſima tractatio, initio facto à parabola, velut à ſimpliciori; De quibus breuiter nonnulla hic in medium afferam, vt hac in re itidem pateat aditus Analyſtæ.

P. Bonauentura Cauallerius commendatur.

D. Stephani de Angelis Laudes.



Sit quodcunque parallelogrammum BD, & alterutri laterum CD, BA ducta ſit parallela EF, itemque diameter AC, quæ eam ſecet in G; erit autem, vt DA ad AF, ita CD, atque adeò EF ad GF, ob ſimilia triangula CAD, GAF; atque rectam AC diagonalem primam appellant. Deinde, vt quadratum AD ad quadratum AF, ita ſit EF ad HF, quod intelligendum eſt fieri in omnibus parallelis ipſi CD, adeò videlicet, vt omnes homologæ ipſi HF terminentur ad curuam AHC, & hanc curuam AHC diagonalem ſecundam appellant. Deinde, vt cubus AD ad cubum AF, ita EF ad IF, quod intelligendum eſt fieri vbique in parallelis ipſi CD, ita vt omnes homologæ ipſi IF terminentur ad curuam AIC, & curuàm hanc AIC tertiam diagonalem appellant. Deinde, vt quadrato-quadratū AD ad quadrato-quadratum AF, ita EF ad LF, quod vbique fieri intelligendum in parallelis ipſi CD, adeò vt omnes homologæ ipſi LF terminentur ad curuam ALC; quam quidem quartam diagonalem appellant; Et ſic aſcendendo per infinitas poteſtates, continua ratione intelligendum eſt. Nec diſſimiliter triangulum AGCD

vocant

vocant primum ſpatium diagonalium parallelogrammi BD, trilineum autem AHCD, ſecundum ſpatium; trilineum AICD tertium; trilineum ALCD, quartum, & ita deinceps.

Triangulum autem BAC duplicatum ad partes BA appellarunt parabolam linearem, ſeu primam; ſpatium verò BA HC duplicatum ad partes BA, appellarunt parabolam ſecundam, ſiue quadraticam; & ſpatium BAIC duplicatum ad partes BA, appellarunt tertiam parabolam, ſiue cubicam. Præterea ſpatium BALC duplicatum ad partes BA nuncuparunt quartam parabolam, ſiue quadrato-quadraticam, & in infinitum continuata ſerie, adeò vt omnia prædicta ſpatia vocentur infinitæ parabolæ.

Spatium autem CGFD primum trapetium, ſiue lineare vocarunt; CHFD ſecundum, ſeu quadraticum; CIFD, tertium, ſiue cubicum; CLFD, quartum, ſiue quadrato-quadraticum.

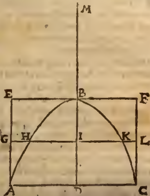
GAF dixerunt trilineum lineare ad verticem, HAF trilineum quadraticum ad verticem, & ſic deinceps.

Harum autem parabolarum infinitarum, & trilineorum infinitorum, A ſtatuerunt verticem, BA diametrum parabolarum infinitarum, quarum baſim dixerunt duplicatam BC; At vero CD, baſim infinitorum trilineorum, & trapetiorum, & AD, diametrum infinitorum trilineorum, cùm ſit eorundem duplicatorum diameter.

Infinitarum parabolarum varia, diuerſaque ſymptomata oſtenderunt, & in horum demonſtrationibus, non minus ac in ſuperioribus adhiberi quidem analytica poteſt induſtria.

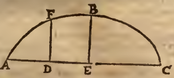
Non ſolum dantur infinitæ parabolæ, ſed etiam infinitæ hyperbolæ.

Non ſolum dari poſſunt infinitæ parabolæ modo iam explicato, ſed etiam infinitæ hyperbolæ; vt in appoſito ſchemate. Si fuerit quemadmodum rectangulum M D B, ſuppoſito quòd M B, ſit diameter tranſuerſa, ad rectangulum M I B, ita A D, ſemiordinatim applicata, ad G I, itidem ſemiordinatim applicatam, fiet hyperbole, quæ linearis dicitur. Deinde ſi fuerit, vt rectangulum M D B, ad rectangulum M I B, ita quadratum A D, ad quadratum G I, erit ſecunda hyperbole, nempe quadratica; Quod ſi in eadem ratione rectangulorum fuerit, vt cubus A D, ad cubum G I, fiet tertia hyperbole, nempe cubica; & ſi fuerit etiam in eadem ratione rectangulorum, ita quadrato-quadratum A D, ad quadrato-quadratum G I, fiet quarta hyperbole, nempe quadrato-quadratica; & ſic deinceps in infinitum ſecundùm ordinem ipſarum poteſtatum.



Dantur etiam infinitæ ellipſes.

Nec diſſimiliter in ellipſi modo conſentaneo eius naturæ intelligendum eſt. Vt ſi fuerit ſemiellipſis A B C, cuius axis A C, centrum E, ſumptoque in AC, quouis puncto D, & exiſtente ſemiaxe E B, ſecundario, ad punctum D ſit ſemiordinatim applicata D F; ſi fuerit, vt rectangulum A E C, ad rectangulum A D C, ita E B ad DF, puncta quidem A, F, B, C, ad parabolen, non ad ellipſim pertinebunt. Quòd ſi fuerit, vt rectangulum AEC ad rectangulum A D C, ita quadratum EB ad quadratum DF, puncta A, F, B, C, ne dum ad ellipſim, ſed etiam ad circulum pertinebunt. Si verò fuerit in eadem ratione ſcilicet, vt rectangulum A E C ad rectangulum A D C, ita cubus E B ad cubum DF, fiet ellipſis cubica; quod ſi fuerit vt rectangulum AEC ad rectangulum ADC, ita quadrato-quadratum E B ad quadrato-quadratum D F, fiet ellipſis quadrato-quadratica, & ſic in infinitum, ſecundùm poteſtatum ordinem.



Alia ratione ſectiones conica conſiderantur.

Verùm, & alio pacto huiuſmodi ſectiones conſiderari poſſunt; propterea quòd ſi baſis non fuerit determinata, ſed accepto puncto in recta, quæ habeat rationẽ diametri, & in eâdem acceptum ſit aliquod punctum pro vertice, ſtatutaque ſit ſemiordinatim applicata, atque ſeruetur proportio iam dicta, ſecundùm amplitudinem parabolæ ſemper deſcendendo, ita vt ratio ſegmenti diametri, ſegmenti inquam minoris, initio facto à vertice, ita ordinatim ducta ad aliam fiat linearis parabole; Quòd ſi fuerit, vt idem ſegmentum ad idem ſegmen-

ſegmentum, ita quadratum ſemiordinatæ iam dictæ ad quadratum ſemiordinatæ, fiet parabole quadratica; & vt idem ſegmentum ad ſegmentum, ita cubus iam dictæ ſemiordinatim applicatæ ad cubum alterius, fiet parabole cubica, & ſic deinceps. Quod etiam de alijs ſectionibus intelligendum eſt.

Hæc autem conſideratio ampliſſima quidem eſt, dignaque, vt in ipſa omnis labor, omneque tempus inſumatur; tamen id non diſſimulandum profectò, multò magis operæ eſſe pretium in ea incumbere ſtudia Geometrica, quibus naturæ opera nos aſſequi valeamus, & ad ipſius intimiores receſſus perſuadere poſſimus.

Cæterum analytica induſtria, vt in his locum obtineat, veluti methodus quædam vniuerſalis accommodari debet particulari, ſine qua Geometræ nullus eſt aditus in ſupradictis; huiuſmodi ſiquidem contemplatio indiuiſibilium methodum expoſcit, quæ ſanè peculiaris eſt, ac opportuna ad præcipua quædam Theoremata demonſtranda, de qua nobis in ſequentibus futurus eſt ſermo, vbi antiquam methodum reſoluendi, vniuerſaliſſimam quidem, huic peculiari aptabimus.

De Reliquis Lineis.

Præter conicarum ſectionum lineas alia etiam innumeræ ſuperſunt.

PRæter tres conicarum ſectionum lineas, quarum ſuperiùs meminimus, ducentium ortum ſcilicet, vel à coni ſectione, vel in plano à puncto ſubeunte diuerſos motus, infinitæ profectò ſunt multitudine, quarum vnamquamque propria ſymptomata conſequuntur, è quibus ad Problematum difficillimorum effectiones perficiendas, plurimas adinuenimus, quæ ob ſuas affectiones, ad propoſitum conducentes videbantur; de quibus Secundo Libro differendum.

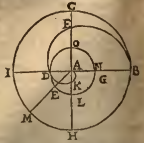
De lineis quas Auctor excogitauit in ſecundo libro differendum.

Linea helica ſeu ſpiralis ex antiquis lineis admodū elegans eſt. Eius geneſis.

E veteribus lineis elegans admodum ea eſt, quam Heliceam, ſeu Spiralem appellarunt, cuius geneſis, iam pridem vulgata fuit. Si nos enim intelligamus rectam lineam, eiuſque extremum vnum eſſe fixum, ac immobile, extremum autem alterum motu equabili, in orbem cieri, donec redierit ad punctum, vnde cæpit moueri; interim verò motu etiam equabili punctū ab extremo ipſius lineæ immobili, ab illo ſcilicet ad id quod in orbē agitur, feratur motu vt dicebā aquabili ſuper ipſam rectā lineam, ita vt ad alterum eiuſdem lineæ extremum mobile perueniat, cùm mobile extremum ad eundem locum redierit; Intelligemus enim inde lineam quandam fuiſſe deſcriptam, videlicet à puncto delato motu equabili per rectam lineam, itemque equabili ad motum eiuſdem lineæ delatæ in gyrum ſecundum extremum vnum, altero quidem manente, ac propterea hæc, quam diximus linea, quæ quæ ſpiralis appellatur, ortum à puncto ſubeunte duplicem motum aquabilem, trahit. Hæc porro ſpiralis linea eſt, quæ in ſuo genere primaria dicitur; & hæc eſt linea ſpiralis, de qua Archimedes dicit.

Linea ſpiralis deſcriptio ab Archimede tradita.

Si in plano recta linea altero termino manente æquali velocitate circumlata, redeat deinceps eò, vnde profecta eſt: ſimul verò cum linea circumlatā feratur punctum pari velocitate ſibi ipſi ſecundum rectam lineam ducto, motus initio ab immobili termino: iſtud punctum, lineam ſpiralem in plano deſcribet.



SIt circulus cuius centrum A, ſemidiameter AB, manenteque puncto A, recta quidem AB in gyrum agatur ſecundùm extremū B, deſcribens circumferentiam BCIH, motu tamen equabili, ita vt equalibus temporibus æqualia ſpatia percurrat, dumque moueri cæpit in gyrum extremum B, incipiat etiā moueri punctum per rectam AB, ex A in B motu itidem æquabili, ita vt cùm hoc peruenerit ad punctum extremum B, idem extremum ſua reuolutione ad eundem locum, vnde profectum erat, redierit, atque adeò recta AB ad eandem poſitionem reuerſa ſit; itaque punctum illud delatum per rectam AB ſubiens duplicem illum motum æquabilem, ſui motus tramitem relinquendo, lineā, quam Archimedes ſpiralem appellauit, AKDFB, deſignet, ita vt ſi circumferentiam integram BCIHB, diuiſam intelligamus in viginti quatuor partes æquales, & in totidem etiam partes concipiamus rectam AB, diuiſam

Superioris definitionis explicatio.

biſam fuiſſe, quando extremum lineæ rectæ B confecerit ſecundùm peripheriam, vnam è viginti quatuor partibus, punctum quoque per A B, vnam è viginti quatuor partibus confecerit, in quas ipſamet A B diuiſa erat, & ſic deinceps, ità vt cùm lineæ extremum B ſua gyratione peruenerit ad punctum H, confecta ſcilicet quarta parte totius circumferentiæ, etiam punctum ex A in B quartam partem ipſius A B confecerit; Punctum autem A manens ab Archimede principium ſpiralis nuncupatur; Poſitio autem lineæ, à qua incipit recta A B circumferri, principium circulationis appellatur.

Linea AM, repræſentat ſemidiametrū mobilem &c. & circumfer. NEDOB, biſſecare intelligatur ſemidiametros in D &c. de quo infra.

Huius varia ſymptomata ſunt, quorum aliqua Archimedes ingenioſa contemplatione eſt perſecutus, etſi in quibuſdam videatur defeciſſe, ſiquidem non omnibus probatur illa demonſtrandi ratio per exploſum exceſſum, atque defectum, nec demonſtrationis vis ſatis perſpicua exiſtimatur. Sed nos de his infra, agentes de diuerſis methodis, quibus Mathematici hucuſque vſi ſunt; ſolum hìc illud videtur addendum, propoſitiones primam, & ſecundam, itemque decimam ſecundam, atque adeò inde deductas haud purè Geometricas eſſe, ſed Phyſico-Geometricas; Siquidem in ijs adhibetur motus, & tempus, à quibus purus Geometra abſtinet, omniſque conſideratio de magnitudinibus inſtituta, cum ordine ad illa, non tam Geometrica, quàm Phyſico-Geometrica dicenda eſt; condonandum tamen ſibi aliquid exiſtimauit Archimedes, quòd huius lineæ geneſis à motu pendeat; ſed nùm id ſatisfaciet? Circulus quoque à motu originem ducit; Et ſi trianguli rectanguli vno latere circa rectum manente circumuoluatur integra reuolutione fit conus, cuius baſis eſt circulus deſcriptus ex reuolutione alterius lateris. Vel ſi ſit circulus in plano deſcriptus punctum autem in ſublimi acceptum, à quo perpendicularis cadat in centrum ipſius, ſi ab huiuſmodi puncto recta quædam intelligatur, cuius extremo manente in puncto iam dicto in orbem acta, circuli peripheriam abradat, gignitur inde conus, cuius baſis eſt ille circulus, cono autem diſſecto per planum baſi æquidiſtans, fit ſectio communis circulus, cuius ortus non eſt à motu. Non diſſimiliter de Cylindro ex reuolutione rectanguli, vno manente latere. Vel ſi linea recta plano, in quo circulus, perpendiculariter intelligatur inſiſtens, ſibique ſemper parallela incedens, circuli peripheriam abradens, gignit cylindrum, cuius ſectio per planum æquidiſtans baſi, quę erat circulus in plano deſcriptus, circulus itidem eſt, cuius ortus eſt ſine motu, quemadmodum contingit de ſectionibus conicis, quæ à communi ſectione plani cum cono originem habere poſſunt, imò his illud ſpeciale, quod nulla præeunte per motum deſcripta, per communem ſectionem tantùm haberi poteſt, ſecus de circulo, vt explicuimus. Sed ſi de circulo tàm ampla neglecto motu, ac tempore inſtituitur conſideratio, cur de ſpirali non itidem cuius geneſis non abſimilis eſſe poteſt? Vt enim in plano intelligitur circulus reuolutione deſcriptus, & circa eius peripheriam e recta perpendiculariter plano ſibimet ſemper parallela, circuli peripheriam abradens, cylindrum gignens, cuius communis ſectio cum plano ęquidiſtante baſi circulus eſt, cur imaginari non licebit ſpiralem primariam in plano, ita vt recta ipſi plano inſiſtens, ſibi met parallela ſemper incedens abradat ſpiralis ſpatij perimetrum, ſolidum gignat, quod non immerito Cylindrico-ſpirale dici poſſet, cuius baſes, vt in Cylindro ſunt duo circuli, ita in hoc forent duo ſpatia ſpiralia? Quòd ſi planum aliquod baſi æquidiſtans illud ſecuerit, gignet ſpirale ſpatium in ſui communi ſectione; ſpiralis autem hæc ortum habet ſine motu, vt itaque circulus ſuſcipitur conſiderandus abſque ordine ad motum, & tempus, cur hoc idem de ſpatio ſpirali fieri non poſſet? De his tamen hactenus.

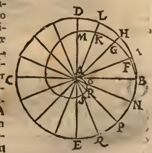
Spiralis principium quid. Circulationis principium quid. Archimedes à quibuſdam reprehenditur. De ſpiralibus tractatio ab Archimede inſtituta potius Phyſico-Geometrica eſt, quàm purè Geometrica.

Spiralis ortus per communẽ ſectionem plani cum ſolido.

Cylindrico ſpirale.

Vt autem ſectiones conicas, immo & lineam quadratricem, cuius geneſin veteres recognouerunt à puncto ſubeunte duplicem motum, Geometricè deſcribi exiſtimarunt per inuentionem quotuis punctorum, per quæ duci debeat, cur etiam hoc idem de ſpirali fieri non poterit omni prorſus neglecto motu ac tempore? Sit igitur circulus C D B E, cuius centrum A, ſemidiameter A B, eiuſque peripheria diuiſa in partes æquales quotlibuerit, quò autem plures extiterint, eò feliciùs operatio ſuccedet, & ad ſingula puncta ſectionum à centro A ductæ ſint rectæ, vt A I, A H, A L, &c., & in totidem partes diuiſa ſit vna ex ipſis, puta AB: vnde ſi circumferentia fuerit diuiſa in ſexdecim partes, in totidem etiam

Geometrica ipſius ſpiralis primaria deſcriptio.



intelligatur diuiſa ſemidiameter. Si quis autem vellet initium facere à puncto A, factâ A B veluti prima, in ſubſequenti AN ſumatur pars A O quę ſit decima ſexta pars, in ſequenti A P accipiatur A R quæ ſit duę decimæ ſextæ partes, in ſequenti A Q ſumatur A S, quæ ſit tres decimæ ſextæ partes &c. ſi quis velit initium ducere ex B ſumat in A I partem F I, quæ ſit decima ſexta pars totius A I, & in A H ſumat G H, quæ ſit duæ decimæ ſextæ partes, item in A L accipiat K L, quæ ſit tres decimæ ſextæ partes, & ſic deinceps: vnde priori modo intrinſecùs, poſteriori verò extrinſecùs ipſius ſpiralis ortus dicetur; ac propterea hunc in modum ſine vllo motu licebit ſpiralis geneſim intelligere, eandemque deſcribere, non minus Geometricè, quàm ſectiones conicas, vel ipſam quadratricem, vt paulò infra dicemus. Et quemadmodum de quadratrice ſymptomata demonſtrantur nulla habita ratione motus, vel temporis, ita etiam de hac fieri nihil prohibet;quamobrem tractatio de ſpiralibus inſtitui poterit purè Geometrica, vt ſuo loco conſtabit.

Hac autem ſpiralis geneſi agnita, quod Archimedes oſtendit beneficio motus, ac temporis, his neglectis, omninò Geometricè, qui ſequitur in modum demonſtrabitur, ac de alijs conſimilibus: vnde eſto.

THEOREMA.

*Si in ſpiralem ex prima reuolutione ortam incidant duæ * lineæ à puncto, quod eſt principium ſpiralis, & producantur ad circumferentiam vſque primi circuli: eandem rationem inter ſe habebunt iſtæ in ſpiralem incidentes, quam arcus circuli medij inter terminum ſpiræ, & limites linearum productarum in circumferentia factos, ſumptis in præcedentia arcubus à fine ſpiralis.*

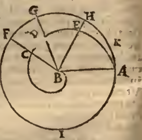
* vel plures. Exemplum. XXXI.

Sit ſpiralis linea &c.

Reſolutio.

Theorema ab Archimede, Phyſicè geometricè oſtenſum, purè geometricè demonſtratur.

** Ex Auctore in Lib. de Circulo.*



QVoniam igitur eſt, vt BC ad BD, ita circumferentia AIF ad circumferentiam AIG, & vt BD ad BE, ita circumferentia AIG ad circumferentiam AIH, erit * vt integra circumferentia ad circumferentiam A I F, ita BF ſemidiameter ad ſpiralis radium B C. Nec diſſimiliter demonſtrabimus, vt integra circuli circumferentia ad circumferentiam A I G, ita eſſe ſemidiametrum B G ad ſpiralis radium B D, & vt integra circuli circumferentia eſt ad circumferentiam A I H, ita eſſe ſemidiametrum B H ad ſpiralis radium B E; ergo per conuerſionem rationis, erit vt integra circuli circumferentia ad circumferentiam A H, ita B H, ſeu B A ad E H. Quod ita ſe habet ex natura ipſius lineæ ſpiralis; ſic enim per puncta continuata oriri perſpicuum eſt; vt enim A H ad integram circumferentiam, ita eſt E H ad ſemidiametrum B H, ſeu B A, accepto ſiquidem quocumque puncto in circumferentia A H. e.g. K, eadem intelligenda eſt ratio arcus A K ad integram circumferentiam, quæ eſſet ducta recta BK intercepti ſegmenti inter punctum K, & punctum in ſpirali, per quod recta BK tranſiret ad ipſam ſemidiametrum; Diuiſio enim integræ circumferentiæ in partes æquales, & in totidem etiam æquales partes ipſius ſemidiametri intelligenda eſt in infinitum diuiſio.

Compoſitio.

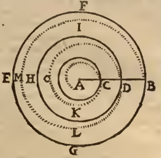
QVoniam itaque eſt, vt integra circuli circumferentia ad circumferentiam H A, ita B H, hoc eſt B A ſemidiameter ad E H; erit per conuerſionem rationis, vt integra circuli circumferentia ad circumferentiam A I H, ita eadem ſemidiameter B H ad ſpiralis radium B E. Nec diſſimiliter demonſtrabimus, integram circuli circumferentiam ad circumferentiam A I G, vt ſemidiameter B G ad ſpiralis radium B D, & vt integra circuli circumferentia ad circumferentiam A I F, ita eſſe eandem ſemidiametrum B F ad ſpiralis

radium

radium B C. Quare erit, vt B D ad B E, ita circumferentia A I G ad circumferentiam A I H, & vt B C ad B D, ita circumferentia A I F ad circumferentiam A I G.

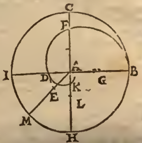
Redeamus vnde diſceſſimus, ſpiralis illa, quam cum Archimede deſcripſimus primaria eſt, dari etiam poteſt & ſecundaria, tertia, & in infinitum: Vnde Archimedes. *Spiralis primaria Archimedea.*

Linea porro, quam quidem prima reuolutione pertranſierit punctum latum ſecundum rectam, prima vocetur: quam verò in ſecunda gyratione idem punctum perambulauerit, ſecunda, atque de alijs ſimiliter, quæ circumuolutionibus proportionaliter denominantur. Vt ſi fuerit recta A B, cuius extremum A ſit immobile, dum extremum B mobile delatum motu æquabili peruenerit vnde diſceſſerat; punctum verò delatum per A B, non confecerit niſi partem A C in hac prima gyratione deſcribit primariam ſpiralem; ſi verò ſecundo in orbem agatur eadem linea motu æquabili, vt prius donec ad eandem poſitionem redierit; punctum verò delatum per A B peruenerit ad punctum D, ab huiuſmodi puncto deſcribitur ſpiralis ſecundæ reuolutionis; & ſi tandem in tertia reuolutione peruenerit ad B, deſcribetur ſpiralis tertiæ reuolutionis. *Linea prima quid in geneſi ſpiralis. Linea ſecunda quid. Supradictorū explicatio.* Spiralis ACKODLMIB. circulus primus, cuius ſemidiameter AC, ſecūdus HD, cuius ſemidiameter AD, tertius EB, cuius ſemidiameter AB.



Spatium autem comprehenſum prima reuolutione deſcripta, & linea recta, quæ prima eſt, primum appellatur, quod verò comprehenditur ſub helice ſecunda reuolutione deſcripta, & linea recta CD ſecunda, ſecundum nominatur, & ſic deinceps. *Primum ſpatium quid. Secundum ſpatium &c.*

At verò ſi à puncto quod eſt principium helicis recta quæpiam agatur, ea quæ ſunt ad eaſdem huius rectæ partes, ad quas circumuolutio fertur, antecedentia vocantur, quæ verò in contraria, dicuntur conſequentia. Vt ſi fuerit in ſpiralis principio A factum initium rectæ A M, vtcunque ductæ; voluta quidem A K D F B, & inſuper ſpatium illud ab huiuſmodi recta verſus D, & F &c. quod eſt ad eaſdem lineæ A M partes, dicuntur antecedentia, oppoſita verò voluta, quæ eſt à parte ELG; & ſpatium illud quod eſt deinceps ad ipſam lineam verſus ELG, conſequentia nuncupantur. *Antecedentia quid. Conſequentia quid. Explicatio.* Circulus BCIH, ſpiralis AKDFB.



Circulus primæ reuolutionis dicitur primus, ſecundus dicitur ſecundus, & ſic de reliquis &c. *Circulus primus. Circulus ſecundus &c.*

Nos autem alia ratione lineam hanc conſiderari poſſe obſeruauimus, ſecundùm hypotheſes diuerſas; nam, vt ſupponebat Archimedes motum lineæ in orbem eſſe æquabilem, itemque motum puncti delati ſuper rectam lineam æquabilem eſſe, ita & quemadmodum extremum B rectæ lineæ dum in orbem agitur ſecundum circunferentiam B H I &c. æqualibus temporibus æqualia ſpatia pertranſeat, ita pariter punctum ſuper rectam A B, dum ex A in B fertur, æqualibus temporibus æqualia ſpatia conficiat. Ita non diſſimiliter nobis imaginari licebit, quòd punctum delatum ſuper A B, feratur non motu æquabili, ſed potius ſecundum quandam aliam rationem, ita vt ſpatia peracta e. g. ſint vt quadrata temporum, dum interim extremum B motu æquabili fertur per circumferentiam, & ſic producetur ſpiralis alterius naturæ ab ea, quam excogitauit Archimedes, eaque ſuas habebit affectiones demonſtrabiles. *Alia conſiderationes lineæ ſpiralis ſecūdum diuerſas hypotheſes. Spirales primi ordinis. Alia ſpecies ſpiralis 2.*

Licebit etiam imaginari punctum illud delatum per A B æquabili motu ferri, ſed lineam ipſam, atque adeo extremum B ſic in orbem cieri, vt ſpatia peracta ſint vt quadrata temporum, & ſic producetur ſpiralis alterius naturæ à duabus commemoratis, ſua quidem habens conſentanea ſymptomata. *Alia ſpecies ſpiralis 3.*

Imaginari etiam poſſumus lineam reuolui, & punctum deferri per lineàm tali motu, vt ſpatia peracta ſint vt quadrata temporum, atque hunc in modum quatuor erunt ſpirales primi ordinis, quem directum appello. *Alia ſpecies ſpiralis 4.*

Spirales inuerſi ordinis. Species ſpiralis inuerſi ordinis.

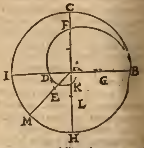
At verò inuerſi ordinis, non tot ſpecie erunt, nam vna cum prima primi ordinis coincidit. Tres igitur ſpecie diuerſæ: vnde ſi nos intelligamus extremum B motu æquabili, & punctum delatum per B A, ità ferri ex B in A, vt ſpatia confecta ſint in duplicata ratione temporum, gignetur ſpecies inuerſæ ſpiralis, & ea eſt, ſecundùm quoſdam, quam graue deſcendens in plano æquatoris deſignaret, ſi tellus tantummodo reuolueretur diurno motu, vt quibuſdam arriſit; ſi graue tamen deſcenderet remotis omnibus inpedimentis motu ſemper vniformiter accelerato ex ea altitudine, ita vt, cùm ſemidiameter telluris ad eandem poſitionem rediſſet ad centrum ipſius, graue perueniſſet, hæc tamen fortè linea non eſſet, à deſcendente graui in predicto plano deſcripta. Sic etiam de alijs ad hunc ordinem ſpectantibus ſuo modo intelligendum eſt; vt ſi punctum ex B in A feratur motu æquabili, linea verò in orbem agatur motu accelerato, videlicet in duplicata ratione temporum; Vel tandem ſi vterque motus fuerit naturaliter acceleratus.

Species 2. Species 3.

Alia etiam ſpirales oriri poſſunt pertinentes ad primum ordinē, ſecundum diuerſas combinationes.

Præterea imaginari licet motum ſecundùm aliam rationem, & ſic prouenient ſpirales pertinentes ad primum ordinem, nempe quod punctum ex A in B feratur motu, ita vt tempora ſint in duplicata ratione ſpatiorum, linea verò in orbem cieatur motu æquabili, atque ex varijs combinationibus, variæ orientur lineæ ſpirales.

Alia ſpirales pertinentes ad ſecundum ordinem.



Illud non prꝛteribo ſpiralis geneſim hunc in modum. Intelligamus punctum (& pertinebit ad ſecundum ordinem) moueri motu naturaliter accelerato ex B in A, lineam verò in orbem ferri motu naturaliter deficiente, quæcunque ſit huius defectus ratio, & ex varia combinatione variari poſſunt; ſed ea quam modo dixi deſcriberetur à graui deſcendente in plano æquatoris, ex hypotheſi quod tellus diurna tantum reuolutione cieretur, ſi ex tanta videlicet altitudine caderet, quanta ad id requireretur, vt ſupra explicuimus; propterea quòd graue ageretur in gyrum non ab interno principio, quaſi redolens naturam totius, ſed potius impulſu extrinſecùs accepto naturaliter deficiente, vtpote mobilis reluctante natura, à qua habet, vt ſe primùm conſtituat ſub minus graui; de hoc tamen ſuo loco.

Linea quam deſcriberet graue deſcendens in plano æquatoris ex hypotheſi qd tellus moueretur, motu tamen ſolo diurno.

Lineæ ſpirales concipi poſſūt deſcripta ſuper alias ſuperficies.

Cæterùm huiuſmodi lineas imaginari quoque licet ſuper alijs ſuperficiebus deſcriptas, prꝛſertim in ſuperficie ſphærica, cylindrica, de quibus aliqua dixit Pappus in Collectionibus Mathematicis.

Infinitæ ſpirales dantur ſicut infinitæ ſectiones conicæ.

Quemadmodum enim dari poſſunt infinitæ parabolæ, infinitæ hyperbolæ, infinitæ ellipſes, & quidem duplici ratione, vt ſuperius innuimus, ita etiam dari poſſunt infinitæ ſpirales; Etenim vt paulo antea dicebamus, ſi punctum A intelligatur deferri per AB motu æquabili, dum interim ſemidiameter illa manente extremo A, reuoluatur ſecundùm extremum B, deſcribens circuli peripheriam BHIC, motu tamen vniformiter accelerato, ita vt ſpatia peracta in ipſa peripheria, ſint in duplicata ratione, ſeu vt quadrata temporum, gignitur alia ſpiralis ab Archimedea, quæ prima, & linearis dicetur; hæc autem de qua loquimur erit ſecunda, & quadratica, quòd ſi ſpatia peracta fuerint ſicut cubi eorum temporum, gignetur altera tertia, quæ dicetur cubica, et ſi fuerint, vt quadrato quadrata temporum orietur quarta, quæ dicetur quadrato quadratica, & ſic in infinitum. Vnde ex varia combinatione ipſorum motuum, variaque determinatione principij quod videlicet ſit aut centrum, aut extremum mobile lineæ rectæ, variæ, diuerſæque ſpirales oriuntur.

Spiralis prima, & linearis. Spiralis quadratica. Spiralis cubica. Spiralis quadrato quadratica.

Quòd ſi punctum per ſemidiametrum moueatur motu naturaliter deficiente, ita vt contrario modo ſpatia peracta ſint, vt quadrata temporum, diameter verò reuoluatur motu æquabili, ſi motus per rectam ſit ab extremo immobili, erit ordinis primi reſpondens alteri ordinis ſecundi cuius initium eſt extremum mobile; vnde dicentur Correlatæ,& ſic de conſimilibus, & quæ à duplici motu naturaliter accelerato, quando ſcilicet ſpatia peracta ſunt, vt quadrata temporum, dicetur Quadratica ex duplici origine, ſic de alijs ſuo modo.

His autem præhabitis, ſupereſt conſiderandum, in his quoque ſibi vendicare locum artificioſam Analyſin, de qua paulo poſt agendum.

Omnemque propoſitionem huiuſmodi eſſe, cùm fuerit ex illo principio deducta quod motum atque tempus concernit quemadmodum ſe habet Pappi Propoſitio, in qua illud

attributum de ſpatio ſpirali demonſtrat, videlicet ſubtriplum eſſe ad circulum, quamuis ipſa demonſtratio vtatur ea ratione quæ eſt inter cylindrum, & conum; ſupponit enim accidens ipſius ſpiralis ex tempore motuque dependens, eodemque modo philoſophandum de conſimilibus.

Interim animaduertamus quod innuimus nēpe de ſpirali antiquo more quem Archimedeum appellant inſtitutam contemplationem Phyſico-Geometricam eſſe, qua admiſſa intra cancellos propriæ Geometriæ, intra eoſdem licebit etiam circulum non diſſimili modo contemplari. Vnde Theorema illud demonſtrare. Si duo vel plures fuerint circuli concentrici, ductæque ſint duæ rectæ à communi centro ad maximi peripheriam, ſingulorum aliorum peripherijs occurrentes, quæ eſt ratio ūnius arcus ab hiſce duabus lineis intercepti ad totam ſuam peripheriam, ita erit alterius arcus ad peripheriam ſuam, & ita de ſingulis. Demonſtratio autem ea erit, quia ſi concipiamus vnam ex illis lineis reuolui circa centrum, quo tempore linea ſua reuolutione percurrit totam circumferentiam maximi circuli, eodem etiam tempore percurrit, & circulorum aliorum circumferentias. Si igitur intelligatur reuolui, quoniam eodem tempore percurruntur integræ circumferentiæ, & motus eſt æquabilis, erit ſpatium ad ſpatium, hoc eſt circumferentia, ad circumferentiam, vt velocitas ad velocitatem, & vt eadem velocitas ad velocitatem, ita arcus vnius circumferentiæ, ad arcum alterius circumferentiæ, qui videlicet eodem tempore percurruntur; & perconſequens, vt arcus ad circumferentiam ſuam, ita alter arcus ad ſuam circumferentiam. Hæc tamen non eſt demonſtrandi ratio candori Geometrico conſentanea, cùm aliter idem Theorema demōnſtrare liceat, viam Regiam calcando Euclideam. Non diſſimiliter igitur generoſa aggreſſione foret ineunda tractatio de ſpiralibus, alijſque lineis oriundis à motu, quia tamen minimum in maximis maiori eſt in honore habendum, quàm quod maximum eſt in minimis, propterea huiuſmodi contemplatio de ſpiralibus, & alijs ſimilibus, non eſt in poſtremis habenda; tentare tamen aliquando non pigebit meliorem viam ad eadem, aliaque ſymptomata demonſtranda de ipſis, inire.

Etiam circulum conſiderari poſſe prout ſpiralis fuit conſiderāda ſpiralis.

Cæterum ad analyſeos formam, itemque ſyntheſeos, redacta demonſtratio theorematis, ſe habentis, aliter ac à Pappo preſtitum fuerit, eſt vt ſequitur.

T H E O R E M A.

Si in ſpiralem vna quidem circumuolutione deſcriptam, à principio ſpiralis rectæ quotlibet cadant, quæ æquales inter ſe ſe angulos contineant, ſe ſe mutuò æqualiter excedent.

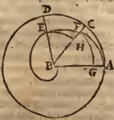
Exemplum XXXII.

Archimedes de ſpiralibus Prop. 12. & Pappus lib. 4. Prop. 20.

Eſto circulus ADC, ſpiralis autem BEFA, ſintque rectæ BA, BFC, BED, quibus contineantur anguli ABC, CBD inter ſe æquales. Dico tanto exceſſu ſuperari BF ab AB, quanto BE ſuperatur ab ipſa BF.

Centro B, interuallo BE deſcribatur arcus EH, & eodem centro, interuallo BF deſcribatur arcus FG.

Reſolutio.



QVoniam exceſſus ipſius AB ſupra BF æqualis eſt exceſſui eiuſdem BF ſupra BE, eſt autem FC exceſſus BA ſupra BF; ergo CF æqualis erit FH, qui eſt exceſſus BF ſupra BE; eſtque circumferentia CA æqualis circumferentiæ DC; ergo vt FC ad FH ita circumferentia CA ad circumferentiam DC, ergo conuertendo, & componendo erit, [a] vt CH ad FC, ita circumferentia ACD ad circumferentiam CA, & conuertendo vt FC ad CH, ita circumferentia CA ad circumferentiam DCA [b] ſed vt BC ad HC, hoc eſt BD, ſeu BA ad DE, ita integra circumferentia ad circumferentiam ACD; ergo per ſubductionem æqualium rationum, circumferentiæ integræ ad circumferentiam DCA, & BC ad HC, erit [c] vt FC ad BC, ita circumferentia CA ad integram circumferentiam, & conuertendo erit, [d] vt BC, hoc eſt BA ad FC, ita integra circumferentia ad circumferentiam CA. Quod ita ſe habet ex natura ipſius lineæ ſpiralis.

a 18. quinti.
b ex natura ſpiralis.
c ex Elem̄tis.
d cor. 4. quinti.

Compo-

Compoſitio.

a 17. quinti. QVoniam eſt vt BA, hoc eſt BC ad FC, ita integra circumferentia ad circumferentiam CA; erit a conuertendo, vt FC ad BC, ita circumferentia CA ad integram circumferentiam. Rurſus quoniam eſt vt BA, hoc eſt BD ad DE, hoc eſt BC ad *β 22. quinti.* HC, ita integra circumferentia ad circumferentiam DCA; ergo ex æquali erit, β vt FC ad *γ 17. quinti.* CH, ita circumferentia CA ad circumferentiam DCA, & conuertendo, γ vt HC ad CF, ita circumferentia DCA, ad circumferentiam, CA, & diuidendo, ac conuertendo, vt FC ad FH, ita circumferentia CA ad circumferentiam DC. Eſt autem circumferentia CA *δ ex conſtruct.* æqualis δ circumferentiæ DC; ergo CF æquabitur FH, ac propterea exceſſus ipſius BA ſupra BF æqualis erit exceſſui eiuſdem BF ſupra BE. Quod oportebat oſtendere.

Hæc demonſtratio ſupponit motum, & tempus.

Hæc igitur reſolutio ſupponit ſpiralis ortum huiuſmodi eſſe, vt recta quædam manente extremo vno ſecundum alium in orbem agatur æquabili motu, & ab immobili extremo punctum deferri ſuper rectam ipſam motu itidem æquabili, ita vt quo tempore perfecerit linea in gyrum acta partem circumferentiæ integræ, punctum quoque delatum per rectam, ipſius rectæ partem confecerit, quæ ad integram lineam eam habeat rationem, quam circumferentiæ pars ad circumferentiam integram, quibus neglectis etiam haud difficillimum foret hoc ſpiralis accidens perſcrutari, cauſamque reddere.

Linea recta ſpiralem tãgit in puncto.

Ex accidentibus, quæ ſpirali contingunt primum erat, quod diximus.

Deinde quòd contactus lineæ rectæ cum ſpirali in puncto fit, quod Archimedes oſtendit Propoſitione decima tertia, demonſtratione ducente ad incommodum.

Aliud ſpiralis accidens.

Et ſi in ſpiralem ex prima reuolutione ortam duæ lineæ incidant ab eius principio, productæque ſint ad circumferentiam vſque primi circuli, eadem eſt ratio incidentium in ſpiralem, quæ eſt arcus circuli medij inter terminum ſpiræ, limiteſque linearum productarum in circumferentia factos, acceptis in antecedentia arcubus à fine ſpiralis, quod Archimedes oſtendit Phyſico-Geometricè; vt de propoſitione decima ſecunda dictum eſt.

Aliud etiam ſpiralis accidens.

Etſi in ſpiralem in ſecunda reuolutione factam lineæ rectæ ceciderint à principio ſpiralis, eadem eſt ratio rectarum ad inuicem, quæ eſt dicti arcus cum tota circuli circumferentia ſimul aſſumpta.

Quod oſtendit Archimedes Propoſitione 15. non ſecus ac demonſtrauit propoſitiones 12. & 14. quæ admittunt analyſin, & ſyntheſin non ſecus ac à nobis factum fuit ſuperius.

Spiralis proprietas, quæ fuit indirectè oſtenſa, directè, & oſtenſiue demonſtratur.

Si ſpiralem ex prima reuolutione ortam recta linea tetigerit, & à contactu recta linea ducta fuerit ad punctum, quod eſt principium ſpiralis, anguli, quos tangens facit cum ducta ſupradicta inæquales ſunt, & quidem qui in antecedentia vergit obtuſus eſt, & qui in conſequentia acutus.

Hanc oſtendit Archimedes Propoſit. 16. ſed demonſtratione ducente ad incommodum.

Hoc idem theorema reſolui, componique poteſt, atque demonſtrari oſtenſiue, ſi circu- *a 3. poſt primi.* lus deſcribatur a centro facto in puncto, quod eſt principium ſpiralis, ſemidiameter verò ſit minor linea prima in principio circulationis; huius enim peripheria, ſpiralem neceſſario ſecabit, nam ob ipſius ſpiralis naturam circuli partes antecedentes cadent intra circulationem ſpiralis, partes verò ſequentes extra ipſam; Spiralis enim radij ad antecedentia erunt maiores ſemidiametro circuli deſcripti, & ad ſequentia erunt minores. Si recta fuerit ducta tangens, & peripheriam circuli, & lineam ſpiralem, cùm igitur extra circulum ſint partes ſpiralis antecedentes, intra verò, ſequentes, recta tangens, neque conueniet cum arcu ſpiralis à puncto interſectionis ad antecedentia, neque cum arcu peripheriæ à puncto interſectionis ad conſequentia, neque cum puncto interſectionis communi, alioquin vtramque curuam ſecaret, cùm tamen vtramque tangere ſupponamus; à puncto quod eſt ſpira- *b pr. poſt. prim.* lis principium ducta ſit b recta ad punctum contactus rectæ cum ipſa peripheria, & cum hac *c 18. tertij.* faciet c angulos rectos; ducta ſit d ab eodem principio ſpiralis, recta ad punctum contactus *d pr. poſt. prim.* *e 16. primi.* rectæ cum ſpirali, cum hac faciet e angulum ad antecedentia obtuſum, vtpote maiorem recto, qualis eſt, qui fit linea ducta a principio ſpiralis ad punctum contactus peripheriæ circuli, cum recta tangente; qui autem deinceps, nimirum ad conſequentia erit minor recto.

Nec diſſimili modo decima ſeptima oſtendetur.

Decimam octauam Archimedes demonſtrauit antiqua methodo per exploſum exceſſum ac defectum; ea verò eſt inſignis Propoſitio, ac celebre Theorema, nempe.

Si ſpiralem ex prima circumuolutione ortam, recta linea tetigerit in termino ſpiræ, à puncto verò quod eſt in principio ſpiræ ducatur quædam ad angulos rectos, ei quæ eſt reuolutionis principium, ducta quidem incident in tangentem, & ipſius, quæ pars media erit inter tangentem, & principium ſpiræ æqualis erit peripheriæ primi circuli.

Alia ſpirali proprietas inſignis.

De hoc tamen agendum in proprio capite, vbi hanc methodum perpendentes, alia ratione hoc idem theorema demonſtrare tentabimus.

Ita pariter de propoſitione decima nona, vbi agitur de ſpirali ex ſecunda reuolutione, ac oſtenditur ſi ſpiralem ſecunda reuolutione ortam in termino tetigerit recta linea, & à principio ſpiræ ducatur aliqua ad angulos rectos lineæ, quæ eſt reuolutionis initium, ipſa coincidet in tangentem, eritque recta media inter tangentem, & principium ſpiræ dupla circumferentiæ ſecundi circuli; ſequentem verò vigeſimam demonſtrat deductione ad impoſſibile, cùm tamen oſtenſiue demonſtrari poſſit, de quo ſuo loco.

Alia proprietas ſpiralis.

Vigeſima prima, & vigeſima ſecunda, & vigeſima tertia, ſunt Problemata, quæ ſequentibus inſeruiunt, propoſitionibus.

Inſignis eſt propoſitio vigeſima quarta, videlicet.

Spatium linea ſpirali in prima reuolutione deſcripta, & recta linea prima in principio circulationis contentum, tertia pars eſt circuli primi.

Alia inſignis proprietas ſpiralis.

Hoc autem Theorema antiqua methodo per exploſum exceſſum, atque defectum oſtendit, de quo propterea ſuo loco; Hìc tantùm adnotabo hoc idem accidens ipſius ſpatij ſpiralis elegantiori fortaſſe ratione, oſtendi poſſe per introſcriptum poligonum circulo, cui poligonum ſpatio ſpirali introſcriptum reſpondebit multitudine triangulorum, in quæ, & illud, & hoc reſoluitur, quæ planè à rectis ductis à centro circuli primæ reuolutionis, atque adeò à principio ſpiralis, efformantur ad eiuſdem circuli peripherias, facientibus ad centrum ipſum angulos æquales, qui cum fuerint octo, naſcentur ſectores, ductiſque rectis ſubtendentibus arcus, quibus prædicti anguli ad centrum inſiſtunt, octo prouenient triangula, inter ſe æqualia atque ſimilia, e quibus octogonum componitur, eùmque lineæ illæ à centro ductæ perimetro ſpiralis occurrant ſpatium ipſum ſpirale in totidem ſectores diuident, ductiſque ſubtendentibus arcus ipſius ſpiralis, octo etiam conſurgunt triangula è quibus componitur poligonum ſpirale, hoc eſt ſpatium ſpirali inſcriptum reſpondens poligono, quod circulo inſcriptum eſt, & cum eo comparandum, quia tamen ad hoc eſt opus Arithmetica progreſſione, ob id hæc ſilentio hic prætereibo, eadem de re verba facturus cum de ipſius progreſſionis vſu, ſermonem inſtituero.

Hæc eadem ratio ſubtripla ſpatij ſpiralis ad circulum primę reuolutionis eleganter etiam oſtenditur à Pappo libro quarto Prop. 21. per analogiam, quæ ſpecialis eſt methodus, ſi namque demonſtrauerimus ſic ſe habere circulum reuolutionis ad ſpatium ſpirale, quemadmodum cylindrus ad conum eiuſdem altitudinis, atque baſeos, perſpecta quidem nobis erit ratio tripla circuli prædicti ad ſpatium ſpirale, cùm iam exploratum ſit, vel via antiqua deducente ad inconueniens per exploſum exceſſum atque defectum, vt habetur apud Euclidem, cylindrum coni triplum eſſe cùm fuerit eiuſdem baſeos, ac altitudinis Prop. 10. lib. 2. Vel recenti per indiuiſibilia, Si enim oſtenſum fuerit omnes figuras parallelogrammi ad omnes figuras ſimiles cuiuſuis triangulorum per diametrum eiuſdem parallelogrammi conſtitutorum eſſe in ratione tripla, vno latere parallelogrammi communi regula exiſtente, conſtabit illicò, ne dum omne priſma pyramidis, ſed quemcumque cylindricum cuiuſcunque conici in eadem cum eo baſi, & altitudine exiſtenti eſſe triplum. Solertia autem Analyſtæ in eo poſita eſt, vt ſeligat analogiam opportunam, videlicet reſpiciendo ad rationem eorum, quæ ad propoſitum conducant, vt in re, de qua agimus contingit, maxime accommodatam eſſe rationem cylindri ad conum, ſiquidem per circumſcriptos ſectores, & introſcriptos ſpatio ſpirali, inſtituimus comparationem hunc in modum. Vt totus circulus ad omnes figuras ex ſectoribus inſcriptas lineæ ſpirali, ita eſt cylindrus à parallelogrammo circa propoſitum axem ad omnes figuras ex cylindris ipſi cono, qui fit à triangulo, quod eſt dimidium ipſius parallelogrammi circa eundem axem, inſcriptus. Deinde rurſus vt circulus, ad omnes figuras ex ſectoribus circumſcriptas lineæ ſpirali, ita eſt cylindrus ad omnes figuras ex cylindris eidem cono circumſcriptas, atque adeo, vt cylin-

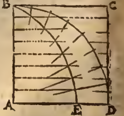
In quo præcipuè Analyſtæ ſolertia eluceat.

drus

drus ad conum, ita circulus ad ſpatium ſpirale. Ad hæc igitur oportet reſpicere vti dicebam, nam alioquin non deeſſet alia ſimilis ratio tripla, vt ex. g. ſi conſideremus aliqua in genere magnitudinis, quæ huiuſmodi rationem habere poſſunt, quemadmodum duplum triangulum circumſcriptum circulo, plus triangulo inſcripto ad hexagonum eidem circulo inſcriptum, plus triangulo inſcripto, & triangulum inſcriptum, conſtituunt progreſſionem geometricam in ratione tripla, ſed inde haud liceret ſeligere duos terminos, vel ſcilicet hexagonum plus triangulo inſcripto & triãgulum inſcriptum, vel duplum triangulũ circumſcriptum cũ inſcripto & hexagonum plus triangulo inſcripto; eſt enim eadem quidem ratio, quæ cylindri ad conum, tamẽ inde non licet propoſitum haurire; imò & Cyclois tripla eſt circuli ſui genitoris: vnde hìc etiam intercedit ratio, quæ inter cylindrum, & conum; ſed ad inſtitutum minimè idonea, de his tamen inferius opportuniori loco differendum.

Fit reditus ad ſpirales. Redeuntes autem ad ſpirales, negari non poteſt quin ea ſit amœniſſima contemplatio, & ad magna conducens, ſi namque adinuenerimus modum quo ducenda ſit tangens ipſius, videlicet qua ratione ducere valeamus tangentẽ lineam ſpiralem ex prima circumuolutione ortam in termino ſpiræ, erit adinuenta ratio inter ſemidiametrum circuli, & peripheriam eiuſdem, ac propterea exhiberi poterit recta æqualis ipſimet peripheriæ. Quamuis autem hoc ſit magnificiendum, tamen tantum non eſt ei deferendum, vt aliqui putant; propterea quod hoc idem aſſequemur ope quadratricis; quod ſi beneficio illius itidem quadratum circulo exhibemus æquale, quadratricis præſidio hoc idem etiam aſſequemur; nec in deſcriptione illius plus quidquam adinuenire licet, vnde de ea potius, quàm de hac gloriari debeamus; vtraque enim originem ducit à puncto ſubeunte duplicem motum; Nec difficilius eſt intelligere punctum moueri duplici motu æquabili, vnde quadratix procreatur, quàm concipere punctum duplici motu æquabili deferri in geneſi ipſius ſpiralis. Præclarum tamen foret opus ducere illam tangentem, de quo proprio loco plura dicemus. Non enim hìc in animo eſt niſi rediuiuam facere methodum antiquam pro reſolutione Theorematum, præceptaq; tradere in gratiam eius, eademque aptare cuicunque methodo peculiari, vt deinceps planum fiet; Ac propterea theoremata plurima cùm ad conicas ſectiones, tùm ad ſpirales, aliaſque lineas pertinentia ad proprium locum remittimus: vnde hìc non immorabimur in demonſtrandis proprietatibus, & ſectionum, & ſpiralium infinitarum, quarum ſuperius meminimus. Illud ſolum adijciam prout theorematis natura expoſcit adhibendam eſſe methodum opportunam, peculiaremque accerſita ſemper antiqua reſolutionis methodo à nobis deſcripta, velut vniuerſaliſſima, quæ per cæteras omnes vagatur; Quamobrem ſi fuerit opus indiuiſibilium ratione, hæc adhibenda eſt, ita vt ſi theorema fuerit oblatum, aduocatis indiuiſibilibus antiquam reſolutionis viam calcantes ei occurramus; alioquin, quæ nos meditando ſyntheticè adinuenimus, & ex theorematibus iam demõſtratis, velut è fontibus innumeras veritates deriuare poterimus; quod hìc innuiſſe non fuit prorſus alienum ab inſtituto; eadem tamen de re nobis de indiuiſibilium vſu ſermonem habentibus, vberior eſt reditura tractatio.

Linea quadratrix, & eius origo antiqua phyſicogeometrica. Succedit linea ab Antiquis excogitata, quæ ab accidente ſibi proprio nomenclaturam ſortiens τετραγωνίζουσα dicta fuit, nempe linea quadrans, ſiue quadratrix, quam ad circuli quadraturam Dinoſtratus, & Nicomedes aſſumpſit. Eius geneſis adeo vulgata eſt, vt non videretur opus in eius explicationem incumbere; niſi in recenſendis lineis defectus notam incurrere videremur.



Eſto quadratum ABCD, in quo deſcribatur quadrans BD, intelligatur verò ſemidiameter AB æquabili motu ferri in orbem circa centrum A, percurrendo videlicet æqualibus temporibus æqualia ſpatia arcus BD; interim verò motu itidem æquabili ſibimet parallelum feratur latus BC verſus oppoſitum latus AD, ita vt quo tempore punctum B circumferentiam BD vniformi ſemper motu percurrit, atque peruenit ad D, eodem etiam latus BC perueniat ad latus AD. Semidiameter autem in orbem acta per circumferentiam BD, & recta BC deorſum lata continuo ſe ſe ſecabunt in punctis, per quæ linea quadratrix BE incedet.

Verùm

Verùm non-immeritò Sperus ille apud Pappum in huius lineæ inuentores inuehebatur; tùm quia, ad quod videtur vtilis eſſe, illud in ſuppoſitione aſſumit; non enim fieri poſſe videtur, vt duo puncta ab ipſo B principium motus capientia, hoc quidem in recta linea ad A, illud verò in circumferentia ad D, in æquali tempore ſimul reſtituantur, niſi prius proportio rectę lineæ AB ad circumferentiam BD cognita ſit; in hac enim proportione, & motuum velocitates eſſe neceſſe eſt. Nec ſatis intelligi poteſt, quo pacto arbitrentur ea ſimul reſtitui, velocitatibus temerè, ac ſine vlla ratione vtentia, niſi quiſpiam exiſtimet id caſu euenire; quod rationi diſſentaneum videtur; tùm quia terminus, quo ipſi vtuntur ad lineæ deſcriptionem, nempe quo loco linea ipſa ſecet rectam AD, non inuenitur; nam quando rectæ quidem CB, BA ſimul motæ reſtituuntur, congruunt rectæ lineæ AD, neque ſe ſe amplius ſecant, ceſſante ſectione, antequam ipſi AD congruant, quæ quidem ſectio factus eſt lineæ terminus, in quo cum ipſa AD linea recta conuenit, niſi quiſpiam intelligat productam lineam ſicuti lineas rectas poſuimus vſque ad ipſam AD, quod ex eorum principijs apud Pappum illi non ſequi aſſerebat, & quamuis, vtcumque ſumeretur punctum E deberet præcedere circumferentiæ proportio ad rectam lineam; eâ enim non data, illud fieri nequaquam poſſe videtur. *Hæc linea quibuſdam non arriſit.*

Geometricè autem comparabitur ortus huius lineæ, non minus ac ſectionum conicarum, & vt etiam de Spirali dicebamus. *Geneſis quadratricis Geometrica.*

Eſto igitur quadratum ABCD, in quo intelligatur deſcriptus quadrantis arcus BD, neglectis igitur motibus, nullaque habita ratione temporis, quoniam illi duo motus vniformes, quorum vnus fit per circumferentiam BD, alter verò per lineas rectas AB, CD, effici non poſſunt, niſi habita proportione circularis lineæ ad lineam rectam, hæc autem cum ignota ſit, & potius per hanc lineam quadratricem, inueſtiganda. *Explicatio.*

Arcus propterea quadrantis BD in quotuis partes æquales intelligatur diuiſus, & vtrunque latus AB, CD in totidem partes pariter diuiſum eſſe concipiatur inter ſe æquales, & quò plures extiterint diuiſiones, eò felicius res ipſa ſuccedet; mox verò bina puncta linearum æqualiter diſtantia à latere BC, vel AD, lineis rectis coniungantur, atque ex centro A aliæ rectæ ad ſingula diuiſionum puncta quadrantis BD, ducantur; nam vbi hæ rectæ priores interſecuerint, prima primam, ſecunda ſecundam &c. per ea puncta Quadratrix linea congruenter ducenda erit, atque hæc erit Quadratrix.

Quoniam verò punctum in AD, videlicet punctum E, vbi hæc linea terminat, haberi non poteſt per interſectionem prædictarum linearum, ob id expedit aliud quadratum priori adhærens deſcribere, vel ſaltem rectangulum, quorum commune latus ſit AD, & eadem, quæ in ſuperiori perficere; Et quidem ſi fuerit quadratum in eo quadrantem deſcribere, vel ſi rectangulum quadrantis portionem, factaque diuiſione arcuum, vt in ſuperiori quadrante ad ſectionum puncta ex A ducere &c. nam ſi permittitur à puncto ad punctum interſectionum lineam ducere, quæ portio ſit quadratricis; ſic permittendum erit, vt puncta interſectionum, in vtroque quadrante propè latus AD, linea connectantur, quæ ab ipſo latere AB in puncto quidem E biſſecta erit; quamobrem compertum erit extremum ipſius lineæ Quadratricis.

Celebris hęc linea eſt ob præſtantiſſimos vſus, habetque ſingularia ſymptomata præſertim.

Si ex centro per quæuis ipſius puncta vſque ad circumferentiam quadrantis rectæ ducantur, ex eodem centro deſcripti, & ex iiſdem punctis ad baſim demittantur perpendiculares, aliæque rectæ eidem baſi parallelæ, erunt arcus quadrantis inter ſemidiametros interiecti perpendicularibus, vel ſegmentis ſemidiametri inter parallelas poſitis, proportionales. Inſuper

Si quadrantis, & Quadratricis idem ſit centrum; erunt arcus Quadratricis; ſemidiameter, & baſis Quadratricis continuè proportionales.

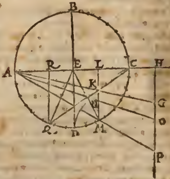
Ex his, alijſque ſimilibus veritates deducuntur, theoremataque condi poſſunt.

De vſu autem huius lineæ verba faciemus in ſecundo libro de Problematum effectionibus agentes; Conducit enim eius natura ad præſtantiſſima quædam in Arte, à quibus nunc ſuperſedendum, cùm ibi, veluti in opportuniori loco, eadem hac de re rediturus ſit ſermo. Interim non pigebit aduertere geneſin eius Geometricam ab Antiquis creditam fuiſſe per locos, qui ad ſuperficies dicuntur, cùm alioquin per motum potius mechanicus ortus exi- *De quadratricis vſu poſtmodum diſſerendum.*

ſtimaretur. Huius igitur, de qua loquimur, lineæ, ortu magis mechanico prætermiſſo, eundem Geometricè reſoluendum ſumpſerunt per locos ad ſuperficies: vnde in quadrante ducta recta à centro ad peripheriam, & in recta ducta accepto puncto, ex hoc ductam intellexerunt pendicularem ad baſim ipſius quadrantis, quæ ad arcum interceptum rationem habeat, quam eiuſdem quadrantis radius ad circumferentiam, punctum illud in recta à centro ad circumferentiam, ex quo quidem puncto perpendicularis cadit ſupra baſim quadrantis, ad lineam Quadratricem pertinere demonſtrarunt: Vnde à circumferentia quadrantis recti cylindri ſuperficiem imaginati ſunt, in qua lineam ſpiralem deſcriptam intellexerunt, atque hunc in modum, vt videre licet apud Pappum lib. 4. Prop. 28. hunc ortum per locos ſupradictos ad ſuperficies, reſoluere tentarunt, quemadmodum etiam illud idem per lineam ſpiralem in plano deſcriptam reſoluere ſimili ratione aggreſſi ſunt; in his tamen peculiaris non eſt methodus, niſi fortè quiſpiam ſpatium ipſum conſiderandum aſſumeret, quod duabus rectis angulum rectum conſtituentibus, & linea Quadratrice comprehenditur; vbique tamen antiqua illa reſoluendi ratio locum ſibi vendicat, qua propterea eius Geometrica geneſi ſuppoſita, affectiones, ac attributa inde prodeuntia demonſtrari poſſunt.

Ciſſoides linea conſideratu digna. Ciſſoides.

Eſt etiam commemoratu digniſſima linea Ciſſoides dicta, quam Diocli adſcripſerunt.



Eſto circulus ABCD, cuius centrum E, in quo diametri AC, BD ſe ſe mutuò ſecent ad rectos angulos. At verò in quadrante CD ſumptis quotcunque punctis parum inter ſe diſtantibus, atque adeò diuiſa circumferentia DC in partes æquales: in totidem quoque partes intelligantur diuiſæ circumferentiæ AD, BC, bina autem puncta quadrantum BC, DC æquidiſtantia à punctis B, D, intelligantur iuncta rectis, quæ, & ipſi diametro BD, & inter ſe parallelæ erunt; mox verò ex puncto C rectæ ad ſingula puncta quadrantis AD ductæ intelligantur, quæ iam ductas parallelas interſecabunt; per interſectionum puncta, ciſſoides ipſa CD incedit; Nihil autem obſtat, quin extra circulum continuetur.

Præcipuus eius vſus ad indagandas duas medias continuè proportionales inter duas datas.

Huius autem præclara ſymptomata ſunt, inter quæ præcipuum illud, quod eius beneficio duæ mediæ inter duas datas continuè proportionales reperiantur in continua ratione. Protracta enim diametro AC ad partes C, ſi opus fuerit; idem enim eueniet accepto puncto inter AC, in eaque accepto puncto quocunque H, in quo cum ipſa AH rectos faciat angulos recta PH, ducaturque quæcunque AG ſecans ciſſoidem in K, per quod ducatur LM parallela ipſi BD, factaque LN, quæ ſit æqualis ipſi LC, per N acta ſit AO, hoc autem ſibi vendicat huius lineæ natura, & inde conſequentia, vt AH, HP, HO, HG, ſint in continua ratione; propterea quod AL, LM, LN, LK, proportionales iam ſupradictis ſunt in continua ratione; Ex eo enim quod ipſe præmiſit lemmate, id neceſſariò conſequitur, nam ſi ex C ducatur recta per K, occurret arcui AD in puncto Q, quod tantum diſtabit à puncto D, quantum ab eodem D diſtat punctum M; hoc enim poſtulat ipſius ciſſoidis DKC natura, ductaque QR perpendiculari ipſi AC, facile conſtat RE æqualem eſſe EL, & AR æqualem eſſe LC; ductis enim QE, ME, angulus REQ æquabitur angulo LEM, ob æquales arcus AQ, MC, & anguli ad R, & L ſunt recti, vnde æquales, & latera EQ, EM ſunt æqualia, ergo latus RQ æquabitur lateri LM, & latus RE æquabitur lateri EL, quibus ſublatis ex æqualibus AE, EC, remanebunt AR, LC, æquales; addita communi RL, erit AL æqualis RC, ſed RQ æqualis eſt LM; ergo vt AL, ad LM, ita CR, ad RQ, ſed vt CR ad RQ, ita CL ad LK, & vt AL ad LM ita ML ad LC; quare vt ML ad LC, ita LC ad LK, atque adeò, vt AL ad LM, ita ML ad LC, & vt ML ad LC, ita LC ad LK; ſed LN facta eſt æqualis LC; ergo AL, LM, LN, LK, erunt in continua ratione: vnde etiam AH, HP, HO, HG, erunt in continua ratione.

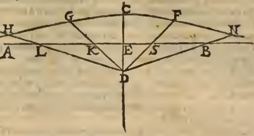
Huius quoque lineæ vſus in Geometricis effectionibus in ſequentibus deprehendetur, quam ob cauſam hic eius naturam placuit explicare.

Sequi-

Sequitur Conchoides Nicomedi adſcripta, cuius indoles, atque natura ea eſt.

Natura Conchilis explicatur. Conchiles.

Sit recta quæpiam AB, & ad eam perpendicularis CD mox autem infra E quouis accepto puncto D, quod lineæ polum appellant, & ſupra E quouis accepto puncto C, ſi ex puncto D plurimæ ducantur lineæ parùm inter ſe diſtantes, ex quarum ſingulis abſcindantur portiones rectæ EC vt SF, BN, KG, LH &c. æquales, initio facto ſemper à recta AB, extrema verò harum portionum puncta per inflexam lineam coniungantur: hæc ipſa erit linea Conchilis.



Huiuſmodi autem linea nunquam cum recta AB conueniet, licet vtraque in infinitum producatur, cùm ipſa tranſire debeat per puncta, quæ ſunt ſemper ſuper ipſam AB.

Huius lineæ proprietates.

Huius inſignis proprietas eſt duplex, quarum prima eſt.

Quodlibet punctum eius à puncto C diuerſum, minus diſtat à recta AB quàm punctum C; aliorum verò punctorum, quod remotius eſt à C minus diſtat ab eadem recta AB, quàm quod minus remotum eſt.

Secunda quamuis ConchilisCN nunquam conueniat cum recta AB, tamen cùm qualibet alia recta, etiam ipſi EB propinquiſſima conuenit.

Huius lineæ beneficio præclara ſoluuntur Problemata, præſertim illud.

Beneficio huius lineæ præclara Problemata ſoluuntur.

Dato quouis angulo rectilineo, puncto extra lineas datum angulum comprehendentes, ab illo puncto educere rectam ſecantem, rectas continentes angulum datum, ita vt eius portio inter illas rectas intercepta æqualis ſit datæ rectæ.

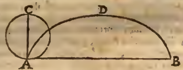
Cuius beneficio deinde inter duas datas rectas lineas, duæ mediæ in continuâ ratione comperiuntur. De huius autem lineæ vſu, quatenus videlicet ad effectionem Geometricam conducere poſſit de reſolutione Problematum tractantes, diſſeremus.

Huius etiam auxilio duæ mediæ in continua ratione reperiuntur.

E recentioribus noua eſt linea elapſis annis adinuenta, quæ Cyclois nuncupata fuit, cuius ortus hic eſt.

Cycloidis lineæ ortus, atque natura.

Intelligatur recta quædam AB, ſuper quam circulus, cuius diameter AC, qui ſua peripheria tangat prædictam AB in puncto A, concipiatur hoc verò in ipſius circuli peripheria veluti fixum: Deinde intelligatur ſuper manente recta AB, circulum ipſum AC moueri motu circulari ſimul, & progreſſiuo ad partes B, ea lege videlicet, vt ſubinde aliquo ſui puncto rectam AB ſemper contingat, quouſque punctum illud fixum iterum ad contactum reuertatur, puta in B; Perſpicuum eſt futurum, vt punctum illud fixum in peripheria circuli rotantis AC aliquam lineam deſcribat, cuiuſmodi foret linea flexuoſa ADB; quæ primo ſurgat à recta AB, deinde culminet in D, atque tandem prona deſcendat verſus punctum B.



Manifeſtum eſt ex ortu ipſius lineæ circulum prædictum dici debere Genitorem, rectam AB, baſim, & ſpatium AD BA ſpatium cycloidale, recta autem AB baſis circuli genitoris peripheriæ æqualis eſt, vt patet ex commenſuratione ipſius rectæ cum peripheria.

Genitor cycloidis, eiuſdē baſis.

Iam autem induſtrioſè fuit adinuenta ratio ſpatij cycloidalis ad circulum genitorem, cùmque circulus ſit triplus ſpatij ſpiralis primæ reuolutionis, ſit vt circulus ſit medio loco proportionalis inter ſpatium cycloidale, & ſpirale iam dictum.

Huius autem lineæ, ſpatijque affectiones per indiuiſibilium methodum præcipuè ſunt inquirendæ, quamuis etiam alia ratione comparari queant, ſaltem nonnullæ ex ipſis præcipuè accerſitis motu, & tempore. Alia autem dicitur Cyclois primaria, quam deſcripſimus, alia eſt protracta; & alia abbreuiata, & quidem harum vſus non eſt paruifaciendus

cum earum præſidio, Geometricæ quædam effectiones magni momenti perfici queant.

Nec lineæ commemoratæ hucuſque tantummodo ſuppeditāt argumentum Theorematicum, ſed etiam Problematicum, vnde & tangentes ducuntur, & quadraturæ exhibentur, & alia circa ipſas perficiuntur, de quibus ſuis locis erit à nobis agendum.

Epicycloïs linea nouiter, excogitata.

Aliquando autem nos aliam meditati ſumus Cycloidem ex hypotheſi, quòd circulus reuolueretur ſupra circumferentiam alterius circuli, ſibi æqualis; vnde oritur linea quam Epicycloidem appellandam exiſtimauimus, cuius non obuia ſymptomata ſunt, habent tamen quædam, de quibus operæ eſt pretium eſſe ſollicitum.

Ex interſectionibus variarum ſuperficierum, variæ quoque emergunt lineæ.

Aliæ quoque lineæ orientur ex interſectionibus ſuperficierum cum ſuperficiebus, Vt ſi ſuperficies ſphærica occurrat cylindricæ, vel conicæ, vel cylindrica cylindricæ, vel eandem perforans, vel excipiens aliqua ſui parte, alia non excipiens, vel occurrens conicę eamque peruadens, ſecundùm variam axium poſitionem, ſectiones lineæ ſunt, de quibus aliqua ratio haberi poteſt.

Immò intelligi poteſt facta quædam depreſſio vniformis in Circulo, in Ellipſi &c., vt remanentibus duobus extremis diametri in eo, quo prius erant plano, ordinatim depreſſæ ſint, remotiores quidem magis ab illis extremis, viciniores minus, ita vt ordinatim ipſæ rectæ euadant inflexæ.

Solida ex reuolutione, etc.

Sed & reuolutione planarum figurarum ſolida fiunt, facta reuolutione circa aliquod latus, veluti circa axem; nam præter Sphæram factam ex reuolutione ſemicirculi circa diametrum immotam, præter Conum factum ex reuolutione trianguli rectanguli circa latus vnum è duobus conſtituentibus angulum rectum. Præter Cylindrum factum ex reuolutione rectanguli circa vnum è lateribus. Alia quoque ſolida fiunt, nam polygonum regulare inſcriptum circulo, intelligatur reuolui, vel circa rectam à centro perpendiculariter ductam ad latus, vel circa rectam à centro ad angulum, vel polygonum erit habens latera numero paria, vel imparia, vel erit polygonum circumſcriptum circulo, varia, diuerſaque hinc ſolida emergunt, de quorum contemplatione optimè meritus eſt Torricellius, & in quibus Analyſta poteſt ſuam interponere induſtriam; quia tamen hæc, vt plurimum fuerunt demonſtrata antiqua illa methodo per exploſum exceſſum, vel defectum; de his propterea in proprio capite loquemur.

Cylindro parabolicum.

Solidum cylindri hyperbolicum, &c.

Et ſi lubet imaginari ſolida; poſſumus concipere quidem in plano figuram quamcunque deſcriptam v. g. Parabolen; quædam autem ſit recta linea, huiuſmodi plano inſiſtens ad rectos angulos, vel etiam inclinata ita vt ſibimet ſemper parallela incedens abradat perimetrum ſubiectæ figuræ, donec redeat vnde cæperat moueri, & orietur ſolidum, quod non inconſulto Cylindrico parabolicũ diceretur; ita pariter fiet Cylindrico hyperbolicum ex ſubiecta hyperbole; Cylindrico ellipticum, ex ſubiecta ellipſi, & ex ſubiecta ſpirali primaria ſolidum efformatur, Cylindrico-ſpirale iam ſupra commemoratum. Plana autem ſi illa ſecuerint ſolida, gignent communes ſectiones pro vario occurſu; Num autem illæ, quæ orirentur ex ſectione plani baſi non æquidiſtantis (nam ſi æquidiſtans eſſet communis ſectio eadem foret ac baſis) aliquam peculiarem conſiderationem mereantur, inferius explicabo. Et inter reliqua, quæ circa ſupra commemoratas lineas, figuraſque cùm planas, tum ſolidas, occurrit ſummoperè conſiderandum grauitatis centrum, cuius contemplatio tanti, quanti vnaquæque totius Matheſeos pars, fieri debet.

Vniuerſalis methodus reſolutiua in omnibus adhiberi poteſt, plerumq; tamen addenda eſt vna vel altera peculiaris.

Cæterum etſi in omnibus vniuerſalis illa reſoluendi methodus adhiberi poſſit, ſola tamen in omnibus non ſufficit; ſed; plerunque iuxta rei ſubiectæ rationem, particularis, atque peculiaris addenda eſt; Ita plane contingit, cùm nos inquirendas ſuſcipimus pluramas affectiones, quæ ſine indiuiſibilium vſu demonſtrari non poſſunt. Nec diſſimiliter in alijs, quorum ſymptomata inquirimus, quæ peculiari aliqua indigent methodo, vt e.g. ſe habet vſus centri grauitatis &c. de quibus in ſequentibus diſſerendum.

Duci etiam intellexerunt iuniores planum in planum, decernentes planum in planum ductum dici corporis cuiuſcunque efformationem ex duabus ſuperficiebus eandem habentibus, aut æqualem baſim, ortam, & de his quoque inſtituta fuit tractatio non infęcunda. Et quoniam campus hìc adeo ferax eſt vt quibuſcunque animo conceptis ſemper alia ſuperſint: vnde nec vno auulſo deficiat alter conſiderationis modus; propterea liberum cuique eſt ſua perſpicientia illum percurrere, & ſedulo perquirendo veritates adipiſci; illud tamen cuique commendatum velim, vt omnes ingenij quidem neruos intendat, in contem-

contemplationem eorum, quæ Diuina manu fuerunt elaborata, atque adeo omni ſtudio contendat naturæ theſauros recludere, ad id accerſita quantum fieri poteſt Matheſi, potius quàm incumbere in meditationem eorum, quæ rectè dixeris delirantium ſomnia, quæque figmenta noſtræ mentis cum ſint, exprobant nobis ineptiam, quòd cùm tot, tantaque ſint præclariſſimâ naturæ opera, de quorum notitia quiſque ſollicitus eſſe deberet, his neglectis, quæ verè ſunt, ea quæ non ſunt inquirat.

Oſtendit Archimedes libro primo de Sphæra, & Cylindro, ſphæram eſſe quadruplam ipſius coni, cuius baſis eſt circulus maximus eiuſdem ſphæræ, altitudo verò eſt radius, ſiue ſemidiameter ipſius: vnde in eo quod adiungit Manifeſto, colligit tanquam exploratum, cylindrum, cuius altitudo eſt ſphæræ diameter, baſis verò circulus maximus eiuſdem ſphæræ, ad ſphæram ipſam eſſe in ratione ſeſquialtera, eandemque rationem habere ſuperficiem cylindricam, vnà cum baſibus ad ſphæricam ſuperficiem.

Verùm in ſua demonſtratione proceſſit antiqua illa methodo per exploſum exceſſum, atque defectum ad incommodum conducentem. Videamus nunc qua ratione illud idem oſtenſiuè Analyticè procedendo, demonſtrare valeamus. Eſto igitur.

THEOREMA.

Exemplum XXXIII. Hoc Theorema quod ab Archimede fuit demonſtratum in 1. lib. de Sphæra & Cylindro, ab Auctore longe aliter oſtenditur, & quidem oſtenſiuè.

Cylindrus, cuius altitudo eſt ſphæræ diameter, baſis verò eſt circulus maximus eiuſdem ſphæræ, ad ſphæram ipſam eſt in ratione ſeſquialtera.

Reſolutio.

Quoniam igitur cylindrus, cuius altitudo eſt ſphæræ diameter, baſis autem circulus maximus eiuſdem ſphæræ, eſt ad ſphæram ipſam in ratione ſeſquialtera, etiam & cylindrus, cuius altitudo eſt ſemidiameter ſphæræ, baſis verò idem circulus maximus, erit ad hemiſphærium in eadem ratione ſeſquialtera; quare cylindrus, cuius altitudo eſt ſemidiameter ſphæræ, baſis circulus maximus eiuſdem ſphæræ ad exceſſum quo ſuperat hemiſphærium, erit in ratione tripla; ſed idem cylindrus ad conum eiuſdem altitudinis, & eiuſdem baſeos, eſt in eadem ratione tripla; ergo exceſſus prædicti cylindri eiuſdem altitudinis, ac baſeos cum hemiſphærio ſupra ipſum hemiſphærium æquabitur cono, qui quidem eiuſdem eſt altitudinis, eiuſdemque baſeos cum ipſomet cylindro. At verò conus, cuius vertex eſt in centro ſphæræ, altitudo eſt ſemidiameter, & baſis eſt circulus maximus eiuſdem, habet eandem altitudinem cum cylindro, eandemque baſim; ergo exceſſus prædicti cylindri æqualis erit huiuſmodi cono cuius vertex eſt in centro ſphęrę, altitudo eſt ſemidiameter, & baſis eſt circulus maximus. Quod ita ſe habet, vt ab alijs demonſtratum fuit, & à nobis demonſtrabitur ſuo loco.

Compoſitio.

Quoniam igitur cylindri habentis pro baſi circulum maximum ſphæræ, & pro altitudine ſemidiametrum eiuſdem, exceſſus ſupra hemiſphærium, æqualis eſt cono, cuius vertex eſt in centro ſphæræ, altitudo ſemidiameter, & baſis eſt circulus maximus ipſius; conus autem, cuius vertex eſt in centro ſphæræ, altitudo ſemidiameter, & baſis eſt circulus maximus eiuſdem, eandem habet altitudinem cum cylindro, eandemque baſim; ergo prædicti cylindri, qui habet pro baſi circulum maximum ſphæræ, & pro altitudine ſemidiametrum eiuſdem, exceſſus ſupra ipſum hemiſphærium æquabitur cono, qui eiuſdem eſt altitudinis, eiuſdemque baſeos cum ipſo cylindro; ſed idem cylindrus ad conum eiuſdem altitudinis, eiuſdemq; baſeos eſt in ratione tripla; ergo cylindrus, cuius altitudo eſt ſemidiameter ſphæræ, baſis verò circulus maximus eiuſdem ſphæræ, ad exceſſum, quo ſuperat hemiſphærium, erit in ratione tripla; ergo cylindrus, cuius altitudo eſt ſemidiameter ſphæræ, baſis verò idem circulus maximus, erit ad hemiſphærium in ratione ſeſquialtera; ergo cylindrus, cuius altitudo eſt ſphæræ diameter, baſis autem circulus maximus eiuſdem ſphæræ, erit ad ſphæram ipſam in eadem ratione ſeſquialtera. Quod oportebat oſtendere.

Hic

Hic opportunum videretur aliqua alia exempla Theorematum ad ſolida ſpectantium in medium afferre; quia tamen in eorum analyſi ſemper quædam ſpecialis inuoluitur methodus; propterea iuuabit aliqua alia exempla in proprijs locis tractare, vbi ſcilicet de ipſis methodis particularibus ſermo futurus eſt.

DE EXERCITIO ANALYTICO EXERCENDO

In Reſolutionibus, atque Compoſitionibus Theorematum Ad cæteras partes Metheſeos pertinentium.

CAP. IV.

Ex Arithmeticis exempla deſumuntur.

TAmetſi ex Veterum monumentis nobis non innotuerit huius Artis vſum in alijs Matheſeos partibus à Geometria, extitiſſe, tamen non adeo Geometriæ proprium cēſendus vt alijs quoque eiuſdem ordinis Diſciplinis aptari nequeat, ſiquidem omnibus, quarum ſunt principia cauſæ, & elementa illud quidem commune eſt, ſcilicet Analyſin inſtituere, vt in prima reſoluatur principia artificioſè id, quod poſitum eſt in quæſtione; vt inde per regreſſum in propoſiti deprehenſionem progreſſio fiat; quod conijcere licebit experiendo huius artis induſtriam in cæteris Matheſeos partibus, è quibus primò ſe ſe Arithmetica offert, cuius eſto.

THEOREMA.

Exemplum. XXXIV.

Differentia laterum duorum quadratorum ducta in quodlibet latus, facit differentiam inter quadratum prædicto lateri reſpondens, mediumque proportionalem inter ipſos numeros quadratos.

Sint numeri quadrati A, C quorum latera ſint D, F, & inter A, C medio ſit loco proportionalis B; differentia verò inter ipſos D, & F eſto E. Dico productum ex D in E æqualem eſſe differentiæ inter A & B; atque productum ex E in F æqualem eſſe differentiæ inter B, & C.

Reſolutio.

QVoniam differentia inter A, & B, eſt productus ex D in E; ergo A; vnà cum producto ex D in E æquabitur B; ſed productus ex D in D eſt A; ergo productus ex D in D, & ex D in E, æquabitur B, ſed productus [a] ex D in F eſt B; ergo productus ex D in D, & ex D in E, æquabitur producto ex D in F; ergo D plus E æquabitur F. Quod ita ſe habet; eſt enim E differentia inter D, & F.

A	B	C
9	21	49
D	E	F
3	4	7

a ex elementis.

Rurſus quoniam differentia inter B, & C, eſt productus ex E in F; ergo productus ex E in F, vnà cum B æquabitur C; ſed productus [b] ex D in F æquatur B; ergo productus ex E in F, vnà cum producto ex D in F æquabitur C; ſed productus ex F in F eſt C; ergo productus ex E in F, vnà cum producto ex D in F æquabitur producto ex F in F; Quod ita ſe habet: eſt enim E differentia inter D, & F.

b ex elementis.

Compoſitio.

QVoniam enim E eſt differentia inter D, & F, erit D plus E æqualis F; ergo productus ex D in D, & ex D in E æquabitur producto ex D in F; ſed productus ex D in F eſt B: ergo productus ex D in D, & ex D in E æquabitur B, ſed productus ex D in D eſt A, ergo A, vnà cum producto ex D in E æquabitur B; ergo differentia inter A, & B erit productus ex D in E.

Non diſſimiliter ita ratiocinandum. Quia E eſt differentia inter D, & F, propterea pro-

productus

ductus ex E in F, vnà cum producto ex D in F, æquabitur producto ex F in F; ſed productus ex F in F eſt C; ergo productus ex E in F, vnà cum producto ex D in F æquabitur C. Sed productus ex D in F eſt B; ergo B, vnà cùm producto ex E in F æquabitur C; ergo differentia inter B, & C eſt productus ex E in F.

T H E O R E M A.

Exemplum XXXV.

Duobus numeris quadratis ſi numerus idem ſigillatim additus fuerit, aggregatis per laterum differentiam ſigillatim diuiſis, numerus factus ex quotientum mutuo ductu, multatus numero, qui fuit quadratis additus, euadit quadratus.

Sint numeri quadrati A, B, quorum latera D, E, horum autem differentia C, numerus quicunque F additus ipſis A, B, faciat numeros, quibus diuiſis per C, fiant quotientes G, K.

Dico factum ex G in K multatum numero F, euadere quadratum.

Sumatur numerus H, qui fit, ſi medius proportionalis inter A, & B, adſcito F, diuidatur per C.

Reſolutio.

A	16			B	49
D	4	C	3	E	7
		F	2		
G	6	H	10	K	17

QVoniam igitur productus ex G in K, detracto F, æquatur quadrato ipſius H, at verò D, G æquantur ipſi H, vt mox demonſtrabitur, atque adeò producti ex H in D, & G æquantur quadrato ipſius H; ergo productus ex G in k, detracto F, æquabitur productis ex H in D, & G; ſed productus ex H in D æqualis eſt producto ex G in E, detracto F, vt mox conſtabit; ergo productus ex G in K, detracto F, æquabitur productis ex G in H, & E, detracto F; vtrinque autem addito F, ergò productus ex G in K, æquabitur productis ex G, in H, & E. Quod ita ſe habet: ex H enim, & E componitur K.

Lemma primum.

A	16	L	28	B	49
D	4	C	3	E	7
		F	2		
N	18	P	30	M	51
G	6	H	10	K	17

Quod autem D, G æquentur ipſi H &c. ſic oſtendo. *Sint duo quadrati A, B, quorum latera D, E, horum interuallum C: inter A, B ſit media proportionalis L; tribus autem A, L, B addito F: proueniant N, P, M, quibus diuiſis per C oriantur G, H, K, Dico D, G æquari ipſi H &c. Quoniam enim ſingulis A, L, B, additus eſt F, manifeſtum eſt ſummarum omnium N, P, M eadem interualla eſſe; quæ ipſorum A, L, B. At vero L ſuperat A producto ex D in C, & B ſuperat L producto ex C in E, ex antecedenti; ergo interuallum duorum N, P eſt productus ex D in C, & interuallum duorum P, M eſt productus ex C in E. Quoniam autem diuiſis N, P, M per C oriuntur G, H, K, manifeſtum eſt duorum G, H, interuallum fieri diuiſo per C interuallo ipſorum N, P, ſiue producto ex D, in C; Similiter duorum H, k, interuallum fieri, diuiſo per C interuallo ipſorum P, M, ſiue producto ex C in E. At verò diuidendo per C productum ex C in D, & ex C in E, fiunt quotientes D, E; ergo duorum G, H interuallum erit D, & duorum H, K interuallum erit E; ergo aggregatum ex D, & G æquabitur H, & aggregatum ex H, & E æquabitur K.*

Lemma ſecundum.

Quod autem productus ex H in D æquetur producto ex G in E, detracto F, ſic oſtendo. *Quoniam enim ambo D, G æquantur ipſi H, ex eo quod præmiſſum eſt lemmate; propterea productus ex H in D æquabitur producto ex D in D, ſeu quadrato A, & ex D in G; at quadratus*

dratus

dratus A per conſtructionem eſt æqualis producto ex C in G, detracto F; ergo productus ex H in D æquabitur productis ex G in D, & C, detracto F: ſed D, C componunt E, ex conſtructione; ergo producti ex G in D, & C æquantur producto ex G in E; ergo productus ex H in D æquatur producto ex G in E detracto F.

Compoſitio.

QVoniam igitur productus ex G in K æquatur productis ex G in H, & E, ex his enim componitur K, vt vidimus; vtrinque detracto F, fiet productus ex G in K, detracto F, æqualis productis ex G in H, & E, detracto F: ſed productus ex G in E detracto F, æqualis eſt producto ex H in D, vt oſtenſum eſt, ob id fiet productus ex G in K, detracto F, æqualis productis ex H in G, & D. Quoniam verò D, G æquantur ipſi H; ergo producti ex H in D, & G æquantur quadrato ipſius H; ergo productus ex G in k, detracto F, æquabitur quadrato ipſius H. Quod erat operæ pretium oſtendere.

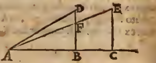
Ex Opticis deſumuntur exempla. Ex Opticis etiam, vt quædam depromamus, è quibus innoteſcit ratio reſoluendi theoremata ad propria principia, ne dum in ijs, quæ purè Geometrica ſunt, & Arithmetica, ſed etiam in ijs, quæ mixtam dicuntur habere naturam, hæc ſubijciemus.

THEOREMA.

Exemplum XXXVI.

Sit oculus A, cui obiecta ſint mobilia B, & C, quorum illud propinquius, hoc autem remotius: ſintque duæ parallelæ BD, CE, in quibus prædicta mobilia æquè velociter cieantur. Dico eo tempore, quo mobile B promouetur, mobile C, oculo A videri tardiùs promouiſſe.

Reſolutio.



QVoniam igitur mobile C videtur oculo A ſegniùs, ac tardiùs promouiſſe, quàm mobile B; at quando mobile apparet eodem tempore percurrere ſpatium minus eo, quod ab alio percurritur, tunc tardiùs promouiſſe, videtur; ergo mobile C oculo A adſpicienti, apparebit ſpatiũ quod minus eſt confeciſſe, eo tẽpore, quo mobile B confecit; ſed BF eſt ſpatiũ, quod oculo A apparet confici à mobili C, tempore, quo mobile C conficit ſpatium CE, ſeu mobile B conficit ſpatium BD, cum CE videatur ſub eodem angulo CAE, ſub quo videtur ſpatium BF, ergo BF minor erit, quàm BD. Cùm autem duo mobilia B, C ſupponantur æquè velociter moueri, æqualibus temporibus, æqualia ſpatia percurrent. Itaq; cùm eo tempore, quo mobile C peruenit ad E, mobile B ex hypótheſi peruenerit ad D; propterea BD æqualis erit CE; ergo BF, quæ erat minor quàm BD, erit minor quàm CE; Quod ita ſe habet, nã triangula ABF, & ACE ſunt æquiangula: anguli enim ad B & C ſunt æquales, ob parallelas BD, CE, itẽ ad F, & E, ad A eſt communis vtrique triangulo, atque adeò triangula ſunt æquiangula; ergo vt AB ad AC, ita BF ad CE; Eſt autem AB minor, quàm AC; ergò BF minor erit, quàm CE.

Compoſitio.

QVoniam igitur AB minor eſt, quàm AC (ſupponimus enim mobile B propinquius oculo A) angulus autem ABF æqualis eſt angulo ACE, itemque angulus AFB æqualis eſt angulo AEC, ob parallelas BD, CE: angulus verò ad A communis vtrique triangulo ABF, ACE; ergo triangula ABF, ACE, erunt æquiangula; quare vt AB ad AC, ita BF ad CE, ſed AB minor eſt, quàm AC; ergo BF minor erit, quàm CE. Cum autem duo mobilia B, C ſupponantur æquè velociter moueri, æqualibus temporibus æqualia ſpatia percurrent: eo tempore igitur, quo mobile C peruenit ad E, mobile B cùm ex hypotheſi perueniat ad D, erit BD æqualis CE; ergo BF minor erit, quàm BD; ſed BF eſt ſpatium, quod oculo A apparet confici à mobili C tempore, quo mobile C conficit ſpatium CE, ſeu mobile B conficit ſpatium BD, cùm CE videatur ſub eodem angulo CAE, ſub quo

videtur

videtur ſpatium BF, ergo mobile C oculo A adſpicienti apparebit minus ſpatium confeciſſe eo tempore, quo mobile B confecit; ſed quando mobile apparet eodem tempore percurrere ſpatium minus, eo quod ab alio percurritur, tardius videtur promouiſſe; ergo mobile C videbitur oculo A ſegniùs, ac tardiùs promouiſſe, quàm mobile B. Quod oportebat oſtendere.

Id quod ſequitur Theorema non ab omnibus fuit eodem modo demonſtratum: qui enim illud oſtendunt, ex eo quia radij vmbroſi cum luminoſis, à quibus proueniunt, rectas lineas conſtituunt, contenti ſunt hoc oſtendiſſe demonſtratione ducente ad incommodum: quemadmodum etiam & id, quod inde deducunt, vmbroſas lineas eadem numerari multudine, qua luminoſæ, quibus cohærent, alioquin plures rectæ lineæ commune ſegmentum haberent, quod eſt inconueniens.

Oſtenſiuè verò id ab alijs præſtitum eſt, &ſi non admodum accuratè.

Iuuat igitur illud aſſumere reſoluendum, ac componendum, vt demonſtratio ritè conſtruatur.

THEOREMA.

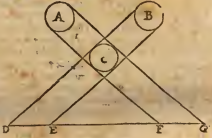
Exemplum XXXVII.

Corpus opacum tot fundit vmbras, quot ſunt luminoſa, quibus opponitur.

Hoc perinde eſt ac demonſtrare ſi exempli gratia duo fuerint corpora luminoſa, totidem etiam fieri vmbras.

Sint duo corpora luminoſa A,B, corpus autem opacum C, non tamen poſitum in directum cum ipſis, & luminoſum A ſuos effundat radios in opacum, qui tamen protracti perueniant ad ſpatij puncta F,G; & luminoſum B, ſuos pariter effundat radios in idem opacum, qui pariter producti perueniant ad ſpatij puncta D,E.

Reſolutio.



QVoniam igitur in ſpatio FG eſt vmbra, ſed illuſtratio minor cõparatione maioris circumſtantis eſt vmbra; ergo illuſtratio, quæ fit in ſpatio FG minor eſt circumſtanti; ſed illuſtratio, quæ fit ſolùm ab vno luminoſo minor eſt eâ, quę fit à duobus; ergo illuſtratio, quæ fit in ſpatio FG eſt ſolùm ab vno luminoſo, puta B, & quæ circumſtat eſt ab vtroque A, & B. Quod ita ſe habet; nam in ſpatio FG impediente opaco C non fit illuſtratio à luminoſo A, & circumſtans fit ab vtroque.

Rurſus quoniam illuſtratio in ſpatio DE eſt vmbra; ſed illuſtratio minor comparatione maioris, circumſtantis, eſt vmbra; ergo illuſtratio, quæ fit in ſpatio DE, minor eſt circumſtanti: ſed illuſtratio, quæ fit ab vno luminoſo minor eſt ea, quæ fit à duobus; ergo illuſtratio in ſpatio DE, eſt ab vno tantùm luminoſo puta A, & circumſtans eſt ab vtroque A, & B. Quod ita ſe habet, ob ſimilem ei, quam paulò antea nos attulimus cauſam.

Compoſitio.

QVoniam illuſtratio, quæ fit in ſpatio FG nequit eſſe à luminoſo A impediente opaco C, eſt ſolum à luminoſo B, & circumſtans fit ab vtroque luminoſo A, & B,; ſed illuſtratio, quæ fit ab vnico luminoſo minor eſt ea, quæ fit à duobus; ergo illuſtratio, quæ fit in ſpatio FG minor eſt circumſtanti: ſed illuſtratio minor comparatione maioris eſt vmbra; ergo illuſtratio in ſpatio FG, vmbra erit.

Rurſus quoniam illuſtratio in ſpatio DE nequit eſſe à luminoſo B, impediente opaco C eſt ſolum à luminoſo A, & circumſtans fit ab vtroque luminoſo A, & B: ſed illuſtratio,

quæ fit ab vno luminoſo, minor eſt ea, quæ fit à duobus; ergo illuſtratio, quæ fit in ſpatio DE minor eſt circumſtanti: ſed illuſtratio minor comparatione maioris eſt vmbra; ergo illuſtratio in ſpatio DE vmbra erit.

Non diſſimiliter ſi plura extiterint corpora luminoſa, ſingulis reſpondere vmbras oſtendemus.

SCHOLION.

Vmbra quid.

Tenebræ quid.

SVperior reſolutio vim deſumit ex natura vmbræ, quæ perperam à quibuſdam cum tenebris confunditur; rectè ſiquidem vmbra dicitur lumen imminutum, maioris, quod circumſtat luminis, comparatione. At verò hæc inter lumen, & tenebras mediam naturam adepta eſt, cùm ex habitu, & priuatione ſimul compoſita eſſe dicatur. Vnde eſt quod primarium lumen vmbræ rationem habere nequeat, cùm alterius luminis priuationem habere non poſſit; & quamuis dum exiguum aliquod lumen ſuper terram extiterit, tenebras ibi eſſe dicere conſueuerimus, tamen id familiari tantum vſui loquendi concedendum eſt, cùm tenebrarum ratio omne prorſus lumen excludat.

ex Catoptricis exempla deſumuntur.

Duo ſunt quibus vniuerſa Catoptrica innititur.

Heliodorus in Opticis.

Et vt aliqua etiam ex Catoptricis deſumamus. Quoniam duo quidem ſunt, quibus vniuerſa Catoptrica innititur: vnum, quòd angulus reflexionis æqualis ſit angulo incidentiæ: alterum quòd in quolibet ſpeculo, imago apparet in concurſu catheti cum radio ab oculo per punctum reflexionis directè producto; vtrunque plurimum negotij faceſſit. Hęc quidem plerique ſuppoſuerunt. Alij naturalibus rationibus. Alij quibuſdam inſtrumentis ad id opportunis, confirmare conati ſunt, vt Alhazenus, & Vitello. Alij vt Euclides ex quadam ſuppoſitione id demonſtrare aggreſſi ſunt. Erat autem ſuppoſitio, quòd eadem ſit ratio lineæ interceptæ inter aſpicientem, & ſpeculum, & inter ſpeculum, ac rem inſpectam. Alij tandem demonſtrandum id ſuſceperunt, quòd factum fuiſſe à Ptolomæo Libro primo de Speculis, accepimus; imò, & ab Herone Mechanico in Catoptricis, teſtatur Heliodorus Lariſſeus, quatenus ab eo fuit oſtenſum rectas, quæ ad angulos æquales reflectuntur ſimul ſumptas minimas eſſe rectarum intermediarum ſimul ſumptarum, quæ reflectuntur ad inæquales angulos ad eaſdem partes, ab eadem, & ſimili linea; hoc enim demonſtrato, ait, naturam radios viſus noſtri ad æquales angulos reflexuram; ſic enim ſcribit. Ἀπέδειξε γὰρ ὁ μηχανικὸς Ἥρων ἐν τοῖς αὐτοῦ κατοπτρικοῖς, ὅτι αἱ πρὸς ἴσας γωνίας κλώμεναι εὐθεῖαι ἐλάχισταί εἰσι μέσων τῶν ἀπό τῆς αὐτῆς καὶ ὁμοιομεροῦς γραμμῆς πρὸς τὰ αὐτὰ κλωμένων πρός ἀνίσους γωνίας τοῦτο δὲ ἀποδείξας φησὶν ὅτι εἰ μὴ μάτην, ἡ φύσις μάτην περιάγειν τὴν ἡμετέραν ὄψιν, πῶς, ἴσας αὐτὴν ἀνακλάσει γωνίας. Hoc eſt; *demonſtrauit mechanicus Hero in Catoptricis, rectas, quæ ad angulos æquales reflectuntur, minimas eſſe rectarum intermediarum, quæ ad inæquales angulos reflectuntur ad eaſdem partes ab eadem, & ſimili linea. Quo demonſtrare, dicet, naturam radios viſus noſtri, ad æquales angulos reflexuram, niſi velit fruſtra viſum circumferri.*

Hæc Lariſſęus poſtquam in antecedenti capite multiplicem viſus noſtri cum ſole conuenientiam, explicuiſſet, atque tandem ad calcem eiuſdem capitis, ea ad aures Platonis fuiſſe, teſtatus eſſet.

Quid præcipuè curandū Analyſtæ, cùm de re quapiam ſuſcipit tractationem.

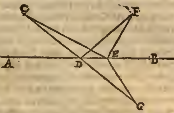
Hoc autem in primis Analyſtæ curandum, cùm de re quapiam tractationem ſuſceperit, videlicet id, vnde ſumendum ſit conſiderationis initium demonſtratione firmare, ſi tamen ſuppetet medium opportunum. Hoc autem in Catoptricis contingit, nam primo ſe ſe offert, quòd &ſi alioquin certum exiſtimetur, non dum tamen hucuſque demonſtratio creditur adinuenta, videlicet, quòd angulus incidentiæ ſit æqualis angulo reflexionis. Paucis tamen hęc omnia perſtringemus.

Cur angulus reflexionis æqualis ſit angulo incidentiæ.

Radius in corpora incidens, vel reflectitur, vel tranſit, vel immoratur; ſi namque incurrat in corpus molle, & opacum, vlterius non tranſit, ſed ibi moratur; ſi leue, & durum, reflectitur; & ſi pellucidum, pertranſit: pellucidum verò corpus, vel molle eſt, vt aqua, aer, &c. vel durum, vt chryſtallum, vitrum &c. ſed cæteris prætermiſſis reflexionem conſideremus, quam difficile eſt explicare iuxtà Ariſtotelis principia, ſi ſermo ſit de reflexione luminis, & hoc qualitas exiſtimetur; non enim admodum facile comprehendimus qualitatem aliquam diffundi, eandemque reflecti, cùm potius corporibus ipſa reflexio accommodata videatur, vt patet de pilis luſorijs: quæ quidem in aliquod obſtaculum impulſæ re-

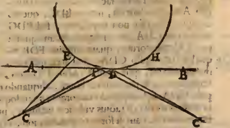
ſe reſiliunt; Non diſſimiliter de lumine ſentiendum; qua tamen id ratione fiat, ſi lumen qualitas realis, vel intentionalis extiterit, haud facile explicatu eſt: cùm longè meliùs intelligere cuique liceat ſupponendo, lumen eſſe lucidi corporis quoddam effluuium; de hoc tamen in præſentia minimè diſſerendum, cùm quia potius ad Phyſicum pertinet; tum quia nobis tantummodo propoſitum eſt ex hiſce facultatibus exempla quędam excerpere ad Reſolutiuam methodum illuſtrandam; eo vel maximè quòd ipſius luminis reflexionem fieri ſupponimus; ſed cur ea lege fiat, vt angulus reflexionis incidentiæ angulo ſit æqualis, inquirimus.

Fuit à Ptolemæo demonſtratum Libro primo de Speculis, id ſanè contingere, quoniam tunc per lineas breuiſſimas viſio ipſa perficitur, propterea quòd Naturæ genio id maximè conſentaneum videtur, velut abhorrentis à ſuperfluo; & rectè quidem id de ſpeculo plano, & conuexo-ſphærico demonſtrauit, Demonſtrationes autem nos breuiter ſubijciemus. *Qua ratione id Ptolemæus demonſtrauerit.*



Sit planum repreſentatum per AB, in quod cadat ad angulos obliquos recta CD, cum AB faciens angulum CDA, quem incidentiæ nuncuparunt, cui per reflexionem fiat angulus æqualis FDB. Contendit Ptolemæus aggregatum ex CD, DF, eſſe omnium minimum, quæ fieri poſſunt ex alijs duabus lineis ductis à punctis C, F, vt ſunt CE, FE terminatis ad E punctum, in AB diuerſum à puncto D. Facilis eſt, & ſatis vulgata demonſtratio: nam protracta CD in G, vt DG ſit æqualis DF, ductiſque GE, EF. Quoniam angulus CDA æqualis eſt ex hypotheſi angulo FDE; eſt autem per 15. primi, æqualis etiam angulo GDE; ergo anguli FDE, GDE ſunt inuicem æquales, & latera DF, DG ſunt ex conſtructione æqualia; ergo baſis EF æquabitur[a] baſi EG: quare aggregatum ex CE, EG æquabitur aggregato ex CE, EF; ſed aggregatum ex CE, EG maius eſt recta CG; ergo aggregatum ex CE, EF, maius erit recta CG; Sed recta CG, cùm DG, DF ſint æquales, & CD communis, eſt æqualis aggregato ex CD, DF; ergo aggregatum ex CE, EF maius erit aggregato ex CD, DF. Imò illud hac in re videtur addendum, quod punctum vnde radius incidit in planum, & illud, ad quod terminatur per reflexionem, ſe habent veluti puncta ex comparatione facta, quæque Foci dicuntur Ellipſeos, cuius perimetrum tangit recta in puncto reflexionis, quæ ſcilicet communis eſt ſectio plani tranſeuntis per tria prædicta puncta, cum ſpeculi ſuperficie plana; Aggregatum enim ex directo radio, & reflexo æquale eſt maiori axi ipſius Ellipſeos. Nequit autem aliud eſſe punctum, in quo fiat reflexio: nam aggregatum radij directi, & reflexi, non poſſet eſſe æquale aggregato iam dicto; in eo ſiquidem puncto recta illa deberet perimetrum ipſius Ellipſeos tangere, ac ob id fieret contactus ipſius cum eadem recta in duobus punctis, quod fieri non poteſt: recta ſiquidem non tangit Ellypſin niſi vnico puncto. Angulus igitur incidentiæ, æqualis eſt &c. Hæc de plano. *a 4. primi.* *Notanda.*

In conuexo-ſphærico ſic.



Sit circulare ſpeculum, cuius peripheria EDH; angulus incidentiæ CDE, & reflexionis GDH; oſtendendum eſt aggregatum ex CD, GD minimum eſſe &c. Recta AB tangat peripheriam in puncto D: ſitque quodcunque punctum acceptum E in peripheria, aliud à puncto D, ducta ſit CE, quæ occurrat AB in F, & ex F acta FC. manifeſtum eſt aggregatum ex CD, DG minus eſſe aggregato ex CF, FG, vt paulò ſupra demonſtratum eſt: ſed aggregatum ex CF, FG, minus eſt aggregato ex CE, EG, ergo aggregatum ex CD, DG, multò minus erit aggregato ex CE, EG.

Hæc de duobus ſpeculis iam dictis rectè concludunt, adeò vt huiuſmodi demonſtrationibus ſuffulti plerique, vt Ptolemæus, Hero, & Lariſſæus exiſtimauerint ſatis ſuperque

 demon-

demonſtratum fuiſſe, angulum incidentiæ æqualem eſſe angulo reflexionis, quoniam natura non impedita per breuiſſimas lineas operatur, ſed non aduerterunt ſecus rem euenire in ſpeculo cauo-ſphærico, vbi demonſtratione conſtat aggregatum ex radio directo, & reflexo, non eſſe minimum.



Nam ſit circulus ACE, quem tangat quæpiam LH in puncto C, in qua rectæ AC, EC æquales angulos efficiant LCA, HCE. Accepto in peripheria quouis alio puncto B, ductiſque BA, BE, oſtendendum eſt aggregatum ex AC, CE, maius eſſe aggregato ex AB, BE.

Et quidem ſi EB foret æqualis EC, facilè conſtat: latera enim CE, EA, æqualia cùm ſint lateribus BE, EA vtrunque vtrique, angulus autem AEC maior eſt angulo AEB; ergo baſis AC maior erit baſi AB, ſed EB æqualis eſt EC; ergò aggregatum ex AC, CE maius erit aggregato ex AB, BE.

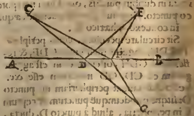
Si verò EC foret maior, quàm BE, ſecta EI, quæ ſit æqualis EB, & acta AI. Quoniam latera AE, EI æqualia ſunt lateribus AE, EB; vtrunque vtrique, & angulus AEI maior eſt angulo AEB; ergo baſis AI, maior erit baſi AB: ſed EB æqualis eſt EI; ergo aggregatum ex AI, IE maius erit aggregato ex AB, BE; ſed aggregatum ex AC, CE maius eſt aggregato ex AI, IE; ergo aggregatum ex AC, CE multò maius eſt aggregato ex AB, BE.

a. 21. tertij, et 15. & 32 primi. Sed generaliter quidem hunc in modum. Quoniam triangula ABK, KCE [a] ſunt ſimilia; ergo vt [b] EC ad AB, ita KC ad KB, & Ek ad Ak; ergo vt [c] EC, plus KC, ad AB, plus Bk, ita KE ad Ak; ergo EC, plus KC tanquam maxima, vnà cum AK minima, hoc eſt aggregatum ex AC, CE maius erit [d] magnitudine quæ fit ex AB plus BK, vnà cum KE, hoc eſt aggregato ex AB, BE.

b 4 ſexti, & 16 quinti. c. 12. quinti, &c. d. 25. quinti.

Ex his facile intelliges quam cautè procedendum ſit in rebus Phyſicis, & quàm facile decipiamur in enunciando, ſed pauca reſpicientes. Quid enim vulgatum magis in vniuerſa naturali Philoſophia, quàm illud effatum. *Natura per lineas breuiſſimas operatur, non impedita*. niſi profectò aliquod comminiſcaris impedimentum, ſplendidè conſtat ex ſuperiori demonſtratione, haud bene hoc pronunciatum fuiſſe, cùm rem ſecus ſe habere in ſpeculo cauo-ſphærico, fuerit oſtenſum; illud igitur addendum, quòd natura operatur per lineas breuiſſimas quantum poteſt, de quo infra.

Alij propterea, quibus hoc idem fuit in delicijs tractare, cautiùs philoſophantes, aliunde cauſam petendam eſſe, exiſtimarunt; quoniam videlicet ſi liberè incidentiæ radius progredi poſſet, ab opaco non impeditus, efficeret angulum infra lineam, vbi reflexionis punctum, æqualem angulo incidentiæ. Vt ſi, e.g. foret recta AB, in quam incideret radius CD, hic niſi foret impeditus, ſed vlterius progredi poſſet, efficeret angulum BDG, æqualem incidentiæ angulo CDA; at verò quoniam impeditur; reflecti debet faciendo angulum cum ipſa AB, æqualem illi, nempe BDG, quem alioquin effeciſſet non impeditus, ſed BDG æqualis eſt CDA, vt conſtat ex decima quinta primi Elementorum; quare angulus FDB æqualis erit angulo CDA. Sed hæc nulla demonſtratio eſt, quia etiam ſi radius CD non impediretur, & pertranſiret liberè, aliquando non efficeret angulum BDG æqualem angulo CDA, ſed aliquando maiorem, quandoque verò minorem, ex lege refractionis iuxta diuerſa media, ſi radius videlicet incidens, puta CD, foret aptus refrangi, vt eſt radius luminoſus &c. nam ſi foret corpus aliquod, vt pila luſoria, quæ propulſa in planum AB per rectam CD, reflecteretur ſecundùm DF, hæc locum non haberent. Accedit etiam quòd non aſſertur cauſa, cur ex hypotheſi quod recta tranſiens radius CD facit angulum GDB; ſi reflectatur huic æqualem angulum facere debeat BDF. Non dum igitur ex hactenus allatis, eſt demonſtratum intentum.



Demonſtratio quorundam.

Reijcitur talis demõſtratio.

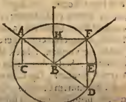
Specia-

Speciatim luminis reflexionem Neotericus quidam explicandam ſuſcipiens, ait: poſitò quòd illud ſit, quòd lumen ſit ſubſtantia, perquam fluida, & validiſſimè à luminoſo vibrata, & etiamſi non ita ſit, ad craſſitiem luminoſi radij referendam exiſtimat, ex eo quia poſito quòd radius ille debeat decurrere poſt reflexionem per idem medium, puta aerem, per quod decurrebat ante reflexionem, non eſt cur vllo modo varietur eius denſitas, partiumque conſtipatio, cùm neque in medio varietur raritas, frequentia, vel diſpoſitio pororum, in quibus diapheneitas, & eſſe permeabile ipſius medij, poſitum eſſe videtur, quamobrem debet radius reflexus cum eadem ſui craſſitie phyſica procedere; probat autem non poſſe huiuſmodi craſſitiem æqualem ſeruari in vtroque radio, niſi & ſeruetur æqualitas prædicta angulorum. Vtcunque autem ſit huiuſmodi ratio, de qua alibi diſſerendum, illud ſaltem perſpicuè interim conſtat, eam non eſſe communem, vt par eſſet pro omni reflexione; quænam denſitas, conſtipatio, & craſſities radiorum excogitari poteſt in motu pilæ luſoriæ, dum in aliquod obſtaculum incurrit? & tamen ſi id contingat ſecundùm rectam perpendicularem, mobile redit per eandem viam, per quam directè proceſſerat; ſi ad obliquos angulos, pergit vlterius, ſeruata repercuſſionis lege, vt reflexionis angulus æqualis ſit ei, qui eſt incidentiæ. Fatetur ille communem hanc rationem ſe non aſſecutum fuiſſe; ſed ſatis ſuperque eſſe ad inſtitutum de lumine, quòd conſtet reflexionem ad pares angulos contingere; Illud tamen pro lumine addendum, quod paulò antea innuimus. Verùm ſi, vt ipſe quoque teſtatur, lumen quoddam effluuium eſt, non ſecus philoſophandum de illo, ac de corpore incurrente in aliquod obſtaculum, vnde ipſius motus reflexio ad pares angulos contingit. Communis igitur ea debet eſſe ratio, alioquin particulæ illæ per medium à lucido corpore vibratæ, haud in communi ratione mobilis conuenirent.

Alius explicandi modus à Neoterico quodam adhibitus.

Superior ratio reijcitur.

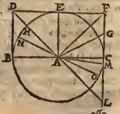
Alij autem alia dixerunt, vel minus bene explicata, vel ſaltem minus rei naturæ conſentanea, quibus prætermiſſis, vnum, vel alium modum à maioribus traditum; non pigebit; maioris hìc eruditionis gratia in medium afferre, vt inde nobis pateat aditus ad explicandum, quod poſt varias meditationes, propiùs ad verum accedere, ita viſum eſt, vt theorema condere, illudque demonſtrare fuerimus aggreſſi.



Carteſij demonſtratio de æqualitate anguli incidentiæ, & reflexionis, perpenditur.

Iuxtà Carteſium ea videtur ratio, quoniam ſi rem ipſam ſedulò perpendamus; nil aliud eſt quàm inquirere, ad quam partem pila illiſa debeat reſilire. Intelligatur deſcriptus circulus ex centro B, qui tranſeat per punctum A, atque dicamus, ſpatio temporis eodem, quo progreſſa eſt ab A ad B, neceſſariò illam à B ad aliquod punctum huius circumferentiæ reuerti debere: ſiquidem omnia puncta, quæ eodem interuallo diſtant à B, quo diſtat A, in hac occurrunt circumferentia, ſuppoſito quòd pilæ motus ſit æquè velox. Ad deſignandum verò punctum ipſum, quod ex omnibus huius circumferentiæ tangere debet, erigamus tres rectas perpendiculares AC, HB, & FE, ſuper ipſam CE, ita vt AC, & FE æquè diſtent ab ipſa HB: mox verò concipiendum eo tempore, quo pila dextrorſum porrexit ab A, vno punctorum lineæ AC, vſque ad B, vnum ex punctis lineæ HB, illam reſilientem ab HB, ſiſtere debere in aliquo puncto lineæ FE, cùm ſingula puncta lineæ FE eadem diſtantia à linea HB remota ſint, & eadem, qua ſingula lineæ AC, & ex priori diſpoſitione tantundem eò inclinat, quantum antea: eodem autem momento aliquod punctum lineæ FE, & ſimul aliquod circumferentiæ AFD, nequit contingere, niſi in puncto D, vel F; extra enim hæc duo nullibi mutuò ſecantur, terra autem obſtante, ad punctum D progredi non poteſt: vnde ſequitur neceſſariò tendere debere ad punctum F, ac propterea conſtat ſemper reflexionem fieri ſecundùm angulum æqualem angulo incidentiæ; quæ quidem ratio quippe quę reſpicit tempus; minus arridet, accedit, quod non per admodum perſpicua procedit.

Carteſij demonſtratio parum laudatur.



Aliorū quoq; demonſtratio improbatur.

Aliqui itaque imaginantur, ſic demonſtrandum. Lucido exiſtente in D, & puncto A in ſpeculo BC, radios reflecti, ſic, vt angulus reflexionis FAC ſit potius æqualis angulo DAB, quàm angulus GAC v.g. vel alius quicunque. Supponunt enim motum radij vel lineæ DA, compoſitum

eſſe

eſſe ex motu DE parallelæ ipſi BA, & ex motu DB perpendicularis ipſi BA, cùm imaginari liceat corpus aliquod in D, eodem tempore duci ab æqualibus potentijs ex D in B, & ex D in E; non enim, vel per DE vel per DB, ſed per DA diagonalem deſcenderet. Cùm itaque ſatis conſtet, vim qua mouetur radius luminis diuerſam prorſus eſſe ab ea, qua determinatur potius in hanc, quàm in illam partem, operoſum non eſt intelligere motum luminis, quo deſcendit ex D in A mixtum eſſe ex duobus motibus, nempe ex motu qui fit ex D in E, & ex eo, qui fit ex D in B, ex quibus ſimul fit motus ex D in A, hi autem motus contrarij non ſunt, ſed diſpoſitiones tantùm diuerſas habent: vndè EA linea non impedit motum, qui fit ex D in B, ſed potius BA: itaque tantùm BA auſert diſpoſitionem motus ex D in A verſus L, remanente motu, qui ab ipſa BA aliter diſpoſitus tendit ex A in F; cùm alioquin deorſum vergeret, quinimò adhuc remanet diſpoſitio illa, qua tendebat ex D in E, ſeu F. Cùm itaque non impediatur motus, ſed vna tantummodo diſpoſitio, adhuc altera perſeuerante, neceſſe eſt effectum ipſius motus conſequi ſecundum leges harum diſpoſitionum, ita videlicet, vt motu compoſito ex motu per lineam AC, vel EF, & motu per lineam EA, vel FC, hoc eſt motu per diagonalem, peruenire debeat ad punctum F lineæ CF, quo eius diſpoſitio tendebat, nam ſi alioquin perueniſſet ad punctum G per lineam AG, aliquid ex motu contra hypotheſin perdidiſſet. Neceſſario igitur remeare debet lineam AF æqualem ipſi AD, & ſiſtere in puncto F interſectionis communis lineæ AF cum linea CF.

Kepleri ratio, reijcitur. Hæc tamen ingenioſè ſunt dicta, ſed non dum ſatis rem attingunt; nec ab adæquatis cauſis illam deducunt. Neque Keplerus in ſuo Paralipom. ad Vitellonem cap. 1. prop. 19. admodum feliciter propoſitum oſtendit; etenim illa conflictus virtus, in Demonſtrandi ratione non videtur plauſu digna.

Authoris vera affertur. Supponamus corpus impelli ex E in A per EA ſuper planum BC, ita vt EA ſit perpendicularis ipſi BC, & quidem liquido conſtat illud reuerſurum per eandem AE. Imò adeò reuerſurum, vt ſi corpus quidem ſua grauitate incurrat in planum, vt quando graue cadit ſuper planum horizontale redeat ad idem punctum vnde ceciderat, quod ego non ſemel ſum expertus Florentiæ pilis quibuſdam vitreis diuerſæ magnitudinis, ita vt craſſities, & pondus non officeret, ſed æquè reſiliret, ſiue eſſet maioris, vel minoris molis, ac ponderis: minor autem erat diametri, quanta eſt latitudo duorum digitorum; curabam verò, vt caderet ſuper Iaſpidem valde terſum, experimentoque facto ex varijs altitudinibus, deprehendi id perpetuo contingere, quod mihi admodum ſingulare viſum fuit; ſuſpicabar enim valde 'ne vnquam pila ex aliqua materia confici poſſet, quæ tam magnam reflexionem præſtaret. Sed redeamus in orbem ſermonis. Supponamus ex E per rectam perpendicularem EA pilam ipſam cadere. In huiuſmodi motu duo ſe conſideranda offerunt, & motus ipſe, & eiuſdem directio: dum ex E cadit pila in obſtaculum A, motum profectò non ammittit, ſiquidem non ibi ſiſtit ſed reſiliendo adhuc mouetur; quod autem prorſus ammittit directio eſt, propterea quod tendebat ad infera, & interpoſito obſtaculo, cogitur per eandem lineam reſilire, hoc igitur maximum eſt detrimentum directionis, quòd mobile ſubire poſſit. At verò ſi illud idem mobile fuerit propulſum per rectam DA non ammittet motum dum obſtaculum offendit, ſed ex parte, ipſius motus directionem, ita vt quò magis recta illa per quam propellitur mobile, receſſerit à perpendiculari EA, eo minus ammittat de ipſius motus directione, ita vt ſi tandem per lineam horizontalem, atque adeò parallelam ipſi BC, propellatur, nil prorſus de directione deperdat. Quando itaque proijcitur pila per rectam DA, tantùm directionis detrimentum patitur, quantum angulus DAB requirit, nec motus habeat, qui tamen perſeuerare debet, à quo reſarciatur damnum directionis ſuæ, propterea mobile proſequitur motum cum eodem directionis detrimento, atque adeo ſecundùm rectam AF, quæ æquè declinat abs EA, ac ipſa DA, cumque AC conſtituit angulum FAC æqualem angulo DAB.

Id autem æque continget ſi intelligatur planum in ſitu NO, nam graue perueniens deus ſuper huiuſmodi planum in A maximum detrimentum directionis patitur ſecundùm rectam illi perpendicularem, à quà æquè recederet tam DA, quàm AM; vnde ſi mobile propelleretur per DA, reflecteretur per AM, facientem angulum MAO æqualem angulo DAN, ob eam, quã attulimus cauſam, atque hinc mihi videtur ſatis ſuperque demonſtratũ intentum.

Alia Authoris ratio affertur. Sed illud non prætermittam, vnde eadem veritas conuincitur, & ſe habet tanquam demonſtratio ab effectu, quæ in rebus Phyſico-Mathematicis ſpernenda omnino non eſt.

Suppona-



Supponamus planum AC, & in eius punctum B cadant duæ rectæ DB, FB, Si igitur ſpeculum fuerit AC, & obiectum in recta BF, vt in F, ſit autem inſpector in recta BD puta in D, adeo vt radius FB ſit incidentiæ, & DB ſit reflexionis, oſtendendum eſt angulum DBA æqualem eſſe angulo FBC. Sit inſpector in D, & alter in F, ita vt vterque duplici munere fungatur, & inſpectoris, & rei inſpectæ. Quando itaque inſpector in D videt exiſtentem in F per radium BF reflexum in D, vtique reſpectu ipſius angulus FBC eſt incidentiæ, & DBA eſt reflexionis; at verò dum ſimul inſpector in F intuetur exiſtentem in D per radium DB reflexum in F, reſpectu inſpectoris in F angulus DBA eſt incidentiæ, & FBC reflexionis; quare idem angulus DBA erit angulus incidentiæ, & reflexionis, & FBC erit itidem incidentiæ, & reflexionis. Si igitur idem angulus poteſt eſſe incidentiæ, & reflexionis neceſſario conſequitur angulum incidentiæ æqualem eſſe angulo reflexionis.

Deinde ſi angulus incidentiæ DBA non eſt æqualis angulo reflexionis FBC, vel igitur maior, vel minor. Sit primò maior. Supponamus nunc rem aſpectabilem, vel lumen in F, cum eodem, quo prius tramite ſupponatur fieri irradiationem; ergo angulus incidentię FBC, maior erit angulo reflexionis ABD contra hypotheſin, nam angulus FBC ſupponebatur minor.

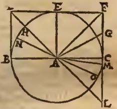
Nunc analyticè, & ſynthetice propoſitum exequemur.

T H E O R E M A.

Angulus reflexionis æqualis eſt angulo incidentiæ. Exemplum XXXVIII.

Sit planum BC in quod incurrat mobile per rectam DA, & reflectatur ad F. Dico angulũ EAF, equalẽ eſſe angulo DAE, ſeu FAC reflexionis æqualem eſſe angulo DAB incidentię. Ex puncto A excitetur AE perpendicularis ipſi BC.

Reſolutio.



Quoniam igitur corpus propulſum ſubeundo reflexionem per rectam AF, eam ſubit ſecundùm angulum EAF æqualem angulo complementi EAD motus directi; vel ſecundùm angulum FAC æqualem incidentiæ angulo DAB motus directi; ſed corpus propulſum ſubeundo reflexionem habet directionis detrimentũ, ęquale prorſus ei, quod habebat in motu directo; ergo corpus propulſum per rectam DA habet detrimentum in directione motus ſecundùm angulum complementi DAE, vel incidentiæ DAB. Sed declinatio à perpendiculari EA eſt angulus DAE complementi, & inclinatio ad planum BC eſt angulus DAB incidentiæ; ergo corpus propulſum per rectam DA, detrimentum habet in directione motus ſecundùm declinationem ipſius DA à perpendiculari EA, vel inclinationem ad planum BC; ſed ratio receſſus à maximo directionis detrimento eſt ſecundùm declinationem ipſius DA à perpendiculari EA, vel ratio acceſſus ad nullum detrimentum ſecundum inclinationem eiuſdem DA ſupra planum BC, in quod mobile cadit; ergo corpus propulſum per radium incidentiæ DA, detrimentum habet in directione ſui motus iuxtà rationem receſſus à maximo directionis detrimento, vel acceſſum ad nullum eiuſdem directionis detrimentum. Quod ita ſe habet ex hactenus diſputatis &c.

Compoſitio.

Quoniam corpus propulſum per radium incidentiæ DA; detrimentũ habet in directione ſui motus, iuxta rationẽ receſſus à maximo directionis detrimento, vel acceſſum ad nullum detrimentum. Sed ratio receſſus à directionis maximo detrimento eſt ſecundùm declinationem ipſius DA à perpendiculari EA, vel acceſſus ad nullum detrimentum ſecundùm inclinationem eiuſdem DA ſupra planum BC, in quod mobile incidit; ergo

corpus

corpus propulſum per rectam DA detrimentum habet in directione ſui motus, ſecundùm declinationem ipſius DA à perpendiculari EA, vel inclinationem ad planum BC; ſed declinatio à perpendiculari EA eſt angulus DAE complementi: & inclinatio ad planum BC eſt angulus DAB incidentiæ; ergo corpus propulſum per rectam DA habet detrimentum in directione motus ſecundum angulum complementi DAE, motus directi, vel incidentiæ DAB motus directi; ſed corpus propulſum ſubeundo reflexionem habet directionis detrimentum, æquale ei quod habebat in motu directo; ergo corpus propulſum ſubeundo reflexionem, per AF eam ſubit ſecundùm angulum EAF æqualem angulo complementi DAE, vel ſecundũ angulum FAC æqualem angulo incidentiæ DAB. Quod oportebat oſtendere.

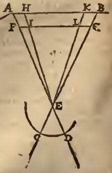
Quod in Catoptricis maximè decantatum.

Nihil eſt magis decantatum in Catoptricis, quàm illud. In quolibet ſpeculo imago apparet in concurſu catheti cum radio ab oculo per punctum reflexionis directè producto, quod apud Veteres, nempe Alhazenum, & Vitellonem legimus experimentis potius, quàm demonſtrationibus comprobatum; ab alijs verò non admodum accuratè, re reducta ad ſua propria principia; propterea de his multa dicenda occurrent, à quibus tamen eſt abſtinendum, cùm hìc nobis in animo non ſit Catoptricam tradere ſed tantummodo delibare aliquid, in quo vſus Reſolutricis artis eniteat, ac ob id paucis rem ipſam perſtringam.

Tria igitur numero ſunt, quibus omnia ſpeculorum experimenta ſolui, explicarique poſſunt. Primum eſt illud de quo ſupra, videlicet angulos incidentiæ, & reflexionis æquales inter ſe eſſe. Secundum, rem apparere in perpendiculari quam cathetum appellant, a re in ſpeculum demiſſa. Tertio rem eandem in radio reflexionis videri.

Non deſunt quibus videatur id ſecus contingere, quinimò ibi nec etiam vllam eſſe reflexionẽ, nec refractionẽ obiecti, locumq; apparentem ſemper oculo propinquiorem eſſe, quã locus verus ſit, videlicet in viſione directa. Vnde colligunt locum imaginis per reflexionem eundem eſſe, qui eſſet ſublato ſpeculo, & translato obiecto tantundem vltra ſpeculi locum per viſionem directam. Colligunt etiam deceptos eſſe hactenus omnes, qui nedum affirmarunt, ſed pro axiomate, & fundamento doctrinæ poſuerunt locum imaginis cuiuslibet puncti viſi per reflexionem eſſe in perpendiculari, quæ ducitur ab obiecto ad ſuperficiem, ita vt in omnibus ſpeculis locus imaginis ſit in concurſu rectæ à quouis puncto obiecti ductæ perpendiculo oculi parallelæ cum linea viſuali &c. Hæc tamen obiter dicta ſint. Solum illud innuam, vnde hæc deduxerunt.

Intelligatur AB linea recta: retinæ arcus CD, cuius centrum E. Contendunt AB apparituram eſſe citra AB, puta in FG, & eſſe FG minorem ipſa AB, quorum ipſis hæc eſt demonſtratio. Intelligatur A pars obiecti adeo exigua, vt in diſtantia AE, ſola exiſtens, videri non poſſet: ſumatur deinde alia pars H, quæ ſit ipſi A æqualis, itaque nec ea ſi ſola eſſet videretur; vtraque tamen oculum mouet etiam ſola, nempe pars A per rectam AE, & pars H per rectam HE, quæ quidem rectæ conuergunt vſque ad occurſum in centro E. Quoniam verò coniunctis ipſarum partium intermediarum viribus fit viſio totius AH, videlicet imago eius aliqua; imago illa apparebit, ex ea parte vbi vires coniunguntur, ideſt ex ea parte vbi AE, HE conuergunt, quod eſt citra obiectum AB alicubi puta in FI; videbitur ergo A cum partibus ſibi proximis in recta AE ad partem F, & pars H cum ſuis vicinis ad partem I, totumque AH apparebit in FI, quæ minor eſt quam ipſa AH, & ob eandem rationem BK videbitur in GL, atque totum obiectum AB in FG.



Quanti autem fieri debeat hoc demonſtrandi genus, cuiuſque iudicio relinquo; ſolum id commemorabo, poſſe quempiam ratiocinari ad eum, qui ſequitur modum. Veræ magnitudines inæquales non ſic ſe habent, vt anguli optici, quibus conſpiciuntur, ſed potius maior eſt magnitudinum, quàm angulorum ratio, ſi maior minori comparetur. At apparentes rerum magnitudines ita ſunt inter ſe, vt anguli opticarum pyramidum, quibus comprehenduntur; maior propterea erit verarum, quàm apparentium magnitudinum ratio, ſi maior minori comparetur. Vnde nunquam ita magnitudines rerum apparent, vt ſunt, ſed potius perpetuò minores apparent, quàm re verá ſint, cùm ſemper

minor

minor ſit apparentium magnitudinum ratio, quàm verarum. Diſtantiæ autem minores, quàm re ipſa ſint, conſpiciuntur, at eodem exiſtente angulo; propterea ex his illud melius quiſpiam deductum credet. Sed de hoc alibi.

Euclides Theoremate decimo ſexto nititur id probare de ſpeculis planis, decima ſeptima, & decima octaua de cauoſphæricis, ſed haud ſatis feliciter, vt non immeritò eum reprehenderit Keplerus, etſi fortaſſe non admodum accuratè; idem tentarunt Alhazenus, & Vitello, ille quidem Libro quinto numero 9. & 10; hic autem libro quinto propoſitione 36. Ille multa miſcet, inter quæ vnum, quod Keplerus irridet, nec iniuria, dum ſcilicet ille pronunciauit. *Rerum naturalium ſtatus reſpicit ſitus ſuorum principiorum, & principia rerum naturalium ſunt occulta.* Quibus, vt notat idem Keplerus, duo dicit: primum repetit id ipſum, quod propoſitum erat: ſecundum ait, cauſam eſſe occultam. Vnde parum ſatisfacit. Alhazenus initio eiuſdem libri quinti nititur id comprobare experimento, mediante baculo, in quo ſignatum ſit punctum nigrum, eoque erecto normaliter ſupra ſpeculum &c. Numero autem octauo, difficultate fortaſſe vexatus, enunciat irriſione digna, præſertim dum ait, *viſus cum acquirit formam per reflexionem, acquirit eam ſtatim ſine certitudine, & acquirit longitudinem per aſtimationem*. Deinde paulò poſt, *viſus acquirit longitudinem per ſyllogiſmum*. Deinde paulò infra, *cùm*, inquit, *viſus comprehendit rem aliquam per reflexionem, non comprehendit longitudinem imaginis niſi per aſtimationem; deinde adhibita diligentia acquirit longitudinem, & verificat per ſyllogiſmum per magnitudinem rei viſæ, & angulo pyramidis, ſuper quam forma reflectitur ad viſum.* Si verificare per ſyllogiſmum referat ipſe ad viſum, facit viſum ipſum rationalem, ſi hoc autem eſt ſapere, dicat mihi quæſo quid nam ſit deſipere. Vitello non meliora protulit, non eodem tamen modo ratiocinati ſunt de refractione loquentes, cùm nihilominus videatur cauſa communis. Alij autem multa dixerunt. Keplerus, vt veram huius rei cauſam afferat, cuius ignorationem, in hac doctrina maculam fœdam eſſe dicit, præmittit veluti neruum demonſtrationis, quòd in planis ſpeculis anguli, quibus res videntur ex repercuſſu, non mutantur in conuexis, & concauis, & medijs denſioribus, omninò mutantur &c. affert definitionem imaginis deſumptam ab Opticis, adiungens, imaginem eſſe viſionem rei alicuius cum errore facultatum ad viſum concurrentium coniunctam, & imaginem per ſe penè nihil eſſe, & potius imaginationem dicendam, imò compoſitam eſſe rem ex ſpecie coloris, vel lucis, reali, & quantitatibus intentionalibus, & alia conſimilia addit, quæ hic ſubijcere minimè videtur operæ pretium; vel enim ſunt mera figmenta, & parum Philoſopho digna, vel nihil faciunt ad inſtitutum. Sed his prætermiſſis, paucis rem expediemus.

Primùm illud præmittendum, nempe quòd oculus, res aſpectabilis, & punctum reflexionis ſint in vna, eademque ſuperficie, quam Optici dicunt tribus punctis definiri, ſcilicet centro viſus, puncto rei viſæ, & puncto repercuſſionis, vel refractionis, quod demonſtrare elementare eſt; Tria enim puncta lineis rectis connecti poſſunt, vnde fit triangulum, cuius vnam partem in vno plano, aliam in alio eſſe non poſſe demonſtrauit Euclides lib. vndecimo; itaque planum per illa tria puncta tranſibit. At verò aliud, videlicet huiuſmodi planum erectum eſſe ſupra ſpeculi ſuperficiem, & huic ad rectos angulos inſiſtere, demonſtrandum ſuſceperunt aliqui, alij tanquam axioma protulerunt, cùm tamen re vera demonſtrabile ſit. Animaduertendum eſt, quod pluribus tractandis deſeruiet, Nobis aliquid demonſtrandum ſuſcipientibus opus eſſe præ oculis habere medij genus opportunum, an videlicet illud ſit purè Mathematicum, an Phyſico-Mathematicum, quod ex re propoſita facillimum erit deprehendere; ſi enim fuerit permixta ex magnitudine, & motu, vel tempore &c. medium idoneum Phyſico-Geometricum erit; ſic in re, de qua agimus; proponitur enim demonſtrandum planum tranſiens per illa tria puncta, perpendiculariter erectum eſſe ſpeculi ſuperficiei, quod ita eſſe experimento conſtat, quæritur tamen cauſa. Medium adhibendum Phyſico-Geometricum erit, ſiquidem puncta, lineæ, planum ad Geometram pertinent, ſed res ſpectabilis, quatenus huiuſmodi, & prout effundit ſui ſimulacrum per reflexionem ad viſum, Phyſicum eſt. Vnde medium Phyſico-Geometricum eſſe debet.

Perperam Keplerus reprehendit Alhazenum, & Vitellonem, quatenus id demonſtrare tentantes dixerint, naturam per breuiſſimas lineas operari; irridens enim illos. *Atqui* inquit *hæc opera non ſunt formæ conſilio vtentis, aut finem reſpicientis, ſed materiæ ſuis Geometricis neceſſitatibus adſtrictæ.* At horologium conſilio non vtitur, nec finem reſpicit, & nihilomi-

Euclides ſupradicta male demonſtrauit.

Præmittenda quædam.

Prop. 2. lib. 11

Keplerus reprehenditur.

hilominus regulari motu per reuolutionem rotarum index, in orbem actus horas ſingulas, earundemque partes accuratè deſignat; ad id enim auctoris conſilio, non eiuſdem horologij opus fuerat: hinc ea, quæ natura conſtant, etſi omni conſilio deſtituta, facilè comprehendere licet, quonam pacto id præſtent, quod alioquin videretur conſilio referendum acceptum; namque naturæ opus rectè quidem opus intelligentiæ dicitur, cui ſat eſt ineſſe conſilium, à quo directa natura, ſimulque conſecuta propenſionem ad finem, quatenus huiuſmodi, etſi non ſibi, auctori tamen perſpectum, ea exequitur, quæ ad ipſius conſecutionem, conducunt. Ita graue per lineam rectiſſimam conſtanti lege deſcendit, telluris immobilitate ſuppoſita; ſic etiam omne corpus luminoſum radios rectiſſimos, etſi omni prorſus conſilio deſtitutum, effundit. Non diſſimiliter aſpectabile immittit radium in ſuperficiem repercutientem, qui breuiſſimus eſt omnium peruenientium ad viſum, (hìc de reflexione loquimur; nam de refractione alibi) & ea quidem eſt ratio, quoniam natura per breuiſſimas lineas operatur, ſed quantum poteſt; idque ſuperius pariter innuimus, hic magis explicandum.

Quorundam deceptio. Decepti quidem ſunt exiſtimantes reflexionis angulum eſſe æqualem angulo incidentiæ, ex eo quia natura contendens operari per breuiſſimas lineas, debeat hunc in modum operari, quaſi aggregatum radiorum incidentiæ, & reflexionis, exiſtentibus æqualibus angulis prædictis, ſit minimum omnium; id enim falſum ſuperius oſtendimus. Rectè tamen philoſophati ſunt arbitrantes, naturam operari per lineas breuiſſimas; propterea quòd hæc per plura non præſtat, quæ per pauciora præſtare valet. Res igitur ita ſe habet, angulus reflexionis æqualis eſſe debet angulo incidentiæ, ob eam, quam ſuperius attulimus cauſam, ſed ſuppoſita horum angulorum æqualitate, natura operari debet per lineas breuiſſimas, & contra operari debet per breuiſſimas lineas, ita tamen vt operationem exerceat cum æqualitate angulorum reflexionis, & incidentiæ. Hoc igitur non eſt cauſa illius, ſed cum eo neceſſariò connexum: vnde in ſpeculo cauo-ſphærico id quoque locum habet, nam aggregatum radiorum incidentiæ, & reflexionis, ſuppoſita angulorum æqualitate, minimum eſt: nec enim minus reperies, ſi anguli illi debeant eſſe inter ſe æquales. Non diſſimili ratione in re, de qua diſſerimus, aſpectabile nequit per reflexum tranſmittere imaginem ſui ad viſum per lineam breuiorem, ſuppoſito quòd angulus reflexionis æqualis debeat eſſe angulo incidentiæ, niſi per lineas deſcriptas in plano perpendiculari ad ſpeculi ſuperficiem; ſi nanque planum ipſum tranſierit, vt neceſſariò tranſire debet, per puncta rei aſpectabilis, & viſus, fueritque inclinatum ad ſuperficiem ſpeculi, rectæ ab hiſce duobus punctis exeuntes facientes angulos incidentiæ, & reflexionis ſuper prædictam ſuperficiem, non faciunt aggregatum minus eo, quod ſupra diximus in plano perpendiculariter erecto, commemoratis angulis inter ſe æqualibus exiſtentibus. Hinc itaque fit, vt huiuſmodi planum debeat ad rectos angulos ſpeculi ſuperficiei inſiſtere. Hoc idem oſtendi poteſt demonſtratione ducente ad inconueniens. His præhabitis.

Duo etiam prænoſcenda ſunt, quorum vtrunque demonſtrabile eſt, videlicet Radium in qualecunque ſpeculum cadentem, anguloſque inæquales facientem, neque in ſe ipſum, neque verſus minorem angulum reflecti. Secundum; radios à planis, conuexiſque ſpeculis reflexos diuergentes, eſſe citrà, conuergentes vltrà; nam de concauis conſtabit &c.

Principale autem ſubſequitur, quòd huiuſmodi conuergentia fiat in puncto rectæ perpendicularis ad ſpeculi ſuperficiem.

Duobus autem modis inſtitui poteſt hypotheſis, vel ſupponendo plana verticalia tranſeuntia per vtrunque oculum, ſiue per extremitates pupillæ vnius oculi, vel planum vnicum &c.

Priori recepta hypotheſi Theorema demonſtrabitur ad eum, qui ſequitur modum; præmiſſis tamen his.

SVPPOSITVM.

Supponendum illud, ſcilicet radios ab aſpectabili incidentes in planum, dum reflectuntur ad ſpectatoris oculos, vel ad extrema diametri pupillæ vnius oculi, ab incidentibus æquales incidentiæ angulos, & à reflexis reflexionis angulos æquales fieri.

THEO-

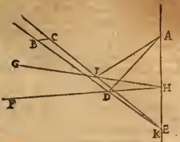
T H E O R E M A.

Exemplum XXXVIIII.

Sit pupilla diameter BC, res aſpectabilis ſit A, vnde cadant radij AD, AI, qui ſuper ſpeculi ſuperficiem DIH reflectantur ad puncta, B,C. Dico radios reflexos BD, CI protractos ad partes D,I, occurrere rectæ cadenti ex A perpendiculariter ad ſpeculi ſuperficiem, in infinitum protracta.

Intelligatur planum tranſiens per puncta B,D,A, quaquauerſum extenſum in infinitum (tranſibit autem, cùm tria hæc puncta in plano ſint) itemq; per puncta C,I,A, tranſibit autem &c. quorum vtrunque cùm tranſeat per punctum A, ſe mutuo ſecabunt, ſitque communis ſectio AK; cumque vtrunque tranſeat per puncta D,I, ſpeculi ſuperficiem ſecabunt, eorundemque communes ſectiones ſint FH, GH.

Reſolutio.



QVoniam igitur radius reflexus BD protractus ad partes D occurrit rectæ cadenti ex A perpendiculariter ad ſuperficiem ſpeculi; at verò AH, ſeu AK eſt [a] perpendicularis ad ſpeculi ſuperficiem; ergo recta BD protracta ad partes D, & AH protracta ad partes H, concurrent [b] verſus eam partem, vbi ſcilicet anguli ſunt minores duobus rectis; ſed angulus, quem facit FH, cùm AH protracta ad partes H, eſt [c] rectus; ergo angulus, quem facit BD protracta ad partes D cum DH, erit [d] minor recto: ſed angulus, quem facit BD protracta ad partes D, cum DH, æqualis eſt [e] angulo BDF; ergo angulus BDF erit minor recto, ſed angulus BDF æqualis eſt [f] angulo ADH; ergo angulus ADH erit minor recto; Quod ita ſe habet; planum enim tranſiens per puncta B,D,A eſt erectum ad ſpeculi ſuperficiem, quemadmodum planum per C,I,A, vt conſtat ex ſupra demonſtratis, quamobrem eorum communis ſectio AK, ſeu AH perpendicularis eſt ſpeculi ſuperficiei; vnde angulus ADH, debet eſſe minor recto.

a ex ſupra demonſtratis. & 19. vndecimi.
b axiom. 23. primi.
c 10 def. pri.
d 32 primi.
e 15. primi.
f ex ſupra demonſtratis.

Compoſitio.

QVoniam igitur planum per B,D,A tranſit, erectum erit [α] ad ſpeculi ſuperficiem, itemque planum per G,I,A erit erectum ad eandem ſuperficiem; ergo eorum communis ſectio AK eidem perpendicularis erit [β] ſuperficiei; ergo faciet [γ] angulos rectos cũ FH, & GH in puncto H; ergo angulus ADH minor erit [δ] recto; ſed angulus BDF æqualis eſt [ε] angulo ADH; ergo angulus BDF erit minor recto; ſed angulus, quem facit BD protracta ad partes D cum DH æqualis eſt [ζ] angulo BDF; ergo angulus, quem facit BD protracta ad partes D cum DH erit minor recto; ſed angulus, quem facit FH cum AH protracta ad partes H, eſt [η] rectus; ergo recta BD protracta ad partes D cum AH producta ad partes H, concurret [θ] verſus eam partem, vbi anguli ſunt minores duobus rectis: ſed AH eſt erecta ad ſpeculi ſuperficiem; ergo radius reflexus BD protractus ad partes D occurret rectę cadenti ex A perpendiculariter ad ſpeculi ſuperficiem &c. Quod oportebat oſtendere.

α ex ſupra demonſtratus.
β 19 vndecimi.
γ 10. def pri.
δ 32. primi.
ε ex ſupra demonſtratus.
ζ 13 primi.
η 10. def pri.
θ 23. axioma primi.

T H E O R E M A.

Exemplum XXXX.

Iiſdem poſitis. *Dico ſecundo, concurſum eſſe in vno, eodemq; puncto.*

Reſolutio.

QVoniam puncta K, & E ſunt vnum, & idem; ergo latus HK æquabitur lateri HE: Eſt autem latus HD æquale lateri HI, vt mox conſtabit, angulus verò DHK æqualis [a] eſt angulo

a 10. def. pr.

angulo IHF, vterque enim eſt rectus, vtpote deinceps rectis AHD, AHI; ergo angulus HDk æquabitur b angulo HIE, ſed angulus CIG æqualis eſt c angulo HIE, & angulus BDF æqualis eſt angulo HDK; ergo angulus BDF æquabitur d angulo CIG, at verò angulo AIH æqualis eſt e angulus CIG, & angulo ADH æqualis eſt angulus BDF; ergo angulus ADH æquabitur f angulo AIH, Quod ita ſe habet ex ſuppoſito.

b 4. primi. c 15. primi. d 1. ax. pri. e ex ſupra demonſtrans. f 1. ax. pri.

Lemma.

Latus DH æquale eſſe lateri IH, ſic oſtendo. *Quoniam enim angulus AHD æqualis eſt angulo AHI, vterque enim eſt rectus, angulus verò ADH æqualis eſt angulo AIH ex ſuppoſito, & latus AH commune eſt vtrique triangulo; ergo latus DH æquabitur a lateri IH.*

a 26 primi.

Compoſitio.

QVoniam igitur angulus ADH ex ſuppoſito æqualis eſt angulo AIH, at verò angulo ADH æqualis eſt α angulus BDF, & angulo AIH æqualis eſt angulus CIG; ergo angulus BDF æquabitur β angulo CIG, ſed angulus BDF æqualis eſt γ angulo HDK, & angulus CIG æqualis eſt angulo HIE; ergo angulus HDK æquabitur δ angulo HIE. Sed angulus DHK æqualis eſt ε angulo IHE, vterque enim eſt rectus, vtpotè deinceps rectis AHD, AHI, eſtque latus HD æquale lateri HI vt oſtenſum eſt; ergo latus HK æquabitur ζ lateri HE ergo puncta K, & E erunt vnum, & idem. Quod oportebat oſtendere.

α ex ſupra demonſtratis. β 1. ax. primi. γ 15. primi. δ 1. ax. pr. ε 10. def. pr. ζ 26. primi.

His præhabitis. Eſto.

Exemplum XXXXI.

THEOREMA.

In quolibet ſpeculo imago apparet in concurſu catheti cum radio ab oculo per reflexionis punctum directè producto.

Patet ex ſupra demonſtratis, nam imago obiecti A eſt in radio BDK, ſeu BDE. Inſuper eadem imago eſt in radio CIE, ſeu CIK, nam K, & E idem punctum ſignificant; ergo imago obiecti A eſt in pũcto interſectionis, quod hiſce characteribus ſignificatur. Sed punctum iſtud eſt, in quo fit concurſus catheti cum radio per reflexionis punctum directè producto; ergo &c.

Quæ autem diximus, ac demonſtrauimus, etiam cæteris ſpeculis ſcilicet concauis, & conuexis aptari poſſunt, & quidem his poſtremis, ſiue imago ſit ante, ſiue ponè ipſum met ſpeculum.

De horum autem ſpeculorum proprietatibus, ac attributis multa dicenda ſuppeterent, à quorum tamen conſideratione, tractationeque nobis eſt abſtinendum, cum in animo ſit tantummodo diſcurrere diuerſas Matheſeos partes, vt oſtendamus in ſingulis tanti faciendum eſſe Analyticum opus, vt inde ſperandum ſit, ne dum Mathematicas demonſtrationes ad veterem candorem redigi poſſe, verùm etiam harum diſciplinarum incrementum, cùm hęc via ſit in primis calcanda ad veritatis inquiſitionem. Nos tamen plura ſcripſimus de re Optica, imò, & in Catoptricis, ac Dioptricis non pauca, huius artis opitulatione, adinuenimus, & ſi Deo placuerit tandem aliquando prodibunt in lucem.

Notãda quædam.

Hìc non prætcribo hoc idem ſatis perſpicuè oſtendi poſſe; ex eo quia quęlibet res aſpectabilis videatur tantæ magnitudinis, taliq; loco, prout tali angulo fuerit inſpecta in tanta diſtantia; quamobrem ſi oculus alioquin conſtitutus ſupra planum vbi ſpeculum, tantundem infra poſitus ſit, in eadem linea perpendiculari rem eandem conſpiciet; at & modo eodem, ſcilicet ijſdem dimenſionibus præditam, & in eadem diſtantia, ſi radij ipſi progredi in directum intelligantur donec cadentibus perpendicularibus ex re aſpectabili occurrant, vbi videlicet rem eandem eodem quidem modo adſpiciet.

Vulgatum Theorema apud Opticos.

Vulgatum eſt apud Opticos Theorema illud, ſcilicet, quod lumen longiùs prouectum ſenſim languęſcat; verùm id non tam eſt proprium luminis, quàm caloris; Vniuerſim igitur iucunda tractatio eſt de facultate vniuſcuiuſque agentis natura conſtantis, in exteriùs actionem ſuam effundentis; qua in re, vt veritatem aſſequi valeamus diligenter oportet aduertere operandi modum ipſius naturæ: Iubet autem mentis aciem in vnum figere, quòd

ſatis

ſatis eſt obuium, nimirum ignem, vt de cæteris idem feratur iudicium, inſtar enim omnium hoc vnum erit.

Communiſſima Philoſophorum ſententia.

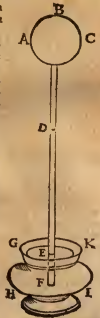
Inualuit ferè toto terrarum orbe ſententia, quæ non obſcuri nominis Philoſophantium animis inſedit, videlicet ignem proprijs finibus coercitum ſecundùm ſui ſubſtantiam, effundere actionem ſuam calefactiuam quaquaverſum, atque ſpatium illud vniuerſum, quo-ad porrigi poteſt huiuſmodi actio, ſphæram actiuitatis appellarunt, per quam quidem ipſi intellexerunt effundi actionem accidentariam terminatam ad calorem, vi præſentis ignis eductum è potentia materiæ, tum medij aeris, tum alterius cuiuſque intra fines ſphæræ actiuitatis ipſius, nulla tamen eiuſdem ignis effluente ſubſtantia; ſed quicquid potius caloris eſt effuſum, illud eſſe nouiter eductum de potentia ſubiecti.

Eam eſſe falſam Auctor oſtendit.

Verùm eos omnes quotquot extiterunt, fuiſſe deceptos innotuit experimento quodam, vnde conijcere mihi licuit rem non ita prorſus ſe habere: hac enim in re, vtpotè magni momenti, omni adhibita diligentia, curaque, denique deprehendi, effluere è corpore ignis ſubſtantiam eiuſdem, adeò videlicet, vt cùm aliquid exponitur igni calefaciendum, non ideò calefiat tantummodo, quoniam è potentia materiæ ipſius nouiter eductus ſit calor, quo id calidum euadat, ſed quoniam excipit calidas particulas effluentes ab igne. Experimentum verò, nè nimium digrediar, præſtat in Phyſicam differre.

Experimenti cuiuſdam declaratio.

Obiter tamen illud innuam. Si calefactio ad eum modum contingeret citra particularum effluuium, ſphæricè ſe ſe effunderet, ac proptereà niſi aliquid impedimento eſſet, æquè calor produceretur ſupra, infra, & ad latera; ſecus autem rem euenire Termometri opitulatione deprehendi, ſiquidem illud in diuerſis commemoratis poſitionibus adhibitum, me docuit plus longè caloris deſuper procreari, minus ad latera, & adhùc minus infra ipſum corpus calefaciens. Si quid autem eſſet, vnde quiſpiam arbitrari poſſet, id ex accidenti prouenire, quatenus videlicet aeris circumſtantes partes accurrentes, inferiùs, vtpotè craſſiores, frigidioreſque ſub tenuioribus, atque calidioribus ſurſum auolantibus frigeſacerent difficultatem præoccupaui, obuiam eundo medio inſtrumento ad id opportuno, obuiam inquam eundo aeri circumſtanti, ne hunc in modum accurendo, caloris opus perturbaret.



Quod ſi inde non ſatis exiſtimes confirmatum effluuium ſubſtantiæ igneæ, ex his, quæ modò ſubijciam, crediderim tantum roboris eſſe noſtram ſententiam ſuſcepturam, vt in poſterum nulla de ea futura ſit dubitatio.

Experimentū præclarum, ad confirmandū effluuium.

Eſto ſolitum inſtrumentum, quo locus deſtitutus omni aere efficitur FA BC; hoc enim ſuppono repletum fuiſſe hydrargyro: clauſoque orificio F, digiti applicatione, ipſoque inuerſo inſtrumento, ita vt immerſum ſit clauſum orificium prædictum in hydrargyrum reſtagnans in vaſe GHIK, eiuſque vt tota pars demerſa ſit EF: tunc remoto digito qua data porta ruet hydrargyrum, ac proptereа defluens per orificium F deſcendet ad ſtationem D, ita vt altitudo ED ſit vnius brachij, cum quarta parte. Manifeſtum eſt locum DABC remanere omni aere deſtitutum; quod euidenter colligitur ex eo quia, inclinato inſtrumento EA BC exiſtente tamen orificio F ſemper immerſo, comperiemus hydrargyrum per tubum eleuari ſupra ſtationem D, & quo maior fuerit inclinatio, eo etiam maior ſit eleuatio, donec tandē tota ipſa ſphæra ABC repleta fuerit; at ſi non nihil aeris data opera fuerit relictum, quando ſcilicet clauſum digito fuit orificium F, quod fit quando leniter comprimimus digito orificium ipſum, ita vt dum inuertitur inſtrumentum, permittatur aditus aliquantulum aeri, aſcendet inclinato inſtrumento quidem hydrargyrum, nunquam tamen eo vſque, vt tota ſphæra ABC repleatur impediente aere relicto, ſed conſpicietur ſumma ipſius portio hydrargyro deſtituta, puta in B; De hoc itaque nemini ambigendum. Cum autem hydrargyrum fuerit eleuatum vſque ad ſtationem D, applicato igne ad ſphæram ABC cernitur deprimi hydrargyrum infra D, remoto redit ad priſtinum ſtatum, applicata glacie attol-

litur;

litur, remota ſe reſtituit ad eandem ſtationem D. Si igitur calefactio ſine ſubſtantiæ effluuio contingeret, ſed tantum per qualitatis productionem in ſubiectum, perficitur, dicas mihi quæſo, quod nam corpus eſt in loco DA BC, è cuius materia fuerit eductus calor? certè aer eſſe nequit, cum ibi deſit, aliud non apparet; ergo non niſi effluuium ſubſtantiæ igneæ: hoc enim repletur locus DA BC, dumque ſe ſe dilatat, extrudit hydrargyrum, non ſecus ac ſi tãtum aeris relictum fuiſſet, ita vt, cùm, ſua vi elaſtica maiorem occuparet locum, quàm DA BC, non potuiſſet hydrargyrum ſe continere in ſtatione D, ſed infra; & eo magis infra quo maior aeris copia intus incluſa fuiſſet. Quòd etiam eo magis comprobatum exiſtimo; quoniam cùm aptaſſem intra ſphæram ABC per orificium F filum ferreum, ad cuius extremum erat globulus plumbeus, & admoto igne per aliquod temporis ſpatium, ſtatim extracto filo cum ipſo globulo plumbeo, tangendo illum percepi excalefactum; qua igitur ratione id contingere potuiſſet per ſimplicem qualitatis productionem, ſi iam communi Peripateticorum calculo creditur agens non effundere actionem ſuam in diſtans, niſi prius operetur in medium contiguum, hoc ſe habente veluti conditione, ſi non tanquam id, cui in ſubiecto diſtanti producta qualitas ſuum eſſe debet acceptum referre? Imò id difficultatem adauget, quod globus ille plumbeus apertè cernitur; at qua nam ratione immittit imaginem ſui? ex cuius nam corporis ſubiecta materia illam educit, ſi in illo interſtitio inter globulum plumbeum in medio ſphæræ conſtitutum, & corticem ipſius ſphæræ vitream nullus eſt aer, nec vllum aliud corpus, niſi ibi adſtruxeris effluuium ſubſtantiæ calidæ? ſi quid enim aliud, illud profectò commentitium erit.

Reſponſionis præoccupatio. *Ariſtotelis auctoritas ex 2. de Anima.*

Neque dicas actionem in diſtans effundi præeunte actione in medio, quando hoc adſit, quod ſi deſit, adhuc effundi; his enim non aſtipulabitur Ariſtoteles, qui dum inuehitur in Democritum ſecundo libro de Anima part. 74. reprehendit illum aſſerentem longè melius viſam iri formicam in Cœlo, ſi nullum corpus mediaret inter oculum, & illam, exiſtimans ad viſionem plenum medium requiri.

Ariſtotelis auctoritas ex 4. Metheororum tex. 34.

Cùm igitur eius indolis huiuſmodi corpus eſſe debeat, vt omnia peruadere queat corpora per poros, quibus ſcatent, plus, minuſue pro ſui ſtructuræ ratione; facile mihi perſuadeo illud, aliud non eſſe quidpiam, quàm effluuium igneæ ſubſtantiæ, quod placuiſſe Ariſtoteli licet colligere ex his, quæ ipſe protulit libro 4. Metheororum part. 34. *Sunt autem combuſtibilia* (inquit) *quæcunque habent meatus ſuſceptiuos ignis, & humiditatem in his, qui ſecundùm directum, meatibus, debiliorem igne, quæcunque autem, aut non habent, aut fortiorem velut glacies, & quæ valde viridia ſunt, incombuſtibilia.* Teſtimonio igitur Ariſtotelis intelliges ex corpore comburente expirare tenuiſſimas particulas, ſe inſinuantes in corpora comburenda, & quaſi terebrantes diſſoluere. Præter hoc autem nùm nouiter aliquid producatur, in præſentia nòn quæro.

Ex corporibus omnibus expirare effluuia. *Experimentũ ad id comprobandum, mirabile.*

Sed etiam ex alijs corporibus expirare quidem effluuia ex his, quæ modo ſubijciam facilè intelliges. Exarentur in charta litteræ aceto albo fortiſſimo, in quo tamen dilutum ſit lithargyrium, quarum nullum veſtigium apparebit, his autem exiccatis claudatur primis folijs alicuius craſſiſſimi libri; alia autem charta paretur, quæ aquá illa inficiatur fætida, vbi calx viua cum auripigmento fuerit extincta, hunc autem in modum charta mollis claudatur poſtremis folijs eiuſdem leuiter compreſſi; videbis enim in priori charta litteras conſpicuas breuiſſimo tempore, non ſecus ac ſi attramento ductę fuiſſent. Si quis autem crederet id peragi ſolius qualitatis eductione, is profectò Metaphyſici perſonã aſſumpſiſſe videretur.

Atrum autem colorem illum ex permixtione vnius cum alia ſubſtantia inde mihi ſuaſi, quòd ex admixtione illius aceti cum aqua iam dicta, color ille conſurgit.

Hìc Lectorem monitum velim, ne decipiatur ſi hoc experimentum apud Auctores legerit; cùm ab ipſis haud fideliter relatum fuerit; ad eum enim quem explicuimus modum fieri debet, vt voto reſpondeat euentus. Non ſemel enim illud à nobis felici ſucceſſu factum fuit. De hoc tamen alijſque ſimilibus quamplurimis in Phyſicis diſputandum.

Admonitio!

Illud itidem addendum ſupereſt, quod nedum modò iam dicto contingit effluuium pertingere ad locum diſtantem penetrando folia vt diximus; verùm etiam nullis interpoſitis folijs ſolo intermedio aere, cùm fuerit in debita diſtantia ſuſpenſa charta, iam ſupradicta aqua, diluta, ſubtus verò, vel contra charta altera, in qua deſcripti ſint characteres aceto ſupra relato, poſt modicum enim tempus, prædicti characteres ſe ſe dant in conſpectum, non ſecus ac ſi forent atramento ducti.

Cæterum

Cæterum hæc non ita ſunt vſurpanda, quaſi mihi perſuaſum habeam nullam, agentis naturalis vi, qualitatem procreari, ſiquidem nihil mihi certius hoc naturæ opere, vt in Phyſicis demonſtrabo; nam ſi nulla foret, ſaltem ea, quæ virtus impreſſa dicitur proiecto tributa à proijciente, adeò certa eſt, vt nihil ſupra, quod paulò infra paucis perſtringam, cadem de re cumulatiùs in Phyſicis acturus. Sed hoc nihil foret, niſi etiam aliæ ſuppeterent, inter quas calor ipſe, de quo fit ſermo; Non enim eius vlla foret ſenſatio, niſi & ipſe qualitas eſſet, circa quam ſenſus ſe exerceret, & niſi etiam eadem ſenſatio, veluti qualitas nouiter producta, contingeret; ſiue enim id iuxta Democriti ſententiam, vel ad Anaximandri aures explicare, vel aliquo alio modo contendas, oleum, operamque perdes; Neque enim ſenſationem illam tactus, particularum è tangibili profluentium incurſu in ſenſus organum, vt videbatur Democrito, quatenus videlicet particulæ illæ ſenſus organum percellunt, illudque ſubeunt, neque per neruulorum motum, vt Anaximandro placuit, haud fieri, nullo alio addito ſuo loco mihi operoſum erit oſtendere. Fatendum quidem, vt paulò ſuprà dicebam, effluere calidas ex corpore calefaciente particulas, indeq; ab eo reliqua calefieri, harum exceptione, ſed non citra qualitatis productionem, cùm effluxus ille particularum, ac incurſus earundem in expoſitum calefaciendum, ſe habeat veluti conditio, ac applicatio virtutis ipſius agentis. Commentitium ſiquidem eſt omnino illud, quod pleriſque Scholaſticorum adeò arriſit, vt eorum nemini ſecus rem fieri poſſe, videretur; nimirum calefaciens nihil de propria ſubſtantia effundendo, ſic propriam exercere actionem calefactricem, vt immediatè in ipſum corpus circumſtans, eam effundat, nouiter caloris qualitatem educendo è poteſtate materiæ, eandemque protrahere non diſſimili naturæ lege ad certum ſpatium, quod ſphæram actiuitatis, quatenus in orbem fiat, appellandum duxerunt, quam ſi ſtatuamus, veluti terminum particularum effluentium, rectè ſenſiſſe videbimur, vtpotè quam maximè ad veritatem accedentes. Exigua tamen admodum ea eſt, quam natura præſcripſit qualitatis procreationi, vt ampla admodum particularum effuſioni. Quod autem nos præcipuè præter commemoratum experimentum in hanc duxit ſententiam, fuit animaduerſio habita non tam de reflexionibus, quàm de refractionibus; haud enim facilè nobis videbatur explicari poſſe, qua ratione contingeret, vt cryſtallo terſo, ac expolito expoſito radijs ſolaribus, niſi foret id ſphærica figura donatum, vel ſaltem ex vna parte ſphærica ſuperficie præditum eſſet, quamuis ex alia parte planum, ignis procrearetur. Quid enim confert figura illa ad eductionem caloris, imò & ſubſtantialis formæ ex poteſtate materiæ? Cur ſolares radij in planum cryſtallum incurrentes à tergo non conuergunt, vt inde ignis procreari queat? Vnde eſt quod illa figura lenticularis ad hanc radiorum fractionem deſideretur, ſi lumen atque calor non alia ratione procreatus dicatur, niſi quia agentis vi, nullis affluentibus particulis à corpore calefaciente, ex ſubiectæ materiæ poteſtate fuerit eductus? non ſatis intelligo, quid commune habeat lenticularis figura cum illa qualitatis eductione è poteſtate materiæ: vt itaque ex omnibus corporibus in hac vniuerſa compagine rerũ exiguæ particulæ exeunt, ita vt quodlibet corpus ſua habeat effluuia; ita id eò, vel maximè cenſendum igni conuenire, quod huius ope cæterorum excitantur effluuia, ita planè odoroſa corpora expoſita, vel ſoli, aut igni, vehementius ſua effundunt effluuia, quę alioquin conſtipante frigore, veluti coniecta carceribus, in ſuis ædibus detenta fuiſſent.

Non omnis qualitas negãda eſt.

Inde quoque non mediocriter inualeſcit aſſertum, quoniam rarefactioni maximè conſentaneum videtur, cùm ea ſanè contingat calidis particulis ſubeuntibus corpus, quod ea mediante maiores dimenſiones adipiſcitur, non quod ita contingat, vt nihil de nouo excitetur; hoc enim intolerabile omninò, cùm multa ſequantur incommoda, & ſi qui ſunt, qui hac tempeſtate non pauci, quibus Peripatetica dogmata plus nimio arrident, in id tamen adeò propenſi ſunt, vt tametſi cætera reſpuant ab Antiquis tradita, hoc tamen vnum præ cæteris amplectendum exiſtiment; non aduertentes, illud crimen incurrere quòd minus conſequenter, ſe philoſophatos præbeant; nam intruſis particulis calidis corpus aliquod maiores profectò dimenſiones acquiret, ſed ſi procreari ſubſtantiales formas, ſaltem aliquas, affirment, inextricabilibus difficultatibus premuntur; nam id non euenit, niſi præparata materia, tùm per qualitates primas, tùm per inde cõſequentes, quatenus videlicet magis, vel minus attenuata reddatur, quod à ſimplici partium diſtractione expectandum non eſt, ad id minimè idonea, cùm ſcilicet in ſingulis illis particulis, vtpotè ſubituris ſubſtantialem formam hæc maior, vel minor attenuatio fieri debeat. Quòd ſi hæc ſibi parum negotij faceſſere

ceſſere arbitrentur, quòd fortaſſe in Veterum ſententias abierint de animæ natura, quaſi hæc è plurimis particulis ſit coalita, iam recedunt à cæpto philoſophandi inſtituto, minimè proprijs principijs hęrentes: preterquam quod oneri ſuccumbunt explicandi ſenſationis modum, cùm particularum illarum nulla ſentiendi facultate ſit prædita, nec omnium aggeries, cùm hæc præter ſingulas nihil importet, cui ſentiendi munus acceptum referri poſſit.

De his tamen hactenus.

Pluribus nanque, & experimentis, & rationibus, ſuo loco, quæ diximus confirmare tentabimus.

Interim audiamus, hoc tanquàm certo, ac explorato recepto, quid Philoſophi ſenſerint.

Explicatio quorumdam.

Aliqui igitur actionem illam calefactiuam imminui, ad rei naturam retulerunt. Sed beatiſſimi ſunt, ſi felicitas in cauſarum aſſecutione poſita eſt, iuxta illud. *Felix, qui potuit rerum cognoſcere cauſas:* vnius enim cuiuſque rei ijs admodum obuia cauſa erit, nec multum operoſum videbitur ipſis primordia rerum omnium habere perſpecta.

Aliorum explicatio.

Alij propterea cautiùs loquentes, &ſi re fortaſſe cum ijs conuenirent, ſaltem verbis ſe diſſentire ab ijſdem conati ſunt oſtendere; quamobrem exiſtimàrunt, id aliunde non oriri, niſi ex eo quia actio illa non infinitè procedat, ſed definito ſpatio abſoluatur. Etenim, vt ipſi aiunt, illud eſt naturæ lege præſcriptum, vt vniuerſis agentibus, quorum actio extra effunditur, commune ſit, videlicet quòd ipſorum effectus longiùs producti, ſenſim decreſcant; cauſam exiſtimant, quòd illorum vis certo termino definiatur; hinc enim fit, vt in proximo ſpatio tenuior, quam in ipſa ſit cauſa effectrice, qualitas excitetur, atque adeò in remotiorem partem, tenuiorem quoque agens ipſum qualitatem producat, alioquin in infinitum eius actio progrederetur, ſi videlicet præuia illa qualitas, qua agens afficitur, æqualem ſibi in proximo medio procrearet; ſic & in partibus remotioribus; vnde nuſquam foret ſtatus, ac finis agendi; cùm tamen omnia agentia actiuitatis terminum habeant diſparem, prout ſingulorum virtus, ac energia magis, vel minus breui compendio fuerit definita. Et vt verbo dicam, huius arcani ea cauſa ipſis viſa eſt, quod vnumquodque agens, ſi primum excipias, eá ſit donatum vi, vt fortiùs, atque arctiùs in breuiorem diſtantiam, debiliùs, ac infirmiùs in maiorem, operetur.

Exẽ deinceps.

Si igitur ſpectentur radij exeuntes ab ipſa cauſa effectrice ſigillatim, ſic ſe habent apud ipſos, vt in parte propinquiori ſint robuſtiores, & quò pars fuerit remotior, eò ſint debiliores, atque hunc in modum, vt ipſi loquuntur, vniformi quadam difformitate, tandem langueſcant. Hæc eſt apud illos vniformis difformis effuſio caloris prodeuntis ab igne, quem putant, modo iam explicato, fortiùs operari in propinquius, at verò debiliùs in remotius, vniformi iam dicta difformitate.

Reijcitur.

Sed hæc non cohærent cum ijs, quæ experimento nobis innotuerunt; ſi enim ignis calefacit effundendo particulas propriæ ſubſtantiæ, certè radij calorifici longè aliter explicandi ſunt: dicendum enim, potius calorem illum progreſſione langueſcere, quoniam in ſphæræ modum ſe ſe diffundit, ita vt ignis ſit in centro huiuſmodi ſphæræ, quam cum ijs, actiuitatis appello, vbi ſphæræ nomine, nè Geometricè intelligas ſolidam figuram ab ipſis definitam, quaſi extremum huius ſit ſuperficies, intra quam punctum exiſtat, à quo omnes lineæ ductæ, & ad prædictam ſuperficiem terminatæ ſint inter ſe æquales; non enim ſic ſe res habet, longè ſiquidem acriùs, & in longiorem diſtantiam ignis operatur ſurſum, quàm ad latera, & ad latera magis, quàm deorſum; ſi tamen ſit illi circumfuſus aer; nam alioquin in loco vnde omnis erat aer extruſus à nobis medio hydrargiro, vt fieri ſolet (qua de re ſuo loco) obſeruauimus nec fumum aſcendere, imò deſcendere, nec flammam excitari, quamuis combuſtibile ſui natura facile in flammam abire poſſet; erat enim bombix illita ſuphure; quemadmodum æſca erat, quod adhibuimus pro experimento fumi; quomodo autem accenſio facta fuit, ſuo loco explicabimus. Sed potius ſphæræ nomine intelligenda ſolida quædam figura rotunda, non quaquauerſum æquè ſic ſe habens; ad hanc igitur ſuperficiem vtcumque rotundam actio calefactiua peruenire dicitur, quatenus ad eam radij calorifici iam dicti terminantur. Si ab ipſo igitur igne, veluti centro, rectos vndique radios ad ſuperficiem illam protenſos, animo concipiamus, comperiemus, quò longiùs à medio progrediuntur, eò ſemper ampliori interuallo ab inuicem diuaricari: contra autem eò ſemper arctiùs ſtringi, quò propiùs ad centrum acceſſerint, quoad in vnum tandem ſimul omnes conueniant, ſeque mutuò amplectantur. Si igitur quidpiam fuerit expoſitum igni calefaciendum, dùm

propè

propè fuerit conſtitutum, longè plures radios excipiet, quàm à longè, & eò plures, quò fuerit propinquius, & eò pauciores, quò fuerit remotius, quæ vt meliùs intelligantur, infra poſitum ſchema iuuabit intueri.

Exploratum eſt Opticis validiores radios calorificos à centro Solaris corporis prodire, quod etiam de igne exiſtimandum; non enim cortex tenuis ignea ſphæricæ figuræ æquè calefaceret, ac ignea ſphæra; verùm illud quoque apud ipſos receptum eſt, ſcilicet ab omni puncto Solaris corporis ſecundùm omnem poſitionem radios exire luminoſos, qui tametſi ex vno puncto proueniant, atque adeò ſint diuergentes; nihilominus in tàm longinqua diſtantia, qui in ſpeculi ſuperficie excipiuntur, veluti paralleli exiſtimantur, atque adeò ſpeculi beneficio conuergũtur ſic Mechanici pro proparallelis accipiunt lineas ab extremis libræ coeuntes in telluris centro. Sic Aſtronomi paruos arcus circulorum maximorum in primo Mobili pro lineis rectis, paruum illud diſcrimen negligentes, nec immeritò, nam exiguam differentiam etiam natura negligit. Tria igitur in vniuerſum ſunt radiorum genera, nam aliqui ſunt diuergentes; alij verò conuergentes, & alij paralleli.

Radij exeuntes à centro corporis ſolaris ſunt valídiores.

Tria ſunt radiorũ genera.

Sit corpus aliquod luminoſum, vnde exeant radij tùm à centro, tùm à quolibet ſuperficiei puncto, & quidem generis omnis, nempe diuergentes, conuergentes, & paralleli. Lux effluit per lineas, ſiue radios rectos, & ſine aliqua interruptione à corpore lucente, & Lux ipſa ſphæricè dilatatur, omneque punctum lucidum infinitis lineis, ſeu radijs diffunditur; in huiuſmodi autem effluxu extra lucidum corpus vbique terminum reperire poteſt occurrente corpore tranſitum impediente; hic autem effluxus fit ſecundùm trinas dimenſiones. Hæc incidens in opaca, vel denſa non quieſcit, ſed reflectitur angulis incidentiæ, & repercuſſionis æqualibus in oppoſitã partẽ, hæc ipſa verò coarctari, & condenſari poteſt in punctum.

Explicatio ſupra dictorum.

His autem præhabitis conſideremus ſchema infra.

A punctis ſuperficiei corporis luminoſi, cuius centrum A, exeunt radij triplicis generis, vt diximus, effuſio verò hæc hactenus non benè fuit explicata, nam keplerus arbitrabatur rem ſic ſe habere.

Sicuti ſe habent ſphæricæ ſuperficies, quibus origo lucis pro centro eſt amplior ad anguſtiorem, ita ſe habet fortitudo, ſeu denſitas lucis radiorum in anguſtiori, ad illam in laxiori ſphærica ſuperficie, hoc eſt conuerſim.

keplerus haud benè de intenſione locutus.

Si radij non niſi forent diuergentes, rectè quidem Keplerus rem explicaſſet, ſed nec ipſe, nec alij id demonſtrarunt, quod nos in præſentia præſtandum ſuſcepimus. Vnde ratio virtutis ſuperficiei minoris ſphæræ, cuius centrum ſit corpus lucidum, vt eſt ad ſuperficiem ſphæræ maioris, ita reciprocè eſſet virtus ad virtutem: ſed ne dum ad radios diuergentes reſpicere oportet, verùm etiam ad alios, quibus natura vtitur; Res autem videtur ſic explicanda. Sint radij diuergentes AL, AM intercipientes arcum LM peripheriæ maioris, itemque EG peripheriæ minoris: intelligantur ductæ EH, GK parallelæ rectæ AI biſſecanti arcus LM, EG, itemque BD in punctis I, F, G; manifeſtum eſt, longè plures radios excipi in EG, quàm in HK, vnde corpus conſtitutum in EG, ideò plus calefit, quàm ſi fuerit collocatum in HK, quia ibi plures radios excipit diuergentes (æque enim parallelos) quàm hic. Si virtutem lucis in lineis ſpectare velimus, eam eſſe rationem ipſius in EG ad eandem in LM, quæ eſt reciprocè arcus LM ad arcum EG, hic demonſtrare tentabimus. His tamen præmiſſis.

Definitio Prima.

Diuaricationes radiorum ſunt eorundem radiorum interualla accepta in circumferentijs, ad quas è circulorum centris idem radij perueniunt.

Definitio Secunda.

Similes diuaricationes dicuntur, quæ accipiuntur penes interualla ſimilia circumferentiæ vnius, & alterius circumferentiæ.

THEOREMA.

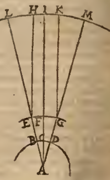
Si virtutis intenſio attendatur in lineis. Eadem eſt ratio arcus ad arcum ſimilem reciprocè, quæ eſt intenſionis ad intenſionem virtutis.

Exemplum XXXXII.

Sit luminoſum in A, vnde profluant radij AL, AM vſque ad circumferentiam LM, ſic etiam arcus EG, cuius centrum ſit idem A. Erit autem arcus LM ſimilis arcui EG, vt conſtat ex Elementis.

Dico, vt eſt arcus LM ad arcum EG, ita eſſe reciprocè intenſionem virtutis in EG ad intenſionem virtutis in LM.

Reſolutio.



QVoniam igitur eſt vt arcus LM, ad ſimilem arcum EG, ita reciprocè intenſio virtutis in EG ad intenſionem virtutis in LM; ſed vt diuaricatio radiorum in LM ad ſimilem diuaricationem radiorum in EG, ita reciprocè eſt intenſio virtutis in EG ad intenſionem virtutis in LM; ergo a vt eſt arcus LM ad ſimilem arcum EG, ita diuaricatio radiorum in LM ad ſimilem diuaricationem radiorum in EG. Quòd ita ſe habet; diuaricatio enim radiorum in arcu maiori attenditur penès interualla radiorum ſimilia ijs, quæ ſunt in arcu minori, vt autem eſt vnum antecedentium ad vnum conſequentium, proportionalibus (ſimilia autem illa interualla proportionalia ſunt) ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia, hoc eſt arcus ad arcum.

a 11. quinti.

Lemma.

QVod autem vt diuaricatio radiorum in LM ad ſimilem diuaricationem radiorum in EG, ita reciprocè ſit intenſio virtutis in EG ad intenſionem virtutis in LM, ſic oſtendo. *Quoniam enim diuaricatio radiorum in EG, quantum minuitur reſpectu diuaricationis in LM, tantundem intenſio virtutis in EG augetur reſpectu virtutis in LM, & quantum augetur diuaricatio in LM reſpectu diuaricationis in EG, tantundem minuitur virtus in LM reſpectu virtutis in EG; propterea erit vt diuaricatio in LM ad ſimilem diuaricationem in EG, ita reciprocè intenſio virtutis in EG ad virtutis intenſionem in LM, & contra.*

Compoſitio.

QVoniam igitur eſt vt arcus LM ad ſimilem arcum EG, ita diuaricatio radiorum in LM ad ſimilem diuaricationem radiorum in EG ſed vt diuaricatio radiorum in LM ad ſimilem diuaricationem radiorum in EG, ita reciprocè eſt intenſio virtutis in EG ad intenſionem virtutis in LM; vt oſtenſum eſt; ergo vt eſt arcus LM ad arcum EG, ita reciprocè intenſio virtutis in EG ad intenſionem virtutis in LM.

SCHOLION.

Notãda quædam.

Natura vtitur radijs diuergentibus, adeò vt ſegmenta maioris arcus, ne dum ſimilia ſint ſegmentis minoris, atque adeò proportionalia; ſed etiam illa, & hæc inter ſe ſint æqualia, vnde ſuperior demonſtratio procedit; ſed hoc non neceſſarium ad illam; cùm alioquin etiam vim habeat, ſine huiuſmodi æqualitate.

Quæ autem diximus de ſimilibus arcubus, circumferentijs integris accommodari poſſunt.

Quòd ſi in ſuperficiebus conſideretur virtus, ea erit ratio intenſionis, ad intenſionem virtutis, quæ eſt reciprocè partis ſuperficiei ſphæricæ ad ſimilem partem alterius ſuperficiei ſphæricæ.

COROLLARIVM.

EX hactenus demonſtratis colligitur, quòd ſi virtus ſpectetur in lineis, ratio virtutis in circumferentia minori ad virtutem in circumferentia maiori, reciprocè eſt, vt ſemidiameter

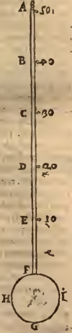
meter maioris, ad ſemidiametrum minoris, hoc eſt diſtantia maior ad diſtantiam minorem. Cùm enim demonſtratum ſit, intenſionem virtutis in arcu EG ad intenſionem in arcu ſimili LM, eſſe vt eſt arcus LM ad ſimilem arcum EG, hoc eſt vt circumfererentia integra ad integram circumferentiam, hoc eſt vt ſemidiameter AI ad ſemidiametrum AF, hoc eſt vt diſtantia ad diſtantiam; propterea erit, vt intenſio virtutis in EG ad intenſionem virtutis in LM, ita diſtantia AI ad diſtantiam AF.

In ſuperficiebus autem, quoniam ſuperficies ſphærica ad ſphæricam ſuperficiem eſt [a] vt circulus maximus ad circulum maximum; circulus autem ad circulum [b] eſt in duplicata ratione ſemidiametrorum, ergo ſuperficies ſphærica ad ſphæricam ſuperficiem eſt in duplicata ratione ſemidiametrorum. Erat autem intenſio virtutis in ſuperficie ſphærica ad virtutis intenſionem pariter in ſphærica ſuperficie, reciprocè vt ſuperficies ad ſuperficiem, erit etiam reciprocè in duplicata ratione ſemidiametrorum.

a Archimedes lib. pri. de ſphæra, & Cylindro pro. 30.
b Euclides lib. 1.

Hæc porrò demonſtrata rectè videntur ex hypotheſi, quòd radij non ſint, niſi diuergentes. in ordine ad quos hactenus dicta procedunt; propterea ſi cæteri non ſunt negligendi, ſecus philoſophandum: Vnde cùm nos hæc meditaremur ad explorandum naturæ progreſſum, in operando ſaltem in producendo calore, operæ eſſe pretium arbitrati ſumus aliquod inſtrumentum conſtruere, cuius beneficio, ſi non præciſa ratio (hæc enim ab experimentis non eſt expectanda) ſaltem quàm proxima compararetur. Vnde neglecto Thermometro vulgari, velut inepto, aliud excogitauimus, fierique curauimus. Illud autem aduertimus minimè quidem idoneum, quoniam vini ſpiritus incluſus non ita ſcandet gradus, in quos fiſtula diuiſa eſt ſecundum medietatem Arithmeticam pro ratione graduum caloris ambientis ſecundùm eandem medietatem; plus enim caloris requiritur ad aſcenſum graduum fiſtulæ e. g. à trigeſimo quinto, vſque ad quadrageſimum, quàm à trigeſimo, vſque ad trigeſimum quintum; tunc enim aer magis compactus eſt, ac propterea magis reſiſtit condenſatione ſui, ſpiritui aſcendenti, atque vrgenti, caloris energiæ. Quod autem de aſcenſu à calore, ratione incluſi aeris diximus, illud idem de deſcenſu ſuo modo à frigore ratione ipſiuſmet ſpiritus magis reluctantis condenſationem, intelligendum, cùm ſcilicet ad infimas partes peruenerit.

Supratradita rectè procederent, ex hypotheſi, quòd natura, non niſi radijs diuergentibus veteretur.



Quæ, vt melius intelligantur Sit Thermometrum, vt à latere apparet in ſchemate, cuius fiſtula AF, diuiſa in quinquaginta partes æquales, ſphærula autem FHGI vini ſpiritum incluſum continens, qui vi caloris aſcendat per ſingulos gradus, itaut cùm peruenerit ad E, decem gradus confecerit, ad D, viginti, ad B quadraginta &c. hic enim eſt caloris effectus, cuius eſt rarefacere, ſi itaque aliquo gradu caloris peruenerit ad C, deinde aucto perueniat ad punctum medium inter C, & B, hoc eſt ad trigeſimum quintum gradum, iterum aucto perueniat ad punctum B, ſcilicet ad gradum quadrageſimum; nè putes incrementum caloris, quo vini ſpiritus peruenit à gradu trigeſimo ad trigeſimum quintum, æquale eſſe incremento, quo ſpiritus peruenit à trigeſimo quinto vſque ad quadrageſimum; ſecundâ enim vice ſpiritui aſcendenti plus obſtat aer, vtpote magis conſtipatus, quàm aſcendenti prima vice, ac propterea plus caloris requiritur in ſecundo aſcenſu, quàm in priori, quod autem de primis gradibus dico, illud idem de ſingulis intelligas velim, quodque de calore pronunciaui, ſuo modo etiam de frigore in deſcenſu eiuſdem ſpiritus, eſt vſurpandum. Verumenimuerò Florentię cùm hæc meditaremur, intenti prorſus naturæ operibus indagandis, hoc inſtrumentum tanquàm minus idoneum reijciendum dixi S. Principi Leopoldo, cui ſimul etiam addidi, ad naturæ progreſſum inueſtigandum in ijs, quas exerit operationes, alio eſſe opus inſtrumento, quod me iam eſſe meditatum aſſerui. Eius autem ſtructurã aggreſſus, tũe ibi abſoluere non potui coactus illicò inde diſcedere, velut accerſitus à S. Republica ad Philoſophiam è Prima ſede profitendam in Patauino Lyceo; iterum propterea ad idem rediens, illud fieri Venetijs curaui; eſt autem eâ lege conſtructum, vt longè ſit diuerſa graduum partitio, vnde fit, vt optimè inſeruiat ad indagandos gradus qualitatis, quos agens natura conſtans

Explicatio ſupradictorũ.

Termometrũ nouiter ab Auctore adinuentum; exquirite repræſentans.

ſtans in diuerſis partibus propriæ ſphæræ actiuitatis producit. Vt ſi fuerit conſtitutum agens calidum in puncto A, illudque calorem effundat vſque ad extremum E, id, quod conſtruxi inſtrumentum, conſtitutum e.g. in punctis B, C, D, E, monſtrabit, quæ nam ſit ratio caloris in puncto B ad calorem in puncto C, & eius, qui eſt in C, ad illum, qui eſt in D, &c. quo opere non pauca nos adinuenimus, vnde maximè naturæ quidem operantis leges innoteſcunt.

A B C D E

Thermometrũ alterum, exquiſitius differentias oſtẽdens.

Hìc tamen non præteribo hanc eandem inſtrumenti ſtructuram, à me nouiter excogitatam, adhibitam aliquando fuiſſe in eo Thermometro, quod caloris, ac frigoris differentias, non per ſpritũ vini vndequaque concluſũ, oſtendit, ſed per aquã aſcendentẽ, inuerſo inſtrumento, cuius tubus orificium habet apertum, per quod videlicet aqua, in quam illud immerſum eſt, aſcendit, quatenus aer intra contentus alterationem ſubit caloris, vel frigoris, quam in priori Thermometro vini ſpiritus ſubibat; ita vt in hoc aer eo munere, quo in illo vini ſpiritus, fungatur. Hoc autem conducit in primis ad minimas internoſcendas differentias caloris, & frigoris; propterea quod tenuiſſimum aeris corpus exiguo calore attenuatum, amplitudinem oſtentat, quam vini ſpiritus, non niſi maiori copia eiuſdem qualitatis affectus, præſtare queit; vt enim illud rarioris texturæ eſt, ita magis peruiũ effluuijs. Nihil autem refert, quòd frigus negatiuum, vel poſitiuum quidpiam exiſtimes: vtcunque enim ſe res habeat, idẽ contingat neceſsè eſt; quod enim corpus per intruſionem frigidarũ particularum ſecundùm diuerſam poſitionem, & ordinem, variaſque figuras obtineret, per calidas exeuntes particulas non diſſimili ratione conſequitur. Vtrinque igitur dimenſionum decretio.

Hiſce itaque inſtrumentis adhibitis, quod ob permixtionem diuerſorum radiorum *multiplicis ordinis*, vt paulò antea dicebamus, demonſtratione non innoteſcit, facile, ſi non præcisè, quod ab experimentis expectandum non eſt, vt ſuperiùs innuimus, ſaltem quàm proximè ſedulitate conſequimur.

Multorum error.

His demonſtratis, de generatione ignis ope reflexionis agendum. Hìc itaq; conſiderandum, haud mediocriter pleroſque deceptos fuiſſe, exiſtimantes ignem eſſe tantummodo, vbi lucere conſpicitur, vel vbi ſaltem comburit; Cùm tamen quaquauerſum diffuſus ſit ſecundùm tenuiſſimos radios, vbi nec lucet, nec ipſa combuſtio contingit, quæ alioquin eius perhibetur character; propterea quod radij non ſunt adeò denſi, vt par eſſet; quò enim denſiores ſunt, eò etiam intenſiùs ſua munera obeunt: vt igitur ignis generetur, curandum eſt radios ipſos, alioquin vel multitudine paucos, vel nimium diuergentes, vel ſi veluti parallelos, vt ſolares, ad conuergentiam tantam redigi, quantam ignis comburens expoſcit; quod cùm paſſim à radijs ſolaribus beneficio ſpeculi concaui contingere videamus, quatenus pertinet ad inſtitutum, cùm in Catoptricis verſemur, experientes Artificium Analyticum, paucis nonnulla complectemur.

Claudij Berigardi ſententia.

Quoniam verò de procreatione ignis per repercuſſum à ſpeculo concauo, nonnulla dicturi ſumus, plurima ſilentio prætereuntes, velut ab inſtituto non parùm aliena, ſolùm id non inconſultò commemorandum duximus, huiuſmodi repercuſſum, de quo loquimur, apud Claudium Berigardum, incomparabilis eruditionis virum, non eſſe propriè inſtar illius, quem plurimis corporibus contingere paſſim oculis vſurpamus: Corpora ſiquidem, dicebat ipſe, repercuſſionem propriam ſubeuntia, vt globuli eburnei, vitrei, fluuiales calculi, reſilire nos docuit experientia tantummodò compreſſu partis illius, in qua ſit contactus; nã hac ſubitò redeunte ad priorem ſtatum, velut ab arcu partes aliæ repercutiuntur: vnde globuli plumbei, aliaque corpora, quæ compreſſa ad priorem figuram non redeunt, reſilire nequeunt. Liquet autem lucidi corporis effluuium, quod diffuſum per medium, nomine luminis donatur, haud particulis conſtare, quæ modo iam explicato comprimi vllo modo queant; quamobrem propriè ea repercuti eſt inficiandum; ſolumque concedendum interiecto corpore, quod nec illud recipere, nec retinere, quodam communicationis, ſeu mixtionis amore valet, ad parem angulum diffundi, quoniã ſcilicet in ea incidit, quæ directum greſſum inhibent. Hæc tamen ipſa diffuſio admodum obſcura eſt; niſi eam reflexionem dicas; ad quam profectò ſolùm id videtur deſiderandum, quòd globuli ipſi, dum in obſtaculum incurrunt, non cedant; quòd autem cedendo poſſint ad priſtinam redire figuram; in quibuſdam corporibus facilior expoſcit reflexio. Hunc itaque in modum dum ſolares

lares

lares radij in expoſitum ſpeculum incurrunt, reſilire poterunt, atque inde ignem procreari, ſi videlicet ex huiuſmodi repercuſſu ad ſpeculum, velut æquè diſtantes incurrunt, ſic vniantur, vt conuergentes facti ſui conditionem, quam obtinent in illo perenni luminis fonte, vnde prodeunt, quam proximè conſequantur. Sed hæc fortaſsè nimis, proximum eſt, vt aliqua de radijs, deque ipſius luminis effuſione non nulla breuiter hìc ſubijciamus.

Primum autem ſe ſe offert ſpeculum concauum ſphæricæ ſectionis, in cuius gratiam hæc ſubiciemus.

Qui de his hucuſque tractarunt fœdam huic diſciplinæ maculam inuſſiſſe videntur; modo enim demonſtrationes contexentes ſumunt radios ſolares, vt Geometricè parallelos, indeque ſuas demonſtrationes deducunt; modo verò non vt Geometricè parallelos, ſed potius, vt à centro Solis, vel eius ſuperficiei puncto exeuntes, tanquàm diuergentes ſupponunt, ex qua ſuppoſitione, ad demonſtrandum progrediuntur. *Malè hanc matheſeos partem plerique tractarunt.*

THEOREMA.

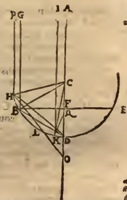
Exemplum XXXXIII.

Si in ſpeculum concauo-ſphæricum radius parallelus ei, qui per ſpeculi centrum, extra tamen ſextantem eiuſdem incideret Dico reflexum eius extra ſpeculum cadere.

Sit ſpeculum HDE, cuius centrum C, per quod tranſeat radius AD: ſpeculi ſextans ſit BD, radius verò PH parallelus ipſi AD incidat in H, extra ſextantem BD. Dico eius reflexum cadere extra ſpeculum.

Intelligatur HO radius reflexus ipſius PH.

Reſolutio.



QVoniam igitur HO cadit extra HD occurrens radio AD protracto ad partes D; ergo angulus CHO, maior erit angulo CHD, ſed angulus CHD æqualis eſt [a] angulo CDH; ergo angulus CHO maior erit angulo CDH, Sed angulus HCO æqualis eſt angulo CHO; nã angulus HCO æqualis eſt angulo PHC, ob parallelas, angulus incidentiæ æqualis eſt ãgulo reflexionis, ac ob id PHC, ipſi CHO, ergo angulus HCO, maior erit ãgulo CDH. Quod ita ſe habet, eſt [b] enĩ angulus HCO, maior angulo BCO; angulus autem BCO, ſeu BCD, æqualis eſt [c] angulo CDB; ergo angulus HCO, maior erit angulo CDB; ac propterea multò maior angulo CDH.

a 5. primi.
b 1. axioma primi.
c 5. primi.

Compoſitio.

QVoniam angulus HCO maior eſt angulo CDH, [α] ſed angulus HCO, æqualis eſt angulo CHO; [β] ergo angulus CHO, maior erit angulo CDH; ſed angulus CHD, æqualis eſt [γ] angulo CDH; ergo angulus CHO, maior erit angulo CHD; ergo HO, cadet extra HD &c. Quod oportebat oſtendere.

α Vt ſupra oſtendimus.
β Vt ſupra demonſtratũ eſt.
γ 5. primi.

THEOREMA.

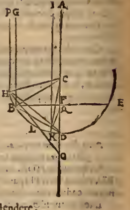
Exemplum XXXXIV.

Si fuerit ſpeculum cauo-ſphæricum; per cuius centrum radius aliquis inciderit in illud, huic autem radio parallelus alter incidat in terminum ſextantis, cuius initium punctum eſt, per quod incidit radius per centrum. Dico, radium incidentem in ſextantis terminum prædictum, reflecti ad eiuſdem terminum alterum.

Repetatur ſuperius ſchema, in quo ſpeculum BDE, cuius centrum C, radius per centrum AD, ſextans BD, diametri quarta pars DF, radius autem GB incidens in ſextantis terminum B. Dico hunc reflecti ad punctum D, ſecundò, & reliquos omnes radios inter GB, & AD parallelos incidentes in ſextantem BD, reflecti in ſegmentum FD.

 Reſo-

Reſolutio.



a ex ſupra demonſtratis.
b 3. ax. primi.
c 29. primi.
d 1. ax. pri.
e 6 primi.
f ex elem. tis.

QVoniam igitur radius GB reflectitur ad punctum D; ergo angulus GBH æqualis erit [a] angulo DBL; at verò angulus CBH æqualis eſt angulo CBL; ergo reliquus CBG æqualis eſt [b] reliquo CBD, ſed angulus CBG æqualis eſt [c] angulo BCD; ergo angulus CBD ęquabitur [d] angulo BCD; ergo BD æquabitur [e] CD. Quod ita ſe habet: eſt enim BD ſubtendens ſextantem circumferentiæ, atque adeò æqualis [f] ſemidiametro CD.

Compoſitio.

α ex elem. tis.
β 5. primi.
γ 29. primi.
δ 1. ax. primi.
ε ex ſupra demonſtratis.

QVoniam igitur BD ſubtendit ſextantem circumferentiæ, propterea æquabitur [α] ſemidiametro CD; ergo angulus CBD æquabitur [β] angulo BCD. Sed angulus CBG æqualis eſt [γ] angulo BCD; ergo angulus CBG ęquabitur [δ] angulo CBD. Sed angulus CBH æqualis eſt angulo CBL; ergo reliquus angulus GBH æquabitur reliquo angulo DBL; ergo radius GB reflectitur [ε] ad punctum D. Quod oportebat oſtendere.

Exemplum XXXXV.

THEOREMA.

Secundò ijſdem poſitis. *Dico, reliquorum radiorum, quorum quilibet prædictis duobus eſt parallelus, nullum per reflexionem aſcendere ſupra punctum F, vbi videlicet CD ſemidiameter bifariam diuiditur.*

Sit acceptus quicunque radius IK incidens in punctum K, & quia reflectitur verſus radium AD, occurret illi: occurrat in Q, agatur KQ, itemque CK.

a 3. ax. pr.
b 29 primi.
c 1 ax. primi.
d 6. primi.

Quoniam igitur angulus IKL æqualis eſt angulo QKD, ex ſupra demonſtratis, angulus
verò CKL æqualis eſt angulo CKD; ergo reliquus angulus IKC æquabitur [a] angulo reli-
quo CKQ. Sed angulus IKC æqualis eſt [b] angulo KCQ; ergo angulus KCQ æquabitur [c]
angulo CKQ; ergo latus CQ æquabitur [d] lateri KQ; ergo CQ non poteſt eſſe æqualis CF;
nam & QK deberet eſſe æqualis QD; quare CQ plus Qk foret æqualis CD, atque adeò foret æqualis CK, contra vigeſimam primam primi.

At neque CQ poteſt eſſe minor, quàm CF, nam QK deberet eſſe minor, quàm DF, ſiquidem CQ, Qk ſunt æquales; item CF, FD ſunt æquales; quamobrem aggregatum ex CQ, QK foret minus ipsâ CD, ac propterea, & ipsâ CK, quód eſt contra 21. primi.

Aliter breuiùs. Quoniam latera CQ, Qk ſemper debent eſſe æqualia, propterea punctum Q, nunquam cadet in F; namque latus Qk, ſiquidem æquale ipſi CQ, deberet eſſe æquale FD, contra octauam tertij.

In ſpeculo cauo-ſphærico non ſit vnio in puncto, vt in habentibus conicam ſectionem.

Inſuper non poteſt cadere ſupra F; ſi enim caderet, ipſa CQ non foret æqualis QK, alioquin QK foret minor, quàm QD, contra 8. tertij.

In cauo-ſphærico itaque ſpeculo non fit vnio in puncto, vt, ſuperiùs oſtenſum fuit; in ſpeculis autem, quorum forma ſectio conica eſt, ſecus euenit; Et ad parabolicum quod attinet id iam demonſtratum fuit ab alijs, quatenus oſtenſum eſt parallelas axi in parabolam ad punctum reflecti, inter quod, & verticem ipſius paraboles interiecta linea, æqualis eſt quartæ parti lateris recti, vnde.

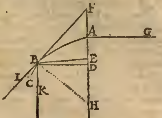
Exemplum XXXXVI.

THEOREMA.

Omnes radij ſolares in ſpeculum concauum à parabola quacunque circa manentem axem circumducta procreatum, incidentes ea lege, vt axi æquidiſtent reflectuntur ad vnum, ac idem axeos punctum quod videlicet à vertice ſpeculi diſtat interuallo quarta partis lateris recti illius parabolæ, quæ ſpeculum ipſum deſcribit.

Sit

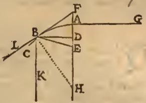
Sit coni cuiuslibet parabola ABC, cuius axis FD: recta verò iuxta, quàm poſſunt ordinatim applicatæ, ſeu quod idem eſt latus rectum, AG, cuius quarta pars ſit AE, & à quouis ſectionis puncto B, ducta ſit BK parallela ipſi FD. Oſtendendum eſt rectam KB reflecti ad punctum E, adeo vt angulus incidentiæ ſit æqualis angulo reflexionis.



Et quoniam æqualitas angulorum incidentiæ & reflexionis attenditur penès angulorum æqualitatem, qui fiunt à rectis KB, EB, cum recta tangente parabolen in puncto B, perinde erit ac ſi oſtenderimus rectam KB, ita reflecti in B ad punctum E, vt ducta FL tangente parabolen in B, angulus KBL æqualis ſit angulo EBF.

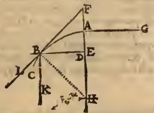
Verùm, vt non vna eſt hypotheſis, ita nec etiam vna erit reſolutio. *Prout multiplex hypotheſis, ita multiplex reſolutio.*

Vel primò ſupponi poteſt quod ãgulus FBE æqualis angulo LBK, vt quæſitũ ſit, ſegmentũ AE æquale eſſe quartæ parti lateris recti AG, vt verum, quod reſoluendo offendimus ſit, quòd AE ſit quarta pars lateris recti AG; inde enim regrediendo ſyntheticè in illud incurremus, vnde diſceſſimus, quòd angulus FBE æqualis ſit angulo LBK.



Vel ſupponi poteſt, quòd AE ſit quarta pars lateris recti AG, vt in illud incurramus, quòd angulus FBE ſit æqualis angulo LBK.

Et reſolutio etiam variari poteſt, prò variatione præparationis, quod in omni Theoremate reſoluendo eſt obſeruandum, qua in re magnopere curandum eſt, vt quàm ſimpliciſſima ſit præparatio; quò enim ſimplicior ipſa extiterit, eò etiam commendabilior eſt reſolutio: Vnde aliqui irridendi ſunt, qui theorema iã ab alijs reſolutũ, cùm ipſi quoque reſoluerint, vt aliquam laudem conſequerẽtur, ſe faciliùs id oſtendiſſe iactant, non aduertentes implicatiori vſos fuiſſe præparatione; vnde fieri non poterit, vt ſimplicior, vel facilior ſit reſolutio, cæteris tamen paribus &c. *Reſolutio variari poteſt, pro varietate præparationis.*



Si prior ſtatuatur hypotheſis ſic reſolutio ſe habebit.

Intelligatur ducta BD ordinatim ad diametrum applicata.

Reſolutio.

QVoniam igitur angulus LBK æqualis eſt angulo FBE, ſed angulus LBK æqualis eſt angulo BFE ergo angulus FBE æqualis eſt angulo BFE; ergo latus BE [a] æquabitur lateri FE; quare quadratum BE æquabitur quadrato FE, ſed quadratum BE æquale eſt [b] quadrato BD, vnà cum quadrato ED; ergo quadratum FE æquabitur [c] quadrato BD, vnà cum quadrato ED; ſed quadratũ FE æquale eſt [d] quadruplo rectangulo DAE, vnà cum quadrato ED; ergo quadruplum rectangulum DAE, vnà cum quadrato ED æquabitur [e] quadrato BD, vnà cum quadrato ED; ablato communi quadrato ED; ergo quadruplum rectangulum DAE æquabitur [f] quadrato BD. Sed quadratum BD æquale eſt [g] rectangulo GAD; ergo quadruplum rectangulum DAE æquabitur [h] rectangulo GAD; ergo rectangulum DAE erit quarta pars rectanguli GAD. Eſt autem communis altitudo AD; ergo AE erit [i] quarta pars ipſius AG. Quod ita ſe habet &c. per conuerſum primæ ſexti.

a 6 primi.
b 47 primi.
c prim. ax. primi.
d 8 ſecundi.
e 1 ax. primi.
f 1 ax. primi.
g 11 primi Apollonij.
h 1 ax pri.
i conu. 1 ſexti.

Compoſitio.

α 1. ſexti. β 13. quinti. γ 11. primi Apollonij. δ 1. ax primi. ε 2. ax primi. ζ 8. ſecundi. η 1. ax. primi. θ 47. primi. ι 1. ax. primi. κ 6. primi. λ 29. primi. μ 1. ax primi.

QVoniam igitur AE eſt quarta pars ipſius AG; ergo ob communem altitudinem AD rectangulum DAE erit α quarta pars rectanguli GAD; ergo quadruplum rectangulum DAE æquabitur β rectangulo GAD, ſed quadratum BD æquale eſt γ rectangulo GAD; ergo quadruplum rectangulum DAE æquabitur δ quadrato BD; communi addito quadrato ED; ergo quadruplum rectangulum DAE, vnà cum quadrato ED æquabitur ε quadrato BD, vnà cum quadrato ED ſed quadratum FE æquale eſt ζ quadruplo rectangulo DAE, vnà cum quadrato ED; ergo quadratum FE æquabitur η quadrato BD, vnà cum quadrato ED, ſed quadratum BE æquale eſt θ quadrato BD, vnà cum quadrato ED; quare quadratum BE æquabitur ι quadrato FE; ergo latus BE æquabitur lateri FE; quare angulus FBE æquabitur κ angulo BFE, ſed angulus LBk æqualis eſt λ angulo BFE; ergo angulus LBK æquabitur μ angulo FBE. Quod oportebat oſtendere.

Nunc videamus quid interſit ſecundùm aliam hypotheſin. Supponamus igitur AE quartam eſſe partem recti lateris AG.

Reſolutio.

a prim ſexti. b c 11. primi Apollonij. d 1. ax primi. e 2 ax primi. f 47. primi. g 1 ax primi. h 8. ſecundi. i 1. ax primi. k 6 primi. l 1. ax. primi.

QVoniam igitur AE quarta pars eſt lateris recti AG; ergo rectangulum DAE quarta pars erit a rectanguli GAD; ergo quadruplum rectangulum DAE æquabitur b rectangulo GAD: ſed rectangulum GAD æquale eſt c quadrato BD; ergo quadruplum rectangulum DAE æquabitur d quadrato BD; communi addito quadrato ED; ergo quadruplum rectangulum DAE, vnà cùm quadrato ED æquale erit e quadrato BD, vnà cum quadrato ED: ſed quadratum BD, vnà cum quadrato ED æquale eſt f quadrato BE; ergo quadruplum rectangulum DAE, vnà cum quadrato ED æquabitur g quadrato BE. Sed quadruplum rectangulum DAE, vnà cum quadrato ED æquale eſt h quadrato EF; ergo quadratum BE æquabitur quadrato EF; ergo BE æquabitur i EF; ergo angulus EBF æquabitur k angulo EFB, ſed angulus EBF æqualis eſt angulo LBK, (angulus enim incidentiæ, & reflexionis ſunt inter ſe æquales) ergo angulus LBk l æquabitur angulo LFE. Quòd ita ſe habet ſunt enim Bk, FE, ex hypotheſi inter ſe parallelæ.

Compoſitio.

α 29. primi. β 1 ax primi. γ 6 primi. δ 8 ſecundi. ε 1. ax primi. ζ 47 primi. η 1. ax primi. θ 3. ax primi. ι 11. primi Apollonij. κ 1. ax primi. λ 10. axioma prima ſexti.

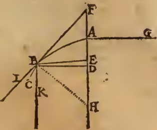
QVoniam igitur Bk, FE ſunt inter ſe parallelæ; ergo angulus LBk æquabitur α angulo LFE: ſed angulus EBF æqualis eſt angulo LBK (angulus enim incidentiæ, & reflexionis ſunt inter ſe æquales) ergo angulus EBF æquabitur β angulo EFB; ergò BE æquabitur γ EF; ergo quadratum BE æquabitur quadrato EF, ſed quadruplum rectangulum DAE, vnà cum quadrato ED æquale eſt δ quadrato EF; ergo quadruplum rectangulum DAE, vnà cum quadrato ED æquabitur ε quadrato BE, ſed quadratum BD, vnà cum quadrato ED æquale eſt ζ quadrato BE; ergo quadruplum rectangulum DAE, vnà cum quadrato ED, æquabitur η quadrato BD, vnà cum quadrato ED; communi ſubtracto quadrato ED; ergo quadruplum rectangulum DAE, æquabitur θ quadrato BD. Sed rectangulum GAD æquale eſt ι quadrato BD; ergo quadruplum rectangulum DAE æquabitur κ rectangulo GAD; ergo rectangulum DAE quarta pars erit rectanguli GAD; ergò AE quarta pars erit λ lateris recti AG. Quod oportebat oſtendere.

Vides igitur, qua ratione ex diuerſa veri ſuppoſitione, diuerſum quoque verum Analyſta ſuo greſſu oſtendat: vnde ſyntheticè redeundo, deuenit in quæſiti deprehenſionem, ac veri quidem intenti, conſecutionem.

Sed non pigebit adnotare diuerſam quoque contingere analyſin ex præparatione diuerſa.

Reſolutio.

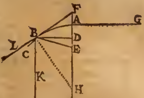
QVoniam igitur AE quarta pars eſt lateris AG, ſed AE dimidium eſt ipſius DH, vt mox conſtabit; ergo DH erit dimidium ipſius AG, ſed AF eſt [a] dimidium ipſius FD; ergo vt AG ad DH, ita FD ad AF; quare permutando [b] vt AG ad FD, ita erit DH ad AF, ſeu AD; quare rectangulum GAD, æquabitur [c] rectangulo FDH. Quod ita ſe habet; vtrunque enim eſt [d] æquale quadrato BD.



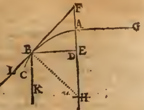
a 35 primi Apollony.
b 16. quinti.
c 16. ſexti.
d coroll. 8. ſexti, & 11. primi Apollony.

Lemma.

Quod autem AE ſit dimidium ipſius DH, ſic oſtendo. *Quoniam angulus LBK æqualis eſt angulo FBE, ſed angulus LBk æqualis eſt* [a] *angulo BFE; ergo angulus FBE æquabitur* [b] *angulo BFE; ergo latus BE æquabitur* [c] *lateri FE, at verò ſi ab æqualibus angulis LBH, FBH auferantur æquales LBk, & FBE remanebit* [d] *angulus EBH æqualis angulo KBH, ſed angulus KBH æqualis eſt angulo BHE; ergo angulus BHE æquabitur angulo EBH; ergo EH æquabitur BE, ſeu EF; ergo FH eſt dupla ipſius EF, vt DF eſt dupla ipſius AF; ergo differentia totarum eſt DH, & dimidiarum eſt AE; ergo AE eſt dimidia ipſius DH.*



a 29. primi.
b prim. ax. primi.
c 6 primi.
d 3. ax. primi.



Compoſitio.

QVoniam rectangulum GAD æquale eſt [α] quadrato BD, rectangulum verò FDH æquale eſt [β] eidem quadrato BD; ergo rectangulum GAD æquabitur [γ] rectangulo FDH; ergo vt AG ad FD, ita erit [δ] DH ad AD; ſeu AF; ergo permutando, [ε] vt AG ad DH, ita FD ad AF, ſed AF eſt [ζ] dimidium ipſius FD; ergo DH erit dimidium ipſius AG, ſed AE dimidium eſt ipſius DH, vt oſtenſum eſt; ergo AE quarta pars erit lateris recti AG.

α 11. primi Apollony.
β
γ 1. ax. primi.
δ 16. ſexti.
ε 16. quinti.
ζ 35 primi Apollony.

Vides igitur qua arte ex vero illo eodem ſuppoſito, quòd AE ſit quarta pars recti lateris AG, peruentum ſit reſoluendo ad aliud verum, quo tendebat ſuperior habita reſolutio, vnde regrediendo ſynthericè, ad quæſiti comprehenſionem peruenitur.

SCHOLION.

Non inconſulto dictum à nobis fuit à quacunque parabola &c. nam credebatur olim inter ſpecula vſtoria, ad faciliùs, & celeriùs flammam excitandam, illud principem tenere locum, quod ſit excauatum eſt, vt in eius ſuperficie radij Solares incidentes, ad vnum certum communeque punctum reflectantur, illudque in vſu fuiſſe Veteribus legimus apud Plutarchum in Numa referentem, in Græcia ignem perennem quendam à Mulieribus quibuſdam per ætatem ad Coniugium ineptis cuſtodiri ſolitũ ſi caſu aliquo eius extinctio contigiſſet; nec licuiſſe ex aliquo alio igne renouari, ſed potius flammam puram atque ſinceram ex Solis radijs excitandam fuiſſe, & ad id quodam inſtrumento fuiſſe vſas ſcapha appellato in modũ turbinis rectanguli excauato, quo, ſi aduerſo Soli conſtitueretur, ſic Solares radij in circumferentiam vndique incidentes omnes ad centrum concurrerent, collecti, vt inde quam citiſſimè quacunque materia combuſtibilis, inflammaretur: vnde ad

Supradictorũ explicatio.

parabolæ formã coni recti rectãguli ſectione excauata cõmemorata ſpeculæ radios colligẽtia videbãtur. At verò docta Poſteritas in hac incumbens, id non ſolũ ſpeculo in formã parabolæ recti, atque rectanguli coni ſectione excauato, ſed inſuper his, quæ à parabola cuiuſcunque coni, ſcilicet acuti anguli, obtuſi anguli, & ſcaleni, deſcripta fuerint accidere deprehendit: animaduertens, cuiuſcunque coni parabolam, eandem eſſe, quæ rectanguli coni.

Speculum hyperbolicum æquale. Ad ſpeculum Hyperbolicum quod attinet, vt id demonſtretur, quòd ſcilicet de Parabola oſtenſum fuit, non eſt opus Analyſi, cùm illicò conſtet ex ijs, quæ demonſtrauit Apollonius lib. 3. Prop. 48., videlicet lineas cadentes intra hyperbolen conuergentes ad exteriùs punctum, quod dicitur ex comparatione factum reflecti ad punctum intrinſecum, itidem ex comparatione factum, atque adeò radios ſolares incidentes in ſpeculum hyperbolicum conuergentes ad extrinſecum punctum iam dictum, quod focus extrinſecus nuncupatur, reflecti ad intrinſecum focum, neceſſe eſt.

Quomodo radij reflectantur in ſpeculo elliptico. Hoc idem etiam intelligendum de ſpeculo Ellyptico; ex eadem enim propoſitione 48. ſupracitata, ex vno foco ipſius ellipſeos radios incidentes in concauum ipſius ſpeculi ellyptici, in alium focum reflecti perſpicuum eſt.

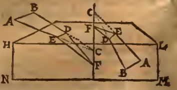
Quid interſit inter ſpecula ſupradicta. Ex hactenus verò dictis ſatis exploratum cuique eſſe poterit, quid interſit inter ſupradicta ſpecula; nam Cauoſphæricum radios parallelos, vel quaſi parallelos imperfectè conuergit, cùm non conuergat ad punctum; Parabolicum conuergit parallelos, vel quaſi parallelos ad punctum; Hyperbolicum conuergentes vltrà, conuergit citra, ſeù conuergentes exteriùs poneipſum conuergit interiùs; Ellipticum diuergentes conuergit, vnde aptiſſimum eſt, ſed tamen, quoniam expoſcit radiorum fontem in determinato puncto, quod eſt vnum ex focis; propterea tanquam minùs idoneum relinquitur.

Ex Dioptricis quoque aliquid ſe offert conſiderandum, & primùm illud.

THEOREMA.

Exemplum XXXXVII. *Si oculus, & aſpectabile ſint in diuerſis medijs ſe mutuo contingentibus, imago apparebit in concurſu catheti, & radij ab oculo per punctum refractionis directè producti.*

Id autem demonſtrabitur non diſſimiliter ac oſtenſum fuit ſimile theorema in Catoptricis. Catheti autem nomine perpendicularis intelligitur ab aſpectabili in communem ſuperficiem vtriuſque medij ducta.



Eſto medium denſius HLMN, ſitque aſpectabile F. Supponamus autem pupillæ diametrum eſſe AB: intelligatur radius opticus FEA vnus, alter FDB qui refracti ſint in pũctis E D: per puncta autem F,E,A, intelligatur tranſire planum vnum, per puncta verò F,D,B planum alterum. Vtrunque planum demonſtrabitur erectum ad ſuperficiem communem vtriuſque medij ductam, & huiuſmodi plana ſe mutuò interſecabunt eorundemque communis interſectio erit recta FC, quæ demonſtrabitur perpendicularis ad ſuperficiem prædictam, demonſtrabitur etiam rectam AE prótractam occurrere ipſi CF, & rectam quoque BD eidem pariter productam occurrere, & vtriuſq; occurſus punctum eſſe commune C.

Multa ſunt conſideratu digna in hac matheſeos partes. Multa in hac Matheſcos parte ſunt conſideratu digna, quæque indigent maiori quàm hactenus perſcrutatione, dũ corũ quæ experimentis conſtant patet aditus Analyſtæ ad hoc, vt ſua induſtria reſolutione facta, principia inquirat, atque cauſas venetur, qua in re aliquando conabimur noſtros labores impendere.

Radij luminoſi non gracileſcunt nec attenuantur quo magis protrahuntur. Ex Doctrina Dioptrica conſtat quod ſuperiùs innuimus, videlicet radios parallelos ita diffundi, vt æquè proximè, & remotè luminoſum illuminet, ac calefaciat, nec radios ipſos gracileſcere quo magis protrahuntur, & penes hoc non eſſe explicandam intenſionem, & remiſſionem; conſtat inquam ex Doctrina Dioptrica. Si enim ſumatur lumen, & in debita diſtantia à tergo conſtituatur ſpeculum concauum, ante verò idem lumen, chry-

ſtallum

ſtallum lenticulare, radij luminoſi diuergentes, verſus lentem, tam luminis, quàm à ſpeculo conuexo reflexi, refractione facta paralleli fiunt: vnde haud mediocriter protrahuntur quare lumen media ipſa lente conuexa per noctem, licet longè admodum, eiaculari. Quod ſi inter lumen, & lentem depictæ quædam imagines in lamina traſparente fuerint conſtitutæ, laterna fit, quæ dicitur Magica, vnde imagines illæ vnà cum lumine vectæ in longa distantia viſuntur: dummodo tamen alia quoque lens adhibita fuerit è regione prioris, ita vt vtraque aptata ſit ad extremum tubi longitudinis ferè dimidij brachij. Aliud itidem occurrit conſideratu digniſſimum in Dioptrica, quòd ſcilicet imago rei aſpectabilis in viſus organo inuersè depicta ſit, quamuis res ipſa minimè inuerſa cernatur. Id autem vt in principia reſolueretur, primùm oporteret exploratum habere locum in quo perficiatur viſio, an in Retina, an in humore cryſtallino, an alibi. Multum enim refert id ad analyſin inſtituendam nouiſſe, quinimmò etiam qua ratione viſio perficiatur, num per imagines receptas eorum, quæ cernuntur ad qualitatis genus pertinentes, an per effluuium luminis repercuſſi à re aſpectabili, ſubeuntis organum viſus, de quibus hic diſputationem inſtituere nimis alienum foret ab inſtituto, cùm ſolùm id innuiſſe nobis operæ pretium viſum ſit, vt cuique liceat intelligere, hoc idem quoque ad reſolutricem artem ſpectare poſſe.

Laterna Magica qua arte fiat.

Aliud eſt quoque, in Dioptrica cõſideratu digniſſimum.

Id tamen ſilentio non prætéribo, nimirum de inuerſione imaginis in oculo receptæ, nemini dubitandum, cùm experimento non ſemel id compertum fuerit, demonſtrandum tamen non ſuſcipiam, id neceſſariò eueturum, ne videar tantum mihi arrogaſſe, vt exiſtimem exquiſitè aſſecutum me fuiſſe refractionum menſuram, radiorum ſcilicet, quibus in hoc vtitur Natura opere, ita vt adamuſſim ij conuergant vbi fit viſio, nec antea decuſſationem ſubire poſſint. Satis igitur ſit rem, ſic ſe habere experimento comprobatum fuiſſe: cur verò res aſpectabilis haud inuerſa appareat, inquirendum ſupereſſet, de quo nos cumulatè opportuniori loco, ſermonem habebimus. Interim, vt aliquid inſinuaſſe videamur, tantùm id addere lubet, quòd ad hoc non quicunque radius, ſed qui viſorius eſt, tantummodo conducit. Viſorius autem ille in quo viſio conſiſtit, quique peruadit organi partem vbi viſio ipſa perficitur; exiguus profectò exiſtit: reliqui autem deferentes dicuntur, qui quamuis imaginem illam inuerſam depingant, non ob id rem adſpicimus inuerſam: non enim viſus imaginam, ſed rem, cuius eſt imago, cernit, ad quem ſi reſpiciat exiguus ille viſorius radius, quatenus nouam refractionem ſubiens eâ in parte vbi viſio celebratur, opportuno directionis modo, ita vt qui ſuperior eſt radius, perinde ſit ac inferior, & qui inferior, non ſecus ac ſuperior rei aſpectabilis partibus reſpondens exiſtat, hanc non inuerſam, ſed ad eum quo eſt modum repræſentabit.

Sic etiam ex Muſicis deſumi poſſent exempla, Nunc aliquid ad Mechanicen pertinens attingemus.

Multi non obſcuri nominis Mathematici, ſequens Theorema demonſtrandum ſumpſerunt; nos autem ratione longè diuerſa illud idem præſtitimus ad eum, qui ſequitur modum.

Theorema mechanicum.

THEOREMA.

Exemplum XXXVIII.

Grauia appenſa extremitatibus Libræ ſi æquiponderantia extiterint; erit vt diſtantia ad diſtantiam à centro, ita reciprocè graue ad graue.

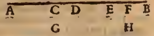
Et ſi fuerit vt diſtantia ad diſtantiam, ita reciprocè graue ad graue, ipſa grauia erunt æquiponderantia.

Sit libra CF, cuius centrum D, & extremitatibus C, F, appenſa ſint grauia G, H, æquiponderantia. Dico eſſe vt diſtantia DF ad diſtantiam CD, ita reciprocè graue G, ad graue H.

Acceptum ſit punctum E, ita vt CE ſit æqualis DF, & protracta ſit DF in B, vt FB ſit æqualis EF; ſitque protracta DC, in A, vt AC, ſit æqualis CE, Intelligatur autem grauitas æquè diffuſa per AB.

Reſolutio.

QVoniam igitur eſt vt diſtantia DF, ad diſtantiam CD, ita reciprocè graue G, ad graue H; ſed grauitas diffuſa per AE tota collecta eſt in biſſectionis puncto C, eaque eſt G: & grauitas diffuſa per EB



tota collecta eſt in biſſectionis puncto F, eaque eſt H; ergo vt DF ad CD, ita grauitas diffuſa per AE ad grauitatem diffuſam per EB; ſed vt AE ad EB, ita grauitas diffuſa per AE ad grauitatem diffuſam per EB; ergo erit vt DF ad CD, ita AE ad EB. Sed AE eſt dupla ipſius CE, & EB eſt dupla ipſius EF; ergo vt CE ad EF, ita DF ad CD; ergo CE eſt æqualis DF. Quod ita ſe habet ex conſtructione.

Compoſitio.

QVoniam CE eſt æqualis DF; ergo vt CE ad EF, ita DF ad CD. Sed AE eſt dupla ipſius CE, & EB dupla ipſius EF; ergo erit, vt DF ad CD, ita AE ad EB; Sed vt AE ad EB, ita grauitas diffuſa per AE ad grauitatem diffuſam per EB; ergo vt DF, ad CD, ita grauitas diffuſa per AE ad grauitatem diffuſam per EB; ſed grauitas diffuſa per AE tota collecta eſt in biſſectionis puncto C, eaque eſt G, & grauitas diffuſa per EB tota collecta eſt in biſſectionis puncto F, eaque eſt H; ergo erit vt diſtantia DF, ad diſtantiam CD, ita reciprocè graue G ad graue H. Quod erat operæ pretium oſtendere.

Nec diſſimiliter conuerſum reſolui, componique paterit.

Nec alia ratione ex alijs Matheſos partibus exempla depromi poſſent. Nunc quæ Phyſico-mathematica ſunt breuiter aliqua ex parte proſequemur.

DE METHODO RESOLVTIVA

Pro Theorematibus alijs Phyſico-Geometricis.

CAPVT QVINTVM.

Platonis dogma

OMne tuliſſe punctum, qui miſcuit Matheſim; præſertim Geometriam Phyſicę, adeo certum olim, ac exploratum erat Platoni, vt Ageometræ negaret ingreſſum in Academiam ſuam: vnde ſcripſerat in Foro Ουδὶς αγεωμετρητος ἐισιτω. Quod ita quidem interpretor; Sic naturâ conſtantia Diuinæ manus induſtriâ fabrefacta fuerunt, vt vbique calculum adhibuiſſe, & Geometricis rationibus fuiſſe vsũ ſupremũ rerum Conditorem, iure dixeris; Non enim licet ipſius Naturæ penetralia ſecretiora peruadere, ac intimiores receſſus perquirere Mathematicarum Diſciplinarum ignaro; Quamobrem inconſideratè admodum, Oceano contemplationum ſe ſe committere videtur, quicunque fauorabilem auram Geometriæ, negligit. Nos vniuerſam conteximus Phyſicam, ex qua ſi quid laudis fuerimus conſecuti, non niſi Mathematica quidẽ eruditione, quam illi paſſim neceſſitate coacti, cauſa veritatis aſſequendæ, miſcuimus; Ijs tamen diſputationibus haud neglectis, vnde veritas in perſcrutandis Naturæ ſolertis operibus, emanare poſſit; præſertim id præ oculis habentes, vt ijſdem inſpectis, ſecundùm rationem menſuræ ac menſurabilis, innumera Theoremata, conderemus; quibus demum edocta Poſteritas, ad veritatem indagandam aduertat, in rerum naturalium perquiſitione, ſibi Mathematicas diſciplinas excolere, magis poſſe eſſe præſidio, quàm verboſas, inaneſque diſputationes nutrire, & in ijs ſe ſe exercere; ac inde, velut ex paleſtra laudem vmbratilem, futilemque gloriam, ingenij quadam oſtentatione potius, quàm ſolidam virtutem, ſplendidamque famam, ſe conſecuturam intelligat. Hac autem in re locum præcipuè habet Ars, quam præ manibus habemus; propterea quod Alyſtæ illud eſt munus, propoſitum Theorema in principia reſoluere, vt cauſam videlicet aſſequatur, cum alioquin ita eſſe conſtet, quod in Phyſicis paſſim contingit, experimento ſiquidem id ita eſſe liquet, cauſa verò latet.

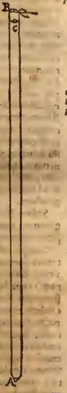
Placuit igitur hic eorum, veluti ſpecimen quoddam exhibere, de quibus ferax Tractatio, Deo fauente, tandem aliquando prodibit in lucem; oſtendendo videlicet, qua via nos etiam in Phyſico-Mathematicis haud ſine magno veritatis lucro præceptis Analyticis, in-

ſiſtere

ſiſtere debeamus; Quædam propterea opportuna exempla, paucis perſtringemus, in ſtudioſorum gratiam, præſertim Helenæ Corneliæ Piſcopiæ Inclytæ Virginis, quæ quidem inter Mineruæ ſequaces, tantùm extulit caput.

Quantùm lenta ſolent inter viburna cupreſſi.

De hac ſiquidem philoſophandi ratione plures, ac plures allocutus, neminem adinueni, cui magis commemoratum Platonis dogma, perſpectum, exploratumque foret. O magnum huius Æui portentum; Cùm & claritate Regiæ proſapiæ, & eximia pulcritudine formæ, & honeſtate morum, & ſolidioris eruditionis copia, ne dum in humanioribus literis, omnique politiori literatura, verùm etiam in ſublimioribus Diſciplinis, adeò ſpectabilis ſit, vt nulla futura ſit ætas, quæ tam excelſi nominis maieſtatem, ſumma veneratione, Diuiniſque laudibus, non proſequatur. Et ſi me vnquam cæpit admiratio, tunc me herclè, cùm ſplendidiſſimam eius Domum, locupletiſſimam Bibliothecam, adij, & per humanitatem Genitoris, munificentiſſimi Mæcenatis in Eruditos, Ioannis Baptiſtæ Diui Marci Procuratoris Ampliſſimi ad colloquia cum illa, non ſemel admiſſus fui; nulli ſiquidem tantam facundiam, nulli tantam dicendi copiam, nulli eruditionem tantam ineſſe, vnquam aduerti, vt non immeritò Mineruam alteram exiſtimandam crediderim. Tanti refert ſublimem animum ſummis vigilijs, improbiſque laboribus, imitatione Cleantis, excultum fuiſſe, præſertim ſub diſciplina Celeberrimi Viri Aloyſij Gradenici Archipresbyteri, ac Primatis Præſtantiſſimæ Cydoniæ Vrbis è Creta, cuius merita, præclaras dotes, ſilentio potius, quàm tenui, frigidaque oratione, venerari operæ eſſe pretium ſum arbitratus. Redeamus in orbem ſermonis. Si quid eſt quod Ingenia Philoſophorum exercuerit, mihi planè difficultas illa de aſcenſu corporum videtur, quæ quidem leuia dici alloquin, conſueuere. Pleriſque enim viſum eſt, motricem quandam corpori aſcendenti vim ineſſe, ſpecie diſtinctam ab alia, quæ grauitas nuncupatur: ab hac enim vt corpus deſcenſum, ita ab illa quidem aſcenſum, recognoſcat; Rem autem magis introſpicere conantes difficultatibus implicatioribus inuoluti, in varia placita diſtracti ſunt: Vnde quidam vtramque motricem virtutem ad qualitatis genus reuocandam duxerunt, alij re non differre ab ipſius corporis ſubſtantia, crediderunt; Quibus prætermiſſis, non nulli tutiorem viam calcantes, in his quendam inuolui reſpectum exiſtimarunt, adeò vt, quod minus eſt graue comparatione grauioris, leue dicatur, & contra; atque adeò ſurſum aſcendere corpus non vi quadam actiua, cui videlicet aſcenſus debeat acceptus referri, ſed potius extruſione, quatenus minus graue à grauiori extruditur. Nec propterea contra Naturæ indolem; quod enim aliquid ab vno potius, quam ab alio extrudatur, fit, eius exigente natura. Vt autem in his, quorum nos detinet meditatio, verum aliquid aſſequi poſſemus ad experimenta confugimus, rati hinc ad demonſtrationes contexendas greſſum fieri poſſe. Sumpſi propterea vitream fiſtulam longitudinis quatuor brachiorum, cuius extremum vnum vitro continuo clauſum erat, vt in ſchemate cernitur, in quo tubus vitreus AB, cuius extremum A, clauſum erat, alterum verò B apertum, huius porrò tubi amplitudo pollicem æquabat, mox in ipſum inijeci vini ſpiritum, donec eſſet repletus, ſumpſique ſphærulam exiguam C compactam ex ſubere, & cera, vt minoris foret grauitatis in ſpecie, quàm ſpiritus ipſe, atque adeò in eum innataret; clauſoque orificio ſuperiori, adhibito fragmento veſicæ ſuinæ, cùm præſto eſſet Pedulum, inuerſo tubo, ſtatim vibrationes numerare cæpi, cum primùm ſcilicet ſphærula ipſa aſcendere inciperet: proſequendo autem donec illa perueniſſet ad faſtigium, reperi ducentas vibrationes inſumptas fuiſſe: At verò recluſo orificio, vlnique ſpiritu foras eiecto, ac in eius locum ſubſtituta aqua communi, reaſſumptam ſphærulam in aquam ipſam inieci, in qua magis extabat, clauſoque iterum orificio tubi, cæteriſque peractis, vt priùs, ſphærulæ aſcenſum tempore centum vibrationum tantummodo, abſolutum fuiſſe deprehendi, quod mihi argumento fuit aſcenſum hunc per extruſionem contigiſſe; pro-



Helena Cornelia laudes.

Difficultas de aſcenſu corporum.

Grauitatis, et leuitatis explicatio.

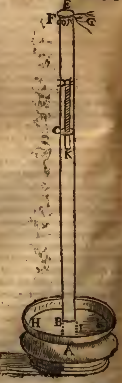
pterea

ptorea quod partes aquæ circumſtantes magis vrgent, ac premunt, quàm partes ſpiritus vini, cùm illæ his longè grauiores ſint.

Cæterùm tunc extruſio deſinit in fluidorum partibus, & in iis, quæ ſunt fluidis leuiora ſolidis, cùm omnia in æquilibrio fuerint conſtituta; ita ſolidæ magnitudines humido leuiores, ſi in humidum ipſum fuerint immiſſæ, ac impulſæ, donec totæ demergantur, ſurſum feruntur, ita vt pars aliqua extet, alia verò ſit immerſa, nec à motu ceſſant, niſi factum ſit æquilibrium.

Hoc idem in aere contingit, vnde quando hydrargyrum intra tubum ad ſtationem vnius bracchij cum quarta parte ſuſtinetur, non aliunde putandum id niſi ab aeris præmente grauitate, vel ab aliquo alio, puta à vi Elaſtica, prouenire; quatenus videlicet ſi id fiat ſub dio, & in aperto aere, tanta eſt grauitas hydrargyri altitudinis vnius bracchij cum quarta parte, hoc eſt, tantum eſt momentum altitudinis ipſius, vt æquiualeat momento altitudinis atmoſphæræ, cui alioquin æquipolleret momentum cylindri aerei altitudinis eiuſdem atmoſphæræ. Quod ſi id fiat in loco concluſo, videlicet in ipſo tubo immerſo in reſtagnans hydrargyrum vaſe contentum, quod vndique clauſum ſit facta immerſione, ita vt intus tantillum aeris relictum ſit, adhuc eadem hydrargyri eleuatio continget, quoniam hic adeò compactus eſt, & conſtipatus, ſiquidem ille eſt, in quo verſamur, & quem inſpiramus, quantum totius atmoſphæræ aer adgrauans, exigit, ita vt quemadmodum reſiſtit preſſioni illius, ita & æquiualenti cylindro hydrargyri.

Experimēti. In huius rei, de qua agimus confirmationem plurima quidem, & ab alijs, & à nobis experimenta facta fuerunt, vnde aſcendimus montes, geſtantes ipſum tubum, in quo hydrargyrum ſuſtinebatur, ad altitudinem prædictam, cùm inferiùs eius orificium eſſet immerſum, vt fieri ſolet, in hydrargyrum reſtagnans vaſe contentum, & adinuenimus, per tubum, ipſum hydrargyrum deſcendere, quò magis per montem aſcenderemus: quod videlicet, cùm vas ipſum eſſet apertum, atque adeò hydrargyro ibi contento, aer incumberet, quò altiores nos conſtituti eſſemus, eò erat minus momentum aeris adgrauantis, & quia cylindri ex aere ſunt breuiores, & quia ſunt ex aere leuiori: Vnde maximè conſtat æquilibrium prædictum. Imò curauimus aliquando datâ operâ, vt non nihil aeris remaneret in tubo, qui ſi foret tantæ molis, vt extenſus quantum fieri poteſt, non exigeret locum ampliorem, hydrargyrum in eadem ſtatione ſe continebat. Quod ſi plus aeris relictum fuiſſet, pro ſui debita extenſione maiorem locum poſtulans, minor erat in tubo, ipſius hydrargyri eleuatio: Illud quoque notauimus, differentiam inter aerem in montis faſtigio adhibitum, & ad radices ipſius, & alia multa, de quibus in Phyſicis agendum.



Solum hìc lubet ſubijcere experimentum à nobis excogitatum, quòd humidi preſſionem in ſibi ſubiecta, magnopere confirmat.

Experimētū. Sumpſi tubum vitreum, qualis eſt BE, ex vtroque extremo apertum; extremorum vnum clauſi, vt fieri ſolet veſica ſuina (erat vero tubi longitudo duorum bracchiorum) eum hydrargyro repleui, mox ſumpſi cylindrum ſtanneum longitudinis quartæ partis vnius bracchij, vt craſſitie æquaret amplitudinem calami ſcriptorij: hoc enim pacto laxè intrabat in tubum, qui erat amplitudinis pollicaris. Sumpſi etiam alterum cylindrum ſtanneum eiuſdem omninò longitudinis, & craſſitiei, atque adeo ponderis, immerſi in hydrargyrum atq; notaui partis extantis quantitatem (extabat autem, quia ſtannum in hydrargyro innatat) eamq; partem veſtiui zonula ex veſica ſuina confecta, cylindrus hunc in modum ex parte veſtitus, repræſentatur

per

per DCk, ita vt filo validè circumuoluto, zonula illa cylindri parte DC prædictam tegeret, ac propterea quamuis immerſus in hydrargyrum, huic nullatenus aditum præbere poſſet; Alterum verò nullo tegmine indutum in hydrargyrum immiſi, vt ad perpendiculum tamen foret erectus; extabat autem, quoniam hydrargyrum eſt ſtanno grauius in ſpecie, atque vas illud in quo, & hydrargyrum, & huiuſmodi cylindrus aeri libero expoſui per ſpatium viginti quatuor horarum. Cylindrum autem alterum immerſi in hydrargyrum tubi BE, per orificium E, quod poſtmodum clauſi membranulá tenaciter adſtricta circumuolutione funiculi FG; Tubum paratum hoc modo immerſi in hydrargyrum HI reſtagnans in vaſe A: mox verò immiſſa manu in reſtagnans hydrargyrum HI, acu membranulam perforaui qua extremum alterum tubi, videlicet, quod ſubtus hydrargyrum reſtagnans exiſtebat, clauſum erat. Statim deſcendere cœpit hydrargyrum concluſum in tubo, & cum eò etiam cylindrus ſtanneus CD, donec ipſius hydrargyri ſtatio facta ſit in C ad altitudinē BC, vnius bracchij cum quarta parte ferè, ita vt locus CF intra tubum foret omni aere deſtitutus. Ad ſpatium 24. horarum, cùm extraxiſſem cylindrum CD, qui ſecundùm aliquam ſui partem merſus erat in ipſum hydrargyrum, vtpotè minùs grauis in ſpecie, partem immerſam adinueni omninò friabilem: partem autem extantem CD ſpoliatam induſio reperi omninò intactam ab hydrargyro. Obſeruaui cylindrum alterum immerſum in hydrargyrum ſub aere libero, & adinueni cum prorſus friabilem, nedum ſecundum immerſam, ſed etiam ſecundùm extantem partem, etſi aliquantulum minus.

Hinc mihi ſatis euidenter colligi poſſe videbatur dari preſſionem illam fluidi in ſibi ſubiecta, & inſuper reijciendam eſſe Veterum opinionem de attractione, quam ſtannum, atque adeò aurum, nam eadem eſt ratio, erga hydrargyrum exercet; ſiquidem apertè conſtat hydrargyrum per cylindrum illum, non aſcendere vi quadam attractum, ſed potiùs compreſſum, atque extruſum ab aere premente, quod cuique perſpectum eſſe poteſt. *Preſſio fluidorum colligitur.*

Neque propterea hoc minùs exiſtimandum plauſibile, quod ſupponat aliquid controuerſum, ſcilicet elementa in propria ſede adgrauare, nam ſenſu, quo id accipiendum voluit Archimedes, nulla laborat difficultate; ait enim. Ἕκαστον δὲ αὐτοῦ μέρος, θλίβεσθαι ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ ὄντες ὑπὲρ αὐτοῦ, κατὰ κάθετον, ἐὰν αὐτὸ τὸ ὑγρὸν ἢ καταβαῖνον ἔν τινι ἢ ὑπὸ τινὸς τεθλιμμένον. Hoc eſt. *Vnaquæque autem pars eius premitur humido ſupra ipſa exiſtente ad perpendiculum, ſi humidum ſit deſcendens in aliquo, aut ab aliquo alio preſſum.* *Archimedis locus explicatur.*

Ex hactenus dictis addiſces non tam facilè ſubſcribendum ſententiæ, etſi per multa ſæcula receptæ, propterea quòd veritas tandem tractu temporis, cuius eſt filia, ſe ſe dat in conſpectum; quamobrem poſt hac haud licebit in attractionis confirmationem id in exemplum vſurpare, quod videlicet virga aurea, cùm primùm hydrargyrum tetigerit, illud ad ſe alliciat, ac trahat. Hinc etiam exploſum manebit hoc ſympathiæ genus: hinc etiam reiecta occulta qualitas, ad quam omnem nodum difficultatum ſoluere profitentes, confugiunt. Non enim ea eſt Naturæ indoles, cuius profectò longè, lateque diuerſa eſt operandi ratio.

Neque conturbet animum, quod illud idem ſupra commemoratum non eueniat ex aliqua alia materia, putà ligno adhibito cylindro; huius enim fortaſſe, cùm ea non ſit ſtructura, qualem expoſcunt exiguæ fluidi particulæ, lignei cylindri corpus, penetrare nequeunt: vnde adhæſione ad cylindrum, grauitatis momentum fluidum non deperdens, ab imminenti, & adgrauanti ſuper hydrargyrum in vaſe contentum aere, eleuari non patitur. In eodem enim inſtanti dicere licet, nunc vltimò non eſt deſcenſus aeris, ſed immediatè poſt erit; nunc vltimò non eſt aſcenſus hydrargyri, ſed immediatè poſt erit; tam enim illius deſcenſui, quam huius aſcenſui, extrinſecus conuenit incipiendi modus. Cùm hoc tamen illa naturæ prioritas deſcenſus cohæret, à quo ſcilicet alteriùs pendet aſcenſus. *Difficultati aſſumitur.*

Quoniam autem aſcenſus adhæſionem exigit, cùm dicere liceat, nunc vltimo non eſt aſcenſus, ſed immediatè poſt erit; ita & adhæſio, quæ ſucceſſiuè fit, atque adeò ſucceſſiui naturam redolet, tunc vltimo non eſt, ſed immediatè poſt erit.

Non diſſimilis apud aliquos eſt ratio fluidi aſcenſus per exiles fiſtulas, ſiue vitreas, ſiue alterius rationis, ex vtroque capite recluſas; humor namque ille inquiunt cylindrus ex aere per anguſtiam ipſius fiſtulæ, non nihil momenti ammittit; vt autem æquè ponderet cum aere circumſtanti fieri debet cylindrus partim aqueus, etſi ſecundum minimam partem, partim aereus. Quod ſi fiſtula deſuper clauſa fuerit fluidum non aſcendit ob Elaſticam vim aeris

aeris incluſi: vnde eſt, vt æquipolleat grauitati, preſſionique aeris incumbentis fluido reſtagnanti; ac propterea huic non pateat aditus in fiſtula. Res autem non ſic ſehabet nam idem contingit in loco vbi nullus aer, vel ſaltem adeò exiguæ quantitatis, vt vix credas ei quidquã deferendũ, quod nos Florentiæ ſumus experti, ſed potius aliunde id prouenit, quia ſcilicet dum exilis ille tubulus immergitur non nihil in fluidum, huius pars incluſa in anguſtia ipſius tubuli multum ammittit momenti: vnde nequit æquiponderare partibus circumiacentibus, ſed his vrgentibus prementibuſque cylindrus ex humido intra tubuli anguſtiam cedit, eouſq; aſcendens, vt eius altitudo poſſit in æquilibrio eſſe cum cylindris ex humido circumiacente. Nihil enim refert, ſiue deſuper premat, vel non premat aer.

Ita extruſum aſcendat motũ accelerato.

Quædam autem de extruſo corpore inquiri ſolent, inter quæ primùm an ipſum extruſum aſcendat motu accelerato.

Res planè non exiguis eſt obuoluta difficultatibus, nam ad accelerationem confirmandam facit illud experimentum, quod ſi corpus humido leuius fuerit immiſſum in illud, ita vt ad imum ipſius fuerit propulſum, relictum propriæ naturæ, per humidum ipſum aſcendens, ad ſuperficiem eius cùm peruenerit, non ſiſtit, ſed ſubſultat valdè pro ratione profunditatis, vnde cœpit aſcendere: cæteris autem paribus, non tantum ſubſultabit, ſi parum fuerit in humidum propulſum, quòd etſi pleriſque videatur id comprobare corpus illud aſcendere natiua vi, & ab interno principio, tamen ſaltem illud certè confirmat, aſcenſum illum acceleratum eſſe.

Difficultas in Archimedis doctrina, de ijs, quæ vehuntur in humido.

At verò iuxta Archimedis doctrinam, hoc habet aliquid difficultatis, propterea quod ipſe nititur demonſtrare Propoſitione ſexta, Solidam magnitudinem humido leuiorem, in humidum impulſam, tanta vi ſurſum ferri, quanto humidum molem habens magnitudini æqualem, grauius eſt ipſa magnitudine. Sed vbicunque magnitudo fuerit conſtituta in humido, ſiue nimirum in profundo, ſiue prope ſuperficiem, eodem modo ſe habet: ac propterea ſemper æque humidum molem habens magnitudini æqualem, grauius erit ipſa magnitudine. Vnde nullus foret diſcrimen aſcenſus, contra experimentum.

Difficultas in incontrar ia ſ...tatta.

At ex alia parte illud multum negotij faceſſit, quod niſi vis aſcenſus attendatur penes illum exceſſum Archimedeum, videretur attendendus penes altitudinem cylindrorum, eò vel maximè, quod id experimento hydrargyri ſuperius allato confirmatum videtur; ideò enim in faſtigio montis hydrargyrum humiliorem habet in tubo ſtationem, quia aeris incumbentis mercurio reſtagnanti, cylindrus eſt breuior, &ſi etiam leuioris aeris atque adeò minus eſt eius momentum preſſionis, ac extruſionis, quàm ad montis radicem, vbi aeris cylindrus eſt longior imò etiam, & grauioris aeris. At verò in ſuperiori experimento, quando ſcilicet nos repleuimus tubum vitreum aquâ communi, in quam corpus leuiùs humido immiſimus, atque deprehendimus duplo celeriùs illud corpus aſcendiſſe per communem aquã, quàm per vini ſpiritum; id tunc conſiderandum occurrit. Cylindrus æque altus, ac tubus, in huius imo plus vrget illud corpus humido leuius, quàm in ſuperioribus partibus, vbi cylindrus eſt breuioris altitudinis, vt dicebamus de cylindro aeris ad montis radicem comparatione illius cylindri aeris ad montis apicem; etſi illud intercedat diſcriminis, quòd cylindri aquei ſunt vniformis grauitatis, at qui ex aere ſic ſe habent, vt partes quo fuerint viciniores terræ ſint craſſiores, atque adeò grauiores, & contra; ergo velociùs initio videretur debere aſcendere illud corpus, & paulatim tardiùs, quanto ſcilicet vrgentes cylindri breuiores fiunt, cùm tamen experimento ſit exploratum, vel aſcenſus celeritatem augeri, vel ſaltem æquabilem eſſe: quamobrem vndique ſunt anguſtiæ.

Compoſitio difficultatũ.

Hæc tamen hunc in modum componenda videntur. Si ſolidam magnitudinem in humidum innatantem, vtpotè humido leuiorem, perpendamus, duplicem partem, immerſam vnam, extantem alteram comperiemus. Superimpoſitam autem magnitudinem conſiderat Archimedes, à qua deorſum illa prematur, ita vt neutra ab altera expellatur magnitudo: quæ verò pars prius extabat, non amplius exret.

Si animo concipiamus auferri ſuper impoſitam illam magnitudinem, ea quæ tota erat immerſa, aſcendet, adeò vt partim ſit immerſa, & partim extet. Hanc itaque vim reſpexit Archimedes, qua videlicet magnitudo illa aſcendit, dixitque, magnitudinem humido leuiorem in humidum impulſam, ſurſum ferri tanta vi, quanto humidum molem habens magnitudini æqualem, grauius eſt ipſa magnitudine: tantus enim hic eſt grauitatis exceſſus, quanta grauitas eſt ſuper impoſitæ magnitudinis, à qua quemadmodum habet magnitudo

gnitudo illa, vt deorſum prematur, & detineatur, ne aſcendat, & neutra alteram expellat, ità à pari vi habet, vt ſurſum feratur cùm aſcendit.

Si quæ autem eſt acceleratio motus, non aliunde quàm ab impulſu concepto, putandum eſt, oriri.

Extruſio quo pacto contingat.

Verùm quod attinet ad extruſionem, non ſic exiſtimandum cum quibuſdam, quaſi momentum Cylindri extrudentis, cùm præualet, celeriorem inducat motum in extruſo, quàm, quem ipſe ſubit; propterea quod idem concipiendum eſt in ipſa extruſione contingere, quod in Bilancis lancibus, quæ per itum, & reditum ſic ſe componunt ad æquilibrium, vt qua lege vna deſcendit, altera aſcendat. Quod itaque ſolida magnitudo leuior humido, in humido grauiori celeriùs aſcendat; ab exceſſu grauitatis ipſius humidi molem habentis æqualem ipſi magnitudini, ſupra eiuſdem magnitudinis grauitatem, petendum eſt; quantò enim maior hic exceſſus fuerit, tanto etiam maiori vi ſurſum magnitudo ipſa fertur. At ab altitudine cylindri tantum eſt expectandum æquilibrium, ita vt ſi fluida fuerint eiuſdem naturæ, vt cylindrus cylindro æquiponderet, eiuſdem debet eſſe altitudinis. Quod ſi cylindrus vnus fuerit ex grauiori materia, debet tantæ eſſe altitudinis, quanta expoſcit materiæ grauitas: quod euidenter conſtat ex cylindris aqueis, & mercurialibus. Axioma enim eſt apud Mechanicos, quod quæ eidem æquiponderant, & inter ſe æquiponderent: Experimento autem, & ab alijs, & à nobis deprehenſum eſt, cylindrum aqueum altitudinis decem, & ſeptem bracchiorum cum dimidio ferè, æquiponderare cylindro aeris atmoſpheræ, cui æquiponderat cylindrus mercurialis, altitudinis vnius brachij, cum quarta circiter parte; ergo neceſſe eſt hos duos cylindros ſecundùm prædictas altitudines eſſe æquiponderantes; Itaque mercurialis cylindrus vnius bracchij cum quarta parte æquiponderat cylindro aquæ altitudinis decem, & ſeptem bracchiorum, cum dimidio. Hoc autem eſt pro ratione grauitatis, nam ſi aduerteris, quæ eſt ratio $1\frac{1}{4}$, ad $17\frac{1}{2}$, eadem reciprocè eſt grauitatis aquæ ad hydrargyri grauitatem: grauitas enim aquæ ad grauitatem hydrargiri, eſt, vt 1, ad 14; Vnde non mirum ſi detur hæc æquiponderatio inter commemoratos cylindros.

Preſſionis humidarum partium cauſa quid.

Preſſio autem illa humidarum partium, cauſa eſt aſcenſus ſolidæ magnitudinis, humido leuioris; cylindrus enim, in quo hæc minus habet momentum, tantùmque ei deeſt, quantùm eſt humidi altitudo molem æqualem habentis parti ipſius ſolidæ magnitudinis, quæ ſuper humidum extaret. Vnde nequit æquiponderare circumſtanti, niſi quoad ſuperficiem illa magnitudo peruenerit. Tunc enim tametſi illi deſit humidum molem æqualem habens parti demerſæ ipſius magnitudinis, tamen loco ipſius eſt grauitas eiuſdem magnitudinis, cùm tanta moles humidi, quanta eſt partis demerſæ, eandem, quam tota magnitudo, grauitatem habeat.

Atmoſphæræ altitudinem colligere.

Cæterùm iucundum foret, ex huiuſmodi æquiponderantia ſuperius ſignificatâ atmoſphæræ altitudinem colligere, quod à nemine factum aduerti. Si namque grauitas aeris ad aqueam fuerit, vt 1, ad 1177, vt nos plurimis experimentis adinuenimus, quando moles aliqua determinata aeris ponderauerit vt 1, eadem aquæ ponderabit, vt 1177: quare ſi fiat vt 1, ad 1177, ita bracchia $17\frac{1}{2}$ ad aliud, reperiemus pro altitudine atmoſphæræ brachia $20597\frac{1}{2}$. Vel ſi fiat vt 1 ad 14, ita 1177, ad 16478, ſi determinata moles aeris ponderauerit vt 1, eadem hydrargyri ponderabit 16478: fiat igitur vt 1, ad 16478, ita $1\frac{1}{4}$ ad aliud, illudque erit $20597\frac{1}{2}$, vt prius, ita vt fluidi telluri incumbentis, vel ſi mauis atmoſphæræ altitudo, erit brachiorum $20597\frac{1}{2}$. Si itaque 3000 brachiorum Florentinorum (brachij enim nomine intelligimus Florentinum) miliare conficiunt atmoſphæræ altitudo erit milliariorum 6 [illegible]. Ex hypotheſi tamen quod ea eſſet ratio grauitatis aeris ad quàm: Non eſt tamen diſſimulandum, aerem ipſum non eſſe homogeneum; quò enim altius aſcendimus, eò etiam tenuiorem, leuioremque aerem adinuenimus. Aer ſiquidem duobus milliarijs e.g. diſtans à terra, in grauitate non eam habebit rationem ad aquam, non eam inquam, quam habet hic, quem inſpiramus, ſed longè minorem.

Illud autem huic officit ratiocinio, quod aer haud eſt homogeneæ naturæ; quo enim remotior à terris eò leuior, cùm tamen illud vim ſumat ab æqualitate denſitatis, atque ſpiſſitudinis, ac propterea grauitatis. Si placet igitur, ad æquabilitatem grauitatis redigatur, atque proueniet altitudo duplo maior.

Tychonis opinio.

Verùm adhuc iudicium anceps, nam pleriſque, inter quos Tycho viſum eſt eliminandum

ignem Ariſtotelicum in Lunæ concauo, vaporeſque circa terram diuerſos ab aere agnoſcendos, aeremque ad confinia Lunæ prorogandum, ibi deſinentem in ætherem. Alijs verò inter quos Keplerus, placuit vaporem ab alijs creditum dicendum eſſe aerem: illum autem ad montium faſtigia terminari, & ſupra fumoſas exhalationes crepuſculorum lampades exiſtere, & ſtatim æther ſuccedere; Vt igitur Tycho ſucceſſoriam attenuationem aeris in ætherẽ,& obliterationẽ denſitatis aereæ,ita & hic diſcrimen corporũ agnoſcit, quod ſi quis ſupra conſiſteret, non minus ipſi in oculos incurſurum opinatur, ac ſuperficies, quæ aerem ab aqua ſeparat in oculum incurrit; idque propter refractiones, quarum hanc cauſam exiſtimat, vt etiam hanc in diſcrimen aeris, & ætheris contulit, quod Rothmannus negauit, nullam exiſtimans refractionem contingere, à qua cauendum ſit in capiendis Solis altitudinibus, ſolumque à terra ad cælum, aerem eſſe, excepto pauculo vapore. De his tamen oportuniori loco: ſolùm hæc innuiſſe ſufficiat. Hoc vnum addam, non videri benè ratiocinatum keplerum in aſſignanda differentia craſſitiei, ac grauitatis inter aerem, & aquam; Dicebat enim, eam eſſe rationem vt quindecim myriades myriadum cyathorum aeris, æquiponderarent vni cyatho aquæ. At ſi ſermo ſit de aere, quem inſpiramus, ac de aqua elementari nimis eſt exorbitans. De his tamen occaſione refractionum in Dioptricis agemus; qua autem ratione adinuenerimus pondus aeris, illudque contulerimus cum pondere aquæ, oſtendemus in Phyſicis. Interim ad Reſolutiones redeamus, & in re de qua agimus eſto exemplum.

Kepleri ſententia explodi-tur.

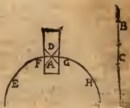
Exemplum XXXXIX.

THEOREMA.

Solidarum magnitudinum per humidum aſcendentium, quæ leuior eſt ſurſum celeriùs fertur.

Sit magnitudo A leuior humido, eius autem grauitas eſto B: at humidi molem habentis æqualem magnitudini A grauitas ſit BC.

Accipiatur quædam magnitudo D, cuius grauitas ſit æqualis C: magnitudo igitur ex vtriſque magnitudinibus A, D, conſtans, erit leuior humido; nam magnitudinis ex vtriſque magnitudinibus A, D conſtantis, grauitas eſt BC; humidi vero molem habentis æqualem huiuſmodi aggregato, grauitas maior eſt quàm BC, quoniam videlicet BC, eſt grauitas humidi molem habentis æqualẽ magnitudini A: quamobrem ſi huiuſmodi aggregatum e duabus magnitudinibus, demittatur in humidum, vſque eo demergetur, vt tanta moles humidi, quanta eſt pars magnitudinis demerſa, eandem, quam tota magnitudo, grauitatem habeat. Demiſſum igitur ſit in humidum, cuius ſuperficies EFGH.



Reſolutio.

a Archimedes prop. 6. de inſidentibus humido.

QVoniam A magnitudo ſurſum fertur [a] tanta vi, quanta eſt grauitas C, ſed magnitudo A premitur abs magnitudine D, grauitate C; ergo tanta vi magnitudo A ſurſum fertur, quanta deorſum premitur à magnitudine D; ergo neutra ab altera expelletur; ergo magnitudo A erit demerſa, & magnitudo D erit extans: ergo tanta moles humidi, quanta eſt magnitudo A, grauitatem habet eandem, quam compoſita magnitudo ex A, D. Quod ita ſe habet &c.

Compoſitio.

QVoniam igitur tanta moles humidi, quanta eſt magnitudo A, grauitatem habet eandem, quam compoſita magnitudo ex A, D; ergo magnitudo A erit demerſa, & magnitudo D erit extans; ergo neutra ab altera expelletur; ergo tanta vi magnitudo A ſurſum feretur, quanta deorſum premitur ab ipſa magnitudine D, ſed à magnitudine D, premitur grauitate C; ergo A ſurſũ feretur tanta vi, quãta eſt grauitas C. Quod oportebat oſtendere.

His

His hic ſe habentibus.

QVoniam ſi ſolida magnitudo A fuerit adhuc leuior, cùm eiuſdem ſupponatur eſſe molis, humidi quidem molem habentis æqualem leuiori magnitudini A, erit eadem grauitas BC; ſed magnitudinis A grauitas minor eſt, quàm B; ergo exceſſus grauitatis humidi molem habentis æqualem leuiori magnitudini A, maior erit quàm C, eritque grauitas magnitudinis D: ſed A ſurſum fertur tanta vi, quanta eſt grauitas C in prima hypotheſi; ergo cùm A fuerit adhuc leuior in ſecunda hypotheſi, feretur ſurſum vi, quæ maior ſit, quàm grauitas C; ergo magnitudo A cum leuior fuerit, maiori vi feretur ſurſum; ergo celeriùs.

Nunc demonſtrabimus, quod ſuperiùs experimento nobis innotuiſſe dicebamus. Eſto igitur.

THEOREMA.

Exemplum XXXXX.

Solida magnitudo leuior humido per fluidum grauius velociùs aſcendit, quàm per leuius.

Hoc Theorema ſuperiori ſchemate repetito demonſtrabitur non abſimili ratione, ac ſuperiùs eadem præmiſſa demonſtratione; eademq; Analyſi, ac Syntheſi repetita.

THEOREMA.

Exemplum XXXXXI.

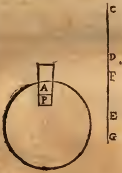
Si aliqua fuerit ſolida magnitudo leuior humido, huic autem adiecta ſit alia quæpiam itidem humido leuior ſolida magnitudo, hoc aggregatum immiſſum in humidum, maiori vi, quam initio ſola propoſita magnitudo, ſurſum feretur.

Sit magnitudo A, cui addita ſit magnitudo P, & vtraque ſit leuior humido. Dico &c.

Magnitudinis A leuioris humido, grauitas ſit CD; humidi verò molem habentis æqualem ipſi A, grauitas ſit CE: aggregati autem ex A,P grauitas ſit CF; humidi verò molem habentis æqualem aggregato ex A,P, grauitas ſit CG.

Reſolutio.

QVoniam igitur aggregatum ex A,P impulſum in humidum, maiori vi ſurſùm fertur, quàm magnitudo A; ſed magnitudo A in humidum impulſa, tantâ vi ſurſùm fertur, [a] quanta eſt grauitas DE, & aggregatum ex A,P tantâ vi ſurſùm fertur, [b] quanta eſt grauitas FG, ergo FG maior erit, quàm DE; communi ablata FE, ergo EG maior erit, [c] quàm DF. Quod ita ſe habet: Nam CD eſt grauitas magnitudinis A, & CF eſt grauitas aggregati ex A,P, itẽ CE eſt grauitas humidi molem habentis æqualem magnitudini A, & CG eſt grauitas humidi molem habentis æqualem aggregato ex A,P, ergo DF, erit grauitas magnitudinis P, & EG erit grauitas humidi molem habentis æqualem magnitudini P, ſed grauitas humidi molem habentis æqualem magnitudini P, maior eſt grauitate eiuſdem magnitudinis P, ergo EG maior erit, quàm DF.



a Arch. de inſidentibus humido.
b Arch. ibid.
c 5. axio. pr.

Compoſitio.

QVoniam igitur magnitudinis A grauitas eſt CD; aggregati autem ex A,P, grauitas eſt CF: humidi molem habentis æqualem magnitudini A, grauitas eſt CE, & humidi molẽ habẽtis ęqualẽ aggregato ex A, P eſt CG; ergo DF erit grauitas ipſius P, & EG, erit grauitas exceſſus, quo humidum, cuius grauitas CG, ſuperat humidum cuius gra-

uitas CE; atq; adeò erit grauitas humidi molem habẽtis æqualem magnitudini P, ſed grauitas humidi molem habentis æqualem magnitudini P, eſt maior grauitate eiuſdem magnitudinis P, cuius grauitas eſt DF; ergo EG maior erit, quàm DF: communi addita FE; ergo FG maior erit, quàm DE: ſed magnitudo A in humidum impulſa, tanta vi ſurſum fertur, quanta eſt grauitas DE, & aggregatum ex A,P, tanta vi ſurſum fertur, quanta eſt grauitas FG; ergo aggregatum ex A,P in humidum, impulſum, maiori vi ſurſum fertur, quàm magnitudo A. Quod oportebat oſtendere.

Experimenta quædam.

Cùm aliquando contigerit, vt experiremur nonnulla ad proiectorum motum pertinentia, ſcilicet Mortariũ æneum, quod puluere pyrio oneratum adhibetur ad explodendos globos, erat autem exiguæ longitudinis, dimidij palmi Romani, globus verò æneus erat ſex vnciarũ; inſtructũ cũ eſſet autẽ illo puluere pyrio, vti dictũ eſt, obſeruauimus pro quantitate pulueris, proiectionis diſtantiam, eadẽ sẽper retẽta dimidij anguli recti, eleuatione, & quidẽ oneratum denario pulueris proijciebat globum ad diſtantiam vnius brachij ferè Florentini, paratum autem duobus denarijs in maiorem diſtantiam, & ita experti ſumus vſque ad quinque pulueris denarios.

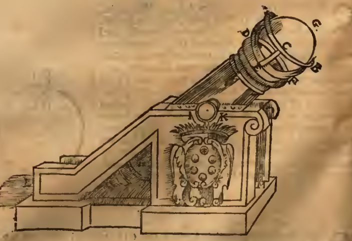
Duo proponuntur inquirenda. Primum.

Duo porrò videbantur plurimum negotij faceſſere, quæ quidem æquè perturbabant animum, eundemque incitabant ad ſpeculandum. Primum, quòd retenta eadem pulueris quantitate, Mortarium non proijciebat globulum ſemper ad eandẽ diſtantiam, ſed modò ad paulò maiorem, modò verò ad paulò minorem, adeò vt centies ſi id repetitum fuiſſet centies quoque variatio contigiſſet, tametſi omni induſtria, diligentia, ac ſtudio curatum fuiſſet, vt ijſdem ſemper manentibus experimentum fieret.

Secundum.

Secundum, quod non erat minori inquiſitione dignum, cur interualla, diſtantiæque, ad quas globulus proiectus perueniebat, non eam ſeruarent rationem, quæ inter pondera pulueris; dum enim onerabatur Mortarium duplo pulueris, non propterea dupla erat diſtantia, ad quam globulus proiectus pertingeret.

Cùm autem animum ad meditandum appellerem, illud ſe ſe obtulit circa primum, veluti ſummoperè probabile, illud phænomenon ſcilicet non aliunde, quàm à diuerſitate contactus globuli cum ipſius Mortarij caua ſuperficie, prouenire; Ac propterea animum induxi, vt crederem futuram, ſi aliquid remedij adinueniretur, quo liceret ab huiuſmodi contactu declinare, nullam varietatem in proiectione, etſi eadem pulueris quantitate, ac ijſdem omnibus manentibus, quæ contingere ſolebat.



Peropportunum quidem illicò mihi viſum fuit id, quod mox explicabo,

Erat

Erat autem Mortarium, vt in adiecto ſchemate DHF ad eleuationem dimidij anguli recti, fulcitũ capſulæ LM, medijs anſulis IK, &c. eius orificio aptata erat machinula ADEFB, cui inſidebat globulus CG, eaque erat ratione ipſi orificio accommodata, vt in quatuor punctis medijs cochleolis coniuncta eſſet, Mortarijque æri infixa; eius autem Zonulã ACB, ea ratione fieri curaui, vt internus ambitus ipſius exilis eſſet inſtar aciei cultri ad cuitandam quantum fieri poſſet contactum cum ipſo globulo, cùm autem intromiſſus fuiſſet puluis, & aptato globulo, vt vides, puluere accenſo, & globulo exploſo, obſeruatus fuit terminus, ad quem ille perueniret, quo pluries, ac pluries facto, deprehenſum eſt ſumma conſtantia ſemper globulum ad eundem terminum perueniſſe, quod maiori mihi fuit argumento, varietatem illam priùs obſeruatam non aliunde originem traxiſſe, quàm ab eo iam inſinuato contactu, atque hunc in modum veritate deprehenſa, ſtatim animum ſubijt cupiditas inquirendi cauſam, vnde non ſeruaretur ratio in diſtantijs, quæ eſſet in ponderibus pulueris, quæ ſingulis vicibus fuerunt adhibita, itaque in memoriam recolens, quòd illa linea deſcripta ab exploſo globulo proximè accederet ad parabolicam, ſtatim ſe obtulit ea quæ ſequitur demonſtratio, qua oſtenditur, rationem diſtantiarum eſſe eandem cum ratione quadratorum à viribus pulueris explodentis. *Experimenti explicatio.*

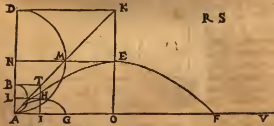
Conſiderandum eſt enim, vni denario pulueris pyrij tantam ineſſe vim, duobus denarijs duplam, tribus denarijs triplam, & ſic deinceps; non propterea tamen diſtantiæ ſecundum quas fit exploſio globuli, hanc ſeruant rationem, ſed potius eam, quæ eſt inter quadrata; vnde ſi vis pulueris fuerit, vt vnum, vis alia fuerit, vt duo, & ſic de reliquis, diſtantia ad diſtantiam non erit, vt vnum ad duo, ſed vt vnum ad quatuor, quod nos ſequenti demonſtratione comprobabimus. Præſens autem Theorema eſt vnum ex illis quamplurimis Phyſico-Geometricis, quæ in naturali Philoſophia nos aſſerimus; placuit vtpotè non omni iucunditate deſtitutum ad hanc Artem illuſtrandam in exemplum afferre. *Notandum.*

THEOREMA.

Exemplum XXXXII.

Si certo quodam impetu proijciatur graue ſecundùm directionem eleuatam ſupra lineam horizontalem, & alio itidem impetu ſecundùm eandem directionis lineam idem graue proijciatur. Dico eſſe, vt quadratum impetus ad impetus quadratum, ita ſpatium in linea horizontali ad ſpatium in eadem linea confectum.

Sit linea horizontalis AV, ad cuius extremum A impetu R, ſecundùm directionis lineam AK facta ſit extruſio alicuius grauis, & ad eiuſdem lineæ extremum A ſecundùm directionem eiuſdem lineæ AK facta ſit extruſio eiuſdem grauis impetu quidem S. Dico eſſe, vt quadratum R ad quadratum S, ita ſpatium confectum à graui extruſo impetu R ſuper rectam horizontalem AV, ad ſpatium confectum ſuper eandem lineam à graui extruſo impetu S.



Intelligatur ad extremum A erecta perpẽdicularis AD, ita vt ſi graue ipſum ſecũdùm huiuſmodi lineã impetu R extruderetur, perueniret ad D, at ſi foret proiectũ impetu S, ſecundùm eandem directionis lineam perueniret ad B.

Quoniam igitur, vt nos in Phyſicis demonſtrauimus, impetus, ſiue velocitatis gradus ſiue momentum, quo impellitur graue per rectam AD vſque ad D, idem eſt, ac momentum, quod acquireret illud idem graue naturaliter deſcendens ex D in A, & illud, quo impellitur vſque ad B, idem eſt ac illud, quod graue acquireret naturaliter deſcendens ex B in A, momentum autem acquiſitum in A per deſcenſum ex D in A, ad momentum acquiſitum itidem in A per deſcenſum ex B in A, eſt in ſubduplicata ratione ſpatij AD, ad ſpatium AB; *Quid ſpatiũ; ſiue Velocitas.*

ergo

ergo momentum, quo impellitur graue ex A in D ad illud, quo impellitur ex A in B, eſt in ſubduplicata ratione ſpatij AD ad ſpatium AB. Sed momentum, quo graue ex A expellitur in D eſt ex hypotheſi R, illud verò, quo expellitur ex A in B, eſt itidem ex hypotheſi S; ergo R ad S ſubduplicatam habebit rationem ſpatij AD ad ſpatium AB; quare vt quadratum R ad quadratum S, ita AD ad AB.

Hic per menſuram momenti intelligitur recta, per quā impetus, & momentum poteſt proijcere mobile ab extremo, ad extremum ipſius; quod prius intelligendum de deſcenſu.

Quoniam verò graue extruditur per AD momento R, & per AB momento S, erunt AD, AB menſuræ ipſorum momentorum; eſto igitur AD menſura momenti R, & AB menſura momenti S, (hoc enim intelligere nihil prohibet). Super AD, & AB deſcripti ſint ſemicirculi AMD, ACB, interſecantes directionis lineam AK in punctis M, C, quæ quidem erunt extrema quadrantum AM, AC, quando angulus KAF, vel kAD fuerit ſemirectus; ſecundùm quam directionem demonſtrationem contexímus, quoniam ſecundùm eandem hoc Piſis nos experti ſumus.

Per punctum C ducta ſit LH parallela rectæ AF, cui itidem parallella per punctum M ducta ſit NE, ſitque CH facta æqualis ipſi LC, & ME facta ſit æqualis NM. Ex H cadat perpendicularis HI, & ex E perpendicularis EO. Eſto autem HI axis parabolæ, cuius vertex H, amplitudo autem AG deinde EO eſto axis parabolæ, cuius vertex E, amplitudo autem AF. Manifeſtum eſt parabolam AEF deſcribi impetu R, cuius menſura fuit AD, & parabolam AHG deſcribi impetu S, cuius menſura fuit AB. Intelligatur IH protracta ad T & OE ad k ſic BT æquiſtabit AI, & Dk æquidiſtabit AO.

α 4. ſexti, & 16. quinti.
β 34. primi.
γ 11. quinti.

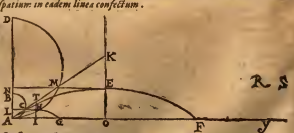
Quoniam igitur eſt, vt AF ad AG, amplitudo ad amplitudinem, ita ſemiamplitudo AO ad ſemiamplitudinem AI, ſed α vt AO ad AI, ita Ok ad IT; ſunt enim triangula AOk, AIT, inter ſe ſimilia, ſeu AD ad AB; ſũt β enim OK, IT, æquales ipſis AD, AB, ergo erit, γ vt AF ad AG, ita AD ad AB, ſed vt AD ad AB, ita quadratum momenti R, ad quadratum momenti S, ergo vt quadratum momenti R ad quadratum momenti S, ita AF ad AG. Quod oportebat oſtendere.

Quoniam verò, vt ſuperiùs itidem innuimus, experimentũ à nobis Piſis confectum fuit, ita vt linea directionis angulum ſemirectum efficeret cum linea horizontali, propterea demonſtrationem ſuperiorem confecimus experimento apprimè reſpondentem. Viſum eſt tamen operæ pretium aliam contexere, quæ inſeruiat cuicunque angulo, quem linea directionis cum horizontali conficiat; eam autem hìc ſubijcimus.

Exemplum XXXXXIII.

THEOREMA.

Si certo quodam impetu proijciatur graue ſecundùm directionem eleuatam ſupra lineam horizontalem, & alio itidem impetu ſecundùm eandem directionis lineam idem graue proijciatur. Dico eſſe, vt quadratum impetus ad impetus quadratum, ita ſpatium in linea horizontali ad ſpatium in eadem linea confectum.



Sit linea horizontalis AV, ad cuius extremum A, impetu R, ſecundùm directionis lineam Ak facta ſit extruſio alicuius grauis. Et ad eiuſdem lineæ horizontalis extremum A ſecundùm directionem eiuſdem lineæ AK, facta ſit extruſio eiuſdem grauis impetu S. Dico, eſſe vt quadratum R ad quadratum S, ita ſpatium confectum à graui extruſo impetu R ſuper rectam horizontalem AV, ad ſpatium confectum ſuper eandem lineam à graui extruſo impetu S.

Intelligatur ad extremum A erecta perpendicularis AD, ita vt ſi graue ipſum, ſecundùm huiuſmodi lineam impetu R extruderetur perueniret ad D, at ſi foret proiectum impetu S, ſecundùm eandem directionis lineam perueniret ad B.

Quoniam igitur, vt nos in Phyſicis demonſtrauimus, impetus, ſiue velocitatis gradus, ſiue momentum, quo impellitur graue per rectam AD vſque ad D, idem eſt, ac momentum, quod

quod acquireret illud idem graue deſcendens ex D in A, & illud, quo impellitur vſque ad B, idem eſt, ac illud quod graue acquireret naturaliter deſcendens ex B in A, momentum autem acquiſitum in A per deſcenſum ex D in A, ad momentum acquiſitum in A per deſcenſum ex B in A, eſt in ſubduplicata ratione ſpatij AD, ad ſpatium AB; momentum enim ad momentum eſt vt tempus ad tempus, tempus autem ad tẽpus eſt in ſubduplicata ratione ſpatiorũ, ergo momẽtum, quo impellitur graue ex A in D ad illud, quo impellitur ex A in B, eſt in ſubduplicata ratione ſpatij AD ad ſpatium AB. Sed momentum, quo graue ex A expellitur in D eſt ex hypotheſi R, illud verò, quo expellitur ex A in B, eſt itidẽ ex hypotheſi S; ergo R ad S ſubduplicatam habebit rationem ſpatij AD ad ſpatium AB; quare vt quadratum R ad quadratum S, ita AD ad AB.

Quoniam verò graue extruditur per AD momento R, & per AB momento S, erunt AD, AB menſuræ ipſorum momentorum; eſto igitur AD menſura momenti R, & AB menſura momenti S, (hoc enim intelligere nihil prohibet). Super AD, & AB deſcripti ſint ſemicirculi AMD, ACB, interſecantes directionis lineam AK in punctis M, C.

Per punctum C ducta ſit LH parallela rectæ AF, cui itidem parallella per punctum M ducta ſit NE, ſitque CH facta æqualis ipſi LC, & ME facta ſit æqualis NM. Ex H cadat perpendicularis HI, & ex E perpendicularis EO. Eſto autem HI axis parabolæ, cuius vertex H, amplitudo autem AG, deinde EO eſto axis parabolæ, cuius vertex E, amplitudo autem AF. Manifeſtum eſt parabolam AEF deſcribi impetu R, cuius menſura fuit AD, & parabolam AHG deſcribi impetu S, cuius menſura fuit AB. Intelligatur IH protracta ad T. Erit autem AK tangens parabolæ: vnde deſcripta hac eadem erit directionis linea.

Hic per momenti menſurã intelligitur recta, per quã ab extremo, ad extremum impetus, atq; momentum procrere poteſt mobiles, aſſumemus enim tantũ lineã, ad denotãdũ tantũ impetũ quantum requiritur. ad hoc. vt poſſit proijcere illud mobile ab extremo, ad extremũ ipſius lineæ; quod de deſcenſu intelligendum prius.

Apollonius lib. 1.

Reſolutio.

QVoniam igitur eſt, vt quadratum momenti R ad quadratum momenti S, ita AF ad AG; eſt autem vt quadratum momenti R ad quadratum momenti S, ita AD ad AB; ergo erit [a] vt AF ad AG, ita AD ad AB, vt autem AF ad AG, ita AO ad AI, ſiquidem, vt duplum ad duplum, ita ſimplum ad ſimplum; ergo [b] vt AO ad AI, ita AD ad AB, ſed vt AO ad AI, ita [c] eſt OK ad IT, ſeù OE ad IH, dimidium ad dimidium, atque adeò AN ad AL, cũ hæ ijs ſint [d] æquales; ergo [e] vt AD ad AB, ita AN ad AL, & permutando [f] vt AD ad AN, ita AB ad AL; & diuidendo [g], vt DN ad NA, ita BL ad LA; & conuertẽdo, [h] vt AN ad ND, ita AL ad LB, ſed vt NM ad ND, ita LC ad LB; ergo per ſubtractionem æqualiũ rationum erit, vt AN ad NM, ita AL ad LC, & [i] permutando, vt AN ad AL, ita NM ad LC; eſt autem AO dupla ipſius NM, & AI dupla ipſius LC; ergo vt AN ad AL, ita AO ad AI, ſed OE eſt [k] æqualis AN, & IH æqualis AL; ergo vt AO ad AI, ita OE ad IH; eſt [l] autem OK dupla ipſius OE, & IT dupla ipſius IH, ſiquidem Vt AO ad ME ita Ok ad EK &c. ergo vt OK ad IT, ita AO ad AI, ſeù AF ad AG; vt enim ſimplum ad ſimplum, ita duplum ad duplum. Quod ita ſe habet; ſunt enim triangula AOK, AIT inter ſe ſimilia &c.

a 12. quinti.
b 11. quinti.
c 4 ſexti. & 16. quinti.
d 14. primi.
e 11. quinti.
f 16. quinti.
g 17. quinti.
h cor. 4. quinti.
i 16. quinti.
k 14 primi
l 4. ſexti. & 16. quinti.

Compoſitio.

QVoniam igitur eſt vt AF ad AG, ita AO ad AI; vt enim duplum ad duplum ita ſimplum ad ſimplum, & [α] vt AO ad AI, ita OK ad IT, (ſunt enim triangula AOk, AIT inter ſe ſimilia &c.) [β] eſt autẽ OK dupla ipſius OE, & IT dupla ipſius IH, ſiquidem Vt AO ad ME ita Ok ad EK &c. vnde vt Ok ad IT, ita OE ad IH; ergo [*] vt AO ad AI, ita OE ad IH, ſed OE æqualis eſt AN, & IH æqualis eſt AL; ergo vt AO ad AI, ita AN ad AL; ſed [γ] vt AN ad AL, ita NM ad LC, & permutando [δ] vt AN ad NM, ita AL ad LC, & vt AN ad NM, ita NM ad ND, vtque AL ad LC, ita [ζ] LC ad LB, atque adeò ex æquali, [ε] vt AN ad ND, ita AL ad LB; & conuertendo, [θ] vt DN ad NA, ita BL, ad LA, componendoque, [η] vt DA ad AN, ita BA ad AL, ac permutando, [λ] vt DA ad AB, ita NA ad AL. Erat autem, vt NA ad AL, ita AO ad AI; ergo [μ] vt DA ad AB, ita AO ad AI; ſed vt AO ad AI, ita AF ad AG, ergo vt DA ad AB, ita AF ad AG, ſed vt DA ad AB, ita quadratum momenti R ad quadratum momenti S; ergo vt quadratum momenti R ad quadratum momenti S, ita AF ad AG. Quod erat operæ prætium oſtendere.

α 4. ſexti. & 16. quinti.
β 4. ſexti. & 16. quinti.
* 11 quinti.
γ 14. primi.
δ 4 ſexti, & 16. quinti.
ε 16. quinti.
ζ cor. 8. ſexti.
η 22. quinti.
θ cor. 4 quinti.
κ 18. quinti.
λ 16. quinti.
μ 11. quinti.

Videtur omnibus ferè probatum illud. Quod ſi graue proijciatur ad libellam, & per lineam horizontalem, ne minimum quidem excurrat per lineam rectam, ſed ſtatim incipiat deſcendere, atque adeò duplici impulſu, & ſcilicet à propria grauitate per lineam perpendicularem horizonti, & ab externo principio ſecundùm lineam horizontalem, paraboli-

cam

cam lineam deſcribat: Vnde non ſemel ad hanc veritatem indagandam curauimus experimenta fieri, præſertim verò ad explorandum num id quod alioquin à plurimis fuit decantatum, cum veritate conſentiat; an ſcilicet ſi Bombarda fuerit horizontaliter directa, dum globum explodit vi incluſi pulueris accenſi, eodemque momento temporis, quo globus exit ex orificio Bombardæ alter ſimilis, ac æqualis magnitudine, & pondere cadat ex eodem orificio per rectam perpendicularem ad horizontem, ſimul etiam vterque ad horizontem ipſum pertingat; quod vt experiremur Liburni commorantes hac vſi ſumus induſtria: onerata enim bombarda debito puluere, & globo ferreo, ad eius orificium aptauimus bacillum tantæ longitudinis quanta erat ſemidiameter orificij, & nonnihil etiam amplius, vt non niſi vi orificio tranſuerſim intromitti poſſet; ſic enim firmiter hærebat referens eiuſdem orificij diametrum. Mox verò cœpimus alium globum ferreum eiuſdem magnitudinis atque adeò ponderis, cumque quibuſdam funiculis ligauimus ita firmiter, vt vno ex ijs ſuſpendi poſſet, hunc prætereà bacillo circumuoluimus, nodiſque firmauimus, vt accenſo igne, momento, quo extruſus globus ex Bombardæ orificio exiret, deſcenderet alter; Animaduertimus verò hoc experimento pluries repetito coram Magnatibus, plurimiſque alijs inferioris notæ, curioſitatis gratia illuc confluentibus, etiam eorum teſtimonio, citiùs perpetuo globum deſcendentem per lineam perpendicularem ad horizontem pertingere: vnde ſuſpicari cæpimus, etiam fatentibus ijs, qui rem ſecus euenturam arbitrabantur, id acceptum referendum eſſe medij impedimento, quod nos adprobantes, ac admittentes exiſtimauimus, poſſe quempiam, hunc, qui ſequitur in modum, ratiocinari. Si tamen illud, quod primo loco occurrit ſuppoſitum, tanquam verum admitteretur nimirum, quòd impulſus vnus, alium retardet.

Nullus hac in re patet aditus Analyſtæ, ſiquidem principijs nutantibus nulla fit reſolutio, quatenus tamen conijcere permittitur, hac ratione quiſpiam ratiocinari poſſet.

Experimentũ de Bombarda explodente pilam horizontaliter.

Dum proijcitur lapis in aquam ſecus horizontem præſertim ſi figura inſtar placentulæ extiterit, impulſus autem validus, per aquam ſaltim excurrit antequam immergatur, atque deſcendat, quod non contingeret nullo præuio impulſu; nam alioquin ſuperimpoſitus aquæ, propriæ naturæ relictus ſtatim deſcendit; imò ſi per aerem perpendiculariter in aquam cadit, nulla interpoſita mora petit imum; quo pacto præoccupatur reſponſio, quod ſcilicet id ita eueniat, quoniam graue à medio ad medium diuerſum, hoc eſt ab aere ad aquam, tranſeat. His habitis.

Medium retardat ſui craſſitie grauis deſcenſum, & quo craſſiùs eò magis retardat; vnde ſi fuerit craſſiſſimum, omnem deſcenſum prohibet. Inſuper impulſus horizontalis retardat eiuſdem grauis deſcenſum; ita vt quo vehementior extiterit, eò etiam magis illum retardet; quod ſi vehementiſſimus fuerit, omnem deſcenſum prohibet; vtrunque igitur retardat, & impedit; quare ſi vnum tantum nequeat deſcenſum omninò impedire, alio accedente, impediet; quanto autem craſſius medium extiterit; tanto minùs de horizontali impulſu ad idem conſequendum requiritur; ſi itaque medium fuerit aqua, hæc autem attenuata faceſſat in aerem; & quantum craſſitiei ammiſerit, tantundem horizontalis impulſus, quo lapis per aquam excurrebat vigoris acquiſierit, itaut aggregatum momentorum reſiſtentiæ aquæ attenuatæ puta aeris, & impulſus adaucti æquale ſit aggregato momentorum reſiſtentiæ aquę, & impulſus non adaucti quò graue per aquam excurrebat, idem in aere contiget effectus, nempe graue per aerem feretur iuxta lineam horizontalem; itaque ſi hac licet quamuis leui vti coniecturà, non erit abſimile vero, vt globus vi Bombardæ exploſus per aliquod ſpatium, ac tempus feratur horizontaliter, dummodo vis impellens tantum habeat momentum quanto ad id eſt opus; quæ non tanquam certa, ſed vt non omninò improbabilia dicta ſunto.



Experimentũ proponitur glacierum.

Cùm nobis foret in deſiderio præclarum illud inquirere, quo nam pacto aqua in glaciem concreſceret, & quis hac in re foret Naturæ progreſſus, propterea multum hac in re laboris pertulimus, nec exiguum tempus inſumpſimus. Erat autem vas vitreum, prout in adiuncto ſchemate intueri licet, nimirùm vas ſphæricum ABC, ex quo collum graci-

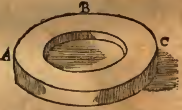
le con-

ſe conſurgebat BED longitudinis trium partium vnius brachij Florẽtini, ſphærici vaſis diameter erat duarum partium ex ijs, quarum viginti totum brachium complent; collum adeò erat gracile, vt eius orificium foret inſtar pupillæ oculi: erat porrò communi aqua repletum vſque ad terminum E. Dum autem huiuſmodi vas fuit in glaciem immerſum citra collum ipſum, obſeruatum fuit aquam aſcendere vltrà terminum E, quod non modicam adſtantibus admirationem ingeſſit, cùm potius ratio dictaret aquam per anguſtam fiſtulam deſcendere debere, cùm frigidi proprium ſit condenſare: inde cuiuſque animum adſtantium ſuſpicio inuaſit, nè id ex vaſis immutatione ortum duceret, ob id peropportunum duxi vas idem in aquam calidam immergere, vt inde quid ſuboriretur liceret obſeruare, quo facto, cernimus illicò aquam deſcendere infra E, cùm tamen oppoſitum quiſque ſibi ſuaſiſſet euẽturum, intelligens calidi proprium eſſe rarefacere; propterea maioris adhuc ſuſpicionis inde cauſa eſt orta, ne id à continentis mutatione proueniret; quamobrem, vt veritatem tandem aſſequeremur, haud irrationabile duxi vas alia figura præditum adhibere, cuius videlicet parietes forent depreſſi, vt in adiuncto ſchemate perſpicuè apparet; experimento autem facto, ſecus rem euenire deprehenſum eſt: immò variatis quoque vaſis penes vitri craſſitiem, hinc etiam ſymptoma variari obſeruare licuit.

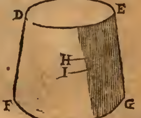


Quinimò, vt impenſiùs rem ipſam noſtra contemplatione perſequeremur, anulum æneum fieri curaui, vt in tertia figura ABC, quem aptabam maſculo DFGE, in quo deſcendere vſque ad H aduertebam: erat autem maſculum etiam æneum, mox in ignem anulo iniecto, donec ferè candeſceret, eidem iterum aptabam maſculo obſeruans quouſque deſcenderet, & aduerti perueniſſe ad I punctum infra H, exiſtente anulo, tam priùs, quàm poſteà, parallelo horizonti: vnde eiuſdem anuli dilatationem conieci; ſiquidem maſculum erat coni ſegmentum, vnde verſus baſim craſſitie ſua creſcebat: hinc porrò datá philoſophandi anſâ multa ſum meditatus, & quidem id abſolutè nequaquam euenturum arbitrabar, inſpecta naturalis agentis natura, qua actionem vniformiter difformiter, vt aiunt, effundit; Ob id data hypotheſi, quòd calor æquè inuaderet, non autem actione illa vniformi difformi, quid ſecuturum quærebam: Vnde Theorema condidi.

Experimentũ alterum.



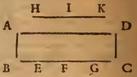
In prima figura vas depreſſum à lateribus repræſentatur per ABC. In ſecunda figura annulus æneus reſpræſentatur per ABC. Tandem maſculum ſignificatur per EDFG, cui aptabatur anulus, qui deſcendebat ad H, poſtquam autem fuerat calefactus, & iterum aptatus, deſcendit vſque ad I: Vnde conijcere licuit, anulum illum ſecundùm intimam ſuperficiem dilatatum fuiſſe vi caloris; qua de re deinde cauſam inquirere conati ſumus.



Exemplum XXXXXIV.

THEOREMA.

Magnitudo rarefactione adaucta vi caloris aquè inuadentis ſingulas eius partes, menſuras acquirit maiores in ratione, quã ab initio.



Sit magnitudo ABCD, quæ ſuſcipiat incrementum per caloris intruſionem. Vel igitur ratio eſt rationalis, vel irrationalis. Sit primo rationalis, atque adeò BC ſit multiplex ipſius AB: cùm itaque BC ſit multiplex ipſius AB, erit diuiſibilis in partes, quarum quælibet ſit æqualis ipſi AB; diuidatur, eæque ſint BE, EF, FG, GC. Cùm itaque calor æquè inuadat ex hypotheſi ſingulas partes, tantum afferet incrementum vni ex ipſis, quantum alteri. Sit autem HI incrementum factum parti BE; tantundem enim fiet reliquis partibus, quarum ſingulis cùm ſit æqualis AB, etiam & illi fiet incrementum HI; omnia autem incrementa facta partibus BE, EF, FG, GC, ſit Hk.

Reſolutio.

QVoniam igitur figura contenta ſub BC plus HK incremento, & AB plus incremento HI continetur ſub lateribus habentibus eandem rationem, quam habent latera BC, AB; ergo vt BC ad AB, ita eadem BC plus HK incremento, ad AB, plus HI incremento; ſed vt HK ad HI, ita BC ad AB, ergo vt BC plus HK ad AB plus HI, ita HK ad HI, & permutando, vt BC plus HK ad HK, ita AB plus HI ad HI, & diuidendo vt BC ad HK, ita AB ad HI, & permutando, vt BC ad AB, ita HK ad HI; * ergo incrementum, quod ſuſcipit BC ad illud, quod ſuſcipit AB erit, vt BC ad AB,* ſed vt BC ad BE, ita BC ad BA, cùm BA, BE ſupponantur æquales; ergo vt BC ad BE, ita incrementum, quod ſuſcipit BC, ad incrementum, quod ſuſcipit AB, ſed HK eſt incrementum, quod ſuſcipit BC, & HI eſt etiam incrementum, quod ſuſcipit AB, * ergo vt BC ad BE, ita HK ad HI, eſtque ex hypotheſi ratio multiplex; ergo quàm multiplex eſt BC ipſius BE, tàm multiplex etiam erit HK ipſius HI. Quot igitur partes in BC continentur, quarum quælibet æqualis eſt BE, totidem continentur in HK, quarum quælibet æqualis eſt HI. Quod ita ſe habet &c.

Compoſitio.

QVoniam igitur BC diuiſa eſt in partes, quarum quælibet æqualis eſt BE, ſingulíſque facta ſunt incrementa, quorum quodlibet æquale eſt HI, eorumque aggregatum eſt HK; ergo quot partes in BC continentur, quarum quælibet æqualis eſt BE, totidem continentur in HK, quarum quælibet æqualis eſt HI; ergo quàm multiplex eſt BC ipſius BE, tàm multiplex erit HK ipſius HI; ergo vt BC ad BE, ita HK ad HI,* ſed Hk eſt incrementum, quod ſuſcipit BC, & HI eſt incrementum, quod ſuſcipit AB; ergo vt BC ad BE, ita incrementum, quod ſuſcipit BC, ad incrementum, quod ſuſcipit AB,* ſed vt BC ad BE, ita BC ad BA, cùm BA, BE ſupponantur æquales; ergo incrementum, quod ſuſcipit BC ad illud, quod ſuſcipit AB, erit, vt BC ad AB; ergo incrementa erunt magnitudinibus proportionalia,* ergo vt BC ad AB, ita HK ad HI, & permutando vt BC ad HK, ita AB ad HI, & componendo, vt BC plus HK ad HK, ita AB plus HI ad HI, & permutando, vt BC plus HK ad AB plus HI, ita Hk ad HI, ſed vt Hk ad HI, ita BC ad AB; ergo vt BC plus HK ad AB, plus HI, ita BC ad AB. Ergo figura contenta ſub BC plus Hk incremento, & AB plus incremento HI, continetur ſub lateribus habentibus eandem rationem, quam habent latera BC, AB. Quod oportebat oſtendere.

Breuiùs diceremus * ſed vt BC ad BE ita BC ad BA, cum BA, BE ſupponantur æquales * ergo vt BC ad AB ita HK ad HI &c.

At verò ſi ſupponamus rationem eſſe ineffabilem, inſtituetur Analyſis ad eum, qui ſequitur modum.

Reſolu-

Reſolutio.



QVoniam igitur figura poſt rarefactionem, æquè inuadente calore, ſimilis eſt figuræ ante rarefactionem; figura autem ſub BC plus incremento ex rarefactione in BC, & AB plus incremento ex rarefactione in AB eſt poſt rarefactionem, at verò quæ ſub BC, & AB eſt anteà; ergo figura contenta ſub BC plus incremento ex rarefactione in BC, & AB plus incremento ex rarefactione in AB ſimilis eſt figuræ ſub BC & AB; ergo vt BC plus incremento ex rarefactione in BC ad AB plus incremento ex rarefactione in AB, ita BC ad AB; ergo permutando, vt BC plus incremento ex rarefactione in BC ad BC, ita AB plus incremento ex rarefactione in AB ad AB; ergo per conuerſionem rationis, vt BC plus incremento ex rarefactione in BC ad idem incrementum, ita AB plus incremento ex rarefactione in AB ad idem incrementum; & diuidendo, vt BC ad incrementum ex rarefactione in BC, ita AB ad incrementum ex rarefactione in AB, & permutando, vt BC ad AB, ita incrementum ex rarefactione in BC ad incrementum ex rarefactione in AB, ſed vt incrementum ob intruſum calorem in BC, ad incrementum ob intruſum calorem in AB, ita eſt incrementum ex rarefactione in BC ad incrementum ex rarefactione in AB; ergo incrementum ob intruſum calorem in BC ad incrementum ob intruſum calorem in AB erit, vt BC ad AB; ſed capacitas prædicti incrementi in BC ad capacitatem ſimilis incrementi in AB, ſecundùm certum intenſionis gradum, eſt vt BC ad AB; ergo incrementum ob intruſum calorem in BC ad incrementum ob intruſum calorem in AB, eſt vt capacitas huiuſmodi incrementi in BC ad capacitatem ſimilis incrementi in AB, iuxta certum intenſionis gradum. Quod ita ſe habet.

Compoſitio.

QVoniam igitur extenſionis incrementum ob intruſum calorem in BC ad incrementum ob intruſum calorem in AB eſt, vt capacitas huiuſmodi incrementi in eadem BC ad capacitatem incrementi in AB, iuxta certum intenſionis gradum; ſed capacitas incrementi prædicti in BC ad incrementi capacitatem in AB ſecundùm certum intenſionis gradum, eſt vt BC ad AB; ergo incrementum ob intruſum calorem in BC, ad incrementum ob intruſum calorem in AB, erit vt BC ad AB; ſed vt incrementum ob intruſum calorem in BC ad incrementum ob intruſum calorem in AB, ita eſt incrementum ex rarefactione in BC ad incrementum ex rarefactione in AB; ergo vt BC ad AB, ita incrementum ex rarefactione in BC ad incrementum ex rarefactione in AB; ergo permutando, vt BC ad incrementum ex rarefactione in BC, ita AB ad incrementum ex rarefactione in AB; & componendo vt BC plus incremento ex rarefactione in BC, ad incrementum; ita AB plus incremento ex rarefactione in AB ad incrementum: & per conuerſionem rationis, vt BC plus incremento ex rarefactione in BC ad BC, ita AB plus incremento ex rarefactione in AB ad AB; ergo permutando, vt BC plus incremento ex rarefactione in BC, ad AB plus incremento ex rarefactione in AB, ita BC ad AB. Figura igitur contenta ſub BC plus incremento prædicto, & AB plus prædicto incremento ſimilis eſt figuræ ſub BC, & AB, ſed illa eſt poſt rarefactionem, hæc verò antea; ergo figura poſt rarefactionem, æquè inuadente calore, ſimilis eſt figuræ ante rarefactionem. Quod oportebat oſtendere.

Quæ autem diximus de anulo æneo iniecto in ignem per calorem alterato, experti quoque ſumus in anulis ligneis infuſis in humidum, vnde nobis innotuit dilatationem quoque fieri in concaua ſuperficie. Erant autem anuli ex buxo, qui trium dierum ſpatio in aqua detenti fuerunt, vt inde plurimum humoris attraherent; quorum vnus fibris conſtabat perpendicularibus baſi, alter autem eidem parallelis. Vterque dilatationem ſubijt, hoc intercedente diſcrimine, quòd primus antiquam retinuit figuram circularem, & coni trunco applicatus multùm deſcendit infra terminum, quem antea aridus ſibi præſcripſerat: ſecundus verò ad ellipticam figuram deflexit, vnde applicatus eidem coni trunco ægrè deſcendere poterat,

Quæ de anulo æneo dicta ſunt. Auctor expertus eſt in annulis ligneis iniectis in humidum.

Multos hoc experimentũ vexauit. Conturbabantur autem mordicus tuentes omnia alterari à natura per qualitates ſine appulſu particularum, ſiue corpuſculorum, quorum aggeries conſtituit effluuium. Non enim ipſis hæc videbantur admodum propriæ ſententiæ accommodata, ſecus verò cautiùs philoſophantibus nobis; cùm vtriuſque ſymptomatis cauſam communem eſſe, ſimulque vtroquo experimento perbellè ſenteatiam noſtram confirmari aduerteremus. Vtrobique ſiquidem contingit particularum intruſio, ſiue anulus æneus iniectus in ignem fuerit, ſiue ligneus in aquam: vnde duo hæc contraria, licet in diuerſis ſubiectis ad ſimiles effectus conſpirantia, notauimus.

Ex accidenti poteſt id ſecus euenire, vt in funibus. Hæc autem intelligenda ſunt per ſe, cùm ex accidenti ſecus euenire nihil prohibeat; ſi enim calor æquè inuaderet funem, non contingeret incrementum ad eum, quem diximus modum; funis enim adauctus non foret ſibi ſimilis, ſed plus excreſceret ſecundùm longitudinem; nam humido perfuſus excreſcit ſecundùm craſſitiem, ſecundùm longitudinem decreſcens: at verò ſi calefieret extruſo humido, quamuis æquè eum inuadente calore, gracilior fieret longitudine adauctus, quod ipſius funis texturæ debet acceptum referri; ſiquidem ea eſt ex pluribus, pluribuſque ſpiris, vnde fit, vt pro ratione iſtarum modo iam dicto debeat incrementum ſuſcipere, quod Geometricè oſtendi facilè poſſet. Imaginandum eſt enim ſingulas helices, ſiue mauis ſpiras, quibus funis contexitur, atque compaginatur, per intruſas particulas dum dilatantur, quaſi craſſiorem cylindrum amplectentes coarctari debere; ſpirarum autem coarctatio, funis eſt decurtatio; èxeuntibus verò iiſdem particulis humidis ſpirarum earundem longitudines conſtrictæ, quaſi graciliorem cylindrum amplectentes diſtenduntur; harum autem elongatio, funis quoque elongatio eſt.

Item in muſculis. Muſculorum in animalis corpore ſtructura, eandem conditionem ſortitur; nam per intruſas particulas ſpirituoſæ ſubſtantiæ dum dilatantur, muſculi non elonganfur, ſed contrahuntur, vnde motus contractionis ſubſequitur.

Monitum.

Ex hactenus dictis memento magnitudinem adauctam ſimilem eſſe ſibimet non adauctæ.

His ſuppoſitis, id quod ſequitur demonſtrabitur.

Exemplum XXXXV.

THEOREMA.

Si magnitudo aliqua alteratione ſuſcipiat incrementum, dum augetur terminus vnus modo iam dicto, augentur & reliqui.

Sit e. g. figura comprehenſa duabus peripherijs AO, BM concentricis, quorum centrum ſit C; ducatur ex C recta CG occurrens peripherijs iam dictis in punctis B, A; alteratione ſuſcipiat incrementum, diuidatur AB bifariam in D, & centro C, interuallo CD deſcribatur circumferentia DI; Supponamus autem alteratione circumferentiam DI adauctam eſſe vſque ad circumferentiam EH.



a Ex ſuperiori corolla. Quoniam verò figura adaucta ſimilis eſt figuræ non adauctæ, erit [a] vt circumferentia DI ad latitudinem AB, ita circumferentia EH ad latitudinem ſuam, ea verò ſit GF, & centro C, interuallo CG deſcripta ſit circumferentia GN, & centro eodem interuallo CF deſcripta ſit circumferentia FL; ob ſimilitudinem igitur erit, vt DB ad DI, ita EF ad EH, & vt DI ad AD, ita EH ad GE; ergo ex æquali vt DB ad DA,

DA, ita EF ad EG, ſed DB æqualis eſt AD; ergo, & EF æquabitur GE. Quoniã verò anularis figura adaucta, comprehenſa circumferentijs GN, FL, ſimilis eſſe debet ei, quæ comprehenditur circumferentijs AO, BM, propterea, vt latitudo GF ad circumferentiam EH, ita latitudo AB ad circumferentiam DI, & vt latitudo GF ad latitudinem AB, ita circumferentia GN ad circumferentiam AO, & ſic de omnibus alijs circumferentijs tranſeuntibus per puncta latitudinis GF, in quibus ipſa GF diuiſa eſt proportionaliter, vt AB in punctis ſuis, per quæ tranſeunt aliæ circumferentiæ; itaque tandem vt GF ad FL, ita AB ad BM, & permutando, vt GF ad AB, ita FL ad BM, ſed GF maior eſt, quàm AB; ergo & FL maior erit, quàm BM; adaucta igitur circumferentia DI vſque ad EH, & latitudo AB euadat tanta, quanta eſt GF, & circumferentia AO augebitur, vſque ad GN, & etiam BM augebitur vſque ad FL; quare ſi circumferentia AO augetur, etiam circumferentia BM augebitur. Quod oportebat oſtendere.

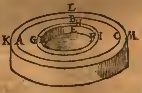
THEOREMA.

Exemplum XXXXXVI.

Si ſolidum aliquod ſit anulare, & agente calore æquè in ſingulas eius partes rareſiat, acquiret menſuras maiores in ratione, quam prius habebat, & latius ſiet ſecundum intimam ſuperſiciem.

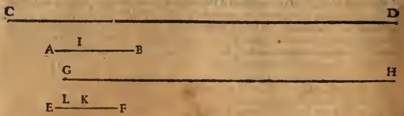
Sit Solidum anulare ABCDEF, in cuius ſingulas partes æquè agente calido, rareſiat. Dico ſolidum illud rarefactum ſecundùm intimam ſuperficiem anularem latius eſſe. Intelligantur omnes circumferentiæ extenſæ, vt ampliùs extendi non poſſint; Sic enim erunt lineæ rectæ, & in demonſtratione, quam ſubijciemus, intelligatur facta comparatio rectæ menſuræ ſolidi anuli cùm circumferentijs extenſis, vt ampliùs extendi non poſſint. Quandoquidem ſolidum rarefactum calore æque inuadente ſingulas eius partes, acquirit maiores menſuras, in ratione, qua ab initio; ac proinde illi debet ſimile eſſe; ob id ratio menſuræ FC, ad totam circumferentiam intimam FEDF; eadem eſſe debet in ſolido anulari rarefacto, quæ ex hypotheſi ſit deſcripta ipſa IHGI. Itemq; ratio menſuræ FC, ad extimum circulum CBAC rarefactum atq; adeò extenſum vſq; ad extimum circulum MLKM. Quoniam igitur, vt eſt FC menſura latitudinis anuli ante rarefactionem ad circulum extimum CB AC; ita debet eſſe menſura latitudinis anuli rarefacti, ad extimum circulum MLKM; At vero FM, ad MLKM maiorem habet rationem, quàm FC, ad extremum circulum CBAC; proinde menſura latitudinis circuli anuli rarefacti, minor eſſe debet, quàm FM. Et Rurſus; quoniam, vt FC menſura latitudinis circuli ante rarefactionem, ad intimum circulum FEDF, ita debet eſſe menſura latitudinis anuli rarefacti, ad intimum circulum eiuſdem; Eſt autem, ratio FM, ad intimum circulum FEDF maior, quàm ratio FC, ad eundem circulum intimum FEDF, proinde latitudo circuli anuli rarefacti minor erit, quàm FM, & circũferẽtiã IHGI intima circuli rarefacti maior erit circũferẽtiã FEDF; ex hypotheſi verò anulus extenditur vſq; ad MLKM, ergo circulus intimus anuli rarefacti tranſibit per pũcta inter F,M, u:g: per I; & inter E,L, vt per H, & inter K,D, ex: gr. per G. Eſt ergo circulus GHI latior circulo DEF. Quod oportebat oſtendere.





Quòd autem FM, ad MLKM maiorem habeat rationem, quàm FC, ad CBAC, ſic demonſtrabimus. Nam quòd FM, ad FEDF maiorem habeat rationem, quàm FC, ad FEDF, apertè conſtat ex 8. quinti. Illud igitur ſic oſtendemus.

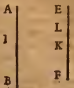
In-



Intelligatur continuata ſemidiameter vſq; ad circuli centrum N in ſuperiori figura, & in adiuncto diagrammate ſit AB æqualis ſemidiametro NM, & CD ſit circumferentia MLKM extenſa quidem, vt amplius extendi non poſſit; deinde EF ſit æqualis ſemidiametro NC, & GH ſit circumferentia CBAC extenſa, vt amplius extendi non poſſit. Ex AB ſecetur AI ſegmentum æquale ipſi ſemidiametro NF; & etiam ex EF, ſecetur Ek eidem æquale. Erit propterea IB æqualis FM, & kF æqualis FC. Si igitur oſtenderimus IB ad CD in adiuncto ſchemate maiorem habere rationem, quàm kF ad GH oſtenſum erit, quod erat operæ pretium. Quoniam igitur eſt ex hypotheſi, vt AB ad CD, ita EF, ad GH. Intelligatur iam eſſe vt BI, ad IA; ita FL, ad LE: (cadet autem punctum L inter E, & k, vt inferiùs oſtendemus). Quoniam igitur eſt vt BI, ad IA, ita FL ad LE, erit [a] componendo, vt BA, ad AI, ita FE, ad EL; vt verò CD, ad AB, ita ex hypotheſi eſt GH ad EF, quamobrem ex æquo erit, [b] vt CD, ad AI, ita GH, ad EL; ſed vt AI, ad IB, ita eſt ex conſtructione EL, ad LF, ergo ex æquo rurſus erit, [c] vt CD, ad IB ita GH, ad LF; & conuertendo, [d] vt IB, ad CD, ita LF, ad GH. Sed LF, ad GH maiorem habet rationem, [e] quàm KF, ad eandem GH, ergo, & IB, ad CD maiorem habebit rationem, quàm KF, ad GH.

a 18. quinti.
b 22. quinti.
c 22. quinti.
d cor. 4. quinti.
e 8. quinti.

Quod autem punctum L cadere debeat inter E, K, ſic facilè oſtenditur. Quoniam enim eſt AI æqualis EK; & AB maior, quàm EF. Si ab AB; & EF auferantur æquales AI, EK remanebit IB maior, quàm KF; proinde EK, ad KF maiorem habebit rationem, quàm AI, ad IB. Quare EK maior erit [f] ſegmento vno ipſius EF, habente ad ſegmentum alterum rationem, quam habet AI, ad IB; eſt autem, vt AI ad IB, ita EL, ad LF. Ergo ſegmentum EK maius erit ſegmento EL, ac proinde punctum L neceſſariò cadet inter E, K: Quod &c.



f 10. quinti.

Ad fluida pertinet etiam & illud, quod ſequitur.

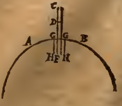
THEOREMA.

Anguſta fiſtula ex vtroque extremo recluſa immiſſa in humidum ſecundùm extremum vnum, per eam humidum ipſum ad certam quandam ſtationem neceſſariò aſcendet.

Sit humidum, cuius ſuperficies repræſentetur per AB, ſitque fiſtula FC vitrea; ſic enim apparet humidi aſcenſus per ipſam, ex vtroque extremo F, & C recluſa, immiſſa in humidum ſecundùm extremum F, ita vt pars immerſa ſit FE, extans autem EC. Dico humidum per ipſam intus aſcendere debere ſupra ſuperficiem AB in certa quadam determinata ſtatione quieſcens, v.g. D.

*In ſchemate intelligo lineam E, vbi circumferentia AB, ſecat fiſtulam CF.

Reſolutio.



Quoniam itaque fiſtula FC immiſſa in humidum ſecundùm orificium F, per eam aſcendit humidum ipſum ſupra humidi ſuperficiem AB, v.g. ad D, & ibi quieſcit, ergo vt humidum intra fiſtulam CF ſit in æquilibrio cum humido GH circumſtante, debet eſſe quidem maioris altitudinis, quàm FE, ergo momentum humidi intra fiſtulam CF, vt ſit æquale momento hu-

midi circumſtantis GH, requirit maiorem altitudinem, quàm FE, ergo momentum humidi FE intra fiſtulam in F, minus erit, quàm momentum humidi GH extra fiſtulam in H. Quod ita ſe habet; humidi enim cylindrus FE intra fiſtulam, ob multiplices contactus ad corpus conſiſtens in anguſtia fiſtulæ, vbi includitur, minus habet momentum, quàm humidum circumſtans GH, eiuſdem altitudinis, & eiuſdem rationis extra fiſtulam.

Compoſitio.

QVoniam humidi cylindrus FE intra fiſtulam,ob multiplices contactus ad corpus conſiſtens in anguſtia fiſtulæ, vbi includitur, minus habet momentum, quàm humidum circumſtans GH, eiuſdem altitudinis, & eiuſdem rationis; extra fiſtulam ergo momentum humidi FE, intra fiſtulam in F, minus erit, quàm momentum humidi GH extra fiſtulam in H; ergo momentum humidi intra fiſtulam CF, vt ſit æquale momento humidi circumſtantis GH, requirit humidi maiorem altitudinem, quàm FE; ergo vt humidum intra fiſtulam CF, ſit in æquilibrio cum humido GH circumſtanti, debet eſſe quidem maioris altitudinis, quàm FE, ergo fiſtula FC immiſſa in humidum AB ſecundùm orificium F, per eam aſcendit humidum ſupra ſui ſuperficiem AB, e.g. ad D, & ibi quieſcit.

Alia Reſolutio.

Exemplum LVII.

Intelligatur ſuperficies HH concentrica ipſi AB.

QVoniam humidum aſcendit per fiſtulam FC; ergo humidum circumſtans deſcendit, ergo humidum per fiſtulam FC expellitur ab humido circumſtanti; ergo minus eſt preſſa ſuperficies HH ad F orificium fiſtulæ, quàm in H; ergo minus eſt momentum FE in F, quàm GH in H. Quod ita ſe habet; humidum enim FE intra fiſtulam, minus habet momentum in F, ob multiplices contactus cum corpore conſiſtente, quàm GH extra fiſtulam in H.

Compoſitio.

QVoniam humidum FE intra fiſtulam minus habet momentum in F, ob multiplices contactus cum corpore conſiſtente, quàm GH extra fiſtulam in H; ergo momentum humidi FE intra fiſtulam in F minus eſt, quàm momentum humidi GH extra fiſtulam in H; ergo minus eſt preſſa ſuperficies HH ad fiſtulæ orificium F, quàm ad H; ergo humidum per fiſtulam FC expelletur ab humido circumſtanti; ergo humidum circumſtans deſcendit; ergo humidum aſcendit per fiſtulam FC. Quod &c.

Quoniam verò expulſio eſt finita, proptereà etiam aſcenſus finitus erit; ergo humidum ipſum per fiſtulam iam dictam aſcendet ad determinatam ſtationem.

S C H O L I O N.

Aduerte ex accidenti contingere poſſe, vt humidum non aſcendat, quia nimio lentore impeditur; & quia fortè tanta grauitas eſt, vt non admittat compenſationem contactus cum grauitate.

Redeuntes itaque ad ea, quæ humido inſident, non præteribimus, quod in re, de qua agimus, eſt magnoperè conſiderandum, videlicet, dum ſupra dicebamus humidum mole æquale ſolidæ magnitudinis parti, eiuſdem eſſe grauitatis cum ipſa magnitudine, & alia huiuſmodi, id intelligendum eſſe, vt exploratio grauitatis fiat, huiuſmodi corpora ponderando in eodem medio; eam ob cauſam, quoniam ſolidæ magnitudines humido grauiores, in ipſo humido tanto ſunt leuiores, quanta eſt grauitas humidi molem habentis ſolidæ magnitudini æqualem. Itaque ad ipſa ſolida libranda, vt videlicet inde eorum pondera innoteſcant, idem oportet adhibere medium; hoc enim pacto proportionaliter adimitur ijs *Explicatio multorũ, quæ factũ in principiis ad inſtitutum.*

graui-

grauitas; quod omninò ad explorandam grauitatem eorum requiritur; non enim benè inſtitueretur libratio ponderum, ſi vnum eorum in aere, aliud autem in aqua foret; quoniam plus adimit de grauitate aqua, quàm aer; vt igitur duo grauia, nobis conſtet æquè ponderare, ſeù duo corpora æqualis eſſe ponderis, vtrunque debet, vel in vacuo, vel in aere, vel in aliquo alio fluido, in quò illa deſcendant, eſſe conſtituta.

Libratio vel per deſceſſum, vel per aſcenſum.

Non eſt autem alienum ab inſtituto obſeruare, quod non eſt exigui momenti, nimirùm librationem inſtitui poſſe, vel per deſcenſum, vel per aſcenſum, de primo hactenus: de ſecundo pauca ſubijciam.

Supponamus Libram eſſe ligneam, eamque conſtitutam eſſe infra aquam, qua lignum eſt leuius: ſit autem trutina ipſius infixa fundo vaſis, vbi aqua: manifeſtum eſt, ſi ad extremitates lancium, ſeu brachiorum ipſius Libræ fuerint alligata ſolida humido leuiora, eiuſdem grauitatis in ſpecie, eiuſdem molis, eiuſdemque figuræ, æquali impetu ſurſu m aſcenſura, atque adeò in bilance fieri æquilibrium, quòd ſi vnum mole fuerit maius altero, quod eſt maius, maiori impetu ſurſùm aſcenſurum eſſe, atque idem euenturum quoq; in libratione per deſcenſum, dum videlicet ex vna parte bilancis fuerit conſtitutum pondus maioris grauitatis abſolutę: adeò vt in aſcenſu, quod eſt maioris molis, etſi eiuſdem grauitatis in ſpecie, quod maioris eſt grauitatis abſolutę, maiori impetu ſurſùm feratur. Vt igitur, ſi fuerint duo corpora lignea ponderis inæqualis, quod eſt maioris ponderis deſcendit, vni ex brachijs bilancis appenſum, quodque minoris eſt ponderis, eleuatur, dum libratio fit in fluido leuiori, puta aere; ita contra, quod maioris eſt ponderis, in fluido grauiori aſcendit, quodque minoris eſt ponderis deſcendit, dum ſcilicet vtrunque fuerit extremis lancium bilancis, vnum vni, alterum alteri alligatum, in fluido grauiori in ſpecie.

Figura non facit ad momentum grauitatis, ſed ad celeritatem motus.

Obſeruandum tamen eſt, à nobis commemoratam fuiſſe figuram, non quaſi hæc faciat ad momentum grauitatis in ijs, quæ ſunt humido grauiora, itemque leuiora; ſed quia habet ſe veluti conditio ad faciliùs ſcindendum medium: atque adeò conducit ad velocitatem deſcenſus, aut aſcenſus. Eſt enim delirantium ſomnium, humidum, ſeu fluidum, cuiuſmodi eſt aqua, nullam habere reſiſtentiam ad diuiſionem.

Corpora ſiquidem generis eiuſdem, eiuſdemque grauitatis, grauiora, quàm humidum, & ſibi ſimilia, æqualem in humido grauitatem habent. Quòd ſi vnum velociùs deſcendit, quàm alterum, poteſt id figuræ acceptum referri: inde tamen non licet maiorem grauitatem inferre. Ita fit, vt idem corpus ſegniùs, vel velociùs deſcendere poſſit per quodcunque humidũ, e.g. per aerem, quando ſcilicet humido grauius fuerit, prout videlicet ipſum in humidum fuerit immiſſum, conſtans figura irregulari, nimirum gracili, & oblonga ſecundùm vnam dimenſionem, & lata ſecundùm alteram; nam ſi deſcendat immiſſum ſecundùm latitudinem, ſegniùs; at ſi ſecundùm gracilem, & oblongam dimenſionem, celeriùs deſcendet. Id autem de aſcenſu quoque intelligendum omninò.

Supradicta de libratione faciunt etiam ad deſcenſus celeritatem.

Cæterum ſupradicta de libratione in eodem medio &c. faciunt etiam ſuo modo ad deſcenſus celeritatem. Illud tamen diſcriminis intercedit, quòd in libratione grauius ipſum præponderat; ſi enim fuerint æqualis grauitatis in ſpecie, vt ſe habet moles ad molem, ita grauitas ad grauitatem; ſi igitur mole eſt maius, ita etiam & grauitate, at quæ æquè grauia ſunt æquè ponderant; quod autem grauius præponderat. Sed non ob eam cauſam, quia præponderet quod eſt grauius, exiſtimandum eſt celeriùs deſcenſurum, cùm vtrunque ex quiete deſcendit; quod enim grauius eſt altero, eſt etiam eò maius, ſuppoſita eadem grauitate in ſpecie; quoties igitur moles in mole continetur, toties grauitas in grauitate; perinde eſt igitur, ac ſi plura corpora æqualis molis, & grauitatis ſumpta fuerint, ita vt vno relicto reliqua fuerint coniuncta, & illud, & hoc aggregatum eodem momento incipiant deſcendere; vt enim hæc omnia diſiunctim æquè velociter deſcendiſſent cum eo, quod ſeorsùm deſcendere ſupponitur, ita etiam coniuncta, remotis impedimentis, videlicet medij reſiſtentia &c; coniunctio ſiquidem nihil addit, nihilque detrahit. Vnde ſi ſint corpora plumbea, quorum vnum ponderet decem, alterum autem mille, æquè velociter in vacuo deſcenderent; at in pleno, ſi quid diſcriminis eſt, id oritur à reſiſtentia medij; nam ſi corpora fuerint eiuſdem grauitatis in ſpecie, proportionaliter quidem fit ipſis detractio grauitatis; nam hæc fit pro ratione grauitatis partis ipſius medij, quæ mole fit æqualis corpori deſcendenti; vnde quemadmodum ſe habet grauitas aeris mole æqualis plumbo mille librarum ad grauitatem aeris mole æqualis plumbo decem librarum, ita ſe habet pondus mille librarum

brarum ad pondus decem librarum; ſed ſi fuerit ablatum ad ablatum, nempè pondus aeris ad pondus aeris, vt totum ad totum, ſcilicet vt plumbum ad plumbum, etiam reliquum ad reliquum, hoc eſt id, quod retinet de grauitate pondus mille librarum ad pondus id, quod retinet de grauitate decem librarum plumbi, vt totum ad totum ſe habebit; facta detractione iam dicta per grauitatem aeris, quem vnà cum plumbo ſuppono librari in vacuo, & grauia ipſa deſcendere per aerem; Cùm autem grauitas ſit inſtrumẽtũ quo Natura vtitur in deſcenſu grauium, propterea, vt hæc æquè velociter in vacuo deſcenderant, ita etiã in pleno; obſtat tamẽ reſiſtentia medij, quæ attendi debet, & penes ſuperficiei partẽ corporis deſcendentis, partem, inquam, cui ſubiectũ mediũ occurrit reſiſtens, & partim etiam penes modũ, quo occurrit, vel ſcilicet ad angulos rectos, vel obliquos; nam ſi foret, vt graue ad graue, ita illa ſuperficiei pars iã dicta vnius corporis ad ſuperficiei partẽ alterius corporis, æquè velociter deſcendere deberent ſuppoſita grauium eadẽ grauitate in ſpecie. At ſi ſubiectũ mediũ eodẽ modo vtrique occurrat, nẽpè ad rectos angulos, ita vt vtraque ſuperficies, cùm plana fuerit, vtrique etiã cylindri ex medij ſubſtãtia ad rectos ãgulos occurrere intelligãtur; quod ſi vna fuerit plana, altera autem etſi illi æqualis, gibba, conica, vel in duas partes diuiſa, ita vt hæ mutuò ſibi occurrãt, ſe ſeque interſecent in vna, eadẽq; linea recta, variabitur ratio reſiſtentiæ; nãque ſuperficiei planæ fit reſiſtentia ad angulos rectos, at vero huic fit reſiſtẽtia ad angulos obliquos, quæ minor eſt illa: ita fit vt parallelepipedum humido grauius difficiliùs deſcendat, e.g. per ipſum humidum, quàm ſi eadem moles conſtauerit figura acuminata, vel ſi eadem moles immittatur in fluidum ſecundùm ſuperficiem latiorem, difficiliùs deſcendet, quàm ſi immittatur ſecundùm anguſtiorẽ, quod etiã nonauit Philo. lib. 4. de Cœlo Tex. 45.

At verò ſi grauia fuerint diuerſæ grauitatis in ſpecie, in pleno non fit detractio grauitatis proportionaliter, ita vt reliquum ad reliquum eandem habeat rationem ac totum ad totũ, nam ſi e.g. fuerint duo corpora æqualis molis vnum plumbeum, alterum autem aqueum, & vtrumque deſcendat per aerem; plumbum ad aquam habet rationem ferè vt $11\frac{1}{2}$, ad 1. aer mole æqualis plũbo ponderet, vt $\frac{1}{2}$, plũbo detrahitur grauitatis vt $\frac{1}{2}$, & remanẽt vndecim pro grauitate ipſius, aquæ autem detrahitur grauitas, vt $\frac{1}{2}$, & remanet $\frac{1}{2}$ pro grauitate ipſius: non eſt autem vt $11\frac{1}{2}$ ad 1. ita 11. ad $\frac{1}{2}$. Vnde nequeunt deſcendere æquè velociter in pleno, in vacuo tamen pari velocitate ferentur. *Aduertenda quædam.*

Aer mole æqualis aquæ ponderabit id, quod exprimitur per fractionem cuius numerator eſt 1, denominator autem 1177; quo detracto ex 1, fit reliquum expreſſum per fractionem, cuius numerator eſt 1176, denominator autem 1177; detracto verò ex 11, cum dimidio, fit reliquum 11, cum fractione, cuius numerator eſt 1175, denominator autem 2354. Non eſt porrò, vt 11, cum dimidio ad 1, ita 11, cum fractione, cuius numerator eſt 1175, denominator verò 2354, ad fractionem, cuius numerator 1176, denominator verò 1177. Itaque detractio grauitatis non fit proportionaliter, vt dictum fuit.

Iuuat autem hìc adnotaſſe ad deſcenſus maiorem velocitatem non ſufficere, quod graue ad graue maiorem habeat rationem, quàm ſuperficies ad ſuperficiem mobilis, etiamſi ſolùm ea attendatur, quæ eſt attendendam, nempe totius ſuperficiei grauis deſcendentis pars, cui ſubiectum mediũ occurrit ac obuium fit reſiſtens. Sed inſuper attendere quoque oportet modum occurſus, an videlicet fiat ſecundùm angulos obliquos, an verò ſecundùm angulos rectos; id enim magni refert in re, propoſita. Agedum redeamus vnde diſceſſimus; & de aeris ponderatione, rationeq; grauitatis ipſius ad grauitatem aquæ, pauca quædam in medium adducamus. *Notanda quædam de acceleratione maiori deſcenſus.*

Videtur Keplerus rem non benè explicaſſe: nam reuera, vt experimento nobis comprobatum fuit; ſi aeris moles ponderat vnum, loquendo de illo, quem inſpiramus, eadem cùm fuerit aquæ ponderabit 1177. At vt eſt grauitas ad grauitatem, ità denſitas ad denſitatem, & contra. Is autem putat rationem denſitatis collectam ex refractionibus, ex æthere in aerem. & ex aere in aquam, eſſe, vt 1, ad $1177\frac{1}{2}$, & quidem in linea recta: ex vtroque proportionis termino, effecto cubo, exiſtimat colligi rationem, quæ inter 1, & 1533304682, addens, Non dubiũ ſi quis in puro æthere conſiſteret, funderetq; hinc vnum cyathum aquæ, inde 15; myriades myriadum cyathorum aeris, quin hæc æquiponderatura ſint, & in cameræ, ſeu cubo duodecim pedes longo, lato, & alto non plus ineſſe materiæ cùm aere *illo* puriſſimo, qui ætheri contiguus eſt plenus eſt, quàm in cubiſco aquæ, qui patet per octauam partem pollicis in omnes dimenſiones. At alibi dixerat, toties tenuiorem *Kepleri deceptio.*

eſſe aerem aqua, & æther aere, decies centies millies: vnde nec etiam ſibi videtur conſtare. Modus autem conſequendi rationem ponderis inter aerem, & aquam, hic vnus eſt. Sumpſimus ſphæricum vas plumbeum vndique clauſum, aere repletum, quod cùm demiſſum in aquam non demergeretur, cùm ſcilicet plumbea cortex foret modicæ craſſitiei, propterea additũ fuit tantũ plumbi, vt fieret demerſio, eius autem pondus inquiſitum fuit in aere repertumque librarum 4. vnc. 6. den. 4., & gran. 16. hoc eſt gran. 31216. Eadem ponderatio facta fuit in aqua, repertumque eſt pondus librarum 0. vnc. 7. den. 10. hoc eſt omnibus ad grana redactis gran. 4272; operationis autem progreſſus eſt vt ſequitur.

Modus explorandi Aeris grauitatem.

Pondus molis plumbeæ pilæ non compreſſæ, vnà cum plumbo addito, vt fieret immerſio &c. pondus inquam in aere. Lib. 4. 6. 4. 16.

Pondus eiuſdem aggregati, in aqua. Lib. 0. 7. 10.

Differentia Pondus molis aquæ æqualis prædicto aggregato. Lib. 3. 10. 18. 16.

Duæ vigeſimæ tertiæ partes librarum 4. 6. 4. 16. auferendæ pro aqua reſpondente moli ipſius plumbi. Lib. 0. 4. 17. $2\frac{10}{23}$

Pondus molis aquæ æqualis capacitati pilæ non compreſſæ. Lib. 3. 6. 1. $13\frac{13}{23}$

Pondus pilæ plũbeæ compreſſæ, vna cũ plumbo addito in aere. Lib. 4. 6. 4. 23.

Pondus pilæ compreſſæ, cum addito plumbo, in aqua. Lib. 1. 9. 17. 14.

Differentia Pondus molis aquæ æqualis prædicto aggregato. Lib. 2. 8. 11. 9.

Duæ vigeſimæ tertiæ partes librarum 4. 6. 4. 16. vt ſupra auferendę &c. Lib. 0. 4. 17. $2\frac{10}{23}$

Pondus molis aquæ æqualis capacitati pilæ compreſſæ. Lib. 2. 3. 18. $6\frac{13}{23}$

Pondus molis aquæ æqualis capacitati pilæ non compreſſæ. Lib. 3. 6. 1. $13\frac{13}{23}$

Pondus molis aquæ æqualis capacitati pilæ compreſſæ. Lib. 2. 3. 18. $6\frac{13}{23}$

Pondus aquæ mole æqualis aeri, cuius pondus erat gran. 7. illudque fuit inuentum, ſubtracto pondere pilæ non compreſſæ, & ponderatæ in aere, cuius pondus erat lib. 2. 11. 7. 6. à pondere eiuſdem pilæ compreſſæ 2. 11. 7. 13. horum enim differentia eſt 7. Pilæ autem fuerunt ponderatæ in aere ſine addito plumbo, quoniam hoc non erat opus. Lib. 1. 2. 7. 7.

Quod ſi illud adhibere placet, pondus pilæ non compreſſæ cum plumbo, erit Lib. 4. 6. 4. 16. cùm plumbum additum eſſet 1. 6. 21. 10. At compreſſæ pondus cum plumbo addito erat Lib. 4. 6. 4. 23. horum autem differentia eſt itidem 7. at verò lib. 1. 2. 7. 7. valet grana 8239. itaque moles aeris, quæ ponderat 7. cùm fuerit aquæ ponderabit 8239. Ratio igitur aeris ad aquam, eſt vt 7. ad 8239. omnibus diuiſis per 7. erit vt vnum ad 1177.

Vel pondus pilæ cum addito plumbo, in aere. Lib. 4. 6. 4. 16.

Pondus aquæ æqualis mole prædicto aggregato. Lib. 3. 10. 18. 16.

Aggregatum. Lib. 8. 4. 22. 32.

Pondus pilæ cum addito plumbo compreſſæ conſiderato tantum pondere ipſius plumbi. Lib. 4. 6. 4. 16.

Pondus aquæ mole æqualis prædicto aggregato. Lib. 2. 8. 11. 9.

Aggregatum. Lib. 7. 2. 15. 25.

Aggregatum primum. Lib. 8. 4. 22. 32.

Aggregatum ſecundum. Lib. 7. 2. 15. 25.

Differentia, & pondus aquæ mole æqualis moli aeris cũ plũbo. Lib. 1. 2. 7. 7.

Pondus aeris. Lib. 0. 0. 0. 7.

Vel pondus æquæ æqualis mole pilæ non compreſſæ addito plũbo, cauſa ſubmerſionis &c. Lib. 3. 10. 18. 16.

Pondus aquæ mole æqualis pilæ compreſſæ addito plumbo. Lib. 2. 8. 11.

Differentia, & pondus aquæ mole æqualis aeri, cuius pondus fuerat gran. 7. Lib. 1. 2. 7. 7.

SCHO-

SCHOLION.

Notanda quadam.

Aduertendum eſt autem, ideò detrahi duas vigeſimas tertias partes, vt dictum eſt, duas inquam vigeſimas tertias partes librarum 4. 6. 4. 16. quoniam grauitas plumbi ad grauitatem aquæ eſt in ratione, vt $11\frac{1}{2}$ ad 1. fiat igitur vt $11\frac{1}{2}$ ad 1. ita 31216 ad aliud, illudque erit $\frac{62432}{23}$ hoc eſt $2714\frac{10}{23}$ ſi autem 2714. quæ ſunt grana diuidamus per 24. prouenient 113. den. & 2. gran. ſi verò 113. diuidamus per 24. fiet quotiens vnc. 4. & den. 17. vnde integer quotiens erit vnc. 4. den. 17. & gran. $2\frac{10}{23}$.

Supradictorum Theoria.



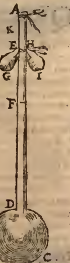
Quæ hactenus dicta ſunt, ſic oſtenduntur. Sint pilæ, quarum vna AD, altera verò EH mole quidem æquales. Intelligatur AD plena aqua, cuius pondus ſit lib. 3. 6. 1. $13\frac{11}{23}$. Intelligatur redacta ad paruitatem BC, tantæ capacitatis, vt contineat aquæ libras 2. 3. 18. $7\frac{11}{23}$.

Intelligatur pila EH plena aere, quæ ponderata in aere non habet niſi pondus continentis; aer intus incluſus nihil in aere ponderat: intelligatur compreſſa ad paruitatem ſphæræ FG tantæ capacitatis quantæ eſt BC; aer autem contentus in EH pila maiori redactus ſit in parua pila FG Manifeſtum eſt interſtitium inter pilam AD, & pilam BC, futurum æquale interſtitio inter EH, & FG, itaque moles aquæ contentæ in interſtitio priorum pilarum erit æqualis moli aeris contenti in interſtitio ſecundarum pilarum: hic autem aer compactus in FG fuit ponderis granorum 7. eſtque differentia aeris contenti intra pilam FG, & EH, ſeu eſt pondus aeris contenti in interſtitio pilarum EH, FG *. At verò differentia ponderis aquæ contentæ in pila AD maiori lib. 3. 6. 1. $13\frac{11}{23}$ à pondere aquæ contentæ in pila minori BC lib. 2. 3. 18. $13\frac{11}{23}$. differentia inquam eſt lib. 1. 2. 7. 7. itaque pondus aquæ in prædicto interſtitio eſt lib. 1, 2, 7. 7; pondus aeris in æquali interſtitio eſt gran. 7; Ergo ratio ponderis ad aquæ pondus eſt, vt 7. ad vnc. 14. 7. 7. omnibuſque redactis ad grana, vt 7. ad 8239. hoc eſt, vt 1, ad 1177.

** qui enim erat in FG perinde eſt ac id cui ſit additio in æquilibio &c.*

Error commiſſus à quodam in aeris ponderatione.

Hic tamen non diſſimulabo errorem commiſſum ab illo experimentorum compilatore, qui in huius experimenti hiſtoria fecit aerem non compreſſum grauiorem compreſſo, oblitus eorum, quæ docuit Galilæus, & iampridem Ariſtoteles. Quod ex eo planè cuique conſtabit aduertenti, longè difficilius impelli deorſum cyatum inuerſum, in humidum initio quàm poſtea immerſionis decurſu; eam ob cauſam, quia aer intra cyatum incipit conſtipari ab humido ſubtus occurrente cyato deorſum propulſo; tunc autem factum cum ſit tatum corpus grauius in ſpecie, non reſiſtit prementis manui; vnde nulla in immerſioni progreſſu reſiſtentia percipitur.



Auctor is modus alter explorandi aeris grauitatem.

Auctoris modus peculiaris ad explorandã aeris grauitatem.

Sit inſtrumentum ADBC vitreum, quod repletum ſit hydrargyro: deinde ſuperimpoſito digito orificio A, inuerſo inſtrumento, vt fieri ſolet, demergatur orificium prædictum digito clauſum in hydrargyrum reſtagnans vaſe contentum: mox ſubtracto digito, permittatur exitus hydrargyro incluſo in vaſe, deſcendet autem ad ſtationem F conſuetam ſupra ſuperficiē hydrargyri ſtagnantis, nimirùm ad altitudinem vnius brachij cum quarta parte: mox verò idem orificium perſeuerans immerſum, claudatur veſica ſuina, funiculo ſcilicet eam firmiter ſtringendo, vt omnis aeri prohibeatur ingreſſus, cùm ſcilicet orificium ipſum aeri fuerit expoſitum; inuerſum autem inſtrumentum immergatur in aquam: & quoniam contingit, vt grauius ſit in ſpecie, quàm aqua; propterea vna, vel duæ, vel plures, ſi opus fuerit, aptentur veſicæ, quarum duæ in ſchemate repræſentan-

tur per EG,HI aere quidem repletæ, ita vt factâ Inuerſione extet pars colli inſtrumenti, e.g. KA: inſuper addito pondere, ſc. annulis quibuſdam ex metallo, ſuperimpoſitis collo, ita vt hoc illos ingrediatur, deſcendentes vſque ad ligaturam veſicarum EH, adgrauantes tantùm, vt apex colli A deſcendat ad aquæ ſuperficiem; quod, vt meliùs cognoſcamus, aptanda eſt ſummitati cuſpis quædam peracuta, ita vt obſeruandum ſit tantam fuiſſe factam ponderis additionem, quantum requiritur ad immerſionẽ vſque ad acumen illius cuſpidis: mox autem perforetur veſica, atque aditus permittatur aeri, manifeſtum eſt per huiuſmodi ingreſſum inſtrumentum magis immerſum iri. Notetur igitur quantum ponderis eſt auferendum ex ſupra impoſito, illudque ſeruetur.

Explicationis continuatio. Deinde vas repleatur vſque ad orificium aquâ, relicto hydrargyro, vt priùs, & iterum claudatur orificium, ſuperimpoſita eadem cuſpide ad immerſionem obſeruandam, videatur quantum ponderis auferendum ſit, vt eadem immerſio, eodemque modo contingat; hoc autem pondus conferatur cum ſupra ſeruato; nam ſi illud fuerit gran. 7. hoc erit 8239. ergo grauitas aeris ad grauitatem aquę rationem habebit, vt 7. ad 8239. hoc eſt, vt 1. ad 1177. vt priùs: ſunt enim eiuſdem molis.

THEOREMA.

Exemplum LVIII.

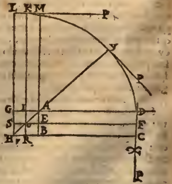
Si rei ſtabili priſma fuerit horizontaliter infixum, ad cuius extremum graue fuerit appenſum. Dico potentiam, qua reſiſtit fractioni, ad graue reciprocè eſſe, vt longitudo priſmatis, ad ſemi-altitudinem eiuſdem.

Sit priſma HGDC, cuius pars HGAB, ſit rei ſtabili, v.g. parieti, quidem infixa: pars verò ADCB ſit extra; ſit autem graue X appenſum ad extremum C, ita vt momentum reſiſtentiæ in AB (hìc enim frangeretur, ſi frangi deberet) æquale ſit momento grauis X appenſi ad C; diuiſa ſit AB bifariam in E.

Dico graue X ad reſiſtentiam in AB reciprocè ſe habere, vt EB ad BC.

Intelligatur erectum priſma perpendiculariter ad horizontem, vt HLMB, cuius pars HGAB, ſit terræ infixa, diuiſaque GA bifariam in I, ſitque potentia P æquipollens graui X, & eadem potentia P applicata ad M.

Reſolutio.



QVoniam igitur reſiſtentia æquè diffuſa per AB ad graue X, eſt vt BC ad BE: ſed loco grauis X intelligi poteſt potentia P applicata ad C; ergo ratio reſiſtentiæ æquè diffuſæ per AB ad potentiam P applicatam ad C, erit vt BC ad BE; ſed loco reſiſtentiæ æquè diffuſæ per AB, intelligi poteſt [a] potentia reſiſtens, cuius momentum in E; ergo potentia reſiſtens, cuius momentum in E, ad potentiam P applicatam ad C, erit vt BC ad BE; ſed ſi potentiæ reſiſtentis momentum in E, æquipollet potentiæ P applicatæ ad C, eidem æquipollet etiam idem potentię reſiſtentis momentum in R; BE, BR exiſtentibus æqualibus, vt oſtendetur; [b] ergo potentia reſiſtens, cuius momentum in R ad eandem potentiam applicatam ad C, erit reciprocè, vt BC ad BR, ſeu potentia reſiſtens, cuius momentũ in I, ad ipſam potẽtiã P applicatam ad D erit reciprocè, vt AD ad AI; (idem eſt enim momentum in I, ac in R, & vt AD ad AI, ita BC ad BR) ergo potentiæ reſiſtentis momentum in I, atque adeò [c] reſiſtẽtia æquè diffuſa per GA æquipollens [d] potentiæ P applicatæ ad M, æquipollet etiam momento eiuſdem potentiæ applicatæ ad D. Quod ita ſe habet; ex Elementis.

[a] Corol. 2. lemmatis 2.

[b] Lemma primum.

[c] Corol. 2. lemma 2.

[d] ex infrapoſitis.

Lemma

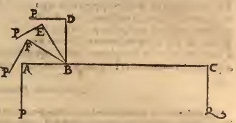
Lemma Primum.

Si fuerit vectis AC, cuius hypomoclion B, ſitque ad extremum A applicata potentia P, & ad extremum C, applicata potentia Q, ita vt earum momenta ſint æqualia. Exemplum LIX.

Dico ſi vectis inflectatur in B ad quoſcunque angulos CBD, CBE, CBF &c. dummodo potentia P, eodem modo fuerit applicata, quo applicata eſt ad extremum A, momenta ad extrema D, E, F &c. applicatæ potentiæ, æqualia eſſe momento eiuſdem potentiæ applicatæ ad extremum A.

Reſolutio.

QVoniam igitur potentia applicata ad D æqualis eſt momenti cum eadem potentia applicatâ ad A, ſuppoſito eodem applicationis modo; ergo potentia applicata ad D æquipollet potentiæ eidem Q applicatę ad C, cui æquiualet eadem potentia applicata ad A, ſecundùm eandem diſtantiæ rationem ab hypomoclio; ſed potentia applicata ad A



æquipollet potentiæ applicatæ ad C ſecundùm rationem diſtantiæ BC ad BA; ergo eadem potentia applicata ad D debebit æquipollere potentiæ applicatæ ad C, ſecundùm rationem diſtantiæ BC ad BA; ſed potentia applicata ad D æquipollet potentiæ Q applicatæ ad C, ſecundùm rationem diſtantiæ BC ad BD; ergo eadem erit ratio BC ad BA, quæ BC ad BD; Quod ita ſe habet; ſunt enim AB, BD inter ſe æquales.

Sic de alijs extremis E, F &c.

Compoſitio.

QVoniam igitur AB, BD, ſunt inter ſe æquales; eadem propterea erit ratio BC ad BA, quæ eſt eiuſdem BC, ad BD; ſed potentia applicata ad D æquipollet potentiæ Q applicatæ ad C, ſecundùm rationem diſtantiæ BC ad BD; ergo potentia applicata ad D debebit æquipollere potentiæ Q applicatæ ad C, ſecundùm rationem diſtantiæ BC ad BA; ſed eadem potentia applicata ad A, æquipollet potentiæ Q applicatæ ad C, ſecundùm rationem diſtantiæ BC ad BA; ergo potentia applicata ad D æquipollet potentiæ Q applicatæ ad C, cui ęquiualet eadem applicata ad A, ſecundùm eandem diſtantię rationem ab hypomoclio; ergo ſuppoſito eodem applicationis modo potentia applicata ad D ęqualis erit momenti cum eadem applicata ad A.

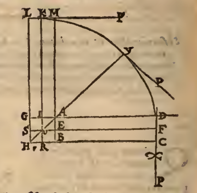
Sic de alijs extremis E, F &c.

Lemma Secundum.

Si priſma HGDC, fuerit erectum perpendiculare horizonti, vt HLMB, ita vt pars HGAB, quæ erat infixa parieti; modò ſit ad rectos angulos infixa terra eodem modo, & loco grauis V, cuius momento æquale eſt momentum reſiſtentiæ in AB, ſit quædam potentia P, illi æquipollens applicata ſecundùm rectam PM, ad M, extremum priſmatis erecti, fracto priſmate in GA intelligatur ſuperimpoſitum aliquod graue ipſi LM, potentiæ P æquipollens, diuiſaque GA bifariam in I, & per I cadat perpendicularis KR.

Dico momentum in I, à graui ſuperimpoſito æquale eſſe momento reſiſtentiæ in GA.

Quo-



Quoniam enim eadem eſt reſiſtentia in GA, quæ in AB, & potentia P applicata ad M, ex hypotheſi æquipollet graui X, cui æquiualet reſiſtentia in AB; ergo reſiſtentia in GA æquipollet potentiæ P applicatæ ad M. At verò ſi nos intelligamus ſuperimpoſitum graue aliquod ipſi LM, cuius centrum grauitatis adgrauet per rectam kR, æquipollens potentiæ P, etiam fracto priſmate in GA, eadem habebitur reſiſtentia, quæ priùs, æquipollens potentiæ P applicatæ ad M; ſed ſuperimpoſiti grauis, cuius centrum grauitatis ſit in recta kR, momentum eſt in eadem, puta in I; ergo momentum huiuſmodi reſiſtentiæ in I, fracto priſmate, reſiſtens æquipollet potentiæ P applicatæ ad M; ſed momentum reſiſtendo æquipollens potentiæ P applicatæ ad M, æquipollet reſiſtentiæ in GA, eiuſq; momento eſt æquale; ergo momentũ in I à graui ſuper impoſito, æquale erit momento reſiſtentiæ in GA.

Corollarium Primum.

Hinc perſpicuum eſt momentum in I à graui ſuperimpoſito ſubſtitui poſſe loco reſiſtentiæ in GA: tàm enim illud, quàm hæc æquipollet potentiæ P applicatæ ad M: atq; adeò abſolutè momentum in I, ſubſtitui poſſe loco reſiſtentiæ æquè diffuſæ per GA.

Corollarium Secundum.

Hinc etiam intelliges per E ducta SF parallela horizonti, ſi quemadmodum fuit poſitum graue ſuper LM, adgrauans per rectam KR, cuius momentum æquipolleret tam potentiæ P applicatæ ad M, quam reſiſtentiæ in GA, ita ſuper DC intelligi, vis quædam poteſt, premens ſecundùm rectam FS, itaut æquipolleat graui X, vel potentiæ P applicatæ ſecundùm rectam PC ad extremum C, ita vt eius momentum in E æquiualeat reſiſtentiæ in AB, atque adeò momentum in E, ſubſtitui poteſt loco reſiſtentiæ æque diffuſæ per AB.

Compoſitio.

QVoniam igitur reſiſtentia æquè diffuſa per GA, atque adeò α potentiæ reſiſtentis momentum in I æquipollens β potentiæ P applicatæ ad M, æquipollet etiam momento eiuſdem potentiæ applicatæ ad D, vt oſtenſum eſt; ergo potentia reſiſtens, cuius momentum in I ad ipſam potentiam P applicatam ad D, erit reciprocè, vt AD ad AI, ſeu potentia reſiſtens, cuius momentum in R, ad eandem potentiam applicatam ad C erit reciprocè, vt BC ad BR (idem eſt enim momentum in I, ac in R, & vt AD ad AI, ita BC ad BR:) ſed, vt ſuperiùs oſtenſum eſt, γ ſi potentię reſiſtentis momentum in R, ęquipollet potentię P applicatę ad C, eidem ęquipollet etiam idem potentię reſiſtentis momentum in E; BE, BR exiſtentibus ęqualibus, δ ergo potentia reſiſtens, cuius momentum in E, ad potentiam P applicatam ad C, erit vt BC ad BE. Sed loco potentię reſiſtentis, cuius momentum in E, intelligi poteſt reſiſtentia ęquè diffuſa per AB; ergo ratio reſiſtentię ęquè diffuſę per AB, ad potentiam P applicatam ad C, erit vt BC, ad BE: ſed loco potentię P applicatę ad C, intelligi poteſt graue X; ergo reſiſtentia ęquè diffuſa per AB, ad graue X, erit reciprocè vt BC ad BE. Sic depriſmate inclinat v.g. iucũdũ HY &c. & quod depriſmate, idẽ de Cylindro. &c.

α corol. [illegible] 2.
β ex ſupra oſtenſis.
γ lemma 1.
δ corol. 2. lemmatis 2.

SCHOLION.

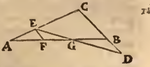
Aduertendum eſt autem, dicendum non eſſe momentum reſiſtentia in AB ad momentum grauis X, eſſe vt BC ad BE: etenim momenta poſſunt eſſe æqualia, etſi diſtantia ab hypomoclio ſint inæquales; eritque vt diſtantia ad diſtantiam, ita recipro[illegible] graue ad graue momentis æqualibus exiſtentibus: ſed potius dicendum, reſiſtenti[illegible] in AB ad graue X rationem habere, vt BC ad BE. Non enim graue idem eſt quod momentum grauis; nec

potentia

potentia idem eſt quod momentum potentiæ: nec reſiſtentia idem quod momentum reſiſtentiæ, quæ planè confundenda non ſunt, nec promiſcuè vſurpanda, vt cuique, etſi leuiter in Mathematico puluere verſato, perſpicuum eſſe poteſt; Non enim momentum in E ad momentum in C, eſt vt BC ad BE: ſiquidem momenta rationem compoſitam habent ex ratione diſtantiarum, & grauitatum homologè. Hoc itaque ſenſu falſiſſima eſt propoſitio; tantum igitur dicere licebit, reſiſtentiam in E ad potentiam in C: ſeù ſi mauis, potentiam in E ad potentiam in C eſſe reciprocè, vt BC ad BE; quo pacto momenta in C, & E erunt æqualia, quæ primo locum habent in vecte extenſa, deinde in eadem inflexa.

Cæterum Tractatum hunc de reſiſtentia iam dicta, copioſiſſimum in Phyſica nos inſeruimus, conſiderantes priſma illud in triplici poſitione, vel vt parallelum horizonti, vel vt eleuatum, vel vt inclinatum; prӕterea ſecundùm diuerſam applicationem virtutis frangentis, de quibus loco citato copioſè diſputo, & omnia quantum in me fuit, diligentia ſum proſecutus. *Auctor agit in Phyſica de potentia, qua corpora reſiſtunt fractioni.*

Proponitur Theorema.



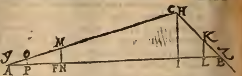
Quidam, vt probarent Galilӕi illud aſſumptum, nempè *Gradus velocitatis einſdem mobilis ſuper diuerſas planorum inclinationes acquiſiti tunc ſunt æquales, cùm eorundem planorum eleuationes æquales ſunt*; multa dixerunt, quӕ tamen cum veritate conſentire minimè videntur, de quibus paulò infrà ſumus acturi. Interim perpendere opus eſt quid ab ijſdem pronunciatum fuerit de ӕquiponderantiâ grauium ſuper planis eandem eleuationem habentibus, in cuius gratiam aſſumunt, duo grauia ſimul coniuncta ex ſe moueri non poſſe, niſi centrum commune grauitatis ipſorum deſcendat: quo admiſſo, quod profectò non eſt inficiandum, illud enunciant. *Si in planis inæqualiter inclinatis, eandem tamen eleuationem habentibus duo grauia conſtituantur, quæ inter ſe eandem homologè rationem habeant quam, longitudines habent planorum. grauia æquale momentum habebunt.* Sed quӕſo in ipſo limine difficultas occurrit; poterat enim id vniuerſaliùs enunciari de planis quomodocunq; inclinatis, eandem tamen eleuationem habentibus; ſic enim illa demonſtratio, quâ ipſi vtuntur, ne dum id, ſed etiam hoc probaret. Verùm hoc omiſſo, perpendamus demonſtrationem ipſam; ſupponunt enim plana inӕqualiter inclinata reprӕſentari per AC, & BC, eandem tamen eleuationem habentia: conſtituunt verò horizontalem AB, grauia verò ſupponunt in A, & B punctis, & inſuper grauis A momentum ad momentum grauis B, in ratione eſſe, vt AC ad CB, deinde ſecant AB in F, ità vt BF ad FA ſit, vt AC ad CB, inde concludunt punctum F, eſſe centrum grauitatis grauium A, B, quæ per rectam AB, connectuntur.

Hìc tamen eſt, quod ijs videtur faceſſere negotij; nam aliud eſt conſiderare grauia, vt appenſa in A, & B, aliud verò vt adgrauantia ſuper planis CA, CB; longè enim diuerſa eſt huiuſmodi conſideratio. Rectè quidem concluderet illa demonſtratio, ſi negligendum foret quicquid graue ſibi adſciſcit ob eleuationem planorum; ſi enim duo illa grauia appenſa filo quodam intelligerentur connexa, ità vt illa imaginario filo per A, C, B ducto, cum fuerint connexa, liberè poſſint excurrere, atq; adeò ad motum vnius, alterius motus conſequatur, grauia hunc in modum diſpoſita dicenda forent ӕquiponderantia; ſi enim non ità ſe habeant, vnum prӕponderet, ità vt B deſcendat ad D, A aſcendente ad E; ex E ducta EF parallela CD, actaque ED ſecante AB in G, manifeſtum eſt ACB ӕquari ECD, ablato communi ECB, remanebit AE, ӕqualis BD, vt igitur AE ad EF, ità BD ad EF, & propter parallelas EF, BD triangula EGF, DGB ſimilia ſunt; quare vt BD, ad EF, ità DG ad GE, ſed BD, ad EF, eſt vt AE ad EF, hoc eſt, vt AC ad CB, hoc eſt, vt BF ad FA, hoc eſt vt momentum grauis in E ad momentum grauis in D, ergo ipſorum grauium in E, & D grauitatis centrum erit G, in horizontali lineâ AB, in quâ prius erat in F, ergo deſcendit graue ex B in D; aſcendente altero ex A in E manẽte centro grauitatis connexorum grauium, manente inquam in ipſa horizontali linea, quod eſt impoſſibile, & contrà aſſumptum. *Aliquorum error.*

Hoc aliter a nobis oſtendi poſſet, quod inferius prӕſtabimus, interim redeamus vndè diſceſſimus. In eo igitur videntur peccare, quod aſſumunt grauia illa non quatenus adgrauant ſuper planis, quod intollerabile eſt, proptereà quod ſi intelligantur grauia ſuper planis AC, CB conſtituta, ità vt graue vnum ex: gratia Y valeat 24. alterum Z valeat 8.

hunc

hunc enim in modum ſeruabitur ratio longitudinum planorum, nempè tripla, hanc enim conſtituimus rationem longitudinis AC ad longitudinem CB, atque etiam diſtantiæ BF ad diſtantiam FA. Si itaque graue Y, conſtituatur ſuper planum AC, ita vt eius momentum abſolutum, nempè 24. repreſentetur per ſegmentum AM, vt ſuper planum CB,



per ſegmentum BH ipſi AM æquale, at verò momentum abſolutum grauis Z repreſentetur per ſegmentum BK ſubtriplum ad ipſum BH, & per AO illi æquale, mox verò ex M, & H perpendiculares cadant MN, HI, inſuper ex O, & K perpendiculares cadant OP, KL, manifeſtum eſt ex Mechanicis graue Y, cuius momentum abſolutum repreſentatur per AM, ſi fuerit conſtitutum ſuper inclinatum planum AC, tale habere momentum, cuiuſmodi eſt MN, & graue illud, cuius momentum abſolutum repreſentatur per AO, conſtitutum ſuper planum AC tantum habere momentum, quantum repreſentatur per OP, ita pariter illud graue, cuius abſolutum momentum eſt BH conſtitutum ſuper CB habere momentum HI, & graue, quod habet momentum abſolutum BK conſtitutum ſuper planum CB habere momentum kL, itaque eum ſit quemadmodum AC ad CB, ita HB ad AO, & ita AM ad KB, propterea neceſſariò conſequitur MN, & KL inter ſe æquari quamobrem graue Y conſtitutum ſuper planum AC tantum habet momentum, puta MN, quantum graue Z ſuper planum CB, nempè momentum KL, ergo graue Y ſuper planum AC æquiponderat graui Z ſuper planum CB, vndè propoſitio ſic eſt demonſtrata.

Verum enimuerò ſi eadē illa grauia ſuſpenſa fuerint ex Libræ extremitatibus A,B, æquiponderant ex centro F, quoniam vt AF ad FB, ita Z ad Y, at verò ſi eadem grauia pondere diminuta debeant ex ijſdem diſtantijs æqueponderare, neceſſe eſt decrementa fieri proportionaliter, ita vt quemadmodum eſt Y ad Z, hoc eſt 24. ad 8. ita ſit decrementum vnius ad decrementum alterius homologè, vndè ſi ex Y, nempè 24. auferatur quarta pars, puta 6. remanebunt 18. & ſi ex Z auferatur quarta pars, puta 2. remanebunt 6. eſt autem 18. ad 6. vt BF ad FA, ac proindè graue vt 18. appenſum punĉto A extremitati Libræ æquiponderabit 6. graui ſcilicet appenſo ad punĉtum B, vndè eorum idem erit grauitatis centrum F, ſi conſiderentur quatenus appenſa ſunt extremitatibus Libræ; At ſi ſpeĉtentur pro vt conſtituta ſuper planis, certum eſt graue Y vt 24. cum conſtitutum ſuper planum AC habeat momentum vt MN, tale decrementum habet, vt eius momentum ſit tantummodo vt MN, quæ in hac hypotheſi reſpeĉtu ipſius AM ſe habet vt quarta pars, nempè vt 6. ad 24. & graue Z ſuper planum CB habere momentum KL, quæ reſpeĉtu kB repręſentantis momentum abſolutum vt 8. ſe habet vt 6. vnde videtur grauium iſtorum quatenus per modum vnius accipiuntur, non eſſe centrum grauitatis F.

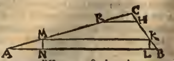
Verùm hìc conſiderare oportet in grauibus appenſis extremitatibus Libræ A, & B ſpeĉtandas quidem eſſe diſtantias AF, FB, at ſi fuerint ſuper planis conſtituta conſiderandas eſſe inclinationes planorum, ac proindè non mirum, ſi graue Y ſuperimpoſitum plano AC æqueponderet graui Z ſuper planum CB, etſi non patiantur decrementa prout requireretur ad æquilibrium, dum grauia forent appenſa extremitatibus Libræ A,B, ſiquidem momenta grauium non à Libræ bracchijs, ſed ab inclinationibus planorum dependent &c.

Supradictorū demonſtratio oſtenſiua.

Nos autem Propoſitionem hanc oſtenſiuè ſic demonſtrabimus &c.

Sit horizontalis AB, plana verò inclinata ſint AC, CB, ſitque graue Q poſitum in A ad graue ℞ poſitum in B in eadem ratione homologè cum planorum longitudinibus AC, CB; oſtendendum eſt graue Q poſitum ſuper planum AC graui ℞ poſitum ſuper planum BC, cum fuerit vt AC ad BC, ita Q ad ℞, æqueponderare.

Sit grauis Q momentum abſolutum repreſentatum per AM, ex punĉto M cadat perpendicularis MN, eius momentum ſuper planum inclinatum AC erit repręſentatum per MN. Sit BH æqualis AM, & BK fiat ad BH, vt BC ad AC, erit

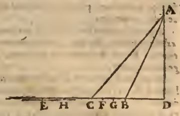


quidem grauis ℞ momentum abſolutum repręſentatum per BK; ex punĉto k cadat perpendicularis KL, & eiuſdem grauis momentum ſuper planum BC erit kL. Oſtendendum eſt

igitur

Igitur MN æqualem eſſe KL; hoc enim pacto illa grauia æqueponderabunt ſuper prædictis planis conſtituta, cùm eorum momenta ſuper ijſdem planis æqualia fuerint. Fiat vt BK ad BH, ita AM ad AR, agatur RH, & inſuper MK. Quoniam igitur eſt vt AM ad AR, ita BK ad BH, erit diuidendo vt AM ad MR, ita BK ad KH, quare RH, MK erunt parallelæ. Vel quia eſt vt RA ad AM, ita HB ad BK, ergo diuidendo erit, vt MR ad AM, ita KH ad KB, quare MK, AB erunt inter ſe parallelæ, vt perſpicuè conſtat ex elementis, ergo NMKL eſt parallelogrammum, quare NM, LK erunt inter ſe æquales, eſt autem NM momentum grauis Q ſuper planum AC, inſuper LK eſt momentum grauis ℞ ſuper planum BC, ergo momenta grauium Q, ℞, ſuper planis AC, BC ſunt inter ſe æqualia, ergo prædicta grauia Q, ℞ ſuper planis AC, BC conſtituta, & aliquâ ratione connexa æquiponderabunt. Quod &c.

Principale intentum.



Sed deſcendendum eſt ad principaliter intentum; videtur mihi haud benè Galilęi aſſumptum à quibuſdam demonſtratum fuiſſe hunc in modum. Sint duo plana AB, AC inæqualiter inclinata eandem habentia eleuationem AD, ſitque horizontalis CD; quicunque ſit gradus velocitatis acquiſitus in B, accepto eius ſubduplo, graue motu æquabili, & tempore caſus currit idem ſpatium caſus BA, iterum quicunq; ſit gradus velocitatis acquiſitus in C, accepto eius ſubduplo, graue motu æquabili, & tẽpore caſus currit idem ſpatium caſus CA; tẽpora igitur, & ſpatia ſunt proportionalia; nempè tempore BA, curritur ſpatium BA, motu æquabili: tempore autem CA, curritur ſpatium CA, motu æquabili, ergo per ſextam de motu æquabili, gradus velocitatis ſunt æquales; quare etiam illorum dupli æquales erunt, & ideò gradus velocitatis in B, & C ſunt æquales. Hi tamen paralogizant, atque principium petunt; perindè enim eſt dicere mobile motu æquabili per AC, & per AB, ita moueri, vt tempus per AC, ad tempus per AB ſit in ratione, vt ſpatium AC, ad ſpatium AD, perindè eſt, inquam, ac dicere, vel ſupponere, gradum velocitatis, quo mobile fertur motu æquabili per AC, æqualem eſſe gradui velocitatis, quo mobile fertur per AD, motu itidem æquabili atq; adeò duplum æquale eſſe duplo; Cùm autem hoc demonſtrandum aſſumeretur, vides id ſupponi, quod oſtendendum ſuſcipitur; & nulli dubium, quin cuidam dicere liceat; velocitatis gradus acquiſitus per deſcenſum AC, ſit v. g. EC, at verò acquiſitus per deſcenſum AB ſit FB, minor, vel maior illo; æquales enim eſſe demonſtrare oportet; & ſi id ab illo dici non poſſet, nulla opus foret demonſtratione. Sit igitur EC, maior, quàm FB, atque deſcenſus per AC, & AB ſint vniformiter accelerati; diuidatur maximum momentum EC, acquiſitum per motum vniformiter acceleratum per planum AC, diuidatur, inquam, bifariam in H, ita pariter momentum FB, acquiſitum ex deſcenſu per AB, motu vniformiter accelerato diuidatur bifariam in G; erit quidem HC, momentum motus æquabilis per AC, & GB erit momentum motus æquabilis per AB; his autem ita ſtantibus, non ſequitur tempora eſſe in eadem ratione cum ſpatijs, ac proinde HC, & GB æquales eſſe, atque adeò eorum dupla æqualia eſſe; quod demonſtrare intenditur. Si verò EC ſupponeretur æqualis FB, ita vt ſubdupla HC, & GB forent æqualia, quæſitum eſſet in ſuppoſitione; quod etiam contingeret, ſi ſubdupla ipſa ſupponerentur æqualia. Neque dubito, quin ille dicturus ſit ſubduplum GB, non eſſe æquale ſubduplo HC, nec eſſe ſpatium CA, ad ſpatium AB, vt tempus motus æquabilis per AC, cuius momentum eſt HC, ad tempus per AB, motus ęquabilis, cuius momentum eſt GB; quiquidem dixerit, celeritatis gradum acquiſitum ex deſcenſu per AC, motu vniformiter accelerato, non eſſe æqualem gradui deſcenſus per AB, motu itidem vniformiter accelerato.

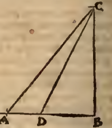
Ad ea, quæ ſequuntur, præmittendum omninò id eſſe videtur, ſcilicet eatenus graue deſcendere per planum aliquod inclinatum, quatenus deſcendendo percurrit aliquid de linea perpendiculari ad horizontem, propterea quòd hac natura vtitur ad deſcenſum grauium; ſi licet enim animo concipere quod eſt impoſſibile, planum dari poſſe inclinatum ad horizontem, ità vt mobile percurrendo illud nihil conficeret de linea perpendiculari ad horizontem, nullus foret deſcenſus illius; hinc verò conſequens eſt tantum celeritatis in- *Præmittenda quædam.*

huiuſmodi deſcenſu per planum inclinatum acquiri, quantum ea, quam per inclinatum deſcendendo conficit, linea perpendicularis expoſcit; quamobrem ab huiuſmodi linea, vt petendus deſcenſus eſt, ita penes ipſam celeritatis gradus attendi debent; his autem habitis eſto.

Exemplum LX.

THEOREMA.

Gradus velocitatis eiuſdem mobilis ſuper diuerſas planorum inclinationes acquiſiti tunc ſunt æquales, cùm eorundem planorum eleuationes æquales ſunt.



Hoc apud Galilæum aſſumptum eſt, quod hìc demonſtrare conabimur; placet tamen illud vniuerſalius concipere hunc in modum.

Si graue aliquod moueatur, ſiue per lineam perpendicularem ad horizontem, ſiue per lineam quomodocunq; inclinatam, cùm ad lineam horizontalem peruenerit, æquales celeritatis gradus acquirit.

Sit aliquod graue deſcendens per rectam perpendicularem CB, vel per quaſcunque inclinatas CD, CA. Oſtendendum eſt à mobili acquiri tantum celeritatis in puncto B ex deſcenſu per perpendicularem CB, quantum in D ex deſcenſu per inclinatam CD, vel in A ex deſcenſu per inclinatam CA.

Reſolutio.

QVoniam itaque dum graue mouetur, ſiue per lineam perpendicularem ad horizontem, ſiue per lineam quomodocunque inclinatam, cùm ad lineam horizontalem peruenerit, æquales celeritatis gradus acquirit; ergo tantum celeritatis mobile acquirit deſcendens per CD, vel per CA, quantum acquirit celeritatis deſcendens per ipſam perpendicularem CB; ſed perpendicularis, quam graue in deſcenſu per CD, vel CA, conficit, æqualis eſt CB; ergo mobile deſcendens per inclinatam CD, vel CA, tantum celeritatis in D, vel A conſequitur, quantum per lineam, quam deſcendendo conficit, perpendicularem acquirit. Quod ita ſe habet ex hactenus diſputatis.

Compoſitio.

QVoniam igitur mobile deſcendens per inclinatã CD, vel CA tantum celeritatis in D, vel A conſequitur, quantum per lineam, quam deſcendendo conficit, perpendicularem acquirit, ſed perpendicularis, quam graue in deſcenſu per CD, vel CA conficit, æqualis eſt CB, ergo tantum celeritatis mobile acquirit deſcendens per CD, vel CA, quantum acquirit celeritatis deſcendendo per perpendicularem CB. Ergo ſi graue aliquod moueatur, ſiue per lineam perpendicularem ad horizontem, ſiue per lineam quomodocunq; inclinatam, &c. Quod oportebat oſtendere.

Controuerſia inter D. Stephanum de Angelis, & P. Ricciolium de perpendiculo.

Occaſione Theorematis nobis propoſiti reſoluendi à D. Stephano de Angelis, appuli animum ad conſiderandam illam difficultatem Phyſico-Geometricam, vertentem inter ipſum, & P. Ricciolium, nempè de deſcenſu grauis, ex hypotheſi, quòd terra cieretur in orbem motu diurno: quam ſcilicet lineam deſcendens graue deſcriberet. Ait enim Ricciolius. Si graue aliquod deſcenderet in æquatore à ſuperficie ad centrum terræ horis præcisè ſex, & non moueretur tellus niſi diurno motu, an linea deſcripta à graui cadente, caderet intra peripheriam ſemicirculi deſcripti ſupra ſemidiametrum telluris, an extra; ex hypotheſi, quòd illud graue moueretur motu æquabili circa centrum, viginti quatuor horarum ſpatio periodum abſoluens, vt ad centrum motu naturaliter accelerato ſecundùm quadrata temporum; qua datâ hypotheſi Geometricè demonſtrauimus lineam illam extra cadere.

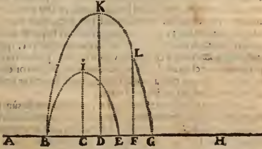
Quoniam autem hìc diſſeritur de reſolutione Theorematum, quæ Phyſico-Mathematica

dicun-

ſicentur, duximus non alienum ab inſtituto, hoc quod Phyſico-Geometricum eſt noſtrâ perſequi contemplatione; eò vel maximè, quia me vtrique rem gratam facturum ſum arbitratus; & vt in arenam deſcendamus, primùm operæ pretium exiſtimauimus aduertere.

Si quis graue aliquod in altum proijciat, ita tamen vt interim is moueatur ex accidenti, videlicet ad motum alterius, graui quidem proiecto communicari impulſum illum, quo proijciens fertur ad motum alterius; quod tametſi ſit exploratum in primis, tamen id nobis innotuit experimento Florentiæ annis elapſis à nobis confecto; ſic porrò licebit illud ob oculos conſtituere.

Sit planum horizontale, ſuper quo currus velociter tractus Equorum vi excurrat per rectam AH; eidem verò ſit à tergo aptata baliſta, cui præſideat aliquis, qui quando currus peruenerit ex A, in B, præſes curru vectus, remittat arcum, atque adeò exploſus globulus, qui ob modicam arcus tenſionem ad mediocrem altitudinem perueniet, exempli gratia ad I, deſcendendo cadat ſuper eundem currum, e.g. in E, factaque ſit Parabola, cuius altitudo IC, amplitudo vero BE; validiori tamen facta ipſius arcus tenſione, vel robuſtiori adhibita baliſta, exploſus globulus ad maiorem perueniet altitudinem, puta in K, eò vel maximè ſi globulus ille fuerit plumbeus validiori reſpondens impulſui: qua de re ſuo loco; & facta ſit ſemiparabola Bk, cuius altitudo kD, & altera ſemiparabola compleatur KG, niſi deficiat impetus horizontalis, quo deficiente graue ex L cadat per rectam LF, maioris, vel minoris altitudinis, prout citiùs, vel tardiùs horizontalis impulſus defecerit. *Experimentum de curru.*



Tunc autem currus erit valdè promotus, prout valida fuerit expulſio baliſtæ, ita vt ponè ipſum in diſtantia notabili cadat: & quidem nobis ita contigit; nam ſpatiũ AB fuit viginti brachiorum Florentinorum, at verò BF quadraginta quinque, ſed FH triginta ſeptem circiter.

Vtrumque nos docet experimentum, graui communicari quendam horizontalem impulſum; ſecundum autem ſpeciatim nos admonet, quando nimirùm graue ad tantam peruenerit altitudinem, vt in aſcenſu, deſcenſuque tantum inſumatur temporis, quantum horizontalis impulſus deficientia requirit, cùm ad lineæ deſcriptæ punctum, v.g. L, peruenerit, antequàm in tellurem incurrat, dum interim currus eandem ſubiens celeritatem, eundemque gradum velocitatis retinens, ad ſpatij punctum H, peruenerit: vt videlicet deſcendens ex L in F, rectam lineam deſcribat, cùm ab interno principio tantùm, horizontali quidem impulſu corrupto, moueatur, atq; adeò vt à tergo cadat. *Ex hoc experimento duo colliguntur.*

Ex his facilè deprehendere licet hoc idem euenturum, ſi tellus diurna vertigine cieretur in orbem, graue verò ſurſum in æquatoris plano proijceretur; Illud enim aſcendens, itemque deſcendens, mixtam deſcriberet lineam; qualis verò ea eſſe deberet, alibi explicabo. Illud mihi tamen ſatis ſuperque manifeſtum videtur, videlicet huiuſmodi lineam mixtæ eſſe naturæ. *Idem quod in curru, contingeret ſi terra in orbem cieretur.*

Quòd ſi graue non fuerit proiectum, ſed ex aliquo eminenti loco ceciderit, dummodo locus, vnde eſt deſcenſus, moueatur: vt ſe habet aliquod cadens ex apice mali alicuius nauis &c; modo profectò non diſſimili motum illum concipiet horizontalem, ita vt niſi nimia fuerit altitudo, graue cadat, ad calcem eiuſdem mali. Ita quoque contingeret, ſi tellus circumacta diurna vertigine foret, & ex apice turris graue aliquod deſcenderet; niſi namque ex nimia altitudine caderet, ad calcem eiuſdem turris pertingeret. Dicebam autem, niſi nimia foret altitudo, nam alioquin à tergo caderet malo promoto, vel ædificio ob eamquam attulimus cauſam: quoniam horizontali impulſu conſumpto ſolùm internum principium deſcenſus remaneret, interim perſeuerante impulſu tamen, vel in naui, vel in terra verſus eam, ad quam etiam graue aſcititio impulſu ferebatur, partem; hoc enim neque *Quod de proiecto dictum fuit, aptatur graui deſcendenti.*

nauis greſſum, neque telluris reuolutionem aſſequi poteſt: vnde neceſſariò à tergo cade-ret. Supponimus autem modo, graue tunc non moueri in orbem, ſi tellus moueretur, non moueri, inquam, in orbem ab interno principio, quaſi retinens naturam totius, vt multi hac tempeſtate comminiſcuntur; ſed potiùs aſcititio quodam impulſu, non ſecus ac dum graue ex apice mali alicuius nauis deſcendit; eadem enim eſt prorſus ratio. Nec ſatis quidem intelligo quo pacto moueri poſſet ab interno principio, ſi prædictus impulſus omnino de-beret hic intercedere. Aut enim illud graue deſcendendo redit ad proijcientis locum: vel non illum aſſequitur. Si ſecundum, rectè dixeris graue non moueri in orbem ab interno principio, aliàs locum illum aſſequeretur. Si primum, non conuincitur motus à principio quidem interno, cùm id fieri minimè repugnet extrinſecùs à principio videlicet externo, hoc eſt à proijcientis aſcititio impulſu, vt fuit nobis experimento currus exploratum. At in Phyſicis cumulatè nobis hoc erit argumentum tractandum. Perſuaſum interim ſit cuique, graue illud proiectum, haud fore, vt intrinſecùs in orbem moueretur, cùm hoc idem ab impulſu ſibi extrinſecùs adueniente conſequeretur, videlicet à proijciente, non vt huiuſ-modi, ſed vt telluris motum ſubeunte, vel à tellure ipſa, at natura ſemper abhorret à ſu-perfluo, vt in neceſſarijs non deficit.

Telluris immobilitas ex hactenus traditis colligitur.

Hinc colligenda videtur immobilitas telluris. Neque vlla diſparitas eſt inter motum currus, & telluris, quantum ad communicationem impulſus, quod motus illius ſit velo-ciſſimus, huius autem non ita; nam ſi velociſſimo motu impulſus validiſſimus proiecto communicatur, interim tellus velociſſima ſui gyratione adhuc reuoluitur, & ſi currus non adeò velociter fertur, ſed longè ſegniùs, etiam exploſo proiecto, ſegniùs proſequitur curſum. Neque etiam officit, quòd pro diſparitate inter motum telluris, & currus ab aliquibus afferri ſolet, quòd ad motum telluris ſequitur aeris motus concomitans; vnde proiecti motus in orbem fouetur verſus eandem partem; quod in curru non euenit, cuius motus aeris motus non comitatur verſus eandem partem; non officit, inquam, ſiquidem ex-perimentum feci etiam è plagà occidentali ad plagam orientalem, vnde non deerat ille motus aeris, ſi quis eſſet à motu telluris, à quo foueretur proiectum, & nihilominus ad tam magnam diſtantiam decidebat à tergo.

Illud itidem conſiderandum ſe offert, quòd graue ſursùm proiectum impulſu deficiente impotens aſcenſum protrahere, ſi per rectam perpendicularem factus ſit aſcenſus, non quieſcit in reflexionis puncto quiete priuatiua, nam de negatiua nulla difficultas; tunc enim mobile tantùm acquirit mutatum eſſe, cui quidem in ſpatio punctum, in tempore verò inſtans reſpondet; illud porrò quietis priuatiuæ rationem non habet; vt enim motus, ſic & huiuſmodi quies, temporis menſuram expoſcit; Quies enim, de qua eſt ſermo, non qua-uis eſt à motu ceſſatio, ſiue motus negatio, ſed negatio in ſubiecto apto motum ſuſcipere in ea duratione, in qua dicitur quieſcere. Mobile autem illud nimirum graue non eſt quietis capax in illo inſtanti, ſed conſequi tantummodo poteſt mutatum eſſe, quod eſt fi-nis aſcenſus, & principium deſcenſus, ita vt in illo inſtanti valeat dicere, nunc vltimo non eſt deſcenſus, non eſt motus in orbem deſcenſum concomitans, ſed immediatè poſt erit; quamobrem immediatè poſt, graue illud mouetur, & naturaliter deſcendendo, mo-tu videlicet naturaliter accelerato ab interno principio, & motu quidem in orbem natura-liter deficiente. Nec certè credendum de ratione motus recti, & reflexi diſruptionem eſſe per interpoſitam quietem, nam quandocunque mobile fuerit indifferens ad contrarios mo-tus in aliquo mutato eſſe poteſt ab agente libero ad iſtorum alterum moueri, ſed vnum-quodque mobile in quouis mutato eſſe hunc in modum ſe habet; quamobrem poteſt in quolibet mutato eſſe, à libero agente ad vnum, vel alterum motuum moueri; quod ſi ſe-mel conceſſeris, non erit cur id deneges naturali agenti, ac propterea graui. Neque per-turbet animum, quòd oppoſiti motus forent continui; nam id quidem incommodum exiſti-mandum, præſertim in Ariſtotelis doctrina, non eſt, eo ſenſu, vt vna credatur eſſe muta-tio ſecundùm ſuum eſſe materiale, vt aiunt; nihil tamen obſtat in ratione continui.

Dum graue ſurſum proijcitur, nulla interpoſita quiete, motum ſubiret duplicem &c.

Dum itaque graue ſurſum proijcitur, reflectendo, nulla interpoſita quiete, motum ſu-biret duplicem, ſeu potius duplicem impulſum conſpirantem in vnum, ita vt perinde ſit, ac ſi duplici motu feretur, quorum vnus ad centrum naturaliter foret acceleratus, alter autem in orbem naturaliter deficiens, ex hypotheſi quòd tellus ipſa diurna reuolutione cieretur in gyrum.

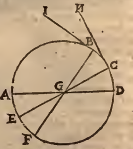
Eodem

Eodem prorſus modo nobis eſt philoſophandum, ſi graue deſcendat ex alto; nihil enim refert extrinſecum illum proiectionis impulſum ſursùm præceſſiſſe, eam igitur lineam deſcriberet, qualem mobile duplicem hunc impulſum ſubiens requirit, & ab interno principio, ſecundùm motum vniformiter acceleratum, & ab extrinſeco, à tellure ſcilicet in orbem acta, iuxtà motum in orbem; eam autem ſpiralem exiſtimo, non qualem Archimedes deſignat, ſed genere diuerſam, ex hypotheſi quòd tellus diurna reuolutione viginti quatuor horarum ſpatio, in æquatoris plano ſuam abſoluens periodum, circa centrum moueretur. Illud porrò attendendum in primis, nè graue ipſum ob nimiam deſcenſus altitudinem, impulſum extrinſecùs aduenientem in gyrum amiſerit; hoc enim deficiente, graue deinceps ad rectitudinem greſſus ſe reſtitueret, per rectam lineam ad centrum incedens.

Cæterum, ſi vterque motus æquabilis eſſet, vtique linea ab ipſo peracta ſpiralis foret Archimedęa, dummodo vterque impulſus perſeueraret, donec ille, qui eſt in orbem integram gyrationem perficeret, alioquin graue deſcripta ſpiralis parte, vtpotè impulſu in orbem inſumpto, recta deſcenderet, ſi deſcenſus eſſet accleratus, at in orbem æquabilis, mobile mixtam lineam longè diuerſam deſignaret; quòd ſi deſcenſus eſſet naturaliter acceleratus, in orbem naturaliter deficiens, longè adhuc magis linea illa diuerſa foret; qualem autem ad vnguem, nunc deſignare non iuuat, iuuabit tamen in Phyſicis. Interim ſemper intellige ad integram lineam deſcribendam requiri perſeuerantiam, quantum ſufficit, non vnius tantùm, ſed vtriuſque impulſus, vt ſuperiùs innui. Nam vt dicebam futurum id exiſtimo, ſi graue ex tanta altitudine cadat, ita vt quo tempore illud ad centrum telluris perueniſſet, vnà fuiſſet eiuſdem telluris expleta reuolutio, eodem ſcilicet peripheriæ puncto ad eundem locum reſtituto, alioquin non ita: Vnde nec Archimedis illa ſpiralis contingeret, nec alia, niſi hac data hypotheſi, quod animaduertiſſe abs re non fuit.

Duo tamen videntur aliquid negotij faceſſere; primum videlicet extruſio per tangentem magni circuli tranſeuntis per locum, vnde graue deſcendit; ſecundum eſt illud, quòd in gyrum ſemel conceptus impulſus, eundem ſemper retineat velocitatis gradum, niſi videlicet ab aliquo retardetur, quod hìc deeſſe videtur, niſi aerem id putes, qui ſi fortè motum eundem ſubeat in gyrum cum tellure, non erit graui impedimento, quò minus retento eodem celeritatis gradu, circumagatur. *Duæ proponũtur difficultates.*

Ad primũ quod attinet; quamuis non defuerint quibus id viſum ſit prorſus ab omni veritate alienum, quibuſdam parùm firmis experimentis adductis, & minùs cautè adhibitis; tamen re diligentiùs introſpectâ, animaduertimus conſiderandum eſſe, non æque ratiocinandum de graui, quatenus præcisè ſubeunte vim extrudentem corporis circumacti, ac in gyrum reuoluti, cuiuſmodi eſt rota, quæ circa proprium axem in orbem cietur; non æquè, inquam, ac de ipſo, prout etiam grauitate præditum eſt, & ſecundùm etiam huiuſmodi rationem ſpectatur. Quæ vt magis obuia reddantur, atque faciliùs ad ſui perſpicientiam animum admittant, hæc breuiter ſubijciam, eadem de re cumulatiùs in Phyſicis locuturus. *Occurritur primæ.*

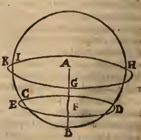


Quoniam verò quantùm ad id, de quo agitur, cùm eadẽ ſit ratio rotæ circa proprium axem reuolutæ, ac telluris, ſi in orbem cieretur, propterea maioris claritatis gratia de rota ipſa, quaſi in locum telluris perenni vertigine circumactæ ſubſtituta, ſermonem inſtituemus.

Eſto igitur rota repræſentata per circulum ABCD; cuius centrum G, atque huiuſmodi circulum intelligamus horizontaliter poſitum fulcimento ſubſtentatum è centro G, ductiſque rectis AD, EC, FB per centrum, dum circulus ex A, v.g. in E reuoluitur, intelligamus pũctum A ferri ad E, ita vt diameter AD perueniat ad ſitum EC, deinde ad ſitum FB, & ita deinceps; commemorati propterea circuli motus nil aliud eſt, quàm diametrorum quædam circumuolutio. Imaginemur igitur diametrum ſolam AB circa G horizontaliter in orbem actam, ſi vis impellens punctum A verſus punctum E, validior extiterit reſiſtentia mobilis exiſtentis in C, cùm D punctum peruenerit ad C, niſi quidquam obſtaret, propellet mobile per rectam tangentem CN, quòd ſi mobile quidem extiterit in B, dum D punctum eò peruenerit, mobile per rectam

tangentem BI impellet, niſi quicquam obſtiterit, & ſic de cæteris.

Hoc quaſi me duceret ad credendum magnam eſſe affinitatem inter rotam in gyrum actam, & funependulum continuatâ reuolutione circumductum, vt rotæ motus in orbem ferè videatur nil aliud eſſe, quàm alicuius funependuli continuatus motus verſus eandem partem: Vnde ſi nos imaginemur punctum in aeris medio, eidemque animo concipiamus funis alicuius funependuli extremum affixum, & graui, quod eſt funi alligatum, adeò validum communicatum impulſum, vt graue illud integram reuolutionem perficere queat; nemini dubium, quin funependulum quodammodo rotæ munere fungatur, ita vt ſi prædictus impulſus fuerit illi communicatus ſecundùm planum horizontale, ſe habeat veluti rota horizonti parallela: quòd ſi impulſus fuerit in plano verticali, ſe habeat inſtar rotæ verticalis; quæ vt faciliùs intelligantur. Supponamus A punctum in aeris medio, cui ſit infixum funependulum AB, graue autem B; Impellatur graue B in gyrum, & quidem ſi mobile non multùm diſtet à perpendiculari tranſeunte per punctum, cui alligatum eſt extremum funis, & ſi non admodum validus fuerit impulſus, gyrum minorem efficiet EFDC, vnum è minoribus circulis ſpheræ, cuius centrum A; quòd ſi motus cæperit ex C, in E, per E &c. vtique vrgente grauitate, graue præciſè non perueniet ad C, ſed infra; at ſi impulſus adhuc fuerit maior, & maior fuerit diſtãtia à perpẽdiculo, vbi ei communicatur impulſus, maiorem adhuc graue parallelum, ſeu potius ſpiram deſcribet in ſphæra, ita vt tandem proximè accederet ad circulum maximum in ſphęra, cuiuſmodi eſt IkGH.



Imò funis affixus puncto immobili A, ſua gyratione produceret quaſi conicam ſuperficiem; dicebam autem quaſi conicam, nam re vera, vt eſſet conica, deberet habere circulum pro baſi, ita vt eius terminus eſſet peripheria; ſed funis deſcriberet talem inuolutam ſuperficiem, vt eius extremum mobile, deſcribendo ſpiralem in plano, ea foret, veluti retorta, extremum cuius vnum eſſet punctum vertex, aliud autem linea, vti dicebam, helica; hìc porrò, non tàm accuratè res eſt accipienda, quoniam videlicet, pro ipſa, quam diximus ſuperficie, quæ conica eſt, præſertim cùm vnica, vel duplex fuerit gyratio, ſumi poteſt.

Mirabile quoddam proponitur. Hìc autem mirabile quidpiam ſe nobis conſiderandum offert, quod experimento comprobatum fuit, videlicet adhuc ſeruari leges funependuli, ſuas vibrationes exercentis per planum verticale; adhuc enim dum graue in gyrum cietur, graue, inquam, funependuli efficit motus æquitemporaneos, ita vt ſi in plano verticali tempore quinquaginta pulſationum, confecerit quindecim vibrationes, totidem etiam conficiat, dum in gyrum agitur: vnde quis ſuſpicari poſſet, ſi impulſus, quo graue deſcribere valeret peripheriam circuli maximi horizontalis, tantus foret, æquitemporaneum ipſum futurum in circulis minoribus &c.

Redeuntes autem vnde diſceſſimus. Imaginandum eſt, eam ob cauſam ipſum graue in orbem cieri, quoniam aliquid ei obſiſtit, ac impedimento eſt quo minus per lineam moueatur, quam certè liberum ab omni impedimento, deſcriberet; impedimentum porrò eſt fulcimentum, cui alligatus eſt funis, quo remoto, graue ipſum, ſibi communicato ab impellente impulſu, per rectam lineam ageretur, ex vi tamen ipſius impulſus; aliunde impediretur, vt mox dicam; nec vlli profectò datum eſt poſſe mobili communicare impulſum, niſi per rectam lineam. Id autem vnde ſit in Phyſicis explicabo.

Graue tamen inde propulſum aliam longè diuerſam lineam deſcribit quod aliunde habet, vel ab impedimento iam dicto, vnde cogitur circuli peripheriã deſcribere, aut non ſemper eadem velocitate retentâ, ſed paulatim potius imminutâ, ſcilicet mobilis grauitate contranitente, concurrente etiam medij circumambientis obſiſtentia, ad quietem tandem ſe reſtituit. Eadem quoque grauitas illi impedimento eſt quo minus per rectam lineam feratur, vnde liberè axolutum excurrens, potius parabolicam lineam affectat.

Rota dum reuoluitur circa proprium axē, ſe habet inſtar penſilis. Rota verò dum reuoluitur circa proprium axem, vt paulò anteà dicebam, ſiue per planum horizontale, ſiue verticale, inſtar funependuli ſe habet, ita vt quicquid extruditur à rota in orbem acta per rectam lineam tangentem excurreret, niſi à grauitate impediretur, & quidem ſi rota foret in plano horizontali, quod extruderetur excurreret per planum tangens

gens

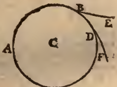
gens ambitum ipſius rotæ, in quo grauitate mobilis reluctante, parabolicam lineam deſignaret. Quòd ſi rota fuerit diſpoſita in plano verticali, graue illud extruſum in huiuſmodi plano lineam parabolicam affectaret, cuius loco lineam rectam tangentem ambitum rotæ deſcripſiſſet, niſi grauitas ei obſtitiſſet. Hoc idem in funependulo vſuuenire concipiendum; cùm primùm enim ab impellente vim motricem recepiſſet, per rectam lineam, fune diſrupto, feretur, niſi à propria grauitate coactum, parabolicam lineam deſignaret; quinimmò dum eſt graue funi alligatum, atque adeò hac ratione impeditum, recepto impulſu in gyrum dum in aliquod mobile impingit, cuius reſiſtentia ſit minor impulſu appenſi grauis ipſius funependuli, mobile ipſum propallet, vt hoc rectam lineam deſcribat per planum, vbi quidem exiſtit; quod ſi illud mobile liberum in aere ſuſtentatum foret fulcimento aliquo quantum de ſe eſt, vi impulſus ſibi communicati à graui funependuli recta quidem incederet, ſeu grauitate propria impeditum, lineam parabolicam deſignaret.

Imò hinc huius veritatis ſumitur argumentum; nam ad lineam parabolicam deſcribendam, duplex requiritur impulſus, nempè vniformiter acceleratus, & ęquabilis, ac vniformis; primum graue dum extruditur à graui ipſius funependuli, habet à propria grauitate; ſecundum certè non niſi à graui ipſius funependuli; ergo funependulum extrudit per lineam rectam; ergo etiam, & rota, ſe habens inſtar funependuli continuati; ergo, & ſi tellus in orbem ageretur diurna vertigine &c. Quod igitur funependulo contingit, illud idem rotæ in orbem actæ euenire neceſsè eſt; ſiquidem hanc funependulum quaſi continuatum eſſe, non immeritò diximus.

His autem præhabitis de motu telluris in gyrum actæ ita ſentiendum, quòd graue ſcilicet cùm primùm deſcenderet, non ſe ſe per rectam tangentem moueret extruſum: quod quidem contingeret, niſi foret à grauitate propria impeditum, ſed hac reluctante ſtatim deflectit ad lineam mixtam, adeò vt valeat dicere, nunc vltimò non eſt motus deſcenſus, ſed immediatè poſt erit, nunc vltimò non eſt motus in orbem, ſed immediatè poſt erit. Nec imaginandum eſt quod prius tranſeat non nihil lineæ rectæ tangentis, poſtea verò cadat per lineam mixtam; hoc enim ab omni ratione prorſus eſt alienum. *Quid ſentiendum de motu telluris.*

Cæterum non præteribo hìc aduertere, ſi rota moueretur, non ſolum circa proprium axem, ſed etiam ad motum centri motum horizontalem ſubeuntis, illud idem futurum de extruſione, quod ſuperiùs diximus.

Quòd ſi rota ipſa volueretur circa proprium axem tantummodo, vt ſe habet ea, quæ per circulum, cuius centrum C repræſentatur, & aliquid ex eius peripheria extruderetur aliquo contranitente, pro varietate impedimenti varia quoque linea foret, quam extruſum percurreret; Vnde ſi extruſio fieret in puncto D, fieri poſſet per lineam DF; in puncto B, per lineam BE, iuxtà varietatem impedientis, vt obſeruare licet in rotis cotarijs, in quibus videlicet cultri acuminantur; aqua enim, qua ipſæ perfunduntur vario modo extruditur, pro variatione obſiſtentiæ; quod pleroſque decepit, non aduertentes hìc nobis ſermonem eſſe de extruſione remotis omnibus impedimentis.



Non igitur extruſio officit motui grauis deſcendentis per lineam mixtam, ex hypotheſi quod tellus in plano æquatoris reuolueretur.

Nec etiam officit quod ſecundo propoſitum loco fuit; obuium eſt enim impedimentum, nimirùm internum principium deſcenſus; hoc enim impedit quo minus graue deſcendens poſſit in orbem cieri, extrinſecùs impulſu recepto, eodem ſemper velocitatis gradu.

Commentitia verò prorſus, ac inanis eſt ad ſubeundum motum, vel quietem indifferentia, vt ſi graue recipiat impulſum ab aliquo, omni licet impedimento remoto, debeat in ęternum moueri, quaſi graue per lineam horizontalem, vel in orbem circa centrum grauium nullatenus mouenti reſiſtat; tametſi enim maximum ſit momẽtum deſcenſus per lineã perpendicularem, & quò maior fuerit inclinatio lineæ, eò minus ſit momentum, vnde cùm ad horizontem peruenerit, momentum ipſum ſit minimum, quatenus componitur ex grauitate, ſimpliciter, & vi, pro vt energiam habente ratione poſitionis; non tamen eſt nullum, vtpotè retinens energiam grauitatis; nam momentum quidem eſt nullum, cum illud attendatur penes poſitionem, cuius ratione reſiſtentia quoque eſt nulla, ſed non eſt nulla *Indifferentia grauis ad omnem motum commentitia.*

reſi-

reſiſtentia ratione grauitatis. Duobus enim modis graue adgrauat; vnde duplicem habet reſiſtentiam reſpectu mouentis, vno modo ratione grauitatis, & alio modo ratione momenti: quando graue deſcendit per lineam perpendicularem, vel per lineam inclinatam, vtroq; modo adgrauat; vnde vtroq; modo mouenti reſiſtit; at ſi peruenerit ad lineam horizontalem, mouenti per huiuſmodi lineam, quamuis graue non reſiſtat ratione poſitionis, ſecundùm quam attenditur propriè momentum, tamen reſiſtit ratione grauitatis. Id autem hunc in modum confirmabitur.

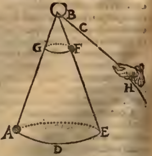
Supradictorũ confirmatio. Eſto linea AB repræſentans Vectem, ita vt extremum A, manu detineatur, ac propterea habeat rationem hypomoclij, & potentiæ, quod paſſim contingit; vt cùm nos haſtam aliquam ad extremum accipimus manu, eamq; horizontaliter ſuſtinere contendimus; manus enim fungitur duplici munere, & hypomoclij, & potentiæ; digitus enim index cum medio habet rationem hypomoclij, dum interim pollex adhæſione montis ſui exercet potentiam ſuſtinentis, & mouentis; Concipiamus igitur graue aliquod ad extremum B, iſtud ratione momenti fieri poterit, vt ſuperet potentiam ſuſtinentem, & mouentem ipſius manus: Si verò illud fiat manui, atq; adeò hypomoclio propinquius, fieri poterit, vt à manu ſuſtineatur, & quò magis propinquius factum fuerit, eò etiam faciliùs à manu ſuſtinebitur, ſemper imminuto momento, quod graue illud habebat ratione diſtantiæ, & poſitionis: Si tandem graue manu fuerit ſuſceptum, comparatiuè ſumma facilitate ſuſtinebitur, & mouebitur, quoniam omne momentum amiſit penes diſtantiam ab hypomoclio; hoc tamen non facit, quin etiam retineat quandam reſiſtentiam ad motum ratione grauitatis. Ita non diſſimiliter in re, de qua agimus.

A ———————————————— B

Quorundam deceptio. Neque admittendum quibuſdam, in Natura corpus quieſcens indifferens ad motum omnẽ; ſiquidem corpus natura conſtans, aliquam propenſionem ad motum habeat neceſsè eſt, cùm naturæ nomine rectè principium motus vſurpetur. Sed hìc conſiderandum in corpore naturam habente, verbi gratia in aliquo graui, tria, fortè non rectè ab alijs animaduerſa; vnum eſt propenſio ad motum, quam vbique retinet; aliud eſt niſus ad motum, eumq; habet, cùm fuerit graue detentum in loco naturæ eius diſſentaneo, cùm alioquin in loco ſibi conſentaneo non habeat; tertium eſt motus actu, qui ſcilicet actu ab energia grauis exercetur, & hunc ſibi vendicat in loco ſibi diſſentaneo, vt cum fuerit in medio minoris grauitatis in ſpecie; tunc enim graue non impeditum deſcendit, impeditum adgrauat nitendo, ſed non dum mouetur.

Perpenditur aliquorum ſermo. Quòd ſi ſtudeas alicuius imitatione gradum velocitatis eundem in mobili retineri, demonſtratione firmare, ex eo quia ſi quid eſſet impedimento, quò minùs retineretur, videretur vtique directionis varietas; hoc tamen nihil eſſe funependuli experimento confirmares. Occurram oſtendendo in hoc haud leuem fortaſſe contingere paralogyſmum; ſi tamen experimentum fuerit huiuſmodi.

Sit funependulum ABC, & funis quidem tranſeat per anulum B laqueareo infixum, deinde reuoluto pendulo, ita vt graue A, per impulſum ſibi communicatum à manu deſcribat circulum ADE, ſecundùm certum velocitatis gradum; tunc ſi funis trahatur à manu H, ita vt funependuli longitudo euadat BF ſubquadrupla ipſius BE, graue F, circumferentiam GF, deſcribet in dimidio temporis illius, quo deſcribebat circumferentiam ADE; vnde colligunt velocitatem in F eandem eſſe cum velocitate in A.



Hæc porrò nùm ritè ſint dicta videamus. Supponendum autem vibrationes funependulorum æqualis longitudinis, eſſe ἰσόχρονους, hoc eſt æquitemporaneas: vnde vibrationes vnius funependuli æquitemporaneæ ſunt, non tamen æquiueloces; funependulum enim deſcribit primum arcum maximum, ſecundum minorem, & ita deinceps, donec langueſcat impulſus, atque graue tandem ad quietem ſe reſtituat; ſingularum autem vibrationum motus ſumi poſſunt, tanquàm æquabiles, vt paulò poſt oſtendemus, ac propterea cùm æquitemporaneæ ſint, vt ſe habet

bet ſpatium ad ſpatium, ita velocitas ad velocitatem, quamobrem velocitates veluti ſpatiā decreſcunt.

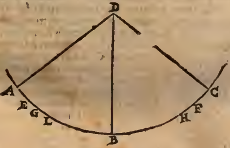
Supponendum ſecundò eandem eſſe rationem funependuli perficientis, circumferentiam circuli ADE, circulique GF, ac eſt ſi in plano aliquo verticali moueretur deſcribendo arcum ex A in E, et ex B in F.

Supponendum tertiò multitudinem vibrationum per arcum GF ad multitudinem vibrationum per arcum AE, eſſe in ſubduplicata ratione BE, ad BF, ita vt ſi BE fuerit quadrupla ipſius BF multitudo vibrationum per GF, ſit dupla multitudinis vibrationum per AE, ac propterea ſi tempore quinquaginta pulſationum graue A facit per arcum AE quindecim vibrationes, graue F per arcum FG triginta perficiet, ac ob id tempore quo graue perficit vibrationem vnam per AE per FG perficiet duas.

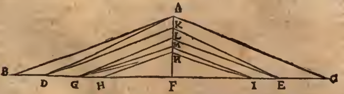
His præhabitis, cùm eadem ſit ratio ex ſecundo ſuppoſito, ſiue funependulum deſcribat circuli peripheriam ADE, & GF ſiue ſimplices arcus in plano; eò propterea tempore quo graue deſcribit circuli peripheriam AE, hoc eſt vnam facit gyrationem, eodem bis deſcribet circumferentiam GF, hoc eſt faciet duas gyrationes. Quoniam verò per primum ſuppoſitum huiuſmodi motus ſumi poſſunt tamquam æquabiles, quia ſaltem ad æquabilitatem reduci queunt, ratione quidem exceſſus, atque defectus à mediocritate. Si idem eſt gradus velocitatis in F ac eſt in A, ſequitur ſpatium, nempè peripheriam AE ad duplam peripheriam GF debere eſſe vt tempus ad tempus; ſed tempus quo graue percurrit peripheriam AE æquale eſt tempori, quo graue percurrit duplam peripheriam GF; [a] ergo peripheria AE æqualis erit duplo peripheriæ GF; ſed peripheria AE ad peripheriam GF eſt[b], vt BE ad BF, & BE ad BF eſt quadrupla; ergo peripheria AE ad peripheriam GF erit [c] quadrupla; quare peripheria AE ad duplam peripheriam GF, erit dupla, non igitur peripheria AE æqualis eſt duplo peripheriæ GF, ſed inferebatur dupla; foret igitur dupla, & non dupla quod eſt inconueniens. Vides igitur non retineri eundem gradum velocitatis in F ac erat in A, alioquin hoc ſequeretur incommodū; re tamen vera gradus velocitatis in F ſubduplus in hoc caſu eſt eius qui eſt in A. Generaliter autē eſt in ſubduplicata ratione radiorū &c.

a ex tertio ſuppoſito.
b ex Pappo lib. 5 prop. 11.
c 11. quinti.

Prima Figura



Seconda Figura



Videbitur fortaſſe cuipiam nōn dum exploratum ipſius funependuli motum velut æquabilem vſurpari poſſe, re tamen diligenter introſpectā haud erit operoſum id ratione confirmare.

Intelligamus igitur funependulum DB, cuius funis ſit affixus D pūncto, & ad eius extremum alligatum ſit graue B, quod eleuatum ad C, ſi demittatur deſcribat arcum CBA,

adeo vt remotis impedimentis puncta quidem A, & C in linea ſint horizontali. Quoniam igitur graue ex C deſcendens tantum in via momentum acquiſiuit, vt eius vi poſſit aſcendere ad A, dum ex C deſcendit in ipſo C nullum habebit gradum celeritatis, ſed deſcendet ex quiete, ita vt deſcendendo moueatur motu naturaliter accelerato, ac propterea ſpatia, tranſacta per arcum BC, ſint in duplicata ratione temporum, & in puncto B maximum acquirit momẽtũ. Intelligamus per bc, tẽpus quod inſumitur à graui ex C in A deſcribente arcum CBA, & quidem arcum CB, motu vniformiter accelerato, & BA, vniformiter deficiente, & ſuper b c, ſit triangulum a b c, & quidem æquicrure, cuius altitudo a f, repræſentans maximum celeritatis momentum, quod graue ex C aquiſiuit in B, quando itaque graue deſcendit ex C in B motu naturaliter accelerato, triangulum a f c omnia eius momenta repræſentabit, & recta a f, vt dicebam, repræſentabit maximum momentum, quod acquirit in B; dum autem hinc motu naturaliter deficiente fertur in A, ſi ad A perueniret triangulum AFB, omnia iſtius motus momenta repræſentaret, ſed vndecunq; ſit, perueniat tantùm ad E, atque huius motus momenta omnia erunt repræſentata per triangulum eiuſdem altitudinis a f, cum triangulo a f c, triangulum autem eſto a f d, at verò ex E redeũdo non acquirit in B tantum momentum, puta a f, quantum acquiſierat deſcendendo ex C in B; acquirat autem momentum k f, ita vt huius motus momenta omnia repræſententur per triangulum k d f, aſcendendo autem per arcum BC, non perueniet ad C, ſed ad punctum e.g. F, quod magis diſtet à C, quàm E diſtabat ab A, huius autem motus naturaliter deficientis momenta omnia repræſentata erunt per triangulum eiuſdem altitudinis k f, cum triangulo k d f, ex F in B, redeundo motu naturaliter accelerato, minùs acquiret momentum v.g. l f, ita vt huius motus naturaliter accelerati momenta omnia repræſententur per triangulum l f e, at verò ex B aſcendendo non perueniet ad E, ſed potius ad G punctum, quod magis diſtat ab A, quàm F diſtaret à C; huius autem motus naturaliter deficientis momenta omnia erunt repræſentata per triangulum eiuſdem altitudinis l f, cum triangulo l f e, triangulum verò ſit l g f; at verò ex G redeundo motu naturaliter accelerato in B, minus acquirit momentum v.g. m f, atque huius motus naturaliter accelerati momenta omnia erunt repræſentata per triangulum l g f; at verò ex B aſcendendo non perueniet ad F, motu naturaliter deficiente, ſed ad H punctum, quod magis diſtat à C, quàm G diſtaret ab A; huius autem motus momenta omnia repræſentata erunt per triangulum eiuſdem altitudinis m f, cum triangulo m g f, huiuſmodi triangulum eſto m f i, redeundo autem motu naturaliter accelerato, in B acquirit minus momentum v.g. n f, atque huius motus momenta omnia erunt repræſentata per triangulum n f i; ex B verò aſcendendo motu naturaliter deficiente, non perueniet ad G, ſed ad I punctum, quod magis diſtat ab A, quàm H diſtaret à C, atque huius motus momenta omnia erunt repræſentata per triangulum eiuſdem altitudinis n f, cum triangulo n f i; triangulum autem eſto n f h, & ſic deinceps, donec graue quieſcat in B; atque hunc in modum c f maior eſt quàm f d, & f d maior quàm f e, & f e maior quàm f g, & f g maior quàm f i, & f i maior quàm f h, & ita deinceps, inſuper f a maior quàm f k, & f k maior quàm, f l & f l quàm f m, & f m quàm f n, & ita deinceps. Manifeſtum eſt autem, motus funependuli per arcus CBA, FBE, HBG, & ſic de reliquis, ſua habere momenta repræſentata per triangula c a d, d k e, e l g, g m i, i n h, & ſic de reliquis. At verò ſingulorum horum triangulorum altitudinibus biſſectis, & per puncta biſſectionum ductis rectis, quæ ſint parallelæ baſi vniuſcuiuſque, & ex extremitatibus baſium erectis perpendicularibus, conſtituentur rectangula repræſentantia momentum motus æquabilis ſingularum vibrationum. Hinc itaque perſpicuè conſtat, vibrationum motus accipi poſſe tanquàm æquabiles. Solum id eſt obſeruandum, quòd graue deſcribendo gyrationem GF, primá vice illam abſolueret, at ſecundâ vice, vtpotè minori momento circumactum, gyrationem paulò minorem efficeret, ſed hoc nihil eſt, imò nobis maximè fauorabile; ſi namque verum eſt quod diximus, ex hypotheſi quòd ſecundã vice eundem gradum velocitatis retineret, multò magis ſi minori velocitatis gradu, minorique momento cieretur.

Ad ſecundam figurã pertinent literæ minuſculæ. Vt pag. ſeq. l. 7. lege f k, f l, & l. 4. f a.

Si enim circuli ADE, circumferentia dupla eſt ad duplam circumferentiam GF, atque adeò velocitas per circumferentiam ADE, dupla eſt ad velocitatem per circumferentiam duplam GF, adhuc maiorem habebit exceſſum circumferentia ADE, ſupra aggregatũ ex circumferentia GF, & altera, quam ſecunda vice deſcriberet graue, atque adeò velocitas

per

per circumferentiam ADE, ad aggregatum velocitatum per duas illas circumferentias.

Cæterum ſi idem foret velocitatis gradus in A, & F, graue deſcriberet circumferentiam GF, non in dimidio temporis, quo deſcriberet circumferentiam ADE, ſed in quarta parte, vt enim ſpatium ad ſpatium, ita tempus ad tempus, ex hypotheſi, quod idem ſit gradus velocitatis.

Hic autem illud conſideratione dignum ſe offert, quod eâ ratione decreſcunt arcus peracti EBF, GBH &c. ab arcu ABC, qua ratione decreſcunt momenta Fk, FL &c. à momento FA; vt enim ſe habet arcus ad arcum, ſic velocitas ad velocitatem, vel momentum ad momentum.

Non inficiandum tamen velocitatis gradum aliquando non variari variatâ directione motus, quando per hanc directionis variationem nullum affertur impedimentum, vt ſi nauis aliqua ſecundùm vnum gradum velocitatis feratur verſus vnam partem ob impulſum conceptum, variatione factâ ipſius directionis idem velocitatis gradus retinebitur, dummodò hæc variatio directionis fiat ſine multiplicatione contactus, alioquin res non ita ſe habet; quoniam omnis contactus motum retardat, velocitatiſque gradum imminuit, & quò maior fuerit contactus, eò minor etiam euadit gradus velocitatis. Sic de alijs impedimentis &c. *Velocitatis gradus aliquãdo nõ variatur variata directione &c.*

Hoc itaque non officit mobili, nè deſcendendo deſcribat lineam illam mixtam &c. ſi tellus in orbem cieretur in plano æquatoris &c. quod eſt enunciandum, animaduerſis ijs, quæ ſuperiùs attulimus.

Ex hactenus dictis, generale illud infertur

THEOREMA.

Exemplum LXI.

Si fuerit funependulum AB, quod actum in gyrum deſcribat circumferentiam ADE, tractum verò ad partes C, euſque, vt ipſius longitudo facta ſit BG, graue verò interim deſcribat circumferentiam GF.

Dico eſſe velocitatem per circumferentiam ADE, ad velocitatem per circumferentiam GF in ſubduplicata ratione longitudinis BA, ad longitudinem BF;

Patet autem ex ſupra demonſtratis &c.

De his tamen, atque ſimilibus quamplurima quidem in Phyſica. Interim ad aliud non iniucundum Theorema nobis propoſitum à Præclariſſimo Viro conſiderandum, animus appellendus foret.

Illud etenim nec in poſtremis habendum, quod ab Ariſtotele in Mechanicis quæſtionibus propoſitum fuit; ait enim, Dubitatur, quam ob cauſam maior circulus æqualem minori circulo conuoluitur lineam, quando circa idem centrum fuerint propoſiti, ſeorſum autem reuoluti &c. Hæc ſanè quæſtio inter cæteras præcipua, ac omnium non immeritò difficillima creditur, quæque ad mixti motus naturam explorandam, præcipuè conducit. Quærit igitur Philoſophus, cur duo circuli, alter altero maior circa idem centrum ſimul annexi, & coaptati, ſi ſecundum abſidem voluantur, ambo ſpatium æquale pertranſeant: ſeorſum autem ſeparati, ſi non diſſimiliter circumuoluantur, non ita, ſed potiùs maior circulus maiorem lineam, minor verò minorem percurrat iuxtà rationem circumferentiæ vnius ad circumferentiam alterius. *Quæſtio 24. apud Ariſtotelem in Mechanicis*



Vt ſint circuli, quorum commune centrum A, & maioris ſemidiameter ſit AB minoris autem AC, reuoluto maiori ſuper rectam BF, ita vt eius expleta ſit reuolutio in puncto F,

atque recta BF æqualis erit peripheriæ prædicti circuli, minoris autem, cuius ſemidiameter AC, expleta ſit reuolutio in E; peruento centro A, ad punctum D, erit CE æqualis BF, cui etiam æqualis erit AD, quamuis circumferentia circuli, cuius ſemidiameter AC, ſit longè minor, quàm CE: Vnde ſit,

Exemplum LXII.

THEOREMA.

Dum circulus, cuius ſemidiameter AB, per rectam voluitur BF, omnes concentrici minores AC, ſi ſunctim moueantur, vnâ volutione percurrunt ſpatium æquale circumferentiæ circuli, cuius ſemidiameter AB.

Imò & vniuerſalius Theorema concipitur, ſi dicatur. *Omnes concentrici poſſibiles, quantumuis illi, cuius ſemidiameter AB, ſiue minores ſint, ſiue maiores, ſi ſunctim moueantur vnâ volutione percurrunt ſpatium æquale circumferentiæ illius, cuius ſemidiameter AB.*

Sed de hoc opportuniori loco diſſerendum; longam ſiquidem tractationem expoſcit.

SCHOLION.

Si quis exoptaret demonſtrationem eorum, quæ diximus conſtare ex Elementis, agentes de æqueponderantia grauium ſuper planis inclinatis &c. ita procedat.

a ex conſtructione. b ex conſtructione. c 11. quinti. d 16. quinti. e ex conſtructione. f 17. quinti. g 2. ſexti. h 16 quinti. i 22. quinti. k 17. quinti. l 2. ſexti. m ex ſupra demonſtratis. n ex conſtructione. o 22. quinti. p 17. quinti. q 2. ſexti.



Quoniam igitur eſt, a vt BK, ad BH, ita BC ad AC; ſed vt BK ad BH, ita eſt b AM ad AR, ergo vt BC ad AC, ita c AM ad AR, & permutando d vt BC ad AM, ita AC ad AR; ſed BH, æqualis eſt e ipſi AM; ergo vt BC ad BH, ita AC ad AR, & diuidendo f erit, vt CH ad HB, ita CR, ad RA; ergo recta BH erit g parallela rectæ AB.

Quoniam verò eſt, vti AM, ad AR, ita BK, ad BH, ſeu AM, ergo permutando h erit vt AM ad BK, ita AR ad AM, erat autem vt BC ad AM, ita AC ad AR, ergo ex æquali erit i vt BC ad Bk, ita AC ad AM, & diuidendo erit k vt CK ad KB, ita CM ad MA, ergo recta MK, erit l parallela rectæ AB, quod oportebat &c.

Vel, vt longè, breuiùs hæc eadem nos demonſtremus; Quoniam eſt m vt CB ad BH, ita CA ad AR, ſed vt HB ad Bk, ita eſt n AR ad AM, ergo ex æquali erit o vt AC ad AM ita CB ad Bk; ergo diuidendo p vt CM ad MA, ita CK ad KB; ergo Mk, q erit parallela rectæ AB. Quod oportebat &c.

DE EXPERIMENTIS

Ad Veritates Phyſicas indagandas.

CAP. VI.

Ad rectè philoſophandum nulla ſecurior via, quàm per experimenta.

AD rectè philoſophandum via nulla ſecurior eſt, quam ſternit experimentorum vſus, quamq; experimentis vndiq; ſuffulti, calcamus; cùm enim omnis philoſophandi ratio in eo poſita ſit, vt mentis agitatione rerum cauſas, atq; primordia conſequamur: vndè Philoſophus primo Phyſicorum Veterum inexperientiam deteſtatur, & primo de Ortu, eorum vſum ad exploranda principia commendat; propterea expedit, vt cuiuſmodi res ipſæ ſint, diligenti quadam indagine perquirentes, tandem ad cauſarum explorationem gradum faciamus; idq; eò tibi magis agendum, nè eorum, quæ nunquam agnouit Natura, cauſas indagando, vt paſſim vſu venire ſolet, quis exprobret; Καθ' ὕδατος γράφεις, ἢ εἰς ὕδωρ γράφεις. Ità planè cõtigit illi, cui Problema, licet doloſè, propoſitũ fuit: Vndè nã eſſet quod later nigrore affectus ſolaribus radijs expoſitus, citiùs quàm imbutus albore incaleſceret. Statim interrogatus, gloriæ cupidus, quaſi ad Naturæ ſacratiora quidem admiſſus, cauſam attulit dicens mirum id profectò non eſſe; quoniam albedo plus lucis participat,

Philoſophus deluſus ob inaduertentiam propoſiti problematis.

ticipat; atq; adeò caloris indè proficiſcentis; Hinc autem interrogans venuſtè ſubridens ait, parcas mihi quæſo; nam haud benè Problema tibi propoſui; quod enim de nigredine dicendum, inſulsè quidem albedini adſcripſi. Philoſophus autem ille præ verecundia rubeſcentibus genis obticuit, atq; cogitabundus exoptatæ cauſæ perquiſitione neglectâ, omnes ingenij neruos ad nimiam excuſandam audaciam, ac petulantiam contendit. Præſtat igitur ſummam adhibere curam ad inquirendum nùm quod proponitur veritati ſit conſentaneum; et ſi quidpiam eſt ſenſibus deprehenſum; num in hoc aliqua interceſſerit allucinatio; quamobrem ſedulitas in experiendo eſt adhibenda, & ingenij alacritati adiungenda cura.

Nam Polycrates ille Thebanus imitandus videtur in re haud prorſus abſimili. Xerxes Græcos bello quidem adortus, cùm apud Salaminem ſuperatus eſſet, indè conſultò ſe mouit, Mardonium relinquens, vt ſuo nomine bellum idem proſequeretur, qui cùm haud meliori fortuna pugnaſſet, immò fugatus eſſet, fama vulgò percrebuit, Mardonium intra ambitum tentorij ſui theſaurum ingentem humo defoſſum reliquiſſe: tùm Polycrates ille commemoratus, vbi iam multum, diuque pecuniæ theſaurum fruſtrà quæſijſſet, oleum nimirum, ac operam perdens, Delphicum Oraculum conſuluit, qua ratione videlicet pecunias adinuenire potuiſſet: cui, fertur, ab Apolline reſponſum fuiſſe; πάντα λίθον κίνει; ideſt vnumquenque moue lapidem; quòd cùm feciſſet, magnam auri copiam, diuitias ingentes reperijſſe, memoriæ, litteriſque proditum eſt. Vnde adagium; πάντα λίθον κίνει: hoc eſt vnumquenque moue lapidem, ſeu omnia experire, nihilque intentatum relinque. At nonnè iure, ac meritò ſapientiæ theſaurum inquirenti, credimus illud idem Apolline reſponſurum fuiſſe? tantò profectò magis, quantò veritatem conſequi eſt difficilius, verique theſaurum recludere eſt operoſius. In hoc igitur omnes ingenij neruos contendat Philoſophus, dum Naturæ myſteria perſcrutanda ſuſcipit: Nihil propterea relinquendum intentatum, ac ob id illi mouendus eſt omnis lapis, vt aliquando demùm gloriari poſſit, ſe voti compotem improbo labore factum fuiſſe; Quamobrem ſi quiſpiam experiendo notauerit vnica vice, quinimmò duabus, vel pluribus, haud potuiſſe eò peruenire, vbi iactis veritatis fundamentis, ſyſtema contemplationis erigat; non debet propterea deterritus ab opere deſiſtere, ſed potiùs longè pertinaciùs, ac impenſiùs in idem incumbere, vt in quo deſperauerat, eodem tandem exultet. *Experimenta ſæpè repetẽda.*

Experimentis verò nedum, quæ dicebamus, conſequimur, ſed etiam ſcaturiginem, vnde diſciplina omnis dimanat, nimirùm principia prima complexa, ex quibus, ratiocinatione ſcientiam deducimus; πᾶσα διδασκαλία, καὶ πᾶσα μάθησις διανοητικὴ ἐκ προϋπαρχούσης γίνεται γνώσεως. Φανερὸν δὲ τοῦτο θεωροῦσιν ἐπὶ πασῶν: αἵ τε γὰρ Μαθηματικαὶ τῶν ἐπιστημῶν διὰ τούτου τοῦ τρόπου περάνται, καὶ τῶν ἄλλων ἑκάστη τεχνῶν. *Omnis doctrina, & omnis diſciplina diſcurſiua ex praexiſtenti fit cognitione; manifeſtum autem hoc ſpeculantibus in omnibus: Mathematica enim ſcientiarum per hunc modum fiunt, & aliarum vnaquaque artium.* Sic perbellè Ariſtoteles, nec immeritò; nam ſcientiam demonſtratione conſequimur, at in demonſtrando haud in infinitum eſt abeundum, ſed ad quædam principia prima, communeſque notiones deueniendum; huiuſmodi verò complexa ſunt; nam de incomplexis nullus hìc ſermo. Si prima ſimpliciter extiterint, terminorum percepta ſignificatione, ſtatim innoteſcunt; alia verò, vel aſſuetudine, quæ tantùm in Moralibus locum obtinent, vel experimentis comparantur; experiendo ſiquidem, rem hoc, vel illo eſſe modo cognoſcimus, ac proprietates ineſſe adnotamus: vnde vel inde concluſiones alias deducimus, eò iam comperto, velut ſtabili principio vtentes: vel eiuſdem cauſam aſſecuti, de eodem ſcientiam adipiſcimur. Magni propterea fieri debet experimentorum vſus, quem non rarò Philoſophus rerum naturalium contemplationi operam nauantibus commendatum voluit. Inductione ſiquidem ad confirmanda ſcientiarum principia nullum opportunius inſtrumentum reperies: vnde per illam à poſterioribus ad priora proceditur; quoniam vniuerſale prius naturâ eſt particularibus, atque adeò cauſæ rationem obtinet: quamobrem à particularibus ad vniuerſale progredi eſt, à poſterioribus ad priora gradum facere. Ita quidem apud plurimos non obſcuri nominis viros, ea methodi reſolutiuæ rationem obtinuit. At à ſingularibus ad vniuerſale progreſſus experimenta ſupponit. Inde propterea ipſorum principiorum cognitio, quæ inductione comparatur, vbi experimentum confundimus; cùm alioquin Experimentum ſit habitus ex plurimis memorijs eorum, quæ ſub eadem

Experimentis Diſciplinarũ principia innotescunt.

Initio Poſter.

In demõſtrãdo non licet in infinitũ abire.

Ex principijs, quędã habitã terminorũ cognitione cognoſcũtur, quedã aſſuetudine et quedã experimentis comparantur.

Inductio quã maximè opportuna ad cõfirmãda diſciplinarũ principia.

A particularibus ad vniuerſale progrediẽ à poſterioribus ad priora gradũ facere.

A ſingularibus ad vniuerſale progreſſus experimenta ſuggerit.

eadem ſpecie percepta fuerunt, quæq; ſingulatim experti ſumus, quod dum ágimus, cautè procedendum; nam alioquin decipimur. Ita ſanè fit, vt præclariſſimis laudibus efferri debeat, qui dum hoc munere fungitur, quàm diligentiſſimè curat, vt omnia paria ſint prorſus, quorum deinde recordatione, non immeritò dici poſſit expertus; ſic enim illæ plures memoriæ, cùm ſimilium prorſus extiterint, experimentum parient.

Verumenimuerò hæc præſertim in Phyſicis adhibenda ſunt, vt eorum opitulatione principijs adinuentis, celebris hæc diſciplina plena maieſtatis, tandem alicubi dignitatem conſequatur ſuam; cùm alioquin puriores Matheſeos partes, vt Arithmetica, & Geometria, ipſis non indigeant; Phyſico tamen Mathematicæ cum Phyſica conditionem ferè ſortiuntur eandem.

Auctor experimentis operã nauauit Florentiæ ad illuſtranda Naturalis Philoſophiæ principia.

Hanc ob cauſam, vt Naturalem promoueremus diſciplinam, oblatâ occaſione, præcipuè Florentiæ per multos annos plurimum laboris pertulimus, plurimumque temporis inſumpſimus, vt experiendo, quæ vera, queue falſa ab alijs pronunciata de Naturæ arcanis, dignoſceremus, & quæ tandem hucuſque latitarunt in tenebris, lætabundi traheremus in lucem.

Ita profectò quæ apud vulgus magnam inuenerunt fidem, quæque iam in Scholis inualuerunt, experiendo denique, partim falſa, partim malè adhuc explicata, deprehendimus. Non ita tamen tantùm fidendum experimentis, vt inde protinus ſententiam aliquam ab omni veritate prorſus alienã eſſe nos inferre debeamus. Sed vt hactenus dicta, aliquo illuſtremus exemplo, vnum è multis afferemus in medium. Ἀντιπερίστασις ergo, perperam hactenus explicata eſto; Philoſophantium enim vulgus credidit obſeſſam qualitatem ad contrarij præſentiam intendi, vocem hanc antiperiſtaſis interpretantes, quaſi circumſiſtentiam, & obſeſſionem contrarij.

Antiperiſtaſis hactenus malè fuit explicata.

Hi porrò frequentes, ac familiares experientias ſupponunt, quibus nimirùm qualitatem in aliquo ſubiecto intendi, dùm hoc obſidetur, ac oppugnatur ab agente contrario, confirment, videlicet ab alio corpore contrariam qualitatem poſſidente. Irrident autem quemcunque dicentem non id realiter contingere, ſed potiùs ex noſtri ſenſus quadam affectione ſemper id nobis apparere quod rectè Galenus aduerterat.

Qui id ratione detegendum foret, diù cogitantibus nobis, ſe obſtulit experimentum; quod inter cætera .S. Principi Leopoldo nos exhibuimus.

Experimentũ ad reprobãdã antiperiſtaſim, prout hactenus explicari conſueuit.

Sumpſimus vas plumbeum, in quod calidam aquam infudimus; in hanc porrò Thermometrum demerſimus, cuius tubulus per tabulæ foramẽ intruſus horizontaliter conſtitutæ; quo minus hinc, illinc caderet, detinebatur: impedimentoque erat, nè vaporum effluuium obſeruationem perturbaret; Obſeruato igitur gradu, ad quem vi caloris vini ſpiritus intus incluſus aſcenderet, cùm paratum eſſet vas glacie plenum, ſtatim hoc ad vas plumbeum admoui, ita vt plurimum huius mergeretur in glaciem, tunc autem oculorum acie diligenter adnotaui, nùm Thermometrum noui quicquam oſtenderet: nil planè deprehendi, quod vtique contigiſſet, ſi calor aquæ à glacici frigore obſeſſus maiorem intenſionem ſuſcepiſſet; Thermometrum enim calorem adauctum oſtendiſſet, propterea quòd vini ſpiritus intus exiſtens, ambientis adaucto calore aſcendit; penitus tamen immotus remanſit.

Reſponſionis præoccupatio.

At quia potuiſſet quiſpiam occurrere dicendo, contrarij quidem obſeſſione qualitatem intendi, quando hæc iuxtà rei naturam extiterit, calor autem aduerſatur aquæ; quamobrem contrario modo experimento facto, nimirùm in vaſe plumbeo glacie quidem immiſſa, ac in alio vaſe aquâ feruenti, nec abſimili modo, ac ſupra, omnibus perpetratis, eadem contigiſſe quæ priùs, ſcilicet nullam in Thermometro mutationem, quamuis frigus glacici, foret obſeſſum, deprehendimus.

Hunc itaque in modum antiperiſtaſim veteri ſenſu quidem explicatam profligauimus; ſimulque deprehendimus etiam minimè cum veritate conſentire, quæ, tanquàm effectus illius, recenſeri conſueuerunt.

Experimenta, quibus nõ nulli probare nituntur antiperiſtaſim veteri ſenſu explicatam.

Et quod aquæ puteales æſtiuo tempore frigidiores, quàm tempore hyemali, percipiantur: ſic & Cella vinaria. Præterea dum in calcem, quam viuam appellant, aquam infundimus, tantus calor excitatur, vt vehementer aquam ebullientem reddat, quamuis infuſione olei nunquàm id contigiſſe compertum ſit. Inſuper ignem vehementiùs accendi per modicam aquæ infuſionem; Fenum diù concluſum accendi; Fimum ſummoperè incaleſcere; Triticum in foueis incluſum, calorem itidem concipere; Atque tandem gran-

dinem

ſinem frigidiorem, ac propterea denſiorem, & duriorem niue, vere, & autumno, atque hyeme, tepente aere; quoniam hiſce temporibus frigus ab ambientis contrario calore obſeſſum, inualeſcit. Sic ventres Animalium hyeme, ac vere, naturâ calidiſſimos eſſe, ſcripſit Hippocrates.

Sect. prim. Aph. 15.

Duplicem ob cauſam reprehenſionem incurrunt, & quòd falſa aſſumpſerint, & quòd non cauſam pro cauſa quidem attulerint. Primum ſanè falſum omninò, ſiquidem aquæ puteales collatæ cum ijs, quæ ſunt expoſitæ aeri ferventi, vt ſunt ſtagnantes in ſuperficie telluris: ſunt nanque frigidiores, non tamen ſe ipſis, prout ſunt tempore hyemali, quod & de aere in ſpecubus ſubterraneis, deque Cellauinarijs dicendum. Quod conuincitur facilè, cùm nec in aquis putealibus æſtiuo tempore, nec in Cellauinarijs, ſiue ſpecubus, oleum congelatur, quod tamen hyemali tempore paſſim euenit; quod etiam Thermometro non ſemel à nobis comprobatum fuit.

Occurritur experimentis allatis.

Ad calcem quod attinet viuam: non cauſam pro cauſa attulerunt; non enim id ideò euenit, quoniam calor ipſius ab ambiente frigore obſeſſus inualeſcat; Et certè ſubit animum admiratio, quòd hi tam oſcitanter, craſſaque Minerua philoſophati ſint; nam ad id aqua ferventi adhibita, vehementiorem calorem excitari, non ſemel nos docuit experientia. Et quidem ipſa circumdata glacie, vel niue, niſi fuerit humore perfuſa, nullus excitatur calor, vt ſi vas, vbi illa concluditur, niue, vel glacie circumdatum fuerit; nunquam enim igneſcet. Phænomenon igitur iſtud aliunde, iure dixeris, trahere originem ſuam.

Calx viua magis exardeſcit aqua ferventi, quàm aqua frigida.

Mirabile id videtur dictu, quòd calx commemorata, vini ſpiritu ſuper infuſo, non incaleſcat, nec diſſoluatur, quamuis ille potentia calidus, frigidus tamen actu, ſit. Non officit autem eum eſſe potentia calidum, quod ex dictis de aqua ferventi, cuique facillimum erit intelligere. Huiuſmodi quidem ſpiritus humor admodum tenuis eſt, proptereaque facillimè quidem ſe inſinuans; nec tamen accidit quod per aquam communem, vel etiam diſtillatione eductam ex herbis. Vides hinc, quàm prudenter, & ſcitè pronunciatum fuerit, decipi nimirùm illos, qui ad pauca reſpicientes, facilè pronunciant. Illud igitur attendendum in experimentis, nè circumſtantiæ, vt plurimùm à ſenſibus remotæ, & velut ad experimentum ipſum non ſpectantes, negligantur; Paſſim namq; contingit, vt ſpreta magno ſint in pretio habenda. Si quis enim non aduerterit, aquâ calidâ ſuperinfuſâ, calcem incaleſcere, diſſoluique magis, quàm per aquam frigidam; facilè animum inducet, vt credat id à frigiditate, veluti contrario iuxta poſito, & vt aiunt, per antiperiſtaſim proficiſci. Præterea ſi non fuerit expertus, quòd de vini ſpiritu dicebamus, facilè ſuadebitur, id ab humido ortum ducere. Quòd ſi experimento non innotuerit, id ſuperiniectione olei lentorem quendam habentis non contingere; facilè id humoris tenuitati referet acceptum.

Spiritus vini ſuperinfuſus calci viuæ nullam facit mutationẽ in eius calore, nec illam diſſoluit.

Hæc autem, & ſimilia iuxtà principia è Naturæ viſceribus deprompta, opportuniori loco explicabo.

Maximè vulgatum eſt ad glaciei confectionem, exhalationes terreſtres, vnà cum aere requiri; quoniam non dum deprehenſum fuerat experimento, aquam in loco, vbi nullus aer, vel ſaltem minimus, ac ferè imperceptibilis omni quidem induſtria, nec terreſtris halitus reperitur, glaceſcere: cum hoc tamen diſcrimine, quòd glacies hæc fit albicans, opaca; quæ verò ſub diù conficitur perſpicua, luminique perula: illa denſior, maioriſque grauitatis in ſpecie: hæc rarior, minuſque grauis. Magni propterea intereſt operam iugiter experimentis nauare, ad veritatem in rebus Phyſicis explorandam.

Aquã glaceſcere abſq; aeris permixtione cõprobatur.

Ac in experimentis conficiendis, negligendas non eſſe, nec minimas quidem differentias, hoc vnum ſuadere poterit. Obſeruemus Artifices chalybem, ad cultros, vel inſtrumenta ſculptoria conficienda, temperantes: comperiemus enim pro ratione moræ, quâ fuerit detentus in igne, fragilitatem, vel lentorem, duritiem, vel mollitiem contrahere. Temperatura ſiquidem ita perficitur.

In experimẽtis conficiẽdis nè minima quidẽ differẽtia eſt negligenda.

Chalybs inijcitur in ignem, ita vt non candidus, ſed ignitus tantùm euadat; nam candidus ob ſummam duritiem, nimis friabilis eſt; Mox verò exemptus ex igne, nigroque ſapone illinitus, iterum in ignem immittitur, vt denuò ignitus factus, & ex igne quidem exemptus, illicò in aquam immerſus frigeſcat; quod fieri ſolet, vt vi ignis, opitulante ſapone, chalybs ſcorias ammittens, atque adeò expurgatus, igníque ſuper impoſitus colores, ſcilicet aureum, ſeu vt aiunt, frumentinum, violaceum, & album oſtentare poſſit: ex huiuſmodi autem coloribus chalybis temperaturam conijciunt; propterea quòd aureus

Quomodo chalybis tẽperatura perficiatur.

color

color nimiam duritiem, atque adeò franglbilitatem arguit: violaceus verò duritiem minorem: albedo tandem mollitiem declarat. Vnde ſagaciores Artifices medium inter aureum, & violaceum colorem, ſeligunt, velut apertiſſimè teſtantem, tunc ipſum chalybem aptiori eſſe temperatura ad cultros, aliaque ſciſſoria inſtrumenta conficienda; nam alioquin præ duritie ſignificata à colore aureo, culter non ſeruat aciem, ſed ob friabilitatem ſtatim vſu ineptus euadit, quemadmodum præ mollitie ſignificata à colore violaceo tendente ad albedinem, & multò magis ab ipſa albedine contritione rotæ cotariæ nullam aciem conſequitur. Vides igitur exiguas differentias paruifaciendas non eſſe.

E coloribus ad temperaturā quis magis idoneus.

Natura uniformi difformi quadam actione operatur.

Neminem, etſi vix prima Philoſophiæ limina ſalutauerit, vulgatum illud præterit effatum, Natura ſcilicet vniformi difformi quadam actione operari, quæ ſi fuerit menſurata lineis, augetur vel deſcreſcit in Arithmetica medietate, nimirùm ſecundùm æquales exceſſus; niſi tamen quiſpiam notauerit duo quidem in actione concerni, nempè ſpatium, & tempus.

Si id in ordine ad ſpatium vſurpauerit, facilè decipietur; haud enim perpetnò rem ſic ſe habere, depræhendet; graue ſiquidem deſcendens, non ita ſibi velocitatis incrementa ſuperaddit ſecundùm ſpatia peracta, ſed potius iuxta temporum menſuram, ſpatia quandoquidem peracta ſunt in duplicata ratione temporum, atque velocitatum, eſtque velocitas ad velocitatem, vt tempus ad tempus.

At nec aliquando ſiue tempus, ſiue ſpatium reſpicias, id à natura factum reperies. Magnes enim dum ferrum trahit; vel hoc ad illum properat attractum, non ita fertur eā lege, vt magnes actionem exercent, quaſi nimirum vniformi difformi quadam ratione, iuxta, vel ſpatij, vel temporis partes, quod experimento, me id aliquando fuiſſe conſecutum, memoria teneo. Accepi ſiquidem vas oblongum vitreum longitudinis vnius bracchij, cum quarta parte, latitudinis, profunditatiſque ſextæ partis, illudque repleui aquā: chalybeam acum prætenuem accepi, pronamque ſuperimpoſui aquæ, tantā quidem induſtriā, vt aggere facto ex aere, chalybs cum aere, euaderet minùs grauis in ſpecie quàm aqua, ac propterea huic innataret, cùmque hanc ad extremum vnum ipſius vaſis conſtituiſſem, æquæ, vt dicebam, innatantem; ad extremum alterum locaui tabellam, cui ſuperimpoſui magnetem, unde uiginti unciarum, quem uerſus acum admouebam donec aduerterem, hanc actione affici, ac allici ad unius bracchij ferè diſtantiam; Cumque uas aquā plenum perſpicuum eſſet, facilè partitiones æquales in papyro ſubtus conſtituto ſe ſe dabant in conſpectum: cæpi uerò tunc Cronometri, ſeu penſilis uibrationes numerari, cùm primùm acus ad magnetem properaret: ſpatijſque peractis diligenter annotatis, nullam ſeruari legem uniformis difformis actionis, aduerti; nam acus lento gradu incedebat, paulum accelerato uſque ad ſpatij dimidium; mox tanta celeritate motum proſequebatur, ut nemini vibrationes ipſas numerare liceret. Præerat .S. Princeps Leopoldus, cuius quidem iuſſu, meum experimentum centies à diuerſis repetitum fuit, quod ſemper eodem contigiſſe modo teſtes eſſe poſſunt, quotquot ibi aderant.

Experimentum ad magnetis vires explorandas.

Deſcenſus grauium.

Grauia non deſcendunt Magnetica vi à terra attracta.

Hinc mihi ſecundo loco, conijcere licuit, inſulsè admodum pleriſque grauium deſcenſum contingere magnetica quadam attractione, quaſi nimirùm tellus magnetiſmo ſuo, corpora, ad ſe trahat grauia, non quod hæc ſuaptè naturá deſcendant; Id enim ſi hunc in modum ſe haberet, non ſecùs contingeret attractionis progreſſus, ac accidiſſe in acu ſuperiùs commemorata, dum videlicet magnetica vi, ſuper aquam traheretur, nam ab hac ſpatia peracta non erant in duplicata ratione temporum, quo pacto ſe ſe grauia mouere, iam apud omnes in confeſſo eſt, noſque non ſemel experti ſumus.

Aliunde circumſpectio in experiēdo probatur.

Circumſpectionem in experiendo ſæpè ſepiùs inculcatam ſuadet etiam & illud, quod paſſim obſeruare licet apud Artifices, quorum eſt auri, argentique perfectionem, puritatemque probare. Si enim argentum inuolutum cortice plumbea in cineritio, Italicè Copella conſtituas vehementer concitato igne vi follium, vt teſta ipſa igneſcat, liquatus fuſum quidem, atque liquatum argentum, cum omnem impuritatem hunc in modum amiſerit, ſtatim è fuſo non nihil congelatum, ſiue conſiſtens euadit, eodem perſeuerante caloris gradu. Quod ſi Philoſophum præterierit interroganti vnde eſſet, quod metallum imminuto calore cuius exulterantia fuſum, erat, illicò congeletur. Occurret dicens id mirum non eſſe cùm igneæ euolauerint particulæ, ſolutum quibus metallum reddebatur. Verùm ſi inſtet ille, idem ex parte, contingere nil penitus imminutò calore, vt paulò ſupra

dice-

dicebatur, interrogatus aduertet, ſe adæquatam haud reddidiſſe rationem; vt in re propoſita nil addendum ſuperſit.

Nonnulli perſcrutantes naſcentium ſpontaneum ortum, ſatis leui quadam coniectura animum eī informarunt ſententiā, vt arbitrarentur prædicta naſci, quatenus, vel ſemina ad ſubiectam materiam, locumque delata fuerunt: vel, ſi ſit ſermo de inſectis, parua, & exigua quædam animalcula aliunde fuerunt traducta. Ita quidē ex carnibus vermes oriri aiūt: vel quia Muſcæ exiguos illos, ac ſenſibus imperceptibiles, vel eorum ſemina eò tranſtulerint, vbi tandem poſt aliquod temporis ſpatium ſe ſe dant in conſpectum, vel excrementa alui, quaſi nimirum ſemina, vel fermentum iniecerint, & id genus alia, quòd obſeruauerint, ex eadem carne partibus excerptis, ex vna earum ſi fuerit benè tecta, vt in vaſe vitreo vndique clauſo conſtituta, vermes haudquaquam concipi; ſecus autem ex illa, quæ libero aeri expoſita fuerit. O quantum eſt in rebus inane! Sapit nè ille animus, qui hæc comminiſcitur? quis vnquam deſipiet? In eadem verſamur naui, nec ſpontaneus naſcentium ortus eſt ſatis explicatus, cùm eadem redeat difficultas de naſcentibus eo in loco, vnde traducta fuerunt. Ad ſemina quod attinet, tolerabile quidem illud foret, ſi experimentum, de quo gloriantur, aliquo ſaltem modo conuinceret. Concluſimus herbam in vaſe vitreo, aliò tamen ſpectantes, & ita concluſimus, vt nullus aditus pateret aeri ambienti, ad eum modum, quo Ars Spagirica præcipit: poſito autem illo ſub fimo macerationis gratia (id enim opus à nobis intentum requirebat) & quidem per ſpatium quadraginta dierum; mox inde extracto, eodemque recluſo, vermes adinuenimus non paucos. Audio dicentes illos, iam vel exiguiſſimos vermes, vel eorundem ſemina in herbas fuiſſe traducta: ſed, vt ſuperiùs dicebam, ſupereſt inquirendum, qua ratione vermes illi ſuum ortum agnouerint eo in loco, vnde, quicunque ſit hic Naturæ miniſter, illos tranſportauerit: quod ſi ſemen tibi illud videatur, non propterea te diluiſſe difficultatem exiſtimes, quæ generatim proponitur de ortu ſpontè naſcentium, vbicunque ille contingat. Et mirum eſſet, quòd in ſingulis quercus pſeudo-gallis vermes oriantur, vel quatenus in ſingulos flores eorum ſemina, vel exigui ipſimet vermes à Muſcis traducti fuerint. Vtinam hoc æuo Domitianus inter viuos ageret; ægrè enim ferret, ſe tandiù acriter Muſcas inſectatum fuiſſe, animaduertens tanto in honore habendas eſſe, vt vniuerſæ Naturæ præcipuum regimen, iuxtà quoſdam, ijs deferendum ſit. Æquè etiam & mirum foret tantam ijs ineſſe ſagacitatem, curamque tantam, vt in ſingulis Myrti folijs, vel exiguos vermes, vel eorundem ſemina deponant. Quæ profectò non minus de ipſis excrementis vrgent.

Gaſſendi opinio.

Leuis quorundam in experiendo coniectura.

Sed fortè nimia gloriæ cupiditas, plerumq; minùs expertem, minùſq; cautum in explorandis Naturæ ſolertis operibus experimentali via decepit, fefellit; nec mirum; experimentum enim periculoſum, & fallax, dicebat Hippocrates. Nos etenim vaſe concluſam carnem ſub fimo conſtituimus, debitoq; temporis interuallo, quos alioquin vermes ibi naſcentes videre non licuiſſet, apertè conſpeximus, ac exclamauimus: ò quam veritati conſentit effatum illud, *Animarum quodammodò plena ſunt omnia.* Diſperſa quandoquidē ſemina ſunt per vniuerſum Orbem, & prout in loco fuerint ſibi conſentaneo, non autem vbique, ſuas exerunt operationes.

Animarum plena ſūt omnia 3. de gen. anim. cap. 11.

Non omnis fert omnia tellus.
India mittit Ebur, molles ſua thura Sabæi.

Nam rectè ille

Continuò has leges, æternaq; fœdera certis
Impoſuit Natura locis.

Nec frumenti grana vbicunque ſata, nè dicam in horreo ſeruatā, germinare deprehendes: ſic in pleriſque ſunt rerum ſemina, quæ à ſuis muneribus feriantur diuerſimmodè præpedita; quæ cùm aliquando fuerint expedita, quod ſuaptè naturā poſſunt, moliuntur; quod ſcitè admodum videtur ab Auctore Naturæ factum fuiſſe, cùm ad Vniuerſi pulcritudinem varietas conducat in primis, quæ ab hac iam dicta commixtione ſeminum quàm maximè pendet. Nec propterea id interturbat ipſius Naturæ opera, cùm hæc ea negligat in vno, quod in aliquo alio magnificat: ita planè in vegetatricis animæ operibus, exempli gratia in quercu, non officiunt ſemina vermium naſcentium, qui aliquandò dum alas aſſumunt, Muſcæ foras erumpunt, quod planè in pſeudo-gallis iam dictis perpetuò contingit.

Varietas magnoperè ad Vniuerſi pulchritudinem conducit.

Experienti lapis omnis mouendus.

Rectè ſuperiùs adnotauimus, experienti lapidem omnem mouendum eſſe, non rarò ſiquidem vſuuenit, vt in poſtremis habendum non ſit, quod alioquin paruifaciendum uideretur. Quis enim ſuſpicari poſſet, magni intereſſe ad ſeminis germinationem aerem eſſe debere perflabilem, cùm alioquin nihil deſit eorum, quæ ad id uidentur conducere, terræ nimirùm fœcunditas, uelut illius, quæ plurimo nitro quidem abundat; quantum ſat eſt humor ſcatens, blandus calor, iſque cæleſtis adeſt. Perflabilem autem aerem deſiderari hinc planè intelliges; Cucurbitæ ſemina terræ commiſi, terræ autem partem uaſe quodam uitreo tegi, ita ut intra ambitum terræ, cui ſuperimpoſitum erat uas, ſex, uel octo prædictorum ſeminum ſata fuiſſent, reliqua erant defoſſa terræ, aperto aeri expoſitæ; tribus diebus tranſactis, aduerti unumquodque ſemen commiſſum terræ libero aeri expoſitæ germinare cæpiſſe; quæ autem latitabant ſub terrã tectã iam dicto uaſe, nullum ſpecimen germinationis exhibebant; iterum poſt quartam diem obſeruatione repetitã, idem aduerti, nec noui quicquam accidiſſe deprehendi; quod cùm ſpatio ſeptem, uel octo dierum minimè notare licuiſſet, unde conijci poſſet nedum initium, ſed nec etiam ſpes germinationis in ſeminibus terræ commiſſis, cui uas incumbebat, cùm alioquin cætera uberrimè erupiſſent, ac feraciter germinaſſent; non erat, cur hæſitarem de illa neceſſitate aeris perflabilis, quem fortè quiſpiam negligendum duxiſſet. Itaque quæ ferè ſunt paria uidentur exhibere contraria: in ſuperiori ſiquidem experimento concluſus erat aer in uaſe, & è uegetabili orta ſunt inſecta: in hoc itidem aer undique clauſus erat, & ſemina tamen manifeſta non germinant; ibi fimi calor præter eum, qui eſt acris ambientis: hic ipſius terræ, & ambientis præſtò erat; ibi calor ſemina fortè latitantia promouebat ad opus: hic iners conatum omnem experiebatur inanem. Vides igitur ad rirè experiendum oportere Philoſophum Argum eſſe, & ad plurima reſpicere, cùm hinc inde ſuppetant plurima, vnde Natura longè lateq; diuerſa molitur.

Experimenta.

Communis opinio de cõcoctione ventriculi per modũ elixationis.

Celebris opinio fuit eorum, quibus ventriculi concoctio per modum elixationis fieri videbatur, eaque calore perfici: quaſi generatio ipſa eò citiùs, ac perfectiùs celebretur, quò validior extiterit calor, cùm tamen experimento comprobatum ſit caloris gradum in animali feruidioris temperaturæ non excedere illum, quem Sol æſtiuo tempore, Leonem ſigniferi partem, ſcandens, in hæc inferiora effundit, atque mortalibus impertitur.

Calor animalis feruidioris natura nõ excedit æſtiuũ, Sole ſcandete Leonem.

Non immeritò propterea dixeris, ad id humore, veluti fermenti munere fungente, Naturam vti: cuius non leues ſunt coniecturæ ex quorundam animalium muſculoſis ventriculis, vt Auium omnium, paucis exceptis, quibus cùm dentes deſint, ob id Natura muſculoſum ventriculum ad cibaria conterenda largita eſt; ſic enim huiuſmodi præparatione, faciliora quidem coctu redduntur; at verò niſi humor acceſſerit, qui ad hanc concoctionem, fermenti inſtar, conduceret, caloris tantùm energia, quã certè ventriculus ille ad cibaria duriora ſuperanda, quamuis attrita, minimè pollet, concoctio ipſa nunquam perficietur.

Natura vtitur humore, tanquàm fermento, ad celebrandã concoctionem in animalium ventriculis.

Quamobrem ad hanc attritionem confirmandam, aliquando ſphærulas quaſdam vitreas Gallinis exhibuimus: erant tamen vacuæ, ita vt cortex tantæ foret craſſitiei, quantæ Iulius, argenteus nummus. Cùm has Gallinæ, quibus per os illas ingeſſimus, decem, vel duodecim horarum ſpatio intra ventriculum detinuiſſent, gallinas ipſas diſſecuimus, & adinuenimus prædictas ſphærulas contritas, ſine vlla ventriculi læſione. Curauimus in extractum ventriculum ſimiles ſphærulas intrudi: poſtmodum autem eundem ſuper tabulam conſtituimus, valideque manibus preſſimus, donec prædictarũ ſphærularũ fractio contingeret; & dilaniatũ omninò ac laceratum illum aduertimus; vnde animum inceſſit admiratio, cur hoc idem viuo ventriculo non contingeret; ac propterea magis inualuit, atque percrebuit ſuſcipio de quopiam humore, quo quidem ad cibaria facilè conterenda plus, vel minus vteretur Natura: eò vel maximè quòd in hunc finem inter edendum, obſeruatio docuit, quàm frequenter ab huiuſmodi animalibus exiguos lapillos aſſumi.

Experimentũ conducens ad cognoſcendum qua ratione concoctio in ventriculo perficiatur.

Vana credebatur ſuſpicio, cùm nullus appareret humor tàm validus, vt vitrum corrodere poſſet; aquæ enim fortes metalla validiſſimè corrodentes in vaſis vitreis citra læſionem ſeruantur; dum itaque animus fluctuaret varijs ſententijs diſtractus, quid hac in re decernendum ignorans, ecce extemplò tranſmiſſum ad Sereniſſimum Principem Leopoldum à Medico quodam Politiano vitreum vas, œnophorum ſcilicet inſtar cribri perforatum, ita tamen vt foramina quædam cœpta ſolum, non dum abſoluta forent, vbi quædam adhæ-

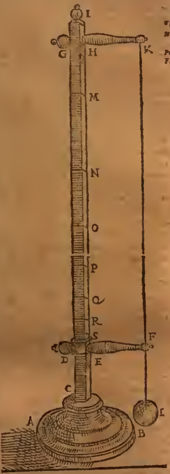
Hiſtoria mirabilis, vnde colligitur dari humorem, à quo vitrum corroditur.

adhærens materia ſe ſe parui monticuli inſtar attollens cernebatur; cupientibus nobis huiuſmodi phænomeni cauſam inquirere, fideliſſimè relatum fuit, vas illud à prædicto Medico Omphacio, hoc eſt humore ex vua acerba expreſſo repletum, Soliſque radijs expoſitum fuiſſe. Quis autem vnquam, alacri etſi donatus ingenio, id conijcere potuiſſet? quis niſi id oculis vſurpaſſet, animum induxiſſet, vt crederet contigiſſe? Quæ dixiſſe iuuat, vt cuique ſit exploratum in Naturæ theſauris quædam præter omnium hominum opinionem latirare, ac proinde in experiendo magnì eſſe opus ſolertiâ, diligenti perquiſitione, pertinaci labore, nè miſerrimè decipiamur.

Χρονόμετρον, Chronometrō.

Penſile, ſeu Pendulū, ſeu Funependulū.

Inter cætera, quæ quidem in Naturæ operibus perſcrutandis magni refert attendere, tempus, exiſtimo, quod eſt rerum naturà conſtantium, vel ſaltem motus earum menſura, itemque pondus, ſeu grauitas. Ad tempus dimetiendum nullum opportunius videtur inſtrumentum, quàm Penſile, ſeu Pendulum, &c. atq; Χρονόμετρον, *Chronometron*, quod adiuncto diagrammate conſpiciendum exhibemus, videlicet AIB, in quo cernitur regula ænea CI, cuius infixum eſt GHK; ab huius autem extremo K, ſphærula B itidem ænea filo alligata KF pendet; per ipſam autem regulam CH excurrit ſurſum, atq; deorſum regulator DEF; (ſic enim ab eo, quo fungitur munere, iubet illum nūcupare) excurrit, inquam, beneficio capſulæ DE, per filum ipſum mediante foramine F: factæ verò ſunt in regula diuiſiones M,N,O, P,Q,R,S, vt ſpatia debitam rationem ſeruent pro vſu ipſius Penduli. Dum enim fuerit Penſile tantæ longitudinis, vt tres pedes Paryſinos cum ſextante æquet, Merſenni obſeruatio docuit, vnius horæ ſpatio fieri uibrationes 3600, quarum propterea quælibet eſt unum minutum ſecundum: temporum autem rationes attenduntur penes diuiſiones ipſius regulę; ſunt enim longitudines in duplicata ratione temporum. Itaque ſi duo ſint Penſilia, quorum unum longitudine quadruplum ſit alterius, ſi maior chorda aliquo tempore uibratur ſemel, chorda minor in dimidio tempore ſemel uibrabitur, cùm ratio maioris ad minorem fuerit quadrupla; vnde ſi placet, ut tempus uibrationis alicuius Penſilis duplum ſit temporis uibrationis alterius Penſilis, neceſsè eſt, longitudinem illius quadruplam eſſe longitudinis iſtius, hoc eſt oportet longitudinem funis ad funis longitudinem in quadrupla eſſe ratione; atque adeò, quando Penſile unum fuerit quadruplum alterius, tempore, quo maius unam perficit uibrationem, & minus perficiet duas: unde longitudines ipſorum ſunt reciprocè in ratione, qua quadrata à numeris uibrationum; ſed eædem longitudines ſunt, ut quadrata temporum homologè. Vt ſit Penſile quadruplum alterius, tempus unius uibrationis à Penſili maiori, eſt duplum temporis à Penſili minori; quare longitudo, ad longitudinem erit ut 4. ad 1. hoc eſt in ratione quadratorum abs 2. & 1; tunc inſuper tempore uibrationis Penſilis unius, Penſile alterum tres uibrationes efficiet, quando funis illius nouies continuerit funem alterius; unde fit, quemadmodum dicebamus, ut eā funiū longitudines reciprocè rationē inter ſe habeant, quę quidē eſt inter quadrata numerorū uibrationū, quæ in eodē tem-



pore perficiuntur. Itaque ſi fuerit penſile, cuius longitudo ſit brachium vnum, tempore autem A, ab eo confectæ vibrationes numerentur 60. eodem verò tempore alterius penſilis vibrationes numerentur 10; erit vt 3600. quadratum ex 60, ad 100. quadratum ex 10, ita reciprocè longitudo penſilis cuius tempore A, decem vibrationes numerabantur ad longitudinem alteriùs, cuius eodem tempore A, numerabantur vibrationes 60; huius igitur longitudo, vt eſt vnius brachij, ita quidem, & illius eſt brachiorum 36. Ita fit, vt quemadmodum graue cadens acquirit in fine primi momenti ſpatium vnum, in fine ſecundi quatuor, in fine tertij nouem, in fine quarti ſexdecim: atque adeo ſint inter ſe, vt quadrata temporum; Ita ſi quatuor extiterint penſilia, vnum longitudinis vnius brachij, alterum quatuor, tertium nouem, quartum ſexdecim, eodem tempore quo quartum vnam perficit vibrationem, primum abſoluet quatuor, ſecundum duas, tertium, vnam cum tertia parte; ſic enim longitudines penſilium, ſunt in duplicata ratione quadratorum à numeris vibrationum reciprocè.

Præclara Chronometri phænomena.

Præter vſum quem hoc præſtat inſtrumentum ad ipſius temporis dimenſionem, inſignia ſunt ab eo prodeuntia conſideratu digna, eiuſque ſingularia ſymptomata latiſſimum aperiunt campum ad philoſophandum, è quibus, vt vnum vel alterum attingam. Primum illud occurrit, quòd ſi graue appenſum filo, fuerit conſtitutum in linea horizontali, vbi, & clauus, cui filum eſt alligatum; filoque tenſo, ſi graue demittatur, quantum temporis inſumere deberet quoad perueniret ad lineam perpendicularem deſcendendo, tantundem hinc ad eandem horizontalem aſcendendo, niſi aliqua ei forent impedimento, cuiuſmodi ſunt, & reſiſtentia medij, & grauitas funis, eiuſque craſſities, atque tandem grauitas eiuſdem mobilis. De duobus prioribus nemini dubitandum, nam aer reſiſtens impetum ſenſim retundit, & grauitas ipſiuſmet funis, ſeu chordæ, quæ, pendulo quidem abducto à perpendiculo, partes habet alicuius, etſi modicæ grauitatis, non nihil pendulum retrahentes ad perpendiculum. Quod inde cuique perſuaſum erit, ſi animaduertat tanto minui ſenſibiliùs, citiuſque deſinere vibrationes, quantò craſſior, ac ponderoſior ipſamet chorda extiterit: vnde fit, vt quò chorda gracilior, atque ſubtilior fuerit, eò altiùs vibrationes reſurgant.

Quorundam error.

Tertium autem præcipuum, etſi quibuſdam non probetur, eſt grauitas eiuſdem mobilis, quæ ſemper contranititur motui præter naturam eius. Nihil enim magis inſulſum, nihilque magis inueriſimile, quam conſilium deliramentum, exiſtimantium, quodlibet corpus quieſcens penſile indifferens ad motum, à qualibet virtute motiua, quantumuis diminutâ, moueri poſſe.

Foret id quidem admittendum ſi corpus huiuſmodi intra Naturæ cancellos extaret, cui nulla quidē eſſet ad motū,inſita propenſio;at qui vnquam ſanæ mentis id animo aſſequi poterit? quod enim natura conſtat, cuiuſmodi ſunt corpora, de quibus hìc habetur ſermo, illud habent in primis, vt ſuoptè ingenio motum ſubire exigant, cum hac autem indole, naturâque, haud indifferentia cohæret. Natura ſiquidem ad vnum fertur, cui nihil magis quam indeterminatio aduerſatur. Itaque ſi vibrationes decreſcant, & ad extremum deſinant, ne putes id tantummodo à reſiſtentia medij, vel à grauitate chordæ, eiuſuè craſſitie, ortum ducere, nam & id quoque magnâ ex parte grauitati corporis chordæ appenſi, debet acceptum referri.

Quorundam hallucinatio.

Hìc porrò non poſſum non mirari quorundam inſcitiam; Et quia exiſtimantes aquam, & multò magis aerem nullatenus diuiſioni reſiſtere, hìc apertè pronunciant, aeris reſiſtentiā retundi penſilis impetum; ſi namque diuiſioni non reſiſtit, qui fieri poterit, vt huic vibranti reſiſtat? Et quia vibrationum deſinentiam, ac imminutum impulſum, nullo modo à grauitate mobilis, ortum ducere arbitrantur, cùm tamen exiſtiment chordam præ grauitate ſua, in cauſa eſſe, vt penſilis impetus imminuatur.

Mirabile aliud Chronometri Symptoma.

Aliud eſt quoque non minoris admirationis, quod ſi pro corpore vnius vnciæ appendas alterum mille librarum, ita tamen vt corpus, vnà cum chorda æqualis longitudinis ſit, vibrationes vtriuſque penſilis, æqualis ſint durationis, ita vt quantum temporis inſumitur in vibrationibus centum penſilis vnius vnciæ, tantundē inſumatur in vibrationibus alteriùs mille librarum. Num referat quicquam ſi fuerint eiuſdem, vel diuerſæ grauitatis in ſpecie; ſatis intelligitur ex grauibus cadentibus ad proprium centrum, quorum illud quidem eſt exploratum, nihil intereſſe inter durationem motus corporis grauioris, & minùs grauis;

uis; non enim ingens lapis velociùs, quàm lapillus cadit; Si tamen fuerint eiuſdem grauitatis in ſpecie; nam alioquin, ſi fuerint diuerſæ in ſpecie grauitatis, quod maiori grauitate præditum eſt, illud celeriùs, quod minori, ſegniùs deſcendit, ſed hoc etiam ſuperiori capite adnotauimus.

Nec prætermittam aliud non minoris ſtuporis, videlicet haberi à maiori, vel minori longitudine chordæ, quod à maiori, minorique pondere non habetur; quo enim chorda breuior eſt, eo etiam vibrationes crebriores fiunt, quo prolixior eò rariores. *Mirabile aliud ſymptoma.*

Illud itidem accedit, quòd ſi grauia fuerint diuerſa, quod maioris eſt grauitatis, longiores ſeruat vibrationes, atque adeò plures quàm minùs graue; leuiora ſiquidem corpora ab aere magis retardantur: vnde ſi duo corpora pondere inæqualia chordis appenſa fuerint, & penſilium inſtar dimidiam circumferentiam abſoluant, quod grauiùs eſt altiùs aſcendet, pluresque decurſus perficiet, quod faciliùs profectò deprehendes, quò maior erit ponderum differentia.

Hinc facilè conſtat ipſius aeris reſiſtentia: vnde penſilis ope, hæc magis quàm caſibus in perpendiculo factis, innoteſcit. *Aeris reſiſtentia*

Et illud quoque mirabile, nimirum vbi quieſcens in perpendiculo graue abduxeris, tametſi illud non impellas, eſſe tamen idem ad perpendiculum recaſurum, ac rediturum atque adeò hunc in modum itus, rediturſque varios, peracturum. Placuit nonnullis id pro cauſa recognoſcendum, quod graue illud in perpendiculo conſtitutum ita eſt, vt quaſi inter duas oppoſitas vires, terræ attractricem, chordæque retentricem libretur: adeò videlicet, ut grauitatis axe coeunte cum chordæ ductu, attractio, atque retentio, graue ipſum ueluti partiantur, unde ibi quieſcat. Verumenimuerò extra perpendiculum, ut ipſi aiunt, axis fit attractionis liber; quamobrem deorſum, etſi non directè, ſed obliquè fit motio ob cohibitionem ſcilicet, qua chorda axis commutationem facit, atque commotionem in arcum conformat, quouſque denuo chorda ductum eundem aſſecuta cum axe, fuerit in eodem perpendiculo. Addunt præterea, & illud, quod ibi denuò graue quieſceret: quia tamen motus deorſum non deperdidit, ſed euſque uires acquiſiuit, propterea graue pergere deorſum impotens, non impotens tamen arcus continuatione in orbem pergere, perpendiculum ipſum prætergreditur, quouſque iterum axe magis magiſque libero attractioni facto, ille impetus ſurſum paulatim refractus euaneſcat, ac inchoetur reditus per eandem uiam deorſum, non diſſimili ratione prætergreſſurum perpendiculum, & in aſcenſu tandem defiturum, ut alius itus incipiat, cui reditus alius iterum, ac iterum ſuccedat. *Penſile cur tandem quieſcat; opinio quorundam.*

Hæc tametſi induſtrioſè ſint dicta, puerilia tamen exiſtimo, velut innixa falſiſſimo fundamento, quod videlicet in illa attractrice terræ virtute conſiſtit, quam aliàs nos ablegandam veluti commentitiam, non immeritò duximus. *Reijcitur.*

Cauſa potius ea profectò credenda, quod à quiete recedens graue, temporibus æqualibus, ſuapte natura deſcendendo ſibi ſuperaddit æqualia celeritatis momenta; quod ne dùm illi conuenit, dùm liberè deſcendit, ſed etiam dùm fuerit chordæ appenſum; atque adeò id cuique exploratum velim, ex eò quod dùm illum arcum deſcribit, minorem ictum propè initium efficit, quàm remotiùs, vt maximus ſit in perpendiculo, vbi tantum celeritatis conſequitur, vt non impeditum, vndecunque id contingat ad horizontalem lineam, vnde diſceſſerat perueniret, ab impedimentis autem retunditur conceptus impulſus, quem nemini ſanæ mentis inficiari licet. Ceſſante igitur impulſu à quo itus, ac reditus proficiſcitur, quieſcat oportet, & quidem in linea perpendiculari, quoniam hac ratione ſeruat Naturæ leges, vt quantum fieri poteſt ad centrum grauium accedat, quod ſecundùm chordæ ductum aſſequitur; dùm in perpendiculari poſita eſt. *Opinio propria.*

Vibrationes autem ipſæ itus, rediturſque, quamuis initio prolixiores, & ad maiorem altitudinem aſſurgentes, ſub finem autem ſint breuiores, nihilominùs ſinguli, durationis [illegible], ſeu æquitemporanei non immeritò crediti ſunt; quamuis non deſint, qui putent diligenti quadam obſeruatione deprehenſas eſſe celeriores vibrationes propè finem: quod nobis tamen, omni adhibitâ diligentia, nunquam innotuit. *Itus ac reditus initio prolixiores.*

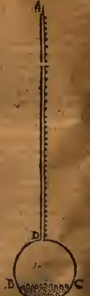
Illud inſuper eſt conſiderandum, quòd vnuſquiſque itus, vel reditus duplici parte conſtat, quarum una eſt per arcum deſcenſus ad perpendiculum: altera autem per arcum aſcenſus à perpendiculo. In deſcenſu per arcum, ipſum mobile mouetur motu naturaliter accelerato, in aſcenſu uerò naturaliter deficiente; ita fit ut tàm itus, quàm reditus ad æquabi- *Itus ac reditus duplici parte conſtat.*

æquabilem motum redigantur. Cùm itaque maximus celeritatis gradus ſit, quem mobile acquirit in perpendiculo, ſi mobile deſcriberet arcum motu æquabili, celeritatis gradu, qui dimidium foret maximi gradus iam dicti, tanto temporis ſpatio arcum illum percurreret graue, quanto, motu, cuius pars dimidia eſt deſcenſus naturaliter acceleratus per arcum, altera autem aſcenſus naturaliter deficiens: ſed hæc etiam ſuperiùs innuimus. Tàm itus, quàm reditus dicitur vibratio ſimplex; at vibratio compoſita ex itu, & reditu conſtat.

Hìc autem non præteribo quorundam induſtriam, qua ſic penſile rotæ in orbem actæ aptatur, vt vibrationes perpetuò ſeruentur ad eandem eleuationem excurrentes, quo opere difficultas illa vitatur obſeruandarum vibrationum præ nimia breuitate ſenſum effugientium: hunc autem in modum penſile quidem elaboratum, ad plurima diligenter obſeruanda conducit; præſertim autem in Aſtronomia locum habet, nimirum in obſeruationibus Eclypſium, aliorumque Cœleſtium phænomenon, vt cuique perſpicuum eſſe poteſt.

Hoc inſtrumentum maximè deſeruit obſeruationibus Aſtronomicis.

Animaduertendum eſt autem, meliùs hoc inſtrumentum ad propoſitum conducere, ſi duo adhibeantur fila, quorum vtrunque ſit infixũ clauo HK in locis vnius digiti ſpatio ferè inter ſe diſtantibus, quando regula CH fuerit altitudinis dimidij brachij, & vtrique appenſa ſit ſphærula BL ex vno, eodemque puncto, quod ſit quodammodo vertex vnius triãguli, cuius crura ſint prædicta fila, baſis verò inter hæc, diſtantia in HK: Oportet autem tunc regulatorem DEF, rimula eſſe apertũ, per quã ſcilicet duo prædicta fila tranſeant, & ipſe regulator liberè excurrat fila complectens.



Ad fluidorum grauitatem explorandam, tametſi plura ſint idonea inſtrumenta humanâ ſagacitate excogitata, tamen vnũ alteri longè lateq; præſtat. Breuiter commemorabimus, quæ hactenus adhiberi conſueuerunt: mox quod cæteris præferendũ afferentes. Horum autem inſtrumentorum non immeritò quodlibet Υ'γροςαθμὸς, *Tgroſtathmos*, quaſi Bilanx humidorum, ſeu fluidorum dici poſſet.

Υ'γροςαθμὸς primum.

Tgroſtathmos, hoc eſt fluidorum menſura.

Primum illud ſe ſe offert, quod Bilancis inſtar omninò eſt; ad extremum enim brachiorum ipſius Bilancis ſcutellæ loco alligatur crinis equinus, quem eiuſdem grauitatis in ſpecie cum aqua obſeruarunt; huic autem ſit appenſum corpus in ſpecie grauius aquę; vt exempli gratia, marmoreum, ferreum, æneum &c. immergatur illud in aquam: alio autem Bilancis extremo alligata ſit ſcutella, in qua conſtituatur graue, quod in aere dum verſatur, æquiponderet ſupradicto graui in aquam immerſo: mox autem obſeruetur facta ponderatione vtriuſque corporis in aere, quantum ponderis addendum ſit in ſcutella, ad æquilibrium grauis ibi exiſtentis, comparatione illius, quod crini equino appenſum, erat immerſũ &c. quãtum enim additũ fuerit, erit aquę pondus mole æqualis ei, quod erat in aquam immerſũ: cùm magnitudines in humido tanto ſint leuiores, quanta eſt grauitas humidi molem habentis ſolidæ magnitudini æqualem.

Quamuis autem hæc fluidorum explorandi quantitatem ratio exactiſſima credatur, re tamen vera iiſdem eſt difficultatibus obnoxia, quibus & ponderatio, qua ad trutinã reuocantur pondera beneficio Bilancis in eodem medio, puta aere; ad minimas enim differentias internoſcendas, Bilanx ingens non eſt idonea, ſi verò fuerit parua, cùm non niſi exigua pondera ad examen adhiberi poſſint, exiguæ differentiæ non prodeunt.

Secundum.

Aliud inſtrumentum ad idem conſequendum excogitarunt, cuiuſmodi eſt adiuncto ſchemate repræſentatum. Sit ſphærula enim BCD, intra quam exiguiſſimi globuli plumbei incluſi ſint, & è qua aſſurgat gracile collum DA, vel filum ferreum in æquas partes diuiſum, vt in ſchemate cernis; ſi itaque inſtrumentum fuerit immerſum in humidum, extabit pars colli DA; extabit autem quoniam in ſphærulam BDC tantum fuit plumbi

inſtruſum, vt reddat inſtrumentum ita graue in ſpecie, vt non omninò totum vſque ad A immergatur : quantò autem plus, vel minus immergitur de collo AD; idque ex interuallis deſignatis innoteſcit, tantò magis, vel minus eſt graue humidum, in quod inſtrumentum ipſum immergitur. Si enim collum DA, e.g., diuiſum fuerit in centùm particulas æquales, initio facto à puncto D, & facta immerſione in aliquo humido, deſcendat inſtrumentum vſque ad particulam decimam, factâ verò immerſione in alio fluido, in quo deſcendat vſque ad particulam decimam tertiam, iam hoc fluidum minoris erit grauitatis in ſpecie, quàm aliud. Sed hoc non adeò eſt exactum, vt ei animus ingenuus acquieſcat.

2



Aliud propterea, vt in ſecūda figura, ABC inſtrumētū excogitatū fuit inſtar caueæ, vbi incluſæ ſunt plurimæ ſphærulæ vitreæ diuerſæ grauitatis in ſpecie, vt grauitate ſe ſe excedētes in Arithmetica medietate reperiri poſſint. Immergitur autem hæc machinula in humidum, quod ſi fuerit exiguæ grauitatis in ſpecie, vna vel duæ, vel tres ex illis ſphærulis aſcendent: ſi verò immergatur in aliud humidum in ſpecie grauius, aliæ emergent, plures, vel pauciores, pro ut fuerit grauitas humidi. Quoniā autem ſingularum ſphærularū grauitas perſpecta eſt, ſinguliſque grauitatis character impreſſus, obſeruatis propterea ſphærulis ipſis, earundemque collatione facta, grauitatisq; gradibus ad calculum redactis, facilè conſtabit, quodnam humidum fuerit grauius, quod minus graue. Inſtrumenti autem ſtructura ſic ſe habet, vt omnis labor poſitus ſit in efformandis ſphærulis ſe ſe excedentibus æquali grauitatis exceſſu. Accipiatur magnus numerus ſphærularum, & immerſis in aquam calidam, obſeruare oportet medio Thermometro, ſecundùm æquales exceſſus caloris, quæ nam ex illis emergant, quibus à latere poſitis, adſcribantur characteres deſignantes æquales exceſſus, nempè 1, 2, 3, 4, 5, &c. hoc enim pacto conſtructæ quidem erunt ſphærulæ ſe excedentes, vt opus erat, &c. exceſſus autem caloris attendi poſſunt, vel ex incremento, vel ex decremento, primo modo, pro ut fuerit aqua igni admota, ſecundo modo, quatenus ab illo fuerit remota &c. Sed nec etiam iſtud omnium videtur habere complexionem numerorum.

3

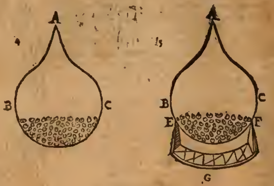


Aliud exhibetur in tertia figura, ABCD ad cuius collū: nā in reliquis perſimile eſt primo ex ſupra relatis: conſtructa eſt ſcutella, vbi pondera reponuntur; immergitur igitur inſtrumentum in humidum, & quanta ſit immerſio colli notatur: mox autem in aliud humidum cùm fuerit immerſum, diligenter obſeruatur quantum ponderis addendum, vel ſubtrahendum ab ipſa ſcutella, quoad fiat adamuſſim vſque ad ſignum iam notatum in collo, & pro ratione grauitatis adiunctæ, vel ſubtractæ cognoſcitur ratio grauitatis fluidorum.

Aliud eſt, quod in quarta figura ABC exprimitur, quod ferè coincidit cum antecedenti, quāuis diuerſum admodū videatur; illud autem ab hoc ſecernitur, quoniam in illo additio ponderum, vel ſubtractio fiebat in ſcutella, & immerſionis obſeruatio fieri debebat in collo: in hoc autem additio, vel ſubtractio ponderum fit per quoſdam exiguos anulos, quos ingreditur turbinatum collum, cuius vertex A; tantum enim ponderis addendum eſt, vt vertex A deſcendat præciſè ad humidi ſuperficiem; anuli autem ſunt exigui ponderis, adeò vt centum ex ipſis, vel plures etiam, ſi placet, æquent grauitatem vnius grani.

Cæte-

Cæterùm hoc artificio conſtructum eſt inſtrumentum, vt æqueponderet aquæ mole ſibi æquali.



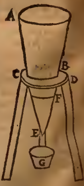
Sextum.

In quinta autē figura ABC exhibetur idem inſtrumentū addita reticula EGF, in qua ponuntur ſolida, quorum grauitatem in humido placet explorare; ſed inſtrumentum eâ ratione eſt elaborandum, vt determinata quantitas grauiſſimi corporis, cuiuſmodi eſt aurum, non omninò demergatur, ſed ad hoc requiratur additio anulorum; nam hunc in modum inſtituta collatione inter adiecta pondera; ipſorum facilè innoteſcit ratio ponderum, quæ in ipſa reticula fuerunt conſtituta.

Hoc tamen inſtrumentum etiam vltimo loco exhibitum non eſt vndequaque perfectum, propterea quod aliquibus laborat imperfectionibus, de quibus ſuo loco, vbi rationem illud conficiendi numeris omnibus abſolutum explicabimus.

Ad aeris humiditatem explorandam inſtrumentū idoneū Ygrometron.

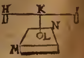
Plurimùm etiam refert aliquando aëris humiditatem ad calculum redigere; hinc enim non nulla pendent phænomena, ita vt hoc ignorato, de his iudicium ferre minimè tutum ſit.



Humiditatis gradus in primis cognoſcitur ex humoris abundantiâ, quo ſcilicet aer plus, minuſuè refertus eſt. Ad humoris copiam dignoſcendam, maximè quidem idoneum eſt inſtrumentum Ὑγρόμετρον, *Ygrometron*, hunc in modum elaboratum. Sumatur enim vas quoddam cylindricum ex ſubere, vel alia ſimili materia, puta ligno, amicto lamellā ferreā, cuius inferiori orificio adnectatur vas vitreum conicā figurā conſtans, cuius vertex ad imum vergat, hoc autem tribus innitatur fulcimētis: repleatur glacie cōtritā, vel niue; nā ſi aer fuerit humore abundans, hic adhærens cono vitreo diſtillat, atque adeò guttatim deſcendit; quamobrem ſi cadentes guttas cyato, vel ſcutellā aliquā exceperimus, adnotatā quantitate temporis, oſtendet humor in ſcutella receptus, pro ratione ſuæ quantitatis, quanta ſit copia humoris, quo aer repletus eſt. Itaque ſi hoc fiat in locis diuerſis, vel ſucceſſiuè in eodem loco, habitā ratione ad tempus, innoteſcet quantò aer aliquis maiori, vel minori humidi copiā abundet, prout maior, vel minor copia humoris in cyato, vel ſcutella collecta fuerit.

1. AF, eſt inſtrumentum, cuius tripes BCD, conus vitreus EF, cyatus autem G &c.

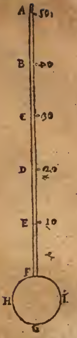
2. Chorda HI, cui alligatur in K graue L, planum autem eſt MN &c.



Non eſt autem, cur quiſpiam ambigat, num id ſit veritati conſonum; ſiquidem ſatis eſt vulgata vaporis iſta per adhæſionem rei frigidæ condenſatio. Aliquando vnius minuti primi tempore, numerauimus quinquaginta, & amplius guttas cadentes: imò aliquando flantibus ventis humidioribus octoginta quatuor guttas numerare licuit.

Alia ratio idem inquiritur.

Hoc idem etiam aſſequimur per chordas, præſertim ex inteſtinis cõfectas, quibus in fidibus vtimur; nã hic inde ſtabilibus fulcimentis infixæ ſint, & in eius medio pendeat globulus grauis, puta plumbeus, qui ſuperficiem aliquam optimè leuigatam, cuiuſmodi eſt ſpeculi terſi, vix tangat; nam humido vigente contrahitur, & globulum eleuat ſic, vt amplius ſuperficiem non tangat.



Thermometrũ vulgatum adhiberi ſolitum omninò inutile.

De inſtrumento, quod Θερμόμετρον, *Thermometron* dicitur, ad explorandam quantitatem caloris, iam ſuperiùs verba fecimus, ſimulque notauimus vulgatum illud adhiberi ſolitum inualidum eſſe, cuiuſmodi eſt quod à latere hic cernitur, in quo facta eſt diuiſio per æquales exceſſus, innuimus ibi excogitatum à nobis, quod in primis idoneum eſt ad obſeruandum Naturæ progreſſum in alterando, &c.

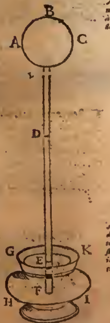
Optimum ab Auctore adinuentum, & eius constructio qualis.

Conſtructionis autem ratio, qua vſi ſumus, ea eſt, quòd videlicet diuiſio graduum fiat ſecundùm rationem aucti caloris humidi, in quod inſtrumentum ipſum immerſum eſt; itaque facto initio ab humore feruenti, noterur in fiſtula quouſque vini ſpiritus aſcendit; mox autem, per admixtionem frigidi in tantâ quantitate humoris, quanta in cauſa eſt cur calor decreſcat ſecundùm datam rationem; idque facillimum eſt, nulloque negotio perficitur; vini ſpiritus deſcendet, eiuſque ſtatio notanda eſt, ſicque procedendum deinceps: atque hunc in modum inſtrumentum erit conſtructum, ita vt immiſſum in humidum, deinde verò in aliud, ſtatim declaret, quæ ſit ratio caloris vnius ad calorem alterius.

Actio vniformiter, difformiter diffuſa non ita deprehenſa eſt ab Auctore, quemadmodum à Scholaſticis deſcribitur.

Hoc inſtrumento vſi deprehendimus vniformem difformem diffuſionem actionis calefactricis à Scholaſticis decantatam inanem, & commentitiam eſſe.

Aliud quoque Thermometrum ſatis vulgatum in vſu fuit minimas differentias oſtendens: eius autem ſtructura ex adiuncto diagrammate facilè intelligitur. Sit enim vas ad maiorem elegantiam ſphæricâ figurâ conſtans, ABC, cui annexa eſt fiſtula, vt cernis FL, adeò vt totum vas ſit ABCF; eſt autem vas alterum HGKI, aqua repletũ, prædictæ verò fiſtulæ, quæ vaſis ABCF, eſt collum, orificium F, in aquam immergitur, ita vt pars eius demerſa ſit EF; ante immerſionem autem aer extruditur validiori calore, quàm ambientis, ex vaſe ABCF; ille ſiquidem rarefactus exit: poſt autem immerſionem aqua per prædictum collum aſſurgit, frigefacto nimirum aere intus incluſo, ambientis verò calor, quò maior extiterit, cò minùs aqua per collum ipſum aſcendit; quò autem frigus magis viget, plùs aqua attollitur, eòque altiùs aſcendit. Si itaque longitudo fiſtulæ, ſeu colli diuiſa fuerit lege ſuperiùs à nobis præſcripta; nam in partes æquales vulgata diuiſio eſt, minus tamen idonea, ſi inquam diuiſa fuerit, ex diuiſionum punctis innoteſcent gradus caloris, quo ambiens afficitur, vt ſi aſcenderet, exempli gratiâ, ad punctum D, inde conſtaret quænam ſit ambientis affectio caloris.



Ad obſeruandam rerum texturam instrumentum idoneum Microſcopium.

Valdè quoque iuuat rerum texturas obſeruare, vnde, vt aliquo vtar exemplo, cùm nihil magis apud Chymicos ſit decantatum, quàm Mercurius dulcis, cuius beneficio, dummodo ritè dulcificatus fuerit, iactant propelli morbos, alioquin creditos incurabiles; eum autem arbitrantur artificiosè præparatum ſic eſſe, vt nouam induat naturam, cùm tamen ſecus ſe habere aduerterim beneficio Μικροσκοπίου, *Microſcopÿ* inſtrumenti, de

quod

quo loquimur iam ſatis uulgato, propterea quòd hic dum agimus, periculum fecimus in Mercurio dulcificato à Præclariſſimo Viro Domino Guilielmo Stocheam Anglo de re Chymica optimè merito: is autem cùm arbitraretur ad curandam luem gallicam, nihil eſſe opportunius Mercurio à ſe parato, mihique diceret, ſibi perſuaſum eſſe, Mercurij naturam, ſuo artificio immutari, ita vt nouam formam acquirat, operæ pretium duxi explorare, num aliquid erudi mercurij ibi reperiretur, quod ſanè argumento nobis eſſe poſſet haud huiuſmodi mutationem factam fuiſſe; adhibito propterea Microſcopio Florentiæ fabrefacto, reperij Mercurium illum, Arte Chymica tantùm in minutiſſimas particulas Menſtrui partibus intermixtas diſtractum fuiſſe, quæ, vtpotè exiguæ, ſenſum omnem effugiebant, qua ratione detegi errorem exiſtimantium artificiosè Mercurij naturam tranſmutatam fuiſſe, cum tamen in eam optimè quadret Horatianum illud.

Naturam expellas furca tamen vſque recurret.

Tubi Optici inuentio.

Sic etiam in alijs innumeris rebus expediet, gratiâ veritatis aſſequendæ, ad hoc inſtrumentum confugere.

Præſtat ſe ſe in experimentis exercere, animo eſſe ad verum indagandum procliui, curâque ſupramodum ad illius indagationem vti; ſæpè ſæpiùs adſcribendum tamen caſui, quod alioquin ſingularis induſtria, ſummaque diligentia vix vnquam peperiſſet; Ita quidem Optici Tubi præſtantiſſimum, penèque Diuinum inuentum, olim accidiſſe caſu monumenta teſtantur; dum enim in Belgio vitra, lenticulare vnum, planum alterum, ille tractaret, vno quidem ad aliud admoto decenti quadam intercapedine, id adinuenit, quod vniuerſum Orbem in ſui traxit admirationem. Sic fortaſſe continget aliquando, ſi Deo placuerit, vt auditus quoque promoueatur, & ſic adiuuetur, vt alicuius machinamenti beneficio mortalibus longinquas voces audire liceat; idque inditio eſſe videtur, quod propè Syraguſas ad diſtantiam videlicet duorum milliariorum crypta loquens, (vt vtar ibi degentium phraſi) in Latomijs olim iuſſu Dionyſij Tyranni excauata reperitur, ita vt eius culmen gracileſcat in erectum canalem helicum, laxis tamen ſpiris efformatum altitudinis triginta circiter brachiorum, referentibus Eglaur, & Valter Adoleſcentibus Teutonibus nobili loco natis, cuius apex auriculariam figuram referens, deſinebat in ſupradicti Tyranni diuerſoriolum, vbi verba quantumuis prolata ſummiſsâ voce ab ijs, qui in prædicta crypta, velut carcere conjecti præ ſumma tyrannide Viri ſceleſti detinebantur, facilè diſtinctèq; admodum is ad libitum audiebat.

Sperandum aliquando futurum vt reperiatur aliquod inſtrumentum, quo auditus adiuuetur.

A quibus cauendum Analyſtæ, nè deluſus quodammodo videatur.

CAP. VII.

Frequenter admodum vſuvenire ſolet, Theorema aliquod reſoluendum proponi, quod ſpecie tenus ab alio differt, cùm tamen vix introſpecto, ſtatim appareat luculenter tantummodò formam induiſſe extrinſecam, eandem penitus naturam retinens: vnde nouam non expoſcit reſolutionem; quòd ſi Artifex, ſuâ, quâ pollet perſpicacitate, notauerit, tantum inde profectò laudis conſequetur, quantum dedecoris proponenti continget. Si quid igitur inſulſum, ſi quid ſuperfluum, multoque magis ſi quid repugnans propoſitũ fuerit, illud exprobret percontanti; quod vt aliquo nos illuſtremus exemplo, ſit.

Exemplum LXIII.

THEOREMA.

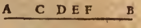
Si recta linea AB ſecta ſit in punctis C, D, E, F, vt exiſtentibus æqualibus partibus AC, CE, reliqua EB, ſic ſit in F diuiſa, vt EB poſſit rectangulum ACF, vnà cum quadrato EF, exiſtentibus æqualibus DE, EF.

Dico, differentiam quadrati compoſitæ ex DB, & CE, à quadrato DB, ad differentiam quadratorum DB, & CE, eſſe, vt CE ad EF.

Reſo-

Reſolutio.

QVoniam igitur exceſſus quadrati compoſitæ ex DB, & CE, ſupra quadratum DB, ad exceſſum, quo quadratum DB, ſuperat quadratum CE, eſt in ratione vt CE ad EF; ſed quadratum compoſitæ ex CE,& DB, eſt æqualem quadrato CE plus quadrato DB vna cum duplo rectangulo ſub CE & DB, atq; adeò quadratum compoſitæ ex CE, & DB, ſuperat quadratum DB, exceſſu, qui eſt rectangulum ſub CE, & ſub compoſita ex CE, & dupla DB: ſeu quod idem eſt, quadratum CE, plùs duplo rectangulo ſub CE,& DB;ergo alter exceſſus, quo ſcilicet quadratum DB, ſuperat quadratum CE, erit rectangulum ſub EF, ſeu DE, & ſub compoſita ex CE, & dupla DB. Sed duplum rectangulum BDE, plùs rectangulo CEF, ob eandem altitudinem DE, vel EF, idem eſt quod rectangulum contentum ſub EF, & ſub aggregato ex CE, & dupla DB; ergo exceſſus quadrati DB ſupra quadratum CE, eſt duplum rectangulum BDE, plùs rectangulo CEF, ſeu rectangulum BDF, plùs rectangulo CEF; ergo quadratum BD æquabitur rectangulo BDF, plùs quadrato CE, vnà cum rectangulo CEF; Sed quadratum DB, æquale eſt rectangulis DBF, BDF; ergo rectangulum DBF, æquabitur quadrato CE, plùs rectangulo CEF. Sed rectangulum ACF, æquale eſt quadrato CE, plùs rectangulo CEF; ergo rectangulum ACF, æquabitur rectangulo DBF; ergo vtrinque addito quadrato EF, quadratum EB æquale erit rectangulo ACF, plùs quadrato EF; (eſt enim quadratum EB æquale rectangulo DBF, plùs quadrato EF.) Quod ita ſe habet ex hypotheſi.



Compoſitio.

QVoniam quadratum EB, ex hypotheſi eſt æquale rectangulo ACF, plùs quadrato EF; ergo vtrinque ſublato quadrato EF, rectangulum ACF æquabitur rectangulo DBF (eſt enim quadratum EB, æquale rectangulo DBF, plùs quadrato EF) ſed rectangulum ACF eſt æquale quadrato CE, plùs rectangulo CEF; ergo rectangulum DBF, æquabitur quadrato CE, plùs rectangulo CEF. Sed quadratum DB, æquale eſt rectangulis DBF, & BDF; ergo quadratum DB, æquabitur rectangulo BDF, plùs quadrato CE, vnà cùm rectangulo CEF; ergo exceſſus quadrati DB, ſupra quadratum CE, eſt rectangulum BDF, plùs rectangulo CEF, ſeu duplum rectangulum BDE, plùs rectangulo CEF. Sed duplum rectangulum BDE, plùs rectangulo CEF, ob eandem altitudinem DE, vel EF, idem eſt, quòd rectangulum contentum ſub EF, & ſub aggregato ex CE, & dupla DB; ergo huiuſmodi rectangulum erit differentia inter quadratum CE, & quadratum DB. Sed quadratum compoſitæ ex CE, & DB, eſt æquale quadrato CE plùs quadrato ex DB, vnà cum duplo rectangulo ſub CE,& DB;atq; adeo quadratũ compoſitæ ex CE,& DB,ſuperat quadratum DB, exceſſu, qui eſt quadratum CE, plùs duplo rectangulo ſub CE, & DB, ſeu quod idem eſt rectangulum ſub CE, & ſub compoſita ex CE, & dupla DB; ſed alter ſuperior exceſſus erat rectangulum ſub EF, & ſub CE, plùs dupla DB; ergo horum rectangulorum communis erit altitudo CE, plus dupla DB, & baſes ſunt CE, & EF; ergo huiuſmodi exceſſus quadrati compoſitæ ex DB, & CE ſupra quadratum DB, ad exceſſum, quo quadratum DB, ſuperat quadratum CE, erit in ratione baſium, vt CE ad EF. Quòd oportebat &c.

Ad reſolutionem quod attinet, nihil refert adiecisse quadratum EF, propterea quod quadratum DB, per ſextam Secundi, æquale eſt rectangulo DBF, plùs quadrato EF, cùm DF, diuiſa ſit bifariam in E, ſi itaque rectangulo ACF, plùs quadrato EF, fuerit æquale quadratum EB, ablato communi quadrato EF, rectangulum ACF, æquabitur rectangulo DBF; hoc itaque adiecisse ſufficeret, adhuc enim id ſequeretur ſymptoma, quod oſtendendum aſſumitur, quamuis nulla fieret EF quadrati mentio, vt mox conſtabit; ideoque ſit,

THEOREMA.

Exemplum LXIV.

Si recta linea AB, diuiſa ſit in punctis C, D, E, F, ita vt exiſtentibus æqualibus partibus AC, CE, reliqua pars EB, ſic in F, diuiſa ſit, vt rectangulum ACF, exiſtente DE æquali ipſi EF, ſit æquale rectangulo DBF.

Dico, differentiam quadrati compoſitæ ex DB, & CE, à quadrato DB, ad differentiam quadratorum DB, & CE, eſſe vt CE, ad EF.

Reſolutio.

A C D E F B

QVoniam itaque differentia quadrati compoſitæ ex CE, & DB, à quadrato DB ad differentiam quadratorũ DB, & CE, eſt vt CE ad EF; ſed rectangulũ ſub CE in compoſitam ex CE, plùs dupla DB, ad rectangulum ſub EF, in compoſitam ex CE, & dupla DB, ob eandem altitudinem CE, & dupla DB, eſt vt CE, ad EF; & differentia quadrati compoſitæ ex CE, & DB, à quadrato DB, eſt rectangulum ſub CE in compoſitam ex CE, & dupla DB, ſeu eſt quadratum CE, vnà cum rectangulo ex CE, in duplam DB (quadratum enim compoſitæ ex CE, & DB, æquale eſt quadratis CE, & DB, vnà cum duplo rectangulo ſub ijſdem CE, & DB); ergo differentia quadratorum CE, & DB æquabitur rectangulo ex EF in CE, plùs dupla BD. Sed rectangulum CEF, & duplum rectangulum BDE, ob æquales DE, EF, æqualia ſunt rectangulo ex DE, vel EF, in CE, plùs dupla DB; ergo differentia quadratorum CE, DB, erit rectangulum CEF, vnà cum duplo rectangulo BDE; ſed rectangulum BDF, æquale eſt duplo rectangulo BDE; ergo quadratum DB, æquabitur rectangulo BDF, vnà cum rectangulo CEF, plùs quadrato CE. Sed quadratum DB æquale eſt rectangulis DBF, & BDF; ergo rectangulum DBF, æquabitur quadrato CE, vnà cum rectangulo CEF. Sed rectangulum ACF eſt æquale quadrato CE, plùs rectangulo CEF, cùm CE, ſit æqualis AC; ergo rectangulum ACF æquale erit rectangulo DBF. Quod ita ſe habet &c.

Compoſitio.

QVoniam ex hypotheſi rectangulum ACF æquale eſt rectangulo DBF; ſed rectangulum ACF æquale eſt quadrato CE, plùs rectangulo CEF, cùm CE ſit æqualis AC; ergo rectangulum DBF æquabitur quadrato CE, vnà cum rectangulo CEF, ſed quadratum DB, æquale eſt rectangulis DBF, & BDF, ergo per ſubſtitutionem æqualium quadratum DB, æquabitur rectangulo BDF, vnà cum rectangulo CEF, plùs quadrato CE; ſed rectangulum BDF æquale eſt duplo rectangulo BDE; ergo differentia quadratorum CE, DB, erit rectangulum CEF, vnà cum duplo rectangulo BDE, ſed rectangula CEF, & duplum rectangulum BDE, cùm ſint æquales DE, EF, vt diximus æqualia ſunt rectangulo ex DE, vel EF, in CE plùs dupla DB; ergo differentia quadratorum ex CE, & DB, æquatur rectangulo ex EF, in CE, plùs dupla DB; ſed differentia quadrati compoſitæ ex CE, DB, à quadrato DB, eſt quadratum CE, vnà cum rectangulo ex CE, in duplam DB (quadratum enim compoſitæ ex CE, & DB, æquale eſt quadratis CE, & DB, vnà cum duplo rectangulo ſub ijſdem CE, DB); ſeu hæc ipſa differentia eſt rectangulum ſub CE, in compoſitam ex CE, & dupla DB; ſed rectangulum ſub CE, in compoſitam ex CE, plùs dupla DB, ad rectangulum ſub EF, in compoſitam ex CE, & dupla DB, ob eandem altitudinem CE, plus dupla DB, eſt vt CE, ad EF; ergo differentia quadrati compoſitæ ex CE, & DB, à quadrato DB, ad differentiam quadratorum DB, & CE, eſt vt CE ad EF. Quod oportebat oſtendere.

Nec diſſimiliter ſuperuacaneum fuiſſet, particulam illam adiungere quòd, exempli gratia, ſegmentum FB, ſit maius; vel æquale; vel minus. Nihil enim refert, quòd FB, ſit æqualis ipſi DF, vel maior, vel minor; nam vtcunque ſe res habeat, ſemper illud eueniet, quod differentia quadrati compoſitæ ex DB, & CE, à quadrato DB, ad differentiam quadratorum DB, & CE, ſit vt CE, ad EF, ex hypotheſi quòd AC, CE, ſint partes æquales, & reliqua pars EB, ſic in F diuiſa ſit, vt rectangulum ACF, exiſtente DE æquali ipſi EF, ſit æquale rectangulo DBF.

Eſſet & ſuperfluum, ac inſulſum adiectum illud. Exiſtentibus æqualibus AC, CE, pars EB, ea ſit lege diuiſa in F, vt exiſtentibus æqualibus DE, EF, quadratum EB, æquale ſit

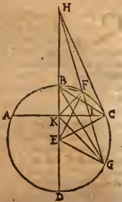
le ſit

ſit rectangulo DBF, vnà cum quadrato EF. Hoc enim proponentis teſtatur inſcitiam; conditio ſiquidem debet contradictionis partem admittere; illud porrò ex neceſſitate cuenit.

Multò autem onerofius, ac intollerabilius eſt, pugnantia adijcere, vt ſi quiſpiam apponeret, exiſtentibus æqualibus, AC, CE, reliqua pars EB, ita diuiſa ſit in F, vt æqualibus exiſtentibus DE, EF, recta EB, poſſit duplum rectangulum DBF; huic enim propoſitæ diuiſionis aduerſatur natura, & in hæc atque ſimilia paſſim Tyrones, vtpotè minus in Mathematico puluere verſati, ſolent incurrere. *A pugnātibus cauendum.*

Sic etiam à ſuperflua præparatione cauendum. Vt ſi quiſpiam ad huiuſmodi theorematis demonſtrationem, præcepiſſet inter AC, CF, mediam reperiri proportionalem, adhibendam deinceps veluti potentem rectangulum ACF, ita vt eius quadrato, in rectanguli locum ſubſtituto, demonſtratio procederet. *Item à ſuperfluo &c.*

Magnoperè igitur curandum, ne in demonſtrationibus aliquid intrudatur ſuperfluum, veluti præparationis loco, quod ipſi demonſtrationi nullo modo deſeruiat. Rarò ſiquidem Theorema aliquod demonſtrandum occurrit, quod aliqua præparatione non indigeat, quæ quidem ea eſt perficienda lege, vt nil ſuperfluum contineat. Vt igitur hoc pacto quis per exceſſum peccaret, ita quidem ommittens per defectum: vtrunque deteſtabile eſt. Per exceſſum, præter allatum exemplum, extat etiam & illud Orontij contendentis quadratum æquale circulo exhibere, nam vt Petrus Nonius aduertit, multa miſcuit in illo tetragoniſmo, quæ quidem ad ipſius demonſtrationem nullo modo conducunt.



Nec diſſimili modo foret quiſpiam incuſandus, quòd ſuperfluâ vſus eſſet præparatione; ſi in Theoremate exempli XXII. adiunxiſſet præparationis loco rectas eſſe ducendas CB, GB, FK, FE: deinde proſequeretur demonſtrando vt ibi; culpâ ſiquidem non vacaret, quoniam in illa demonſtratione nulla fit prædictarum linearum commemoratio.

Nihil autem refert, quod in ſchemate, ob alium finem aliquæ ductæ ſint lineæ, dummodò vbi ijs non eſt opus, non commemorentur, vt in ſupradicto exemplo contigit; Schema ſiquidem ibi nos adhibuimus, in quo lineæ prædictæ ob eum, de quo loquimur finem, ad ſchematum multiplicitatem vitandam, deſcriptæ fuerunt; ibi tamen prædictas lineas, præparationis loco non adhibentes, ſilentio præteriuimus. *Nihil referre quod in ſchemate lineæ ſit ſuperflua, dū modo non cōmemorentur.*

QVOD ARTIFICI MAGNOPERE CVRANDVM

In oblati Theorematis reſolutione inſtituenda.

CAP. VIII.

HVic expedit Artifici præ oculis facilitatem, claritatemque demonſtrationis habere; quantum enim inde laudis conſequitur: tantundem ex implicata demonſtrandi ratione, obſcuraque methodo in ſuo obeundo munere, ammittit. Caueat igitur ne incautè procedens viam abſconditam, ac ſalebroſam ineat in reſoluendo, cùm alioquin expedita faciliſque ſit obuia; quod vſu venire deprehendet, cùm ſtatim quæſito tamquam vero quidem aſſumpto in planorum comparationem ad pauca reſpiciens, atque adeò inconſideratè mentem adegerit, vt inde verum aliquod conceſſum, exploratum, ac notum offendat, proptereaq; retrogrado quodam ordine compoſitionem inſtituat; à quo illi præſertim abſtinendum, cùm ſolertis Artificis partes ne dum ſint oblato cuidam Theoremati demonſtratione ſatisfacere, ſed etiam demonſtrandi rationem ſeligere, quæ propoſitionum candore, conſecutionum paucitate, progreſſuſque facilitate, cæteris antecellit; Ita ſit vt eum inprimis dedeceat ad veritatem aliquam conſequendam per obſcura, ac implicata reſolutionem *Claritas in Demonſtrationibus commēdabilis.*

tionem

tionem inſtituere, demonſtrationemque contexere, quaſi relictâ viâ ſatis obuiâ, ac expeditâ, quod inexpertis eſt, ſalebroſam, ac arduam ad Mineruæ templum inuiſendum, ſelegerit. Vtq; dicta perſpicuè conſtent, exemplum operæ pretium duximus in medium afferre, vnde cuique facillimum ſit addiſcere, id à quo illi magnopere declinandum; ne quamuis in aſſequenda veritate præſtantioris Artificis partes expleuerit; in modo tamen inſulsè peccaſſe videatur.

Exemplum LXV.

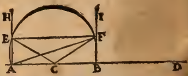
THEOREMA.

Sit recta quæpiam AB duplata quidem in D, & ex punctis A, & B perpendicularibus erectis AH, BI, & in BI ſumpto quouis puncto F, ducta ſit AF, ſupra quam deſcriptus ſit ſemicirculus AEF, ſecans AH in puncto E, ductaque ſit EF, ſit vt AD ad EF, ita EF ad AC, ex C ductæ ſint CE, CF.

Dico CE, CF eſſe inter ſe æquales.

Niſi quis cautè ſe gerat, facilè in hanc incidet reſolutionem.

Reſolutio.



QVoniam igitur EC, CF ſunt æquales, ergo quadrata ex EC, & ex CF erunt æqualia. Eſt autem quadratum AB, minus rectangulo DAC plus quadrato AC, plus quadrato BF, idem quòd quadratum CF; & præterea quadratum AC, plus quadrato AE idem quòd quadratum EC; ergo quadratum AC plus quadrato AE æquale erit quadrato AB, minus rectangulo DAC, plus quadrato AC, plus quadrato BF; & per antitheſin quadratum AC plus quadrato AE, plus rectangulo DAC, æquale erit quadrato AB, plus quadrato AC plus quadrato BF, vtrinque ſubtracto quadrato AC; quadratum AE, plus rectangulo DAC æquabitur quadrato AB plus quadrato BF; & per antitheſin rectangulum DAC æquale erit quadrato AB plus quadrato BF, minus quadrato AE; Quamobrem quadratum EF, vtpote æqualis AB, plus quadrato BF, minus quadrato AE æquabitur rectangulo DAC; quamobrẽ EF media erit inter AC, & AD. Quod ita ſe habet.

ex Elementis AEFB eſt parallelogramm.

Compoſitio.

ſiue EF eſt æqualis AB.

QVoniam enim EF media eſt inter AC, AD, & quidem EF poteſt quadratum AB, plus quadrato BF minus quadrato AE; proinde rectangulum DAC erit æquale quadrato AB plus quadrato BF minus quadrato AE, & per antitheſin quadratum AE plus rectangulo DAC, æquale erit quadrato AB plus quadrato BF, vtrinque addito quadrato AC, erit quadratum AC plus quadrato AE plus rectangulo DAC, æquale quadrato AB, plus quadrato AC, plus quadrato BF; & rurſus per antitheſim quadratum AC, plus quadrato AE erit æquale quadrato AB minus rectangulo DAC, plus quadrato AC, plus quadrato BF; eſt autem quadratum AC plus quadrato AE idem, quod quadratum EC; præterea quadratum AB minus rectangulo DAC, plus quadrato AC, plus quadrato BF, idem eſt, quod quadratum CF; ergo hæc duo quadrata EC, CF erunt æqualia; quare & ipſæ EC, CF erunt æquales.

Illud autem ſupereſt oſtendendum; nimirum quadratum CF æquale eſſe quadrato AB minus rectangulo DAC plus quadrato AC, plus quadrato BF; quod ſic oſtenditur.

Rectangulum DAC idem eſt quod rectangulum duplum BAC, quare quadratum CF erit æquale quadrato AB minus duplo rectangulo BAC plus quadrato AC plus quadrato BF, & ita eſt; quandoquidem quadratum CF æquale eſt quadrato CB plus quadrato BF. At verò quadratum CB idem eſt quod quadratum AB minus duplo rectangulo BAC, plus quadrato AC, per ſeptimam Secundi; ſi enim quadrato AB additum fuerit quadratum AC,

certè

certè quadratum CB, plus duplo rectangulo BAC, æquale erit quadratis AB, AC; proinde quadratum BC plus quadrato BF æquale cùm ſit quadrato CF, etiam quadratum CF æquale erit quadrato AB minus duplo rectangulo BAC, ſeu ſimplo DAC, plus quadrato AC, plus quadrato BF &c.

Conſpectus Reſolutionis, atq; Compoſitionis.

Quoniam itaque EC, CF ſunt æquales; ergo
Quadratum EC æquabitur quadrato CF; ſed
Quadratum AB, minùs rectangulo DAC; vnà cum quadrato AC, plùs quadrato BF, æquatur quadrato CF; & quadratum AC, plùs quadrato AE, æquale eſt quadrato EC, ergo *Initium Reſolutionis, & finis Compoſitionis.*
Quadratum AC, vnà cum quadrato AE æquabitur quadrato AB minus rectangulo DAC, vnà cum quadrato AC, plùs quadrato BF; vtrinque addito rectangulo DAC; ergo
Quadratum AC, vnà cum quadrato AE, plus rectangulo DAC æquabitur quadrato AB plus quadrato AC, vnà cum quadrato BF; vtrinque ſubtracto quadrato AC; ergo
Quadratum AE, vnà cum rectangulo DAC æquabitur quadrato AB, vnà cum quadrato BF; vtrinque ſubtracto quadrato AE; ergo
Rectangulum DAC æquabitur quadrato AB, vnà cum quadrato BF minus quadrato AE, ergo
Quadratum EF, vtpotè æqualis ipſi AB plus quadrato BF, minus quadrato AE, æquabitur rectangulo DAC; ergo *Finis Reſolutionis, & initium Compoſitionis.*
EF media proportionalis erit inter AC, AD. Quod ita ſe habet.

Implicata eſt admodum demonſtratio; atque adeò ſubobſcura, eiuſdem ordinis cum ijs, quas ſpecioſa ſuppeditat Analyſis; longè tamen clariùs, & elegantiùs, hunc qui ſequitur in modum, poterit ipſa Reſolutio inſtitui, ac per regreſſum compoſitio perfici.

Reſolutio.

QVoniam igitur EC eſt æqualis CF, ergo quadratum CE æquabitur quadrato CF, ſed quadratum CF eſt æquale quadratis CB, BF ob angulum rectum ad B, ergo quadratum CE æquabitur quadratis CB, BF, ſed quadratum CE eſt æquale quadratis AC, AE ob angulum rectum ad A, ergo quadratum AC, plus quadrato AE æquabitur quadrato CB, plus quadrato BF, ſed AE æquatur BF, vt infra conſtabit; ergo AC æquabitur CB, ergo AB erit dupla ipſius AC; Quod ita ſe habet; ſiquidem vt AD ad EF, ita EF ad AC; ſed vt AD ad EF, ita AD ad AB, cùm ſint æquales AB, EF; ergo vt AD ad AB, ita AB ad AC, ſed AD eſt dupla ipſius AB, ergo AB; erit dupla ipſius AC.

Quod autem AE ſit æqualis BF, & AB ſit æqualis EF, ſic oſtenditur. Eſt enim AEFB parallelogrammum, quoniam angulus EAB rectus eſt ex hypotheſi, & angulus AEF eſt rectus, vtpotè in ſemicirculo; ergo EF erit parallela ipſi AB, & quia angulus ABF eſt rectus, propterea AE erit parallela ipſi BF, angulo exiſtente etiam recto EAB; quare AEFB erit parallelogrammum; vnde aduerſa latera, videlicet AE, BF; item AB, EF, erunt inter ſe æqualia. *Si quis probe quereretur quouſq; oſtenderet æqualitatem inter EF & AB peccaret.*

Compoſitio.

QVoniam igitur eſt vt AD ad EF, ita EF ad AC, ſed vt AD ad EF, ita AD ad AB, cùm ſint æquales AB, EF; ergo vt AD ad AB, ita AB ad AC, ſed AD eſt dupla ipſius AB; ergo AB erit dupla ipſius AC, ergo AC æquabitur CB, ſed AE æquatur BF, ergo quadratum AC, plus quadrato AE æquabitur quadrato CB, plus quadrato BF, ſed quadratum CE eſt æquale quadratis AC, AE ob angulum rectum ad A, ergo quadratum CE æquabitur quadratis CB, BF, ſed quadratum CF eſt æquale quadratis CB, BF ob angulum rectum ad B, ergo quadratum CE æquabitur quadrato CF, ergo CE æquabitur CF.

Si quis autem in componendo ſiſtat ibi, ſed AE æquatur BF, perget eleganter hunc in modum, nulla adhibita comparatione planorum. Et quia in triangulis EAC, FBC duo latera AC, AE æqualia ſunt duobus lateribus BC, BF, vtrunq; vtriq;, & anguli ad A, & B

æqua-

æquales, vt potè recti, ergo baſis CE æquabitur baſi CF.

Aliter autem longè clariùs, ac breuiùs tùm reſolutio, tùm compoſitio inſtituetur.

Reſolutio.

QVoniam CE æqualis eſt CF, ergo angulus CEF æquabitur angulo CFE; ſunt autem AEF, BFE anguli inter ſe æquales, vtpotè recti, ergo angulus reliquus CEA æquabitur reliquo CFB, ſed anguli ad A, & B ſunt æquales, vt potè recti, ergo AC æquabitur CB, & AE æquabitur BF. Quod ita ſe habet; nam AE, & BF ſunt latera oppoſita parallelogrammi AEFB; vnde ſunt inter ſe æqualia; Et quoniam AB ob eandem rationem eſt æqualis EF, erit vt AD ad EF, ita AD ad AB, ſed AD eſt dupla ipſius AB, ergo AD eſt dupla ipſius EF, ſed vt AD ad EF, ita EF ad AC; ergo EF eſt dupla ipſius AC; ſed AB, & EF ſunt inter ſe æquales, ergo AB erit dupla ipſius AC; quare AC æquabitur CB.

Compoſitio.

QVoniam AE eſt æqualis BF, & AC eſt æqualis CB, vt vidimus, ſuntque anguli ad A, & B æquales, vtpotè recti, ergo angulus CEA æquabitur angulo CFB; ſunt autem anguli AEF, BFE inter ſe æquales, vtpotè recti, ergo angulus CEF æquabitur angulo CFE; quare CE æquabitur CF.

Non diſſimili obſcuritatis, ac implicationis vitio ſequentis Theorematis Reſolutio, Compoſitioq; laborat, vnde placuit hęc ſubijcere, vt quiſque addiſcat, à quibus operæ ſit pretium abſtinere.

THEOREMA.

Exemplum LXVI.

Sit recta AF diuiſa in partes AB, BD, DF inæquales continuò creſcentes, vel decreſcentes, ſitque CD differentia inter AB, BD, & EF differentia inter BD, DF.

Dico rectangulum abs BD in CD, plus EF, ſeu rectangulum BDG æquale eſſe aggregato rectãgulorum, quorum vnum eſt abs AB in EF, alterum verò abs CD in DF, ſeu CDF, rectangulo.

Præparatio.

Subtrahatur AB ex BD, & remaneat CD, ex DF ſubtrahatur eadem AB, & remaneat DG, & ex eadem DF ſubtrahatur BD, & remaneat EF.

Reſolutio.



QVoniam rectangulum factum ex EF in AB, vnà cum rectangulo facto ex CD in DF æquale eſt rectangulo BDG, nimirùm ſub BD, & ſegmento quidem DG; rectangulum autem ex DF minus BD in AB, idem eſt quod rectangulum factum ex EF in AB, & rectangulum factum ex BD minus AB in DF, idem eſt quod rectangulum ſub CD, & DF; ergo rectangulum ex DF minus BD in AB, vnà cum rectangulo ex BD minus AB, in DF, æquatur rectangulo BDG, hoc eſt facto ſub BD in ſupradictum ſegmentum DG. Rectangulum autem ſub DF minus BD in AB, additum rectangulo ſub BD minus AB in DF, facit rectangulum BDF minus rectangulo ABD; ergo rectangulum BDF minus rectangulo ABD eſt factum ex BD in prædictum ſegmentum DG. Sed rectangulum factum ex DF minus AB, in BD, æquale eſt rectangulo BDF minus rectangulo ABD, ergo rectangulum ſub DF, minus AB, in BD, æquabitur rectangulo BDG; ergo rectangulum BDG erit factum ex BD in aggregatum differentiarum CD, EF; quare GD erit æqualis aggregato differentiarum CD, EF. Quod ita ſe habet &c.

Compo-

Compoſitio.

Subtrahatur AB ex DB, & remaneat DC &c.

QVoniam igitur DG æqualis eſt aggregato differentiarum CD, EF; ergo rectangulum BDG erit factum ex BD in aggregatum differentiarum CD, EF, ergo rectangulum ſub DF minus AB in BD æquabitur rectangulo BDG ſed rectangulum factum ex DF minus AB in BD, æquale eſt rectangulo BDF minus rectangulo ABD, ergo rectangulum BDF minus rectangulo ABD, eſt factum ex BD in prædictum ſegmentum DG. At verò rectangulum ſub DF minus BD in AB additum rectangulo ſub BD minus AB, in DF, facit rectangulum BDF minus rectangulo ABD; ergo rectangulum ex DF minus BD in AB, vnà cum rectangulo ex BD minus AB in DF æquabitur rectangulo BDG, hoc eſt facto ſub BD in ſupradictum ſegmentum DG, ſed rectangulum ex DF minus BD in AB, idem eſt quòd rectangulum factum ex EF in AB, & rectangulum ex BD minus AB in DF idem eſt quod rectangulum ſub CD, & DF; ergo rectangulum factum ex EF in AB, vnà cum rectangulo facto ex CD in DF æquabitur rectangulo BDG, nimirum abs BD in CD plus EF ſeu ſub BD, & ſegmento quidem DG.

Conſpectus Reſolutionis, & Compoſitionis.

Quoniam igitur rectangulum factum ex EF, in AB, vna cum rectangulo facto ex CD in DF æquale eſt rectangulo BDG, ſeu ſub BD, & DG. *Initium Reſolutionis, & finis Compoſitionis.*

Rectangulum autem ex DF, minus BD in AB, idem eſt quod rectangulum factum ex EF in AB, &

Rectangulum factum ex BD, minus AB in DF, idem eſt quòd rectangulum ſub CD & DF; ergo

Rectangulum ex DF, minus BD, in AB, vna cum rectangulo ex BD, minus AB in DF, æquabitur rectangulo BDG, hoc eſt facto ex BD in ſupradictum ſegmentum DG.

Rectangulum autem ſub DF, minus BD, in AB, additum rectangulo ſub BD, minus AB, in DF, facit rectangulum BDF, minus rectangulo ABD, ergo

Rectangulum BDF, minus rectangulo ABD, eſt factum ex BD, in prædictum ſegmentum DG, ſed

Rectangulum factum ex DF, minus AB, in BD, æquale eſt rectangulo BDF, minus rectangulo ABD ergo *Finis Reſolutionis, & Initium Compoſitionis.*

Rectangulum ſub DF, minus AB in BD, æquabitur rectangulo BDG, ergo

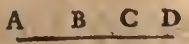
Rectangulum BDG erit factum ex BD, in aggregatum differentiarum CD, EF, ergo GD, erit æqualis aggregato differentiarum CD, EF. Quod ita &c.

In ſuprapoſita, vt vidiſti reſolutione, compoſitioneq; Geometricus ille candor Europæus deſideratur, cum affluat potius Arabica barbarie, vnde magis tenebras intellectui offundat, quam euidentiam pariat.

Longè tamen faciliùs, ac breuiùs, id abſoluemus hunc, qui ſequitur, in modum. Exemplum LXVII.

Lemma.

Sint tres magnitudines AB, AC, AD. Dico aggregatum differentiarum eſſe differentiam inter maximam, & minimam.



Differentia inter AB, minimam, & mediam AC eſt BC, differentia inter mediam AC, & maximam AD, eſt CD, quarum differentiarum aggregatum eſt BD, ſed BD, eſt differentia inter minimam AB, & maximam AD, ergo patet propoſitum.

Vnde conſtat ſi ex maxima auferatur aggregatum differentiarum, quod remanet, æquari minimę.

Reſolutio.

A B C D G E F

QVoniam rectangulum BDG æquale eſt rectangulo ſub AB, EF, vna cum rectangulo CDF, eſt autem rectangulum CDG plus rectangulo ſub CD, GF, æquale rectangulo CDF; ergo rectangulum BDG æquabitur rectangulo ſub AB, EF, vnà cum rectangulo CDG plus rectangulò ſub CD, GF; ſed BC eſt æqualis AB, item & GF ergo rectangulum BDG æquabitur rectangulo ſub BC, EF, vnà cum rectangulo CDG plus rectangulo BCD; ergo DG eſt a æqualis CD, plus EF, & BD ęqualis eſt BC plus CD. Quod ita ſe habet.

a ex eo quod præmiſſum eſt Lemmate.

Compoſitio.

QVoniam BD eſt æqualis BC plus CD, at verò DG eſt æqualis CD plus EF; ergo rectangulum BDG æquabitur rectangulo ſub BC EF, vnà cum rectangulo CDG * plus rectangulo BCD, ſed BC eſt æqualis AB, item & GF; ergo rectangulum BDG æquabitur rectangulo ſub AB, EF, vnà cum rectangulo CDG plus rectangulo ſub GF, & CD, ſed rectangulum CDG plus rectangulo ſub CD, & GF eſt æquale rectangulo CDF; ergo rectangulum BDG æquabitur rectangulo ſub AB, EF, vnà cum rectangulo CDF.

* Rectangulũ CDG æquale eſt quadrato CD, plus rectãgulo CD, EF; nam CD plus EF æquatur DG.

Vide igitur magni quidem intereſſe potiorem reſolutionem ſeligere: vnde id præ oculis ſemper habere præſtat; quod animaduertiſſe non fuit alienum ab inſtituto.

Ne dum à ſupradictis ſed etiam ab omni alia demonſtrandi ratione obſcuriori, ac implicatiori abſtinere præſtat, vnde non admodum eſt commendabilis ille tranſitus qui fit in demonſtrando à planis ad ſolida, vt inde ad plana ipſa reditus fiat. Ita ſi e.g. foret illud propoſitum.

THEOREMA.

Exemplum LXVIII.

Si recta AB, ita diuiſa ſit in C, D, & E, vt quemadmodum eſt AD ad DC, ita ſit BD ad DE, Dico rectangulum DEB ad quadratum DE rationem habere, vt AC ad CD.

Reſolutio.

A C D E B

QVoniam igitur eſt vt AC ad CD, ita rectangulum DEB ad quadratum DE; ergo ſolidum ſub AC in quadratum DE æquabitur ſolido ſub CD, DE, EB omnibus applicatis ad DE; ergo rectangulum ſub AC, DE æquabitur rectangulo ſub CD, & EB, ſeu rectangulo CDB, minus rectangulo CDE, vtrinque addito rectangulo CDE; ergo rectangulum ſub AC, DE, plus rectangulo CDE, hoc eſt rectangulum ADE, æquabitur rectangulo CDB; quare vt AD ad DC, ita BD ad DE. Quod ita ſe habet, ex hypotheſi enim hunc in modum ſupponimus lineam eſſe diuiſam.

Compoſitio.

QVoniam igitur vt AD ad DC, ita BD ad DE; ergo rectangulum ADE hoc eſt rectangulum ſub AC, DE plus rectangulo CDE æquabitur rectangulo CDB; vtrinque ſublato rectangulo CDE; ergo rectangulum ſub AC, DE æquabitur rectangulo CDB, minus rectangulo CD, ſeu æquabitur rectangulo ſub CD, EB; omnibus ductis in DE; ergo ſolidum ſub AC in quadratum DE æquabitur ſolido ſub CD, in rectangulum DEB; quamobrem, vt AC ad CD, ita rectangulum DEB ad quadratum DE. Quod oportebat oſtendere.

Hæc reſolutionis ratio non ideò deteſtabilis, quia in ſe aliquid falſi contineat, vel malè deducat, nam vera quidem aſſumit, & inde benè quoq; ac ritè verum ipſum infert; nec preterea quia per impropria procedat, vt videbatur Ghetaldo, non aliam ob cauſam illam reſpuenti, ac deteſtati; propterea quod nihil eſt magis proprium Geometræ, quàm ſolidorum

ſorum conſideratio, de quibus etiam Geometrarum Princeps Euclides edifferit: Et certè ſi duas ſuperficies planas æquales inferamus, v. g. duos circulos, eò quia ſint baſes duorum Cylindrorum æqualium eiuſdem altitudinis, non vtiq; per Geometriæ impropria id demonſtrantes procedere diceremur, ſed ex eo potius eſt minus commendabile, quoniam demonſtrationes fiunt rudes, ac ſubobſcuræ, cùm alioquin in ipſis claritas, & perſpicuitas ſit magnoperè laudabilis; euidentia ſiquidem, quæ ſcientiæ eſt propria; ſcientia enim ſemper comitem habet euidentiam; magni fieri debet.

Nihilominus non omninò, ac penitùs hic demonſtrandi modus arcendus ex Geometriæ finibus, ac expungendus eſt è Geometrico Albo; cum eius vſu, & Veteres, & Recentiores præclariſſima figurarum ſymptomata demonſtrauerint; Cū deeſt aſcēſus à planis ad ſolida, licet; Teſtis ſit Pappus Alexandrinus, qui quarto Libro Collectionum Mathematicarum propoſitione vigeſima prima demonſtrat, figuram contentam linea ſpirali, & recta, quæ eſt in principio circulationis, tertiam partem eſſe circuli ipſam comprehendentis, tranſitu facto à planis ad ſolida, nimirùm conum, atq; cylindrum, colligens rationem illam ſpatij iam dicti ad circulum eandem eſſe cum ea, quam habet conus ad Cylindrum eiuſdem baſeos, ac altitudinis, nempè ſubtriplam; atq; adeò vt cylindrus eſt triplus coni eandem baſim, & eandem altitudinem habentis, ita circulum triplum eſſe ſpatij prædicti. *Superior reſolutionis modus non omninò ſpernendus.*

Multoties igitur lineam ad lineam, vel ſuperficiem ad ſuperficiem oſtendimus eſſe, vt ſolidum ad ſolidum; tunc autem nullus eſt locus ſuperiori difficultati, cùm hìc deſit aſcenſus à planis ad ſolida, & hinc ad eadem reditus, idq; eſt etiam primariò intentum, nec eſt demonſtrandi ratio, ſed potius demonſtrationis ſcopus. Ita planè factum ab Antiquis omnibus compertum eſt; vnde Pappus libro quarto Propoſitione XXII, oſtendit partem ſpatij ſpiralis ad partem rationem habere, vt lineæ cubus ad cubum alterius lineæ; perinde enim eſt, ac ſi demonſtraremus ita eſſe ſpatium ad ſpatium ſpirale, vt cubus lineæ ad lineæ cubum: quamobrem, ſicuti licet oſtendere ita eſſe conum ad conum eiuſdem altitudinis, vel parallelepipedum ad parallelepipedum, vel cylindrum ad cylindrum, vt baſis ad baſim, ita quoque eſſe vnius lineæ cubum ad alterius lineæ cubum, vt eſt pars ſpatij ſpiralis ad partem, nempè vt ſuperficies plana ad planam ſuperficiem; loquimur enim de ſpirali deſcripta in plana ſuperficie: & quidem ad hoc nil aliud requiritur, niſi vt ſeruetur homogeneorum lex in analogiſmo quatuor terminorum proportionalium, ita videlicet vt bini eiuſdem omninò naturæ ſint, primus cum ſecundo, & tertius cum quarto. Sed de his ſatis; nihil enim difficultatis habent. *Comprobatio.*

Cæterùm ſuperius illud Theorema longè faciliùs reſoluetur, & componetur hunc in modum.

Reſolutio.

QVoniam igitur eſt, vt AC ad CD, ita rectangulum BED ad quadratum DE; ſed vt rectangulum BED ad quadratum DE, cùm eiuſdem ſint altitudinis, ita [a] BE ad ED; ergo vt AC ad CD, ita BE ad ED; quare componendo [b] erit vt AD ad DC, ita BD ad DE. Quod ita ſe habet; hunc enim in modum ſupponimus lineam eſſe diuiſam.

[a] *prim. ſexti.* [b] *18. quinti.*

Compoſitio.

QVoniam igitur eſt, vt AD ad DC, ita BD ad DE; ergo diuidendo [a] erit, vt AC ad CD, ita BE ad ED, ſed vt BE ad ED, ita [b] rectangulum BED ad quadratum DE, cùm eiuſdem ſint altitudinis DE; ergo vt AC ad CD, ita rectangulum BED ad quadratum DE.

[a] *17. quinti.* [b] *1. ſexti.*

Nec diſſimiliter eſt obſeruandum plerumque reſolutionem inſtitui poſſe per ſimplicem rationem; vnde laudabilius eſt hoc reſolutionis genere vti, quàm illo, quod per compoſitionem rationis perficitur: quamobrem non poſſum non mirari, quòd Apollonius Geometrarum præſtantiſſimus, per compoſitionem rationis proceſſerit in Theorematibus 11, 12, & 13, etſi longè elegantiùs eadem citrà quamcunque rationis compoſitionem oſtendi poſſint ad eum, qui ſequitur, modum.

THEOREMA.

Exemplum LXIX.

Sit conus, cuius vertex punctum A, baſis autem circulus, cuius diameter BC; ſeceturque plano per axem, quod ſectionem faciat triangulum ABC, & ſecetur altero plano ſecante baſim coni ſecundùm rectam lineam DE, quæ ad BC ſit perpendicularis: faciat autem ſectionem in ſuperficie coni DFE lineam; diameter vero ſectionis FG, ſit æquidiſtans vni laterum trianguli per axem, nimirum ipſi AC: à puncto autem F linea FG ad rectos angulos ducatur FR, & fiat vt quadratum BC ad rectangulum BAC, ita linea RF ad FA: deinde ſumatur in ſectione quoduis punctum k, & per K ducatur kL ipſi DE æquidiſtans. Dico quadratum KL rectangulo RFL æquale eſſe.

a 31. primi. b 15. vndecimi. c 4. pri. Apoll. d 10. vndecimi. e corol. 8. ſexti & 17. eiuſdē.

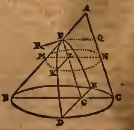
Ducatur a per L ipſi BC æquidiſtans MN; eſt autem KL æquidiſtans ipſi DE; ergo planum tranſiens per KLMN plano tranſeunti per BCDE, coni baſi æquidiſtabit b; ac propterea planum per kLMN circulus erit c, cuius diameter MN. Eſt d porrò kL ad MN perpendicularis, cùm DE ſit perpendicularis ad BC; ergo rectangulum MLN æquabitur e quadrato KL; agatur FQ parallela ipſi MN.

Reſolutio.

f corol. 8. ſexti, & 17. eiuſdē. g 1. ax. primi. h 1. ſexti.

QVoniam rectangulum RFL, æquale eſt quadrato KL; ſed rectangulum MLN, æquale eſt f quadrato KL; ergo rectāgulum RFL æquabitur g rectangulo MLN; ſed ex cōſtructione ſumpta h communi altitudine FL, vt rectangulum BAC ad quadratum BC, ita rectangulum AFL, ad rectangulum RFL; ergo rectangulum BAC, ad quadratum BC, erit, i vt rectangulum AFL, ad rectangulum MLN; ſed vt AB ad BC, ita k AF ad LN, ſeu FQ, ob ſimilitudinem triangulorum ABC, & FAQ; ergo; vt AC ad BC, ita FL ad LM * Quod ita ſe habet ob ſimilitudinem triāgulorum ABC, & MFL.

i 7. quinti. k 4. ſexti. * propoſitio nulla enim ſi ad proportionalia applicentur, proportionalia emergūt.



Compoſitio.

QVoniam triangula ABC, MFL, ſunt ſimilia; ergo erit vt AC ad BC, ita FL ad LM; ſed vt AB ad BC, ita AF ad FQ, ſeu LN, ob ſimilitudinem triangulorum ABC, FAQ; ergo rectangulum BAC, ad quadratum BC erit, * vt rectangulum AFL, ad rectangulum MLN. Sed ex conſtructione ſumpta communi altitudine FL, vt rectangulum BAC ad quadratum BC, ita rectangulum AFL ad rectangulum RFL; ergo rectangulum RFL æquabitur rectangulo MLN; ſed rectangulum MLN æquale eſt quadrato kL; ergo rectangulum RFL æquabitur quadrato kL.

* ſi nāq; proportionalia in proportionalia ducantur, facta erunt proportionalia.

Hinc intelliges quanti referat idoneam adinueniſſe præparationem, cuiuſmodi eſt duxiſſe rectam FQ parallelam ipſi MN, ſeu BC; inde ſiquidem facilitas reſolutionis innixæ principio ſatis obuio, quòd ſcilicet proportionalia ſi ad proportionalia applicentur, proportionalia procreentur, quod nos initio primi Tomi explicuimus; vnde manifeſtum redditur ſciolos illos toto Cælo aberrare, qui putant non eſſe operæ pretium in huiuſmodi principiorum contemplatione immorari; id enim ſi ab Apollonio fuiſſet animaduerſum, decenti, qua vſi ſumus, præparatione, certè Theorema iſtud longè faciliùs oſtendiſſet, non adactus ad rationis compoſitionem confugere, quæ quoniam eſt magis implicata, ideò minus laudabilis; & eo quoque nomine demonſtratio ſuperior commendabilior eſt, quoniam minus à primis principijs recedit, vnde magis ad illius accedit naturam, quæ per immediata procedit; tantòque maiorem ingerit admirationem, quantò ex tenuiſſimo principio abſtruſæ propoſitionis veritas orta conſpicitur: Non ſecùs ac quiſque cogitur admirari,

aduer-

aduertens quercum ingentem ex exigua glande naſcentem. Hic tamen non præteribo hoc idem Theorema à nobis oſtenſum fuiſſe in Comm.; quos ſuper Apollonium conſcripſimus ſine rationis compoſitione, ſi tamen ſuperior præparatio fuerit adhibita, & ita ſe habet.

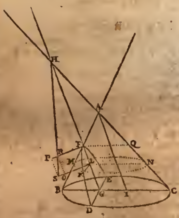
Quoniam ex conſtructione eſt, vt quadratum BC ad rectangulum BAC, ita RF ad FA: eſt autem rectangulum BAC, ad rectangulum ACB, ſumpta AC communi altitudine, vt AB ad BC, ſeu AM, ad MN, ſeu AF, ad FQ, ſeu ad LN; ergo ex æquo erit quadratum BC ad rectangulum ACB, vt RF ad LN; vt autem quadratum BC ad rectangulum ACB, ita BC ad CA, ſeu MN ad NA, ſeu ML ad LF; ergo erit vt RF ad LN, ita ML ad LF; quare rectangulum ſub extremis, puta RF, FL æquabitur rectangulo ſub medijs NL, ML; huic autem eſt æquale quadratum kL; quare rectangulum RFL, æquabitur quadrato KL.

THEOREMA.

Exemplum LXX.

Sit Conus, cuius vertex A punctum, baſis verò circulus, cuius diameter BC: ſecetur autem plano per axem, quod ſectionem faciat triangulum ABC: ſecetur autem & altero plano ſecante baſim coni ſecundùm rectam lineam DE ad BC baſim trianguli ABC, perpendicularem; faciat verò ſectionem in ſuperficie coni lineam DFE, & ſectionis diameter FG, producta, cum ipſo AC latere trianguli ABC, extra coni verticem conueniat in puncto H: deinde per A, recta ducatur AI, diametro quidem æquidiſtans, quæ ſecet BC, & ab F ducatur FR ad rectos angulos ipſi FG: fiat autem, vt quadratum AI ad rectangulum BIC, ita HF linea ad lineam FR; ſumatur autem in ſectione quodcunque punctum K, & per k ducatur kL æquidiſtans DE, & per L ipſi FR ducatur æquidiſtans LS: tandem iuncta HR, & ad S producta, per R, S ipſi FL, æquidiſtantes agantur RO, PS.

Dico lineam KL poſſe ſpatium FS, quod quidem adiacet lineæ FR, latitudinem habens FL, exceditque figura RS ſimili ei, quæ HFR, continetur.



Ducatur [a] per L, linea MN æquidiſtans BC: eſt autem & KL ipſi DE æquidiſtans; ob id planum, quod trãſit per KL, MN æquidiſtabit [b] plano per BC, DE, nimirum ipſius coni baſi; producto autem plano per KL, MN, fiet [c] ſectio circulus, cuius diameter MN, ad quam perpendicularis [d] eſt KL, quòd DE, ſit itidem ad BC; vnde rectangulum MLN, æquabitur [e] KL quadrato.

a 31. primi.
b 15. vndecimi.
c 4. pri. Apoll.
d 10. vndecimi.
e corol. 8 ſexti & 17. eiuſdẽ.

Reſolutio.

Quoniam igitur rectangulum SLF, æquale eſt quadrato kL; ſed rectangulum MLN, æquale eſt [f] quadrato kL; ergo rectãgulum SLF, æquabitur [g] rectãgulo MLN; eſt [h] autem ex cõſtructione ſumpta FL communi altitudine, vt quadratum AI ad rectangulum BIC, ita rectangulum HLF, ad rectangulum FLS; ergo vt quadratum AI ad rectangulum BIC, ita rectangulum HLF ad rectangulum MLN, ſed [i] vt AI ad IB, ita FL, ad LM, cùm triangula ſimilia ſint ABI, FML; ergo erit, * vt AI ad IC, ita HL ad LN, ſeu HF ad FQ. Quod ita ſe habet; [k] triangula enim AIC, & HLN, ſeu HFQ, ſimilia ſunt,

f corol. 8 ſexti & 17 eiuſdẽ.
g 1. ax primi.
h 1. ſexti.
i 4. ſexti.
* Proportionalia enim, ſi ad proportionalia applicẽtur, orta ſunt proportionalia.
k 4. ſexti.

Compoſitio.

Quoniam itaque triangula AIC, HFQ, ſeu HLN, ſimilia ſunt; ergo erit [α] vt AI, ad IC, ita HF ad FQ, ſeu HL ad LN; eſt [β] autẽ vt AI ad IB, ita FL ad LM, cùm triãgula ABI, FML ſimilia ſint; ergo [γ] vt quadratum AI ad rectangulum BIC, ita rectangulum HLF, ad rectangulum MLN; * eſt autem ex [δ] conſtructione ſumpta FL communi altitudine, vt qua-

α 4. ſexti.
β ibidem.
γ ex Elemẽtis
δ 1. ſexti.
* Proportionalia enim ſi in proportionalia ducantur, orta ſunt proportionalia.

vt quadratum AI ad rectangulum BIC, ita rectangulum HLF ad rectangulum SLF; ergo rectangulum SLF æquabitur ᶦ rectãgulo MLN, ſed rectangulum MLN æquale eſt ᵍ quadrato KL; ergo rectangulum SLF æquabitur quadrato KL. Quod oportebat oſtendere.

ᶦ 9. quinti. ᵍ corol. 8. ſexti & 17. eiuſd.

Et etiam vt AI ad IB, ita FQ ad FR; vnde conſtructio aliter, atq; adeò reſolutio fieri potuiſſet.

Sed ex noſtris Commentarijs in Apollonium hoc excerpſimus ſine præparatione parallelæ FQ.

Quoniam igitur rectangulum BIC ad quadratum AI, eſt ex conſtructione vt FR, ad FH, ſeu SL, ad LH; vt autem quadratum AI, ad rectangulum AIC, ita eſt AI ad IC, ſeu HG ad GC, ſeu HL, ad LN; ergo ex æquali rectangulum BIC, ad rectangulum AIC, erit, vt SL ad LN; vt autem rectangulum BIC, ad rectangulum AIC, ita BI ad IA, ſeu BG ad GF, ſeu ML ad LF; ergo vt SL ad LN, ita ML ad LF; quare rectangulum SLF æquabitur rectangulo MLN, ſed rectangulum MLN eſt æquale quadrato KL; ergo rectangulũ SLF æquabitur quadrato KL.

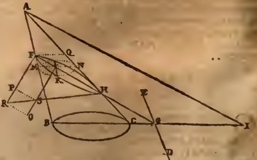
THEOREMA.

Exemplum LXXI.

Sit Conus, cuius vertex A punctum; baſis circulus, cuius diameter BC, ſecetur autem plano per axem, quod ſectionem faciat triangulum ABC; ſecetur autem, & altero plano conueniente cum vtroque latere trianguli per axem, neque baſi coni æquidiſtante, neque ſubcontrariè poſito, quod faciat ſectionem in ſuperficie coni lineam HF, & communis ſectio plani ſecantis, atque eius, in quo eſt baſis coni, ſit DGE perpendicularis ad BC; diameter autem ſectionis FH, & ab F ducatur FR, ad FH perpendicularis, perque A ducta AI, ipſi FH æquidiſtante, fiat vt quadratum AI, ad rectangulum BIC, ita FH, ad FR. Sumatur præterea in ſectione punctum K, & per k ipſi DG æquidiſtans ducatur KL. Dico kL poſſe ſpatium SF, quod lineæ FR adiacet, latitudinem habens FL, deficiens figura ſimili ei, quæ HFR continetur.

Iũgatur ᵃ HR, perque L ducatur LSO æquidiſtans FR; & per R, S pũcta ipſi FL æquidiſtantes ᵇ ducantur RO, SP. Poſtremò per L, agatur MLN æquidiſtans ᶜ ipſi BC. Itaque quoniam MN æquidiſtat BC, & KL ipſi DG, erit ᵈ planum ductum per KL, MN æquidiſtans plano per DG, BC, ducto, hoc eſt baſi coni. Si igitur planũ per kL, MN producatur, fiet ᵉ ſectio circulus, cuius diameter MN, & eſt KL ad ipſam perpendicularis; ᶠ ergo rectangulum LMN æquale eſt ᵍ quadrato KL.

ᵃ 31. primi. ᵇ ibidem. ᶜ ibidem. ᵈ 15. vndecimi. ᵉ 4. pri. Apoll. ᶠ 10. vndec. ᵍ corol. 8. ſexti & 17. eiuſdé.



Reſolutio.

Quoniam igitur rectangulum FLS æquale eſt quadrato KL, ſed rectangulum MLN æquale eſt ʰ quadrato KL; ergo rectangulum FLS æquabitur ⁱ rectangulo MLN; ſed vt quadratum AI, ad rectangulum BIC, ita ex conſtructione eſt rectangulum HLF, ad rectangulum FLS, ſeu HL ad LS, ſeu HF, ad FR; quamobrem vt quadratum AI ad rectangulum BIC, ita rectangulum HLF ad rectangulum MLN; vt autem AI ad IB, ita eſt FL, ad LM, cùm triangula BAI, & MFL ſint ſimilia; ergo vt AI ad IC, ita HL ad LN; * Quod ita ſe habet; triangula enim ACI, & HNL ſimilia ſunt.

ʰ cor. 8. ſexti, & 17. eiuſd. ⁱ 3. ex primi.
* Proportionalia enim ſi ad proportionalia applicẽtur, proportionalia emergunt.

Compo-

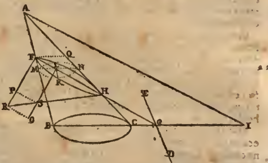
Compoſitio.

QVoniam itaque triangula ACI, & HNL ſimilia ſunt; ergo erit α vt AI ad IC, ita HL ad LN; vt autem AI ad IB, ita β eſt FL ad LM, cùm triangula BAI, & MFL, ſint ſimilia: quamobrem vt quadratum AI, ad rectangulum BIC, ita rectangulum HLF, ad rectangulum MLN; * ſed vt quadratum AI ad rectangulum BIC, ita ex conſtructione eſt HF ad FR, ſeu HL ad LS, ſeu ſumpta FL communi altitudine, ita rectangulum HLF ad rectangulum FLS; ergo rectangulum FLS æquabitur γ rectangulo MLN, ſed rectangulum MLN æquale eſt δ quadrato kL; ergo rectangulum FLS æquabitur quadrato kL. Quod oportebat &c.

α 4. ſexti. β ibidem. * Proportionalia enim, ſi in proportionalia ducantur, proportionalia ſunt. γ 9 quinti. δ corol. 4. ſexti, & 17. eiuſdem.

Eſt etiam vt AI ad BI, ita FQ ad FR, vnde aliter conſtructio, atque adeò reſolutio inſtitui potuiſſet.

Sed hæc in noſtris Commentarijs ſuper Apollonium ſcripta adinuenimus.



Quoniam eſt rectangulum BIC ad quadratum AI, ex conſtructione vt RF ad FH, ſeu SL ad LH, & eſt quadratum AI ad rectãgulum AIC, vt AI ad IC, ſeu HG ad GC, ſeu HL ad LN; erit a igitur ex æquo SL ad LN, vt rectangulum BIC ad rectangulum AIC; ſed vt rectangulum BIC ad rectãgulum AIC, ita eſt rectangulum BGC ad rectangulum FGC, propterea quod rectangulum BIC, ad rectangulum AIC eſt vt BI, ad AI, hoc eſt BG ad GF, hoc eſt rectangulum BGC ad rectangulum FGC; at verò rectangulum BGC ad rectangulum FGC, eſt vt BG ad GF, hoc eſt ML ad LF; ergo vt SL ad LN, ita ML ad LF; ergo rectangulum SLF æquabitur rectangulo MLN, atque adeo quadrato ex kL, quandoquidem quadratum KL æquale eſt rectangulo MLN.

a 22. quinti.

DE RECTA DEMONSTRANDI RATIONE

Ab Analyſta ſeruanda.

CAP. IX.

SI quem vtique decet omni curâ, diligentiâque prorsùs in ipſam demonſtrandi rationem ac Artem incumbere, is profectò Mathematicus eſt; Mathematicæ ſiquidem diſciplinæ, vel eo nomine dignitate, cæteris antecellunt, quòd huiuſmodi demonſtrationibus vtantur, quæ certitudine, firmitateque, cæterarum omnium præſtantiſſimæ ſunt; Quamobrem genus docendi limatum, firmum, exquiſitum, ac numerorum omnium complexionem habens, Mathematicum eſt. Harum etenim diſciplinarum probationes, claræ ſunt adeò, ac euidentes; adeò ſunt firmis innixæ principijs Naturæ lumine perſpectis, vt quamcunque dubitationem eximant, nullumque diſſentiendi locum, relinquant; propterea diſciplinas haſce tractanti, maximè contexendi demonſtrationes, iuxta vulgatas leges, onus ingens incumbit, ita, vt ab his, nec latum vnguem diſcedat. Laudabile proinde cuique videbitur, pauca quædam in memoriam redigere ex demonſtrandi Arte deprompta, quibus Analyſta nimirum in ſuo obeundo munere edoctus, harum diſciplinarum

Maximè decet Mathematicum omnem adhibere curam in demonſtrando.

Demõſtrationes Mathematicæ omnium præſtãtiſſimæ.

plinarum dignitatem tueatur, ac ſeruet. Tametſi namque magni referat in demonſtrando Veterum inhærere veſtigijs, eorumdemq; ſedulo monumenta verſare cùm apud ipſos excelſi quidē ordinis hæ magno in honore fuerint diſciplinæ, in primis floruerint, ac ſatis extiterint pro dignitate tractatæ; tamen niſi præceptis inſtructus, nemo declinabit ab ijs, in

Ad recte demonſtrandum requiruntur præcepta. quos facillimum eſt erroribus, labi; neq; præceptis, ac legibus Artis demonſtratricis deſtituto priſtinum, ac antiquum illum candorem, in tanta diſciplinarum celebritate, ſolâ quadam imitatione, retinere vnquam licebit.

Non vulgaris propterea videtur adhibenda ſedulitas in ſtruendis probationibus, ad veritatem in his conſequendam, cùm eò tendat huius Artificis induſtria, vt per ἀνάλυσιν, καὶ σύνθεσιν, atque adeò per exquiſitam probationis rationem Theorema propoſitum demonſtret; ac huiuſmodi ratiocinio confirmet, quod iam initio demonſtrationis explicatæ, naturam omninò ſapit, ac redolet. Nec aliò quidem ipſius labor collineat, niſi ad ſeriem conſecutionum ordinandam, vt verum aſſequatur; vnde repetitis veſtigijs, quibus firmiter inhæret, contrario greſſu incedens, quod initio propoſitum erat, neceſſaria demonſtratione, confirmet. Eruditioris tamen ſunt partes probandi genus illud aſſumere, quod numeris omnibus abſolutum, ſuiſq; partibus elaboratum, ac perpolitum communi ſapientum calculo, iudicetur.

Antequam tamen decernatur, quæ nam ſit è pluribus ſeligenda demonſtratio; iuuat iterum huius naturam ſupetiùs inſinuatam non nihil perpendere, qua de re cumulatè quidem in Poſterioribus Analyticis diſſeritur; quod, vt breuiter aſſequamur, prætermiſſis iam ſupratraditis de præcognitionibus, atque præcognitis, de ipſius demonſtrationis definitione, ciuſque bipartita diuiſione; videndum ſupereſt, cuiuſmodi eſſe debeant præmiſſæ, è quibus fit potiſſima demonſtratio, ad quas pertinet etiam medium cuius conſideratio, principiorum complexorum meditatio eſt, de quo propterea non nulla paucis comprehenſa, dicenda.

Hoc autem ex neceſſaria, & euidenti connexione ſui cum extremis in ipſis præmiſſis, ob oculos mutuam eorundem extremorum coniunctionem induſtriosè deducens in concluſione conſtituit. Quoniam verò duplex eſt demonſtrandi genus, ab effectu ſcilicet ad cauſam, &

Genus demonſtrandi ab effectu ad cauſam. contra; ſeu vt Scholaſtici loquuntur, quia, & propter quid; in priori medium, vel eſt effectus conuertibilis, ſiue non conuertibilis cum cauſa, vel eſt cauſa remota &c. quo prætermiſſo, vtpotè minus ad rem in Mathematicis puris, quamuis in Phyſicis locum, dignitatemq; retineat, ob id aliud ſupereſt perpendendum.

Aliud genus demonſtrandi à cauſa ad effectum. In alio autem demonſtrationis genere, medium cauſæ rationem, & quidem in omni genere obtinet, quod luculenter expreſſum apud Philoſophum legimus. Ἐπεὶ δὲ ἐπίστασθαι οἰόμεθα, ὅταν εἰδῶμεν τὴν αἰτίαν. αἰτίαι δὲ τέσσαρες, μία μὲν τὸ τί ἦν εἶναι, μία δὲ τὸ τίνων ὄντων ἀνάγκη τοῦτ' εἶναι, ἑτέρα δὲ, ἡ τί πρῶτον ἐκίνησε, τετάρτη δὲ τὸ τίνος ἕνεκα πᾶσαι αὗται διὰ τοῦ μέσου δείκνυνται.

2. Poſter. tex. 48. *Quoniam autem ſcire opinamur, quando ſciamus cauſam; cauſæ verò quatuor, vna quidem quod quid erat eſſe, vna verò quibuſdam exiſtentibus, neceſſè hoc eſſe; altera autem qua ali-*

2. Phyſ. tex. 70. *quid primo mouit, quarta vero, cuius cauſa, omnes iſtæ per medium monſtrantur.* Phyſicus quidem omnibus hiſce cauſarum generibus vtitur, Ariſtotelis teſtimonio; quoniam, vt res ipſæ, quas quidem ſua contemplatione perſequitur ab omni cauſarum genere, proprium eſſe recognoſcunt: ita pariter ad ſui cognitionem quodcunque cauſæ genus expoſ-

Demonſtratio potiſſima per quod cauſæ genus procedat. cunt. Quæ tamen potiſſima dicitur demonſtratio, per cauſæ formalis genus, non immeritò procedere perhibetur; quo nomine ſubiecti natura, ac definitio, quin etiam, & affectionis ſaltem quæ cauſalis dicitur definitio, intelligitur. At in Mathematicis diſciplinis etiam ad aures Ariſtotelis, cùm nec finis, nec efficiens locum obtineat, cauſæ tantummo-

3. Diuinorum tex. 23. dò materialis, formaliſque ſuperſunt, integrantibus partibus materiæ nomine intellectis, quæ nimirùm totius comparatione, materiei munere funguntur; vnde rectè Philoſophus.

2. Phy. tex. 31. δῆλον δὲ καὶ ὧδε, διὰ τί ὀρθὴ ἡ ἐν ἡμικυκλίῳ, τίνος ὄντος, ὀρθή, ἔστω δὴ ὀρθὴ, ἐφ' ἧς α,

2. Poſt. tex. 49. ἡμίσεια δυοῖν ὀρθαῖν, ἐφ' ἧς β, ἡ ἐν ἡμικυκλίῳ, ἐφ' ἧς γ, τοῦ δὴ τὸ α, τὴν ὀρθὴν ὑπάρχειν τῷ γ, τῇ ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ. αἴτιον τὸ β αὕτη μὲν γὰρ τῇ α, ἴση, ἡ δὲ τὸ γ, τῇ β. δύο γὰρ ὀρθῶν ἡμίσεια, τοῦ β, δὴ ὄντος ἡμίσεος δύο ὀρθῶν τὸ α, τῷ γ, ὑπάρχει, τοῦτο δ' ἦν τὸ ἐν ἡμικυκλίῳ ὀρθὴν εἶναι, τοῦτο δὲ ταυτόν ἐστι τῷ τί ἦν εἶναι, τῷ τοῦτο σημαίνειν τὸν λόγον, ἀλλὰ μὴν καὶ τοῦτο ἦν εἶναι αἴτιον δέδεικται τὸ μέσον.

Manife-

Manifeſtum autem & ſic propter quid rectus, qui in ſemicirculo quo exiſtente rectus, ſit profecto rectus in quo A, dimidium duorum rectorum, in quo B, qui in ſemicirculo, in quo C: huius igitur quod eſt A, rectum ineſſe ipſi C, qui in ſemicirculo, cauſa ipſum B: hoc enim ipſi A, æquale, qui verò C, ipſi B, duorum enim rectorum dimidium B; igitur exiſtente dimidio duorum rectorum A, ipſi C, ineſt: hoc autem erat in ſemicirculo rectum eſſe; hoc autem idem eſt ipſi quod erat eſſe, eo quod ſignificat ratio, verùm & ipſius quid erat eſſe cauſa demonſtrata eſt media.

Materiali propterea cauſa Geometria vtitur, eo tamen ſenſu, quo in Mathematicis materiæ locus admittitur. Philoſophus autem illam appellat id, quo exiſtente neceſsè eſt hoc eſſe; ſeu quibuſdam exiſtentibus neceſsè eſt hoc eſſe. De quorum verborum ſenſu nobis agendum alibi; ſolùm id exploratum hìc eſſe cuique velim in huiuſmodi diſciplinis, materiam, quatenus tamen earum patitur natura, non raró tanquam medium in ipſis demonſtrationibus aſſumi, nam integrantes partes, vt dicebamus, comparatione totius, materiæ rationem obtinent, quo pacto ipſæ ſolent adhiberi.

Geometria vtitur materiali cauſa, tanquàm demonſtrationis medio.

Formæ verò nomine, ſubiecti natura, vel affectionis quoque, ſenſu iam explicato, frequenter intelligitur. Sæpè ac ſæpiùs per concomitans aliquod in huiuſmodi diſciplinis contexuntur demonſtrationes, quæ adhuc per cauſam procedere dicuntur; propterea quòd huius modi demonſtrandi genus ad illud, quod eſt per cauſam, non immeritò reduci conſueuit.

Cauſa itidem formali vtitur.

Demonſtratio per concomitantia ad genus demonſtrationis per cauſam reuocatur. & in Mathematicis frequentèr adhibetur.

Verumenimuerò, vt medium eſſentia poteſt eſſe ſubiecti, ſeu definitio, quemadmodum paulò ſupra tetigimus, ſic in Mathematicis non raró medium eſt affectionis, ſaltem cauſalis definitio. Hìc porrò prætereundum non eſt, quod Ariſtoteles docuit, aſſerens, Mathematicas definitiones nominales eſſe; nam cauſam propter quid inquirimus; ait enim, exempli gratiâ, triangulum eſt in rerum natura; Geometra in definitione cauſam ommittit, propterea quòd accidentia omnia à ſubſtantia, velut à cauſa pendent; ſi quis igitur, vt Geometra ab ipſa abſtrahit, ipſa neglecta demonſtrationem inſtituit. Φανερὸν ὅτι ὁ μὲν τίς ἔσται λόγος τοῦ τί σημαίνει τὸ ὄνομα, ἢ λόγος ἕτερος ὀνοματώδης, οἷον τί σημαίνει τί ἐστι ἡ Τρίγωνον, ὅπερ ἔχοντες τί ἐστι, ζητοῦμεν διατί ἐστι.

In Mathematicis demonſtrationibus plerunque medium eſt ſubiecti, aliquando affectionis definitio.

Manifeſtum quod quadam quidem erit oratio ipſius, quid ſignificat nomen, vel oratio alia nominalis, vt quid ſignificet quid eſt, quatenus triangulum, quod quidem habentes quid eſt, quærimus propter quid eſt. Definitio nominalis eſt igitur apud Geometram definientem, exempli gratia, triangulum; per eam ſiquidem quid nomen ſignificet intelligit; at cùm triangulum abſtractum à ſubſtantia conſideret, cauſam ob id, per quam illud ſit, ignorat, tantummodò quod ſit cognoſcens, quod intelligendum comparatiuè ad Phyſicum, cùm alioquin huiuſcemodi nominis explicatione iuxtà Geometricam contemplationem, cognoſcat; quamobrem intra cancellos abſtractionis propriæ inſtituta tractatione, definit illud, ita vt affectiones de eodem in poſterum demonſtrare queat; quod verò de ſubiecto, de affectione ſuo itidem modo intelligendum, quæque de triangulo enunciata fuerunt, alijs non diſſimiliter, quæ in his diſciplinis conſiderantur, accommodari poſſunt.

Mathematicæ definitiones nominales dicuntur.

Ariſtoteles 2. Poſt. tex. 44.

Ad præmiſſas quod attinet, demonſtrationis complexa principia, vt in cæteris, ſic & in his ad has diſciplinas attinentibus demonſtrationibus, eſſe debent veræ, primæ, & immediatæ, priores, notiores, & cauſæ concluſionis; de quibus conditionibus iam ſupra nonnulla diximus: hìc ſolùm quædam adijcienda videntur; nam aliquibus prætermiſſis, vtpotè iam ibi ſufficienter inſinuatis, aduertendum occurrit, quòd primæ, immediatæ, & per ſe notæ iure cenſentur; duplici tamen nomine vna videtur explicata conditio, quæ per illas voces; *primæ, immediatæ, & per ſe notæ,* exprimitur.

Quales eſſe debent demonſtrationis præmiſſæ.

Præmiſſarum conditiones.

Per ſe nota verò propoſitio, quatenus eâ nulla eſt prior, quæque medio, & cauſa caret eiuſdem generis, per quam demonſtretur; cauſa, inquam, caret eiuſdem generis. Harum propoſitionum vſurpatio quadruplex.

Ad per ſe notam propoſitionem pertinent eæ, quæ Dignitates dicuntur, quippè quæ dignæ ſunt, quibus credatur; ſic in Geometria ſe habet illa; Omne totum eſt maius ſua parte; ſi tamen aptetur continuæ quantitati: quòd ſi diſcretæ fuerit accommodata, locum obtinet in Arithmetica. Secundò ad idem genus immediatarum propoſitionum illæ ſpectant, in quibus definitio, aut prædicatum aliquod eſſentiale de re quapiam enunciatur; immediatæ ſiquidem hæ dicuntur, medium cùm deſit, prius prædicato eſſentiali, in eodem cauſæ genere, per quod propoſitio illa demonſtretur.

Primũ genus propoſitionum immediatarũ ſunt Dignitates.

Secundum genus propoſitionũ immediatarum.

 Tertiò

Tertiũ genus.

Tertiò ad idem genus pertinent illæ, in quibus cauſa primaria de ſubiecto, aut effectus proprio prædicatur; hæ enim immediatæ ſunt; cauſa enim, quæ eſt in ſuo genere principalis, non habet priorem vllam, per quam demonſtrari queat.

Quartum genus.

Quartò, & illę ſunt, in quibus effectus de ſuis cauſis proximis prædicatur; hæ ſiquidem immediatæ ſunt: cùm enim detur cauſa, cur paſſio inſit ſubiecto, eaque ſit immediata, non poterit alia dari cauſa, per quam eadem paſſio illi cauſæ conueniat; nihil obſtat tamen, quin idem effectus de cauſa remota per cauſam proximam demonſtretur. Cæteræ autem propoſitiones, de quibus ſuperiùs non nulla diximus, Poſitionis nomine intelliguntur.

Poſitiones quales.

Aduertendum eſt autem propoſitionem, in qua prima paſſio de ſubiecto prædicatur, eſſe immediatam, quatenus caret medio ex rei natura diſtincto; mediatam verò eſſe, quatenus oſtendi poteſt medio ratione diſtincto, alioquin potiſſima demonſtratio nulla foret.

Notãda quædam.

Et quidem confusè concipiendo ſubiectum, & paſſionem, haud per ſe notum eſt paſſionem ineſſe illi, ſed per ſe notum erit, ſi eſſentia, vel differentia ipſius expreſsè concipiatur; in quo quàm plurimi ſunt allucinati deteſtantes aliquas Mathematicas demonſtrationes, cùm in ijs non aduerterent medium ex rei natura diſtinctum.

Error quorundam deteſtãtium Mathematicas demõſtrationes.

Sed multò magis inuehuntur in illas, quòd aliquando demonſtrationes non ſint ex immediatis præmiſſis contextæ. Eos autem decepit ignoratio partitionis ipſius propoſitionis immediatæ: hæc enim in duplici diſcrimine eſt. Nam vna in ſe ipſa, medio carens, immediata dicitur, quæque immediata formaliter à Scholaſticis appellatur. Alia quæ habet quidem medium, quo demonſtretur, ſed in ipſa demonſtratione aſſumitur, quatenus iam demonſtrata per ſuperiores demonſtrationes ſubalternantes, vſque dum deueniatur ad principia formaliter indemonſtrabilia immediatè; & hæc virtualiter immediata dici conſueuit, nempe manifeſta virtute immediatarum. Neceſſarium eſt igitur omninò, vt demonſtratio aliquo ex his modis ex immediatis conſtet, quo pacto ſe habere innumeras Mathematicas demonſtrationes perſpicuum eſt. Debet autem demonſtratio aliquo ex his modis, ex immediatis conſtare, ſcilicet vel formaliter, vel virtualiter; quoniam demonſtrationis præmiſſæ euidentes eſſe debent, vel per ſe, vel per alias, quoad vſque ad per ſe euidentes deueniatur, nè detur proceſſus in infinitum; quæ adeò vera ſunt, vt locum quoque habeant in demonſtrationibus à poſteriori, in quibus videlicet præmiſſæ immediatæ eſſe debent, vel ſcilicet per ſe euidentes, vel per alias, quæ ſint tales; vt enim ſurſum abire non licet in infinitum per cauſas, nec etiam deorſum per effectus: quæ autem ineuidentes ſunt, euidentes fiunt per inductionem, ac ſenſum; docente Philoſopho tex. 26. Primi Poſteriorum.

Quo pacto demonſtratio debeat ex immediatis conſtare.

Præmiſſæ demonſtrationis euidentes eſſe debent, vel per ſe, vel per alias.

Ineuidentes euidentes fiũt inductione.

Debent igitur principia eſſe prima, nimirùm indemonſtrabilia; nàm ex primis, & indemonſtrabilibus ſcimus, alioquin non ſciet non habens ipſorũ demonſtrationẽ: ſcire namque, quorum datur demonſtratio, non per accidens eſt, demonſtrationem habere; ſi enim immediata non ſunt principia, mediam cauſam habebunt, proinde & alia principia, per quæ demonſtrari poſſint; non ſcientur igitur, niſi per illam cauſam demonſtrentur, cùm ſcire ſit rem per cauſam cognoſcere, atque adeò de re demonſtrabili demonſtrationem habere. At ſi forent demonſtranda principia per alia priora principia, de illis quoque quærendum, an immediata ſint, vel mediata; ſi primum, id eſt, quod intendimus; ſin autem, abeundum foret in infinitum. Indemonſtrabilia eſſe debent per aliud medium, veluti per cauſam, & in eodem genere; & quidem per cauſam, quia non obſtat per effectum demonſtrari; inſuper in eodem genere, cum nihil obſtet, quò minus cauſa vnius generis, per alterius generis cauſam oſtendatur; & tamen propoſitio illa dicatur prima, & immediata in proprio genere. Huiuſmodi porrò eſſe poſſunt propoſitiones tàm affirmatiuæ, quàm negatiuæ.

Principia qualiter dicantur prima.

Debent autem eſſe cauſæ, quoniam ex definitione ſcientiæ conſtat; tunc ſcimus aliquid, quando id per ſuam cauſam cognoſcimus; at per principia concluſionem ſcimus; ergo principia debent eſſe concluſionis cauſæ. Vbi illud aduertendum præmiſſas, ſiue principia complexa cauſas dici concluſionis, ratione medij contenti, quod eſt cauſa, cur paſſio ſubiecto inſit. Hic porrò eſt animaduertendum, quàm plurimos deceptos fuiſſe malè ſentientes de Mathematicis diſciplinis, veluti non comparatis per demonſtrationes ex præmiſſis deductas, in quibus inuoluta ſit cauſa; vnde paſſio habet, vt inſit ſubiecto. Eos autem

Quo pacto præmiſſæ cauſa dicantur concluſionis.

Quorundam error.

tem decepit ignoratio partitionis cauſæ; nam alia eſt in cognoſcendo tantùm, cùm ſit id, vnde aliquid cognoſcimus, etſi tamen hoc ab illo in eſſendo non pendeat; alia verò in eſſendo, vnde habet paſſio vt inſit ſubiecto, diciturque etiam in cognoſcendo, quatenus per ipſam ſubiecto paſſionem ineſſe cognoſcimus; quæ in duplici diſcrimine eſt, formalis, ſeu propria, quæ nimirum verè eſt cauſa, ſiue phyſica, ſiue metaphyſica; alia autem virtualis, quæ propriè cauſa non eſt, ſed in ordine ad aliud ſic ſe habet, vt ſi cauſari deberet, non niſi ab hoc, velut à cauſa, ſuum eſſe recognoſceret. Itaque tametſi in Mathematicis vti non liceat demonſtrationibus per phyſicam cauſam procedentibus; quod profectò haud exigit demonſtratio, in iis ſaltem demonſtrationes contexuntur per cauſam, aut metaphyſicam, aut virtualem; & huiuſmodi cauſę in principijs complexis inuoluuntur, in principijs inquam complexis, quibus demonſtrationes conſtant.

Duplex cauſa, alia in cognoſcẽdo tantùm, alia in eſſẽdo, & cognoſcẽdo ſimul.

Hinc autem præmiſſæ priores ſunt, vtpotè continentes cauſam, quæ prior eſt ordine, & naturà ipsà concluſione, cùm omnis cauſa ſit effectu prior; quamuis ex alio capite etiam priores dicantur, quatenus ſcilicet naturæ ordine concluſionem antecedunt, ſe tenentes ex parte cauſæ, concluſionis notitiam producentis, cuiuſmodi eſt intellectus.

Præmiſſæ quare priores concluſione.

Notiores porrò eſſe debent; concluſio ſiquidem ex vtraque dependet præmiſſa. Nequeũt eſſe minus notæ quàm ipſa concluſio; quicquid enim concluſio habet certitudinis, ac euidentiæ, ab ipſis præmiſſis mutuatur; & quoniam in iis continetur cauſa, cauſa autem notior effectu eſt naturà. Contingit enim bifariam, vnum prius, & notius altero dici, vel ſcilicet naturà, aut quoad nos; illud quidem principium, & cauſa eſt; hoc autem principiatum, & effectus. Notiora igitur principia ſunt concluſione, ne dum præcognita, cùm per ipſa concluſionem aſſequamur; propter quod autem vnumquodque tale, & illud eſt magis tale. Maior autem, & minor cognitio, bipartitò contingit, vel ſecundùm intenſionem graduum, vel ſecundùm eſſentialem perfectionem; nec certè primum neceſſariò requiritur; æquè enim intellectus, & concluſionem cognoſcet, ſequelam, & illationem ſimul inſpiciens, æquè, inquam, ac principia, è quibus concluſio deducta eſt: adhuc tamen eorum notitia perfectior dicenda perfectione eſſentiali; nam vel principia ipſa ſunt formaliter indemonſtrabilia, quorum cognitio intellectus dicitur, quemadmodum concluſionis notitia per diſcurſum comparata, ſcientia nuncupatur; vel ſunt virtualiter immediata.

Notiores.

Demonſtrationis autem principia, ſiue præmiſſæ, vt priores, ac notiores concluſione, dicuntur, ita certiores, & euidentiores; ſuntque neceſſaria principia, vt ſuperiùs explicuimus, ſimul plures neceſſitatis gradus afferentes; neceſſaria enim eſt concluſio, quamobrem & principia, è quibus illa deducitur ad ipſius demonſtrationis habita ratione finè.

Certiores, ac euidentiores.

Quod ſi principia fuerint per ſe & quatenus ipſum, non poſſunt non eſſe propria. Vbi hìc aduertendum demonſtrantem debere vti principijs proprijs rei demonſtratæ, quod in duobus conſiſtit. Primum, nè vtamur principijs alienis, vt, ſi ad aliquid in Geometria demonſtrandum, proprijs quidem ſcientiæ Naturalis, vel Arithmeticæ, &c. principijs, vteremur. Secundum, nè vtamùr principijs communibus, in quibus videlicet ſcientiæ plures conueniunt. Non propria verò principia ſunt, vel quia aliena ſunt, & extranea à ſcientia, in qua adhibentur, quorum vſus, tranſitus de genere in genus, dici conſueuit; vel quia communia ſunt, & ad ſcientiam illam ſpectant, ſed ſimul quoque ad alias.

Demonſtrãtiã per propria principia procedit.

Primum inde perſpicuum redditur, quoniam omnis demonſtratio, imò & ſcientia vniuerſa ſolum habet ſubiectum vnum, cuius principia conſiderat, paſſiones demonſtrat, eiuſque non tranſgreditur fines; quamobrem ſcientia nulla poterit ad ſubiectum, principia, vel paſſiones alterius ſcientiæ gradum facere; & quidem ſi ſcientia omnis debet procedere ex cauſis, propter quas ſubiectum ſuum, proprietateſque ſunt, vtique ipſa vti non poterit principijs, atque cauſis alienis. Hoc enim iacto fundamento, tanquam per ſe noto, quòd ſubiectum de ſcientia in ſcientiam transferri nequeat, neceſſariò conſequitur de ſcientia in ſcientiam, nec medium, nec quod de ſubiecto dicitur transferri poſſe; hæc enim ipſi ſubiecto inhærent, & quatenus ipſum, quamobrem ſi ſubiectum de ſcientia in ſcientiam transferri non poteſt, nec etiam hæc transferri poſſe neceſsè eſt: ſiue igitur ſpectemus ſubiectum alicuius particularis Geometricæ demonſtrationis, ſiue Vniuerſæ Geometriæ, in Arithmeticam transferri non poteſt; ita nec media, quibus Geometra vtitur, nec attributa, quæ de ſubiecto idem oſtendit, in Arithmeticam transferre licebit; nec contra; præſertim hoc eſt primariò de medio intelligendum, ſecundariò verò de attributo; cùm effe-

Supradictorũ probatio inſtituitur.

ctus, ſuam cauſam neceſſariò conſequatur. Rectè propterea Philoſophus duos translationis modos interdixit, neglecto tertio, qui neceſſariò conſequitur, nempè ſolius affectionis translatio; vnum ſolius medij ad demonſtrandam integram alterius ſcientiæ concluſionem, quo pacto non tota propoſitio maior, ſed medium tantummodo transfertur; alterum totius maioris, nimirum medij cum quæſito ſimul, ad oſtendendum de ſubiecto attributum. Prior traſlatio foret, ſi de triangulo demonſtraremus æqualitatem trium angulorum duobus rectis, per medium ſumptum ex Arithmetica; hinc enim in Geometriam medij tranſlatio fieret. Alter verò modus foret, ſi de triangulo demonſtraremus affectionem aliquam Arithmeticam, per medium Arithmeticum; tunc enim hinc ad Geometriam fieret translatio medij cum quæſito; præſertim autem improbat medij translationem, ob eam quam attulimus cauſam; ait verò non licere Arithmeticam demonſtrationem aptare ijs, quæ magnitudinibus accidunt; ſi namque propoſita fuerit integra Geometrica concluſio, quatenus magnitudo eſt Geometriæ ſubiectum habens accidentia ſibi conſentanea; ſi quid ex Arithmetica ſuppetit transferendum in Geometriam, medium erit, quod per demonſtrationem ſignificauit, cùm hæc à medio denominetur; vnde ait, non licere Arithmeticam demonſtrationem aptare ijs, quæ magnitudinibus accidunt.

Poſſet quiſpiam autem ſuſpicari, hæc haud eſſe veritati conſona; nam, vt cætera omittam, Propoſitiones ſecundi Libri Elementorum ad decimam vſque, ne dum, vt ibi Geometricè demonſtrantur, ſed etiam Arithmeticè; quæ igitur Geometra attributa de magnitudinibus, atque adeò de proprio ſubiecto, eadem Arithmeticus demonſtrat.

Sed hæc foret ſubiectum transferre, quo nihil abſurdius, cùm huic adeò ſit quælibet ſcientia addicta, vt nullum aliud admittat. Arithmeticus igitur non contemplatur magnitudines, niſi quatenus hæ numeri naturam induunt; vnde rectè Philoſophus dicebat, *niſi magnitudines numeri ſint*; linea ſiquidem, exempli gratia, cùm in partes concipitur diuiſa æquales, numeri rationem obtinet, & quælibet illarum partium vnitatis munere fungitur. Arithmeticus igitur, quæ attributa demonſtrat de illa multitudine partium, vt multitudo quædam eſt, non ſunt exiſtimanda demonſtrata de linea; non ſit igitur ſubiecti translatio de ſcientia in ſcientiam, nec propterea translatio medij, atque adeò neque attributi; hæc ſiquidem non propriè, ſed per ſimilitudinem cum ijs, quæ in Geometria, intelligenda ſunt.

Nullius ſcientia ſubiectum ad aliã ſcientiam tráſferri poteſt.

Eo autem iacto fundamento, quòd ſubiectum cuiuſcunque ſcientiæ ſit adeò proprium, vt ad aliam transferri minimè poſſit, quæ dicta ſunt neceſſariò conſequuntur; at de vna demonſtratione ad aliam poſſe medium transferri, teſtatur Philoſophus, ſi vtraque de eodem ſubiecto, ſiue ſimpliciter, ſiue modo aliquo ſit; nullus enim tunc ſit tranſitus de genere in genus, hoc eſt de ſubiecto in ſubiectum, cùm vtraque generis, hoc eſt ſubiecti, ſit eiuſdem. Non erit igitur vitioſum transferre medium ab vna ad aliam demonſtrationem Geometricam, vel ab vna ad aliam Geometriæ partem, quoniam eiuſdem ſunt generis, ſiue ſubiecti; vitioſum tamen à Geometria in Arithmeticam, & contrà. Tolerabile itidem, ſi non ſimpliciter, aliquo tamen ſaltem modo, generis fuerint eiuſdem, vt ex Arithmetica in Muſicam; illa ſiquidem numerum, hæc numerum itidem, ſed in ſonis, vel potius ſonum, quatenus affectiones habet à numeris cõtẽplatur. Ita quidem non licet ex Geometria transferre medium ad Diuinam Philoſophiam, ad probandum in ea contrariorum vnam eſſe ſcientiam; neque ex Geometria licet facere tranſitum in Arithmeticam translatione medij, ad oſtendendum, exempli gratia, mutuo ductu cuborum, fieri cubum, quoniam hæ duæ ſcientiæ vnius generis non ſunt. Nec licet quæſitum ſimul cum medio de ſcientia in ſcientiam transferre; vt ſi quid lineis non quatenus huiuſmodi, & quatenus ex proprijs principijs ineſt, an videlicet recta ſit linearum omnium pulcherrima, & an ſit contraria circulari, non licet in Geometriam transferre; hæc enim lineæ conueniunt, non ex proprijs principijs, ſed ratione generis ampliſſimi, atque ſupremi, Geometriæ limites tranſcendentis; ſi hæc enim competerent lineæ rectæ quatenus eſt linea, vel ſaltem quatenus eſt magnitudo, hic non diceretur tranſitus de genere in genus, quoniam accidentia Geometrica forent, ſed ei competunt quatenus rationem entis participant; pulcritudo ſiquidem, & contrarietas accidentia ſunt entis, quatenus huiuſmodi, quamobrem id ad primum attinet Philoſophum. Liceret autem Geometræ ad eum modum transferre medium, vna cum quæſito, dummodo in demonſtrando propoſitiones efficeret de omni, per ſe, & ſecundum

quod

quod ipſum, quod in omni deſideratur demonſtratione.

Sed vt abſtinendum demonſtranti à principijs extraneis, ita etiam à communibus; non enim ſat eſt ex vniuſcuiuſque principijs, etiamſi veris, indemonſtrabilibus, & immediatis, demonſtrationes contexere, ſed propria oportet eſſe principia, quoniam id quod demonſtratur ineſt quatenus ipſum: vnde Philoſophus reprehendit Bryſonem in Tetragoniſmi demonſtratione, principijs communibus vtentem; nam ſi affectio demonſtretur de ſubiecto, cui ineſt, quatenus ipſum, hoc eſt ſi concluſio eſt quatenus ipſum, quemadmodum eſſe debet, neceſſariò conſequitur vnumquodque demonſtrandum eſſe ex principijs proprijs, hoc eſt ex cauſa proxima eius, quod demonſtratur; non itaque ſufficit, vt principia vera ſint, & immediata; niſi enim propria extiterint, ſcientia quidem nulla comparatur. Reprehendit porrò Bryſonis demonſtrationem veluti procedentem ex principijs communibus. Erat autem huiuſmodi: ad exhibendum quadratum æquale circulo, ſic Bryſo præcipiebat. Inſcribatur quadratum circulo propoſito, ac aliud eidem circumſcribatur, inter quæ medium reperiatur; hoc enim circulo æquale eſſe contendebat, ſic ratiocinando. Illa, quæ ſunt eiuſdem maiora, & eiuſdem minora, inter ſe ſunt æqualia; at circulus, & quadratum medium ſunt ſimul maiora quadrato inſcripto, ſimulque minora quadrato circumſcripto; ergo circulus, & quadratum medium inter ſe ſunt æqualia; exhibitum eſt igitur quadratum æquale circulo. Peccat autem Bryſo, quoniam propoſitionem maiorem aſſumit falſam, ſi vniuerſaliter fuerit intellecta, nempè illa, quæ reſpectu aliquorum ſunt ſimul maiora, & reſpectu aliquorum ſunt ſimul minora inter ſe ſunt æqualia; ſi namque ſumpſerimus duas quantitates, puta 4, & 6, eaſque contulerimus cum 8, & 3, vtique 4, & 6 comperiemus ſimul maiores, quàm 3; & minores, quàm 8; non propterea tamen 4, & 6, ſunt inter ſe æquales. At ſi propoſitio illa intelligatur, facta comparatione cum quibuslibet, hoc ſenſu; ea quæ ſic ſe habent, vt vnum ſi fuerit maius aliquo, etiam & aliud debeat eſſe maius illo, ſemper in infinitum procedendo; & ſi vnum fuerit minus aliquo, etiam & aliud debeat eſſe minus illo, ſemper itidem in infinitum procedendo, erunt inter ſe æqualia; Vera eſt propoſitio. At minor illa propoſitio, quod circulus, & quadratum medium ſic ſe habeant in ordine ad quamcunque quantitatem, non conſtat; ac propterea Bryſonis argumentatio pſeudo-demonſtratio eſt, quippe quæ non procedit ex proprijs principijs, ſed vel ex vtroque communi, vel ex vno ſaltem.

Primo Poſt. part. 66.

Bryſonis demonſtratio peccabat ob communia principia.

Quomodo ſe haberet Bryſonis demonſtratio.

Debere autem huiuſmodi eſſe demonſtrationem, nempè procedentem ex proprijs, ea eſt potiſſima ratio, quoniam demonſtrationis concluſio eſt de omni, per ſe, & de prædicato ſecundùm quod ipſum; debet autem eſſe huiuſmodi, quia nequit oſtendi paſſio per propriam cauſam, niſi ad eum modum concluſio ſe habeat, ergo neceſsè eſt eam demonſtrari ex ſuis proprijs principijs. Si enim in concluſione, in qua prædicetur paſſio de ſubiecto, fiat enunciatio de prædicato ſecundùm quod ipſum, atque affectio prædicetur de ſubiecto primo, etiam medium, per quod demonſtratio procedit, ſit eiuſdem generis, eiuſdemque naturæ neceſsè eſt, hoc eſt quòd inſit quatenus ipſum, & ei non diſſimiliter attributum, ac propterea ſit proprium; & quidem ad ſcientiam comparandam, oportet cauſam proximam adipiſci, ac proinde medium proprium, quod eſt cauſa; id autem non conſequimur, niſi factis propoſitionibus de prædicato ſecundùm quod ipſum, tàm de præmiſſis, quàm de concluſione loquendo.

Cæterum communia principia in ſcientijs adhibentur; non tamen vt communia, ſed vt propria ſunt facta per contractionem, & quidem ad materiam vniuerſam illius diſciplinæ; vel ad materiam ſingularum concluſionum; ſed hoc etiam ſuperiùs explicuimus, aduertentes à nemine hac in re Philoſophi conſilium perceptum fuiſſe.

Patet autem ex hactenus dictis, quo nam pacto circa principia poſſit quiſpiam peccare; nunc pauca circa concluſionem ſubijciam.

Primò, quando detur vnicum indiuiduum in aliqua ſpecie, & de ipſo paſſionem oſtendamus; contingit autem error ſi exiſtimemus demonſtrationem vniuerſalem non eſſe. Errandi cauſa foret, quoniam de vnico indiuiduo noſtram demonſtrationem videmus extructam, cùm tamen re vera non de ipſo indiuiduo, quatenus huiuſmodi, ſed de natura in eo adinuenta demonſtratio procedat.

Circa concluſionem errores qui nam contingant.

Primus error.

Secundò, error quoque contingit, ſi propriam affectionem generis de ſpeciebus demonſtrare velimus, arbitrantes vniuerſalem eſſe demonſtrationem, cùm re verà tamen non

Secundus error.

non ſit. Errandi autem cauſa ea eſt, quoniam genus, inquo ſpecies illæ conueniunt, nomine caret; tunc enim credere poſſumus, quod eius loco ſumere liceat ſpecies omnes collectiuè, quaſi generi æquipollentes, ac de illis omnibus affectionem generis propriam demonſtrare, eſſeque demonſtrationem vniuerſalem. At deciperemur, quoniam, etſi ſpecies omnes generi æquipolleant ratione ambitus, non tamen ratione naturæ: vnde fit vt accidens à generis natura dimanans, nullum habeat neceſſarium nexum cum eius ſpeciebus, ſiue ſigillatim, ſiue collectim acceptis.

Tertius error. Tertiò contingit error, quando de ſpecie generis affectionem oſtendimus. At errandi anſam præbet huius vocis *vniuerſale* quidem ambiguitas; Prædicatio ſiquidem vniuerſalis idem ſignificare poteſt, quod prædicatio de omni, quoniam illa dictio *omnis* reddit vniuerſale ſubiectum, ob id propoſitionem vniuerſalem facit, quatenus de omni eſt. Alio autem modo, vt hìc accipitur, illud eſt, quod de omni, per ſe, & quatenus ipſum eſt. Error igitur hìc in ipſa concluſione accidit, quoniam affectio, quæ de toto ſubiecto ſuo demonſtranda foret, non de toto, ſed de eius parte, hoc eſt de ſpecie, demonſtrat.

Primo Poſt. 40. & ſeq. *Errorum exẽpla ex Ariſtotele.* Hæc porrò legimus apud Philoſophum, exemplis etiam illuſtrata. Et ad primum errorem quod attinet, ſi ſtatuamus trianguli ſpeciem, puta æquicrure, non tanquam ſpeciem, ſed tanquam indiuiduum, quod in ſpecie trianguli vnicum ſit, nec dari triangulum aliud, ac de eo propriam aliquam affectionem oſtendamus, vt æqualitatem trium angulorum duobus rectis; aliquis forte ſuſpicabitur demonſtrationem particularem eſſe; quoniam proprietas illa non competat niſi huic ſingulari, quod vnicum dari decernitur; videbitur ſiquidem æquicruri, quatenus huiuſmodi competere, quod à veritate prorſus alienum eſt; quamuis enim de ſolo æquicrure demonſtretur, quoniam aliud triangulum non datur; tamen de eo non demonſtratur quatenus eſt æquicrure, hoc eſt quatenus ſingulare eſt, ſed de natura communi, quæ in eo eſt, nimirum de ipſo quatenus triangulum eſt.

Secundi erroris exemplũ. At ſecundi erroris exemplum affert Philoſophus de proportione commutata; eſt autem commutata ratio ſumptio antecedentis ad antecedentem, & conſequentis ad conſequentem; quæ quidem affectio quatuor ſubiectis conuenit, numeris, lineis, temporibus, ac ſolidis; quamobrem neceſſe eſt, vt nulli iſtorum tanquam primo ſubiecto inſit, ſed alicui communi, veluti generi hæc omnia complectenti; itaque hæc affectio, cùm demonſtratur de ſingulis his quatuor ſubiectis ſeorſum per plures demonſtrationes, poſſet quidem vnica demonſtratione de communi illorum genere demonſtrari, ſi tamen id nominatum foret, & ea eſſet demonſtratio vniuerſalis; quoniam tamen id nomine caret, quod velut commune genus ſe habet, cùm plures de ijs ſingulis demonſtrationes fiunt, ſuſpicari quiſpiam poſſet, eas vniuerſales eſſe, cùm tamen non ita fiet, quoniam nec de ſingulis, nec de omnibus coniunctim vniuerſalis fit demonſtratio, ſed de communi illo genere, cuius nomen ignoratur. Nec ita demonſtrantes dici poſſunt vniuerſaliter de ſpeciebus demonſtrare, quoniam ex naturis ipſarum ſpecierum ea non pendet affectio, ſed à natura generis, cui conuenit quatenus ipſum.

Exemplum alterũ, quãdo genus nomen habet &c. Hoc idem illuſtrat exemplo, in quo genus nomen habet. Sumatur igitur triangulum; inquit, cuius tres ſunt ſpecies, æquilaterum, æquicrure, & ſcalenum; & ait, ſi de omnibus his ſpeciebus, nulla earum prætermiſſa trium angulorum æqualitatem duobus rectis demonſtremus, non ob id vniuerſaliter demonſtramus, neque ſcientiam habemus, ſiue id vnicâ demonſtratione, ſiue pluribus à nobis fiat; nam de omnibus illis demonſtratio bifariam inſtitui poteſt; aut enim de omnibus ſimul ſumptis, ac ob id vnica demonſtratione, aut de ſingulis ſeparatim, atque adeò demonſtrationibus pluribus; neutro tamen modo vniuerſalis demonſtratio contingit, quæ veram ipſius affectionis ſcientiam pariat. Duo enim ſunt, quæ hìc occurrunt: primum, quod ſi quis ita demonſtret, non ſcit triangulum habere tres angulos æquales duobus rectis, niſi modo ſophiſtico: ſecundum, quod id vniuerſaliter non ſcitur de triangulo, quamuis nullum ommittatur triangulum, de quo non ſciatur. Reddit autem rationem, cur non ſciatur triangulum, niſi ſophiſticè tres habere angulos æquales duobus rectis, cùm ad eum modum contexitur demonſtratio; Sophiſta namque dicitur ille, qui rerum ſcientiam venatur, non ex rei natura, & ex eſſentialibus, ſed ex accidentibus, & extraneis; hoc autem accidit quando prædicatio non eſt ſecundùm quod ipſum, vt cùm affectionem ſcimus, non de ſubiecto eius primo, ſed de ſpecie, cui non ineſt quatenùs ipſum; tunc enim accidentalem, & ſophiſticam ſcientiam comparamus,

Sophiſta qui dicatur.

ntiis; vbi namque prædicatio non eſt quatenus ipſum, ibi quidem aliquid accidentarium ineſſe, Logici docuerunt. Erat autem dictum alterum, quod vniuerſaliter de triangulo id non ſcimus, eam ob cauſam videlicet, quoniam de omni triangulo ſcimus ſecundùm numerum, non tamen de omni triangulo ſecundùm formam. Vbi hìc aduertendum, omne triangulum intelligi poſſe bifariam, videlicet & ſecundùm numerum, & ſecundùm formam; numerantes igitur ſpecies ipſius trianguli, nouimus omne triangulum ſecundùm numerum, at ſecundùm formam non ita, niſi quoad cognouerimus genericam naturam: itaque demonſtrando affectionem trianguli, quod eſt genus, demonſtrando, inquam, de ſpeciebus eius omnibus, nouimus quidem de omni triangulo ſecundùm ſpecierum numerum, atque adeò ſecundùm materiam, cuiuſmodi ſunt ſpecies apud Logicos reſpectu generis, non tamen de omni ſecundùm formalem vnitatem genericæ naturæ, quam affectio illa conſequitur; quare tunc dici non poſſumus vniuerſaliter ſcire.

Cognitio trianguli, vel ſecundum numerum, vel ſecundùm formam.

Tertij autem erroris exemplum deſumitur ex vigeſima octaua Primi Elementorum, nam dum dicitur.

Si in duas rectas lineas recta incidens externum angulum interno, & oppoſito ad eaſdem partes, æqualem fecerit, aut internos ad eaſdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt illæ rectæ lineæ. Vbi duæ rectæ lineæ ab alia recta linea inciſæ ſic, vt fiant duo interni ad eaſdem partes anguli duobus rectis æquales, ſe habent tanquam ſubiectum primum, de quo demonſtratur æquidiſtantia. Ait igitur Philoſophus bifariam contingere, quòd illi duo anguli interni ſint æquales duobus rectis, vel quatenus vterque rectus eſt, vel quoniam vno exiſtente acuto, alter obtuſus ſit; vterque tamen ſimul duobus rectis æquipolleat. Priori modo internis angulis acceptis, affectio illa, ſcilicet æquidiſtantia linearum, demonſtraretur, veluti de ſubiecto non primo; non enim illa æquidiſtantia conuenit illis lineis, vt habentibus angulos internos duos, quorum vterque ſit rectus, ſed vt habentibus angulos internos æquales duobus rectis; ſiue id eueniat, quoniam vterque ſit rectus, ſiue quoniam vnus ſit minor, alter autem maior recto; ita tamen vt vterque ſimul duobus rectis æquipolleat.

Modus autem vitandi huiuſmodi errores traditus eſt à Philoſopho duobus præceptis, quorum primum eſt illud. Quando ſuperioris, & inferioris eadem eſt eſſentia, tunc ſi affectio demonſtratur de vno vniuerſaliter, tunc de altero demonſtrabitur: quod contingit, quando inferius conſideratur non ſecundùm propriam naturam, ideſt quatenus eſt tale inferius, ſed ſecundùm naturam ſuperioris, hoc eſt quatenus eſt illud ſuperius; vt ſi triangulum æquilaterum, non quatenus huiuſmodi, ſed pro vt triangulum ſpectetur, tunc erit eadem eſſentia triangulo, & æquilatero; atque adeò affectio, quæ de vno, veluti de ſubiecto primo oſtenditur, de alio quoque demonſtratur: ſecùs de triangulo ſecundùm propriam naturam ſpectato. Secundum præceptum in eo conſiſtit, vt inde ſcire liceat, cui è pluribus affectio conueniat, veluti ſubiecto primo, ad quod videndum, quo plurium illorum poſito, ponatur affectio, & quo ablato, hæc eadem auferatur; illud ſiquidem erit ſubiectum primum.

Primo Poſt. tex. 42.

Cæterùm demonſtratio non vna eſt; nam alia quidem vniuerſalis, alia verò particularis; rurſus affirmatiua vna, negatiua altera; præterea vna oſtenſiua, alia ducens ad impoſſibile.

Multiplex demonſtratio, eiuſque ſpecies aſſignantur.

Vniuerſalem demonſtrationem prætulit Ariſtoteles particulari, quo nomine hìc indiuiduum non intelligit; nec vniuerſalis appellatione, quod eſt commune pluribus, illud eſt, de quo loquitur ibi, ſed eo ſenſu illud vſurpat, quo eodem libro ſuperiùs accipiendum voluit, ita nimirum, vt vniuerſalis demonſtratio dicatur, quæ affectionem, vel attributum vniuerſale de re quapiam oſtendit. Vniuerſale autem intelligo, quod dicitur de omni, per ſe, & ſecundùm quod ipſum; ita fit vt ſpecies hoc in loco nomine particularis intelligi poſſit, quando ſcilicet affectio, quæ demonſtratur toti generi conuenit; & hac etiam ratione poteſt indiuiduum intelligi comparatione ſpeciei; quamobrem quotieſcunque generis attributum de ſpecie demonſtramus, vt habere tres angulos æquales duobus rectis de triangulo Iſoſcele, demonſtrationem ſingularem conficimus; quoniam non oſtendimus per illam attributum de ſubiecto, cui conueniat ſecundùm quod ipſum, & cum quo reciprocetur. Nec diſſimiliter cùm attributum ſpeciei, de indiuiduo demonſtramus, vt habere angulos, qui ſunt ad baſim inter ſe æquales, de hoc Iſoſcele.

Demonſtratio vniuerſalis præfertur particulari. *Primo Poſt. Textu 36.* *Vniuerſale quid.* *Demonſtratio ſingularis quando conficiatur.*

In hoc

Mathematicorum, tum Veterum, tum Recentiorum error.

In hoc autem, tum Veteres, tum Recentiores Mathematici peccarunt, minus accuratè perpendentes demonſtrationis naturam. Attributum enim, ſiue ſymptoma illud appelles, huiuſmodi eſſe debet, vt dixi, ita vt æquè latè pateat ac ſubiectum, de quo demonſtrandum ſuſcipitur; quamobrem peccatum foret in Arte, vel ſaltem minus benè præceptis eius accomodatum, de triangulo æquilatero, vel iſoſcele &c. tres angulos habere æquales duobus rectis, oſtendere; ſiquidem hoc vniuerſam trianguli naturam conſequitur, cumeâque reciprocatur, quod ad attributum de re aliqua demonſtrandum requiritur. His porrò neglectis, minus accuratè plerique Theoremata condiderunt, ad generalem illam rationem, vti decebat, redigere ommittentes.

Redarguitur Auctor Prop. 47. primi Euclides.

Quapropter Propoſitio 47. primi libri Elementorum haud benè concepta fuit; ne dum enim quadratorum, quorum vnum ſupra latus ſubtendens angulum rectum trianguli orthogonij, alia ſuper latera eundem angulum ambientia affectio, eſt æqualitatis ratio, videlicet inter quadratum lateris angulum rectum ſubtendentis, & ea, quæ à lateribus rectum angulum continentibus, deſcribuntur quadrata; nam id non minus etiam figuris alijs ſimilibus, ſimiliterque poſitis eſt accommodatum; vt Propoſitio 31. Libri ſexti, nos admonet; vbi quadrageſimam ſeptimam ad generaliorem formam intueri licet redactam; non dum tamen ea omnibus eſt abſoluta numeris, cùm hucuſque non dum fuerit animaduerſum, ſymptoma illud conuenire, non tantum planis ſuperficiebus, ſed etiam alijs à planis; Nam ſi, exempli gratiâ, latus angulum rectum ſubtendens, intelligeretur ſphæræ diameter, vt & latera rectum angulum ambientia; illius ſphæræ ſuperficies æqualis eſt ſuperficiebus aliarum duarum ſphærarum, quod operoſum non eſt oſtendere.

Redargutionis ratio.

Quoniam vt quadratum lateris ſubtendentis angulum rectum æquale eſt quadratis laterum eundem ambientium, ita circulus, cuius diameter eſt illud latus, æqualis eſt circulis, quorum diametri ſunt reliqua latera; vt autem ſimplum ad ſimplum, ſic multiplex ad æquè multiplex; atque adeò quadruplum ad quadruplum; ergo quadruplum circuli, cuius diameter eſt latus angulum rectum ſubtendens, æquabitur quadruplo circulorum, quorum diametri ſunt latera circa rectum; ſed quadruplum circuli, cuius diameter eſt latus ſubtendens angulum rectum, eſt ſphærica ſuperficies illius ſphæræ, cuius diameter eſt idem latus; & quadruplum circulorum, quorum diametri ſunt eadem latera angulum rectum ambientia eſt aggregatum ſuperficiem ſphæricarum, &c; ergo ſphærica ſuperficies illius ſphæræ, cuius diameter eſt latus angulum rectum ſubtendens, æqualis erit ſuperficiebus duarum ſphærarum, quarum diametri circumſtant angulum rectum.

Omnis igitur ratio, quæ eſt inter quadratum lateris angulum rectum ſubtendentis, & ea, quæ à duobus alijs lateribus deſcribuntur, eſt ratio quidem æqualitatis; non tamen omnis æqualitatis ratio inter figuras deſcriptas ſuper prædicta latera, modo iam explicato, eſt ratio æqualitatis inter quadrata; perinde enim eſt ac demonſtrare de triangulo æquilatero, vel iſoſcele, habere tres angulos æquales duobus rectis.

Prima Elementa tractātibus in hoc aliquid condonandum.

Condonandum eſt tamen aliquid ſuſcipientibus vniuerſæ diſciplinæ prima Elementa tractanda, ac in eadem incumbentibus; at non generoſa quadam aggreſſione meditantibus, quæ ad locum pertinent reſolutum. Illud autem porrò concinnatum à nobis Elementare non eſt. Quamobrem non foret excuſatione dignus, qui de circulo ſymptoma demonſtraret, quod ne dum illi, ſed etiam cuilibet conicæ ſectioni conuenit; tunc enim iure ſibi arrogabit, ſolertis artificis ſe expleuiſſe partes, & eruditionem in Arte præcipuam oſtentaſſe, cùm animaduerterit, idem de ſectionibus conicis oſtendi poſſe. Vt ſi quiſpiam oſtenderet de circulo.

Exemplum.

Si à circuli extremo diametri recta ducatur, ordinatim ad diametrum applicatis æquidiſtans, ipſa circulum in eodem diametri extremo continget. Id enim nedum circulo, ſed cuilibet conicæ ſectioni conuenire, perſpicuum eſt, per extremum diametri ſectionis, verticem intelligendo. Ita etiam, ſi quis de circulo oſtenderet.

Exemplum.

Si circuli circumferentiam recta contingat linea, cum diametro producta conueniens, & à tactu ad diametrum, recta ordinatim ſit applicata, erit quadrato dimidiæ diametri æquale rectangulum ſub interceptis, ordinatim ducta, & contingente diametri portionibus à centro ſumptis.

Id enim non eſt proprium circuli, ſed conuenit quoque hyperbolæ, & ellipſi; & quod recta contingat linea cum diametro, vbi opus fuerit, protracta, conueniens, intelligendo

per

per dimidiam diametrum, dimidiam tranſuerſam diametrum. Ita pariter ſi quiſpiam de Cylindro illud oſtenderet.

Superficies æqualium Cylindrorum, detractis baſibus, ſunt inter ſe in ſubduplicata ratione ſuarum longitudinum. Hoc nedum conuenit ſuperficiebus Cylindrorum æqualium, ſed etiam ſuperficiebus æqualium parallelepipedorum, æqualium priſmatum, quorum baſes ſint ſimiles. Vt ſi, exempli gratia, ſit rectangulum conſtans lateribus 4, & 6; ſitque baſis alicuius parallelepipedi, cuius altitudo 5, huius ſoliditas erit 120; at verò ſuperficies, detractis baſibus, erit 100. Sit aliud rectangulum conſtans lateribus 2, & 3, hoc enim erit ſimile illi, quod conſtat lateribus 4, & 6: ſitque baſis alterius parallelepipedi, cuius altitudo 20; manifeſtum eſt huius ſoliditatem eſſe 120, ſuperficies autem, detractis baſibus, erit 200. At verò 200, ad 100, ſubduplicatam habet rationem eius, quam habet altitudo 20, ad altitudinem 5. Itaque Theorema illud, ad generaliorem formam redigere oportet, vt dictum eſt. *Exemplum.*

Sic etiam illud. *Cylindri recti, quorum ſuperficies, detractis baſibus, ſunt æquales, ſunt inter ſe in ratione altitudinum contrariè ſumptarum*. Hoc non ſolum conuenit Cylindris, ſed etiam parallelepipedis priſmatibus, dummodo baſes fuerint ſimiles. Nam ſi fuerit, exempli gratia, rectangulum conſtans lateribus 4, & 6, fueritque baſis parallelepipedi, cuius altitudo 5, huius ſoliditas eſt 120, ſuperficies autem 100; fuerit autem aliud parallelepipedum, cuius baſis ſit rectangulum conſtans lateribus 2, & 3, altitudo verò 10; manifeſtum eſt, eius ſuperficiem, detractis baſibus eſſe 100, ſoliditatem autem eſſe 60; ſoliditas verò alterius erat 120. Sed vt 120, ad 60, ſoliditas, ad ſoliditatem, ita eſt altitudo 10, ad altitudinem 5. Ad generaliorem igitur formam, Theorema illud reuocandum foret, nè perperam illud à nobis conceptum fuiſſe videretur, vt de alijs quoque ſupra diximus, alijſque ferè innumeris, quæ ſparſim apud auctores, non ſine dedecore Artis, licet adinuenire. *Exemplum.*

In hoc igitur inſudet Analyſta quantum fieri poteſt, vt eâ, quæ decet, generali ratione, Theorema concipiat, ac propterea vniuerſalem demonſtrationem adhibeat, nec immeritò, cùm hæc ſit longè præſtantior, vtpotè magis per cauſam, quàm particularis; attributum ſiquidem primò, ac per ſe vniuerſali ineſt, de quo ipſa eſt vniuerſalis demonſtratio, at in eo eſt attributi cauſa, propterea, magis hæc per cauſam dici debet, ac ob id longè præſtantior. Hæc etiam ſcientiam magis parit, vtpotè primam exhibens cauſam, qua non prior altera: vnde eius dignitas. Eſt itidem de vniuerſalibus, ac propterea magis demonſtrabilibus, quorum melior eſt demonſtratio, quamobrem & ſublimior. Per hanc plura cognoſcimus, ſiquidem vniuerſalia, & particularia attingimus, vnde melior. Potiſſima quidem ea eſt, quæ per prima principia conficitur; ad hanc autem maximè vniuerſalis accedit; ergo præſtantior. Ea cognitio, quæ alterius rei notitiam poteſtate continet, præſtantior eſt illà, quæ ſecus ſe habet. Per demonſtrationem autem vniuerſalem, ne dum conclusionem vniuerſalem attingimus, ſed poteſtate quoque demonſtrationis particularis concluſionem; ſiquidem demonſtrationis vniuerſalis concluſio, veluti maior propoſitio demonſtrationis particularis aſſumitur, in qua actu cognita, poteſtate, virtuteque concluſionis notitia continetur; propterea nobilior eſt vniuerſalis demonſtratio. Tandem vniuerſalis intellectu comprehenditur, particularis ad ſenſum deſinit, illa videlicet circa remotiora à ſenſibus, hæc circa propinquiora eſt occupata: proptereaque longè præſtantior. Itaque cum Ariſtotele locis ſupracitatis, partim analyticè, partim verò dialecticè diſputantes, vniuerſalem demonſtrationem, ipſi particulari præferendam oſtendimus. *In quo debeat Analyſta inſudare plurimamque curã adhibere.* *Probationes quibus oſtenditur demonſtratio præſtãtior illa, quæ vniuerſalis dicitur.*

Quòd ſi ad vniuerſalem demonſtrationem animum appulerit, affirmatiuam, velut idoneam magis ad ſcientiam conſequendam, negatiuæ præferat, hæc ſiquidem illâ præſtantior; quæ enim per pauciora eſt, alijs, iiſdem exiſtentibus, ſeu cæteris paribus, potior eſt; huiuſmodi porrò rectè dixeris affirmatiuam, negatiuæ comparatione, cùm illa aliquid eſſe accipiat, hæc autem & eſſe, & non eſſe; ergo paucioribus indiget; at quod paucioribus eget, maioris perfectionis eſſe particeps, facilè tibi ſuadebis; per illam enim, quæ paucioribus eget, celeriùs, & clariùs ſcimus, ſiquidem citiùs per pauca, quàm per multa diſcurrimus; paucioribus igitur indiget, vt ad prima principia reducatur, atquæ etiam præmiſſæ ſecundæ demonſtrationis in ordine reſolutiuo, certiores erunt principij primæ. Et quod non eget alijs, ſed alia indigent illo, nobilius eſt, affirmatiua autem negatiuâ non eget, ſed *Demonſtratio affirmatiua præferẽda negatiuæ.*

contrà potius negatiua indiget affirmatiuâ, ſiquidem illa conſtat ex ſolis propoſitionibus affirmatiuis, atque adeo negatione non indiget, hæc autem cùm nequeat conſtare tantùm negatiuis, ſed affirmatiuâ vnâ, negatiuâ alterâ; nobilior igitur affirmatiua erit quàm negatiua. Demonſtratione affirmatiuâ, negatiua demonſtratur, nempè hæc ab illa pendet, & vim, ac efficaciam inde deſumit; affirmatiua igitur præſtantior. Affirmatiua potiora principia habet, quàm negatiua, nam affirmatiuæ principium eſt immediata affirmatiua, & negatiuæ immediata negatiua, & illa præſtantior eſt iſtâ, tum quia prior eſt, ac notior, ſiquidem negatio per affirmationem cognoſcitur, non contra, tùm quia affirmatio ſignificat eſſe, negatio autem non eſſe: prius eſt enim eſſe quàm non eſſe; ergo affirmatio prior eſt negatione, quod ſi præſtantius eſt demonſtrationis affirmatiuæ principium, huiuſmodi quoque erit & demonſtratio. Tandem affirmatiua independens eſt, ſecus negatiua; non enim hæc ſine illa, vt contra illa ſine hac; ergo principalior eſt affirmatiua quàm negatiua; ergo præſtantior.

Demonſtratio duplex oſtenſiua, & ducẽs ad inconueniẽs.

Oſtẽſiua præfertur.

Demonſtratio autem oſtenſiua, ſiue affirmatiua ſit, ſiue negatiua longè differt ab ea, quæ ducit ad impoſſibile, Per oſtenſiuam ſcilicet colligitur concluſio manifeſtè vera, ac neceſſaria; at per ducentem ad impoſſibile colligitur concluſio manifeſtè falſa, ac impoſſibilis. In oſtenſiua principia ſunt notiora quoad veritatem ipſâ concluſione, propterea quòd concluſionis cognitio quicquid habet certitudinis, ac euidentiæ, à præmiſſarum cognitione mutuatur; quamobrem harum notitiam certiorem, ac euidentiorem eſſe neceſſe eſt, cùm propter quod vnumquodque tale, & illud ſit magis; at in ducente ad impoſſibile concluſionis falſitas magis debet eſſe perſpecta, quàm alicuius ex præmiſſis. Oſtenſiua progreditur naturæ ordine, à prioribus, notioribuſque, at ad impoſſibile ducens ſit progreſſu contra naturæ ordinem, cùm non à notioribus veris, ſed falſis, procedat. Oſtenſiua vnicâ argumentatione, at ad impoſſibile ducens non niſi multiplici, nempè quadruplici, continetur.

Oſtenſiua, quamuis negatiua, præferenda.

Præſtantior autem oſtenſiua eſt, quamuis negatiua, eâ, quæ ducit ad incommodum; quoniam illa procedit ex principijs veris notioribus, certioribus, ac euidentioribus ipsâ concluſione; at quæ ad incommodum ducit, ex concluſionis falſitate notiori, quàm ſit falſitas alicuius ex præmiſſis.

Perſpicuum tamen eſt inde plus dignitatis oſtenſiuam ſibi adſciſcere, etſi negatiuam, quàm quæ ad impoſſibile ducit. Quòd ſi res ita ſe habet, multò dignior erit adhuc oſtenſiua affirmatiua, quæ dignitate ipſi negatiuæ antecellit.

Reprehẽduntur ij, qui paſſim demõſtrationes auctas ad incommodum vtuntur.

Perperàm igitur, ac inconſideratè admodum nonnulli plus nimio ſe adigunt huic generi demonſtrandi, ſi aliquâ adhibitâ diligentiâ, loco ipſius eâ, quæ oſtenſiua eſt, vti poſſunt. Hæc enim ratiocinatio, non ſimpliciter, ſed vt aiunt, ſecundùm quid, demonſtratio dicitur.

Demonſtratio quomodo procedat per deductionem ad impoſſibile.

Quoniam verò de reſolutione agimus, paucis perſtringemus, quæ faciunt ad inſtitutum. Iam ſuperiùs initio fuit à nobis animaduerſum, deductionem ad impoſſibile, eſſe quidem aſſumptionem eius, quod quæſito contradicit, tanquam conceſſi per conſequentia ad id, quod vero quidem conceſſo opponitur; in hac enim argumentatione ſumimus id, quod quæſito contradicit, illudque ſupponentes tanquam verum, progredimur, donec in aliquod incidamus abſurdum, per quod ſuppoſitione deſtructâ, denique confirmetur id, quod à principio quærebatur.

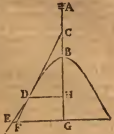
Quid cõmune ſit vtrique modo.

Illud autem commune eſt reſolutioni, & deductioni ad impoſſibile, quod vtraque ab incognito ad cognitum eodem progreſſionis ordine procedit, vtraque ordine conſecutionum plurium conſtat, quarum vna conſequitur alteram; in eo tamen diſcriminantur, quod illa deſinit in verum, ſiquidem eius argumentatio poſtrema oſtenſiua eſt, veritatem concludens: vnde verum fuiſſe ſuppoſitum aſtruimus; quoniam tametſi ratione formæ ipſius diſcurſus, verum ex falſo ſequatur, tamen in bona materia, & forma, non niſi ex verò ortum ducere poteſt; hinc regrediendo ſyntheticè, propoſitum ipſum concludit. At verò, quæ ad impoſſibile ducit deſinit in falſum, & inde quod principio ſupponebatur, falſum eſſe conuincit, cùm falſum non ex vero, ſed ex falſo tantummodo deduci poſſit, ac propterea contrarium, vel contradictorium illius verum eſſe decernit, cùm è duobus contrariè, vel contradictoriè oppoſitis, ſi vnum eſt falſum, alterum eſſe verum, neceſſe ſit.

Eſto

Eſto in exemplum demonſtratio Apollonij Propoſitione trigeſima prima primi Libri, in qua oſtenditur.

Si in tranſuerſo figuræ latere hyperboles ſumatur aliquod punctum non minorem abſcindens ad verticem ſectionis, quàm ſit dimidia tranſuerſi lateris figuræ, & ab ipſa recta linea occurrat, ſi producatur intra ſectionem, ad ſequentes ipſius partes cadet. Supponitur enim cadere extra ſectionem, & hoc contradicit quæſito, inde verò tanquàm conceſſo per conſequentia progreditur ad id, quod vero conceſſo opponitur; incurrit enim in aliquod abſurdum, nempè quadratum CB, ad rectangulum AGB, maiorem habere rationem, quàm idem quadratum CB, ad rectangulum AHB, quod eſt falſum, ac impoſſibile; ad quam enim magnitudinem, eadem maiorem habet rationem, ea minor eſt; vnde rectangulum AGB, deberet eſſe minus rectangulo AHB, quod eſt falſum, cùm oppoſito modo res ſe habeat. At verò falſum ex falſo tantùm deduci poteſt, non autem ex vero, deductum eſt porrò ex eo, quod recta illa CD, cadat extra ſectionem; hoc igitur falſum eſſe oportet.



Hic autem eſt animaduertendum, cùm ſcilicet deductione vtimur ad impoſſibile, non fieri Analyſin, cuius deinde veſtigijs repetitis, ſyntheſis inſtituatur, nec immeritò; nam ex ijs, quæ non ſunt, nulla poteſt fieri compoſitio. Sed quæ ab Analyſta ſpeciatim ſint obſeruanda in ſuo obeundo munere, ſequenti capite perſequemur.

Expedit etiam, vt quæ priora naturâ ſunt, priùs itidem tractentur, idque magni momenti eſt, nam inde plurima conſequuntur, quæ contrario modo contemplationem ineundo, minimè nobis datum eſt adipiſci. Vnde ſi rationem, qualis ſit inter parabolen, & triangulum eiuſdem baſeos, ac eiuſdem altitudinis, primùm quiſquam inquireret, in eo peccaret, quòd ordinem præuerteret; priùs enim naturâ eſt, quòd detur ratio inter parabolen, & triangulum perpetuò conſtans eadem in omnibus parabolis, ita vt, quæ ratio eſt vnius paraboles ad triangulum eiuſdem baſeos, ac altitudinis, eadem ſit alterius paraboles, ad ſibi reſpondens triangulum eiuſdem baſeos, ac altitudinis; & quæ eſt ratio ſemicirculi ad triangulum eiuſdem baſeos, ac altitudinis, eadem ſit alterius ſemicirculi, ad ſibi reſpondens triangulum eiuſdem baſeos, ac altitudinis. Hæc enim conſideratio præcedit alteram, quæ ſpeciem rationis decernit; ita ſit vt, exempli gratiâ, de parabole loquendo, Si duæ parabolæ extiterint eiuſdem altitudinis, ſiue inter eaſdem parallelas, quemadmodum eſt baſis ad baſin, ita colligatur eſſe parabolen ad parabolen. Quoniam licet arguere, vt parabole vna ad triangulum ſibi inſcriptum, ita parabole altera ad triangulum ſuum; & permutando, vt parabole ad parabolen, ſic triangulum ad triangulum; ſed triangulum ad triangulum eſt in ratione baſium; ergo parabole ad parabolen, erit in ratione baſium, & ſic de conſimilibus alijs. *Quæ priora natura ſunt prius tractanda videntur.*

Plus nimio ſibi profectò arrogarunt ij, qui paſſim deductione abutuntur, & quod primo alicui conuenit ſymptoma, de alio demonſtrandum ſuſcipiunt, cui mediatè potiùs illud natura conceſſit, vt ſi Theorema iſtud condiderint. *Redarguuntur nonnulli.*

Si circuli diameter producta fuerit, & ab abſumpto puncto ipſius productæ ducatur tangens circuli peripheriam, & à puncto contactus tres ductæ ſint lineæ, quarum vna ad centrum, alia ad punctum extremum diametri, per quod tranſit ipſa producta, alia demum perpendicularis eidem diametro. Tria fiunt triangula, quorum area proportionales ſunt. Prætérquam quod hoc nedum circulo, ſed etiam ellipſi, & hyperbole, conuenire quiſque deprehendet, vtriuſque ſectionis naturam introſpiciendo; vnde præſtat ad generaliorem formam Theorema reducere; illud etiam accedit, quòd hoc trianguli rectanguli naturam conſequitur; ſi enim in ſubtendente angulum rectum, quæ hypothenuſa dicitur, fuerit acceptum ſegmentum, quod interceptum ſit inter huiuſmodi punctum, & verticem vnius ex angulis acutis, quod quidem æquale ſit lateri, cui prædictus angulus adiacet, & à prædicto puncto ad anguli recti verticem recta fuerit ducta, & à vertice eiuſdem recti anguli cadat perpendicularis ſuper hypothenuſam, tria prædicta triangula conficiuntur, nullo intercedente circulo.

Laudabilius itaque eſt ſymptoma prædictum de hoc, quod naturâ circulum antecedit, & quo mediante potius ipſi circulo conuenit, vniuerſali ratione quadam oſtendere. Nam ſi quidpiã alicuius cõſequitur naturam, præſtat id de hoc demonſtrare potius, quàm de alio, cui non niſi mediatè quidem eſt accommodatum; ſic enim nos ad ſimpliciora redigimus ea, de quibus diſſerimus, atque per immediata, demonſtrationes contexi mus, quod cùm non fuerit animaduerſum, ſilentio prætereundum non duximus, vt harum diſciplinarum ſtudioſus admonitus in Theorematibus condendis, cautè procedat; etſi fatendum ſit, hoc apud plurimos inualuiſſe, non ob eorum inſcitiam magis, quàm ob inanis gloriæ cupiditatem; hunc enim in modum è propria ſede ad minus propriam, minuſque conſentaneam Theorema traducunt, & à ſimplicioribus ad implicatiora transferunt, vt aliquid noui ſe adinueniſſe proprio marte videantur, cùm alioqnin ab alijs eadem, ſeruato naturæ ordine, tractata fuerint: eî porrò videntur reprehenſione digni, in quam quidem incurreret, qui de homine, riſibile, exempli gratia, niteretur oſtendere, quod propriè, ac immediatè admiratiuo conuenit, & hac haud neglectã circumſpectione plus laudis aſſequemur, vel ſaltem eo nomine, quòd rectam demonſtrandi rationem benè calluiſſe, iudicabimur.

Supereſſet modo tractandum de Theorematis efformatione; ſed hac de re ſupra, huius tractationis initio multa diximus, ipſius Theorematis partes, eiuſdemq; conditiones, atque ſyntaxin explicantes; ob id hoc in loco, nè bis eadem repetita videantur, ſilentio præteribimus.

DE PARTICVLARIBVS METHODIS, quas hucuſque Mathematicorum Schola frequentauit.
DEQ; PECVLIARI AB AVCTORE EXCVLTA.

CAPVT X.

HActenus vniuerſaliſſimâ methodo explicatâ, peculiares nonnullæ conſiderandæ ſuperſunt, è quibus antiqua eſt vna, aliæ autem à Recentioribus adinuentæ. Ab illa igitur exordientes, reliquas deinceps recenſebimus, eam ad calcem allaturi, quæ tametſi ab aliis fuerit inſinuata, à nemine tamen hucuſque nec demonſtrata, nec adeò vniuerſaliter exculta, nec, vt verbo concludam, ſatis pro dignitate tractata; in quã propterea, cùm non nihil laboris impenderimus, eidemque firmitatem demonſtrationibus conciliauerimus, nobis aliqua ex parte adſcribendam, abſit à verbo iactantia, exiſtimamus.

De Antiqua Methodo per exploſum exceſſum, atque defectum.

Antiqua methodus per exploſum exceſſum, atq; defectum explicatur.

INter methodos à Mathematicis, hiſce diſciplinis ferè naſcentibus, vſurpatas, primùm illa ſe ſe conſiderandam offert, quã non rarò Veteres vti conſueuere, quæque Archimedæa dicta fuit, quòd Archimedes quàm ſæpiſſime ſoleret eam adhibere. Hanc ego, per *exploſum exceſſum, atque defectum* appello; qua quidem & Geometrarum Princeps Euclides eſt vſus, Libro 12. Prop. 2. demonſtrare contendens, circulos inter ſe eſſe, quemadmodum à diametris quadrata, & Prop. 10; omnem conum tertiam eſſe partem Cylindri, eandem cum ipſo baſin, & altitudinem habentis. Demonſtrat enim deducendo ad incommodum, Cylindrum non eſſe maiorem triplo coni; deinde non eſſe minorem, & inde concludit æqualem eſſe; propterea que conum tertiam eſſe partem Cylindri.

Vieta methodum hanc neglexit.

Hic demonſtrandi modns pleriſque non arriſit, præſertim Franciſco Vietæ, qui propterea initio Supplementi Geometriæ ait, non ſatis conſtare, quod Archimedes tactu Helicis propoſuit, nimirùm exhibere lineam rectam circumferentiæ circuli æqualem. *Exhibet ſanè*, inqnit, *lineam rectam maiorem ambitu cuiuſcunque polygoni circulo inſcripti; minorem autem ambitu cuiuſcunque polygoni circumſcripti, àn igitur circulari æqualem? exhibetur angulus minor quocunque obtuſo, maior verò quocunque acuto, an igitur rectus? ſi benè Archimedes, fallaciter Euclides.* Tota

Tota itaque Vietæ difficultas in eo conſtituta videtur, quòd hunc in modum arguere non liceat; hoc non eſt maius, non eſt minus illo; ergo eſt illi æquale: Contingit enim non rarò, vitioſum hunc modum eſſe argumentandi; vt exempli gratia, perſpicuum eſt de angulo ſemicirculi, qui non eſt maior angulo recto, cùm ſit minor quocunque angulo obtuſo, non eſt minor angulo recto, quoniam eſt maior quocunque angulo acuto; & tamen non licet inferre, angulum ſemicirculi æqualem eſſe angulo recto: cùmque eà ſit minus idonea argumentandi ratio, non concludit cuicunque materiæ applicata, proinde ſupradicta argumentationis forma minimè admittenda videtur, *Aduerſus hāc methodū difficultas aſſertur.*

Re tamen paulò diligentiùs introſpecta, comperiemus hanc optimam eſſe argumentandi legem, nec Veteres in hoc ſuiſſe deceptos. Ad ſuprapoſitam difficultatem autem quod attinet, occurrendum eſt, animaduertendo, hanc argumentationis formam ſuam habere vim, cùm ex eorum natura, quæ comparantur, non repugnat æqualitas. Si namque fieri poſſet, vt aliquis angulus rectilineus foret æqualis angulo mixto, contento ſcilicet lineà rectà, & curuà, benè liceret inferre: angulus ſemicirculi non eſt maior, nec minor recto; ergo eſt illi æqualis. At angulus rectus conſtituitur à linea recta perpendiculariter cadente ſuper aliam lineam rectam, vnde anguli, qui ſunt deinceps ſunt æquales inter ſe; ita tamen vt vterque contineatur lineis rectis; at angulus factus à linea recta, & curua, quamuis recta caderet ſic ſupra curuam, vt faceret angulos deinceps æquales, vnde eſſet æquè inclinata ex vtraque parte, ſicuti contingit in angulo recto rectilineo; tamen inclinatio rectæ ad curuam non admittit æqualitatem cum inclinatione rectæ ad rectam. At verò quando à toto genere repugnat æqualitas, ad quam non aliud requiritur, niſi quod, dum duo termini inuicem comparantur, vnus ſecundùm rationem magnitudinis, nec excedat, nec deficiat, optimè tunc ſupradicta argumentationis forma per *exploſum exceſſum, atque defectum* æqualitatem concludit. *Diluitur propoſita difficultas.*

Repugnat autem æqualitas, cùm duo anguli tunc æquales dicantur, quando puncta æquè recedentia à vertice accepta in vna è duabus lineis angulum conſtituentibus, æquè ſunt ad lineam alteram inclinata, ſumptà inclinationis menſurà per arcum, cuius centrum ſit anguli vertex, vel per lineam perpendicularem omnium breuiſſimam. Quòd ſi duo ſumantur anguli, quorum vnus rectilineus ſit, mixtus autem alter, contentus linea rectà, & curuà, fieri non poterit, vt quæ æquè à vertice recedunt puncta, accepta in linea recta, æquè ſint ad curuam lineam inclinata; id enim curuæ lineæ repugnat, non tamen repugnat, vt inæqualis ſit inclinatio; quamobrem neque repugnat, vt angulus mixtus ſit maior, vel minor angulo rectilineo. Nec admittendum illud: quocunque dari poteſt maius, & minus, eidem dari poteſt æquale; quamobrem, *non malè Archimedes, nec fallaciter Euclides.* *Nō malè Archimedes, nec fallaciter Euclides.*

Supereſt, vt validiſſimam hanc explicatam methodum exemplis breuiter illuſtremus.

Quamuis Theorema ſequens ab alijs oſtenſum fuerit, nihilominus quia illud idem varijs methodis, præcipuèq; noſtra, commodè quidem oſtendi poteſt; placuit ob id in exemplum aſſumere, quod monuiſſe volumus, nè quiſpiam initio ſtatim nos carpere hoc nomine velit, quòd acta agere contendamus.

Exemplum LXXII.

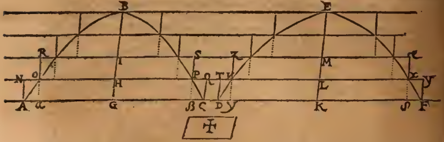
THEOREMA.

Parabolæ æqualium altitudinum ſunt inter ſe, vt baſes.

Sint parabolæ ABC, DEF, æqualium altitudinum, ſeu quod idem eſt, inter eaſdem parallelas BE, AF, earumque baſes ſint AC, DF. Dico eſſe, vt AC ad DF, ita parabolen ABC, ad parabolen DEF. Si enim non ita ſe habent, vna ipſarum, puta ABC, ad alteram DEF, in minori, vel maiori ratione erit: ſit primo in minori; ac ob id ABC, minor ſit quàm opus eſt, vt ſit in prædicta ratione, ſitque defectus ✱, ita vt parabole ABC plùs ✱, ſit ad parabolen DEF, vt baſis AC ad baſin DF.

Paraboles ABC diameter ſit BG, & paraboles DEF, diameter ſit EK; diuiſaq; BG bifariam in I; & vtroque dimidio iterum biſariam, & ſic deinceps, vt exempli gratia, IG in H, biſariam; & per puncta diuiſionum ductæ ſint æquidiſtantes alterutri ipſarum BE, AF; ductiſque rectis parallelis ipſis diametris, vt AN, OR &c; CQ, PS &c; inſuper DT, VZ &c; præterea FY, X&, &c; per puncta videlicet interſectionis perimetrorum ipſarum parabolarum,

larum, cum iis, quæ fuerunt ductæ parallelæ alterutri ipſarum BE, AF: adeò vt conſtitutæ ſint figuræ circumſcriptæ, & introſcriptæ parabolis, conſtantes parallelogrammis æqua-



lium altitudinum, & numerò æqualibus, ſi circumſcriptæ circumſcriptis, & introſcriptæ introſcriptis comparentur, & ita deinceps fiat, per alias ſubdiuiſiones, & multiplicationem parallegrammorum, vt parallegrammum CN, exceſſus circumſcriptæ figuræ, conſtantis ex ipſis parallelogrammis ſupra figuram inſcriptam, minor ſit, quàm ✠ ſpatium.

Quoniam igitur figura circumſcripta parabolę ABC excedit inſcriptam eidem parabolę ex conſtructione minori exceſſu, quàm ✠; ergo multò adhuc minori exceſſu excedet parabolen ABC; ergo aggregatum ex parabole ABC, & ✠, maius erit ipsā figurā circumſcripta eidem parabolę ABC; ergo figura parabolę ABC circumſcripta ad parabolen DEF, minorem habebit rationem, quàm aggregatum ex parabole ABC, & ✠, ad parabolen DEF. Sed aggregatum prædictum ad parabolen DEF, eſt vt baſis AC, ad baſin DF, ex hypotheſi; ergo figura circumſcripta parabolę ABC ad parabolen DEF, minorem habebit rationem, quàm baſis AC ad baſin DF. Sed vt baſis AC ad baſin DF, ita figura circumſcripta parabolę ABC, ad figuram circumſcriptam parabolę DEF, vt infrà conſtabit;* ergo figura circumſcripta parabolę ABC, ad parabolen DEF minorem habebit rationem, quàm ad figuram circumſcriptam eidem parabolę DEF: ergo parabole DEF maior erit figura ſibi circumſcripta. Quod eſt inconueniens.

* Vbi Auctor de ſua peculiari Methodo edixerit.

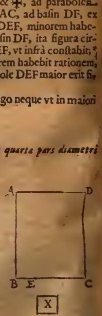
Nec diſſimiliter, cùm in maiore ſupponatur eſſe ratione. Cum ergo neque vt in maiori nec in minori ratione ob id propoſitam rationem habebit &c.

Exemplum XXXIII.

THEOREMA.

Cylindri recti baſis ad eiuſdem Cylindri curuam ſuperficiem eſt, vt quarta pars diametri baſeos ad ipſius Cylindri latus.

Eſto cylindrus rectus, cuius rectangulum per axem ſit ABCD: ſumptaque BE, quæ ſit quarta pars ipſius BC, diametri baſeos eiuſdem cylindri. Dico baſin ad cylindri curuam ſuperficiem, eſſe, vt BE, ad AB.



Si non ita eſt; habebit baſis ad curuam cylindri recti ſuperficiem maiorem, vel minorem rationem, quàm BE ad AB. Habeat primò maiorem, ita vt baſis ſit maior, quàm eſſe deberet, vt ad curuam cylindri ſuperficiem haberet rationem, quæ eſt BE ad AB; exceſſus autem ſit X. Itaque cylindri baſis, minus ſpatio X, ad curuam cylindri ſuperficiem rationem habebit, vt BE, ad BA.

Intelligatur ordinatum polygonum baſi cylindri inſcriptum, deficiens ab ipſo circulo minori defectu, quàm X; ergo prædictum polygonum ad cylindri ſuperficiem maiorem habebit rationem, quàm BE ad AB; ergo multò maiorem habebit rationem ad ſuperficiem priſmatis erecti ſupra polygonum, & cylindro inſcripti; ſed polygonum ad ſuperficiem priſmatis prædicti rationem habet, vt

dimidia

quartā pars perpendicularis lateri à centro polygoni, ad AB priſmatis altitudinem; ergo dimidia pars rectæ à centro perpendicularis lateri polygoni inſcripti circulo, cuius diameter BC, ad AB, maiorem habebit rationem quàm BE, ad eandem AB; ergo dimidia pars rectæ perpendicularis lateri à centro polygoni maior foret BE quarta parte diametri illius circuli, cui polygonum prædictum inſcriptum eſt: quod eſt inconueniens; vt enim circuli ſemidiameter eſt maior recta perpendiculari polygoni lateri, ita dimidia ſemidiameter, hoc eſt quarta diametri pars maior erit dimidio illius rectæ, quæ à centro cadit perpendicularis polygoni lateri. Non ergo baſis ad curuam cylindri &c. maiorē habet rationē.

Nec diſſimili modo demonſtrabitur, ſi dicatur; baſis ad curuam Cylindri recti ſuperficiem minorem rationem habere, quàm BE, ad BA. Sit autem defectus X, ita vt circulus, vnà cum X ad curuam Cylindri recti ſuperficiem rationem habeat, quæ BE, ad BA. Intelligatur circulo circumſcriptum polygonum excedens ipſummet circulum minori exceſſu quàm X; huiuſmodi autem polygonum adhuc Cylindri recti curuam ſuperficiem minorem habebit rationem, quàm BE ad BA; ſed vt BE, ad BA, ita eſt polygonum ad ſuperficiem priſmatis Cylindro circumſcripti, cuius eſt baſis; ergo polygonum ad recti Cylindri curuam ſuperficiem minorem habebit rationem, quàm ad ſuperficiem priſmatis eidem Cylindro circumſcripti. Quod eſt abſurdum; ergo &c.

De Indiuiſibilium Methodo.

PEruenimus tandem ad Indiuiſibilium methodum, qua obſcuriora Theoremata, & difficiliora Problemata, demonſtrantur, atque ſoluuntur. Plerique tamen minus eam commendarunt ob eas, quas in ſequentibus cauſas afferemus. Alij non penitus aſpernendam, vel inutilem eſſe dixerunt, fallacem tamen, & non ſine examine adhibendam; ſed de his paulò poſt verba facturi ſumus: interim methodum ipſam, cuius Auctor eſt Bonauentura Caualerius, proximum eſt, vt explicemus.

Indiuiſibiliū Methodus ad obſcuriſſima demonſtrāda conducit.

Quibuſdam hæc methodus non arridet.

Methodus declaratur.

HÆc Indiuiſibilium methodus inexplicabili facilitate ad difficillima Theoremata demonſtranda, & abſtruſiſſima Problemata ſoluenda conducens, continui quidem indiuiſibilibus vtitur, tanquàm inſtrumentis, ad figurarum tàm planarum, quàm ſolidarum menſuram comparandam.

Quibus vtatur hæc methodus, tanquàm inſtrumentis.

Ad menſuram verò planarum figurarum adhibet lineas rectas vni cuidam lineæ parallelas, quæ quidem recta nuncupatur Regula. Hæ autem lineæ in ipſis figuris numero infinitæ mente concipiuntur, deſinentes ad illas duas, quæ ex oppoſito eaſdem figuras tangunt, atque dicuntur earum oppoſitæ tangentes, quarum altera, tanquàm cęterarum parallelarum Regula, ſumi conſueuit.

Quid in hac methodo ſit Regula.

Oppoſitæ tangentes quid.

Vt autem in planis figuris adhibentur lineæ, tanquàm indiuiſibilia, ita quidem in ſolidis adhibentur plana; ad menſuram enim ſolidarum figurarum hæc methodus, plana adhibet vni cuidam plano ſignato æquidiſtantia, & huiuſmodi planum illorum planorum Regula dicitur, in ipſis enim ſolidis, numero indefinita, mente quidem concipiuntur, deſinentia ad duo illa plana, quæ ex oppoſito tangunt ipſa ſolida, & horum oppoſita tangentia plana dicuntur, quorum alterum, tanquàm cæterorum æquidiſtantium planorum Regula, ſumitur.

In planis figuris adhibentur lineæ, in ſolidis autem plana.

Ità fit, vt figura plana, inſtar telæ parallelis filis contextæ, concipiatur, ſolida verò figura, tanquàm liber parallelis ſolijs compactus, intelligatur: in planis autem figuris lineæ, in ſolidis verò plana numero indefinita, velut omnis craſſitiei expertia, concipiuntur.

Hæc methodus duplex.

Duplex autem eſt hæc methodus Indiuiſibilium; vtrique tamen, quæ ſuperius diximus, communia ſunt: è duabus verò vna dicitur Prior, altera verò Poſterior. Prior quidem comparat ad inuicem aggregata omnium linearum planarum figurarum, & aggregata omnium planorum ſolidorum, quotcumq; illa ſint; itaque prior iſta methodus vtitur Indiuiſibilibus collectiuè ſumptis. Poſterior autem comparat ſingulas lineas cum ſingulis lineis, & ſingula plana cum ſingulis planis, ijſdem in directum conſtitutis; quamobrem

Explicatur prima, qua vtitur Indiuiſibilibus collectiuè ſumptis.

Poſterior vtitur indiuiſibilibus diſtributiuè.

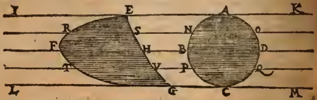
poſterior

Vtraq; generalem regulam tradit ad comparandam figurarum menſuram.

poſterior hęc methodus vtitur Indiuiſibilibus diſtributiuè. Vtraque generalem regulam tradit ad comparandam figurarum menſuram; prioris autem Methodi generalis regula ita ſe habet, pro vt Indiuiſibilium vſus collectiuè ſumptorum expoſcit: poſterioris verò pro vt Indiuiſibilium vſus diſtributiuè acceptorum requirit; vtramque paulò infrà afferemus in medium poſt explicationem eorum, quæ modò tradidimus.

Exemplum.

Sint exempli gratiâ duæ quæcunq; figuræ planæ ABCD, EFGH inter eaſdem parallelas Ik, LM conſtitutæ: harum autem parallelarum, videlicet LM ſumatur, tanquàm Regula parallelarum in eiſdem figuris numero indefinito ducibilium, quarum aliquæ in figurâ ABCD ſint rectæ NO, BD, PQ &c: at in figurâ EFGH ſint rectæ RS, FH, TV &c.



Hic autem oportet aduertere, biſariam à nobis comparari poſſe lineas figuræ ABCD, ad lineas figuræ EFGH, videlicet vel collectiuè, hoc eſt comparando aggregatum ad aggregatum linearum, vel diſtributiuè, nimirùm comparando ſigillatim quamlibet rectam figuræ ABCD, cum qualibet rectâ figuræ EFGH ſibi in directum exiſtente. Prior methodus vtitur primo comparationis genere; comparat enim ad inuicem aggregata omnium linearum planarum figurarum, & aggregata omnium planorum ſolidorum, quotcunq; illa fuerint; at verò Secunda methodus poſteriorem adhibet comparationis modum, comparat enim ſingulas lineas cum ſingulis lineis, & ſingula plana cum ſingulis planis inter ſe in directum conſtitutis.

Generalis regula prioris methodi.

Generalis Canon prioris methodi ità ſe habet.

Si in duabus quibuſcunque figuris planis etiam non in eadem altitudine exiſtentibus, omnes lineæ vnius figuræ cuidam deſignatæ Regulæ parallelæ, mente deſcriptibiles, & collectiuè ſumptæ, fuerint æquales omnibus lineis alterius figuræ cuicunque ſignatæ Regulæ parallelis mente deſcriptibilibus, & collectiuè ſumptis, etiam ipſæ figuræ erunt æquales, & contra.

Vt in ſuperiori Schemate ſint æquales RS, NO, item FH, BD, prętereà TV, PQ, & cæteræ collectiuè ſumptæ, etiam ipſæ figuræ ABCD, EFGH erunt inter ſe æquales.

Perinde eſt dicere omnes lineæ ad omnes lineas, ac dicere, aggregatum omnium linearum ad aggregatum omnium linearum.

Nedum autem hoc intelligendum de proportione æqualitatis; quamcumque enim rationem habuerint omnes lineæ ad omnes lineas, hoc eſt aggregatum omnium linearum vnius figuræ planæ, ad aggregatum omnium linearum alterius figuræ planæ, eandem habebunt rationem, & ipſæ planæ figuræ.

In ſolidis quoque res ità ſe habet: ſi videlicet omnia plana vnius figuræ ſolidæ fuerint æqualia omnibus planis alterius figuræ ſolidæ, ſumptis ijſdem quibuſcunq; Regulis, etiam & ipſa ſolida æqualia erunt.

Quod etiam non ſolum de proportione æqualitatis intelligendum eſt, ſed etiam de quacunque ratione; quamcunque enim rationem habuerint omnia plana ad omnia plana, hoc eſt aggregatum omnium planorum vnius figuræ ſolidæ, ad aggregatum omnium planorum alterius figuræ ſolidæ, eandem quoque rationem ipſæ ſolidæ figuræ habebunt.

Et hæc facilè poſſunt intelligi ex ſuprapoſito diagrammate, ſi per proportionem æqualitatis re explicatâ, loco illius proportionis æqualitatis quæconque alia concipiatur proportio. Et inſuper hæc eadem ſolidis aptari poſſunt, ſi per figuras illas planas, ſolidas intelligamus, & per lineas concipiamus plana.

Generalis Regula poſterioris methodi.

Poſterioris methodi generalis Canon hic eſt.

Si in duabus quibuſcunque figuris planis, in ijſdem parallelis figuris ipſis conſtitutis, quarum parallelarum altera ſit Regula: ſingulæ lineæ cum ſingulis lineis in directum exiſtentibus, communique Regulæ parallelis, collatæ fuerint æquales, etiam & ipſæ figuræ inter ſe æquales erunt.

Quod nedum de proportione æqualitatis, ſed de aliâ quacunque ratione intelligendum eſt, ità vt quamcunque rationem habuerint communiter dictæ lineæ ſigillatim ſumptæ,

eandem

eandem habeant, & ipſæ figuræ. Si igitur in duabus quibuſcunque figuris planis, in iiſdem parallelis ipſis figuris conſtitutis, quarum parallelarum altera ſit Regula, ſingulæ lineæ cum ſingulis lineis in directum exiſtentibus, communique Regulæ parallelis, aliquam habuerint rationem; etiam & ipſæ figuræ eandem rationem habebunt.

Locum habet non ſolum in ratione æqualitatis, ſed in quacunque ratione.

Non diſſimiliter in ſolidis. Si plana vnius figuræ ſolidæ communi Regulæ æquidiſtantia fuerint æqualia planis alterius figuræ ſolidæ eidem Regulæ æquidiſtantibus; etiam & ipſæ figuræ ſolidæ erunt æquales.

Quod autem de proportione æqualitatis enunciatum fuit, de quacunq; ratione intelligendum eſt: ita vt quamcunque rationem habuerint communiter inter ſe illa plana, eandem habeant, & ipſa ſolida, quæ quidem ſupponimus eſſe in iiſdem oppoſitis tangentibus planis, quorum alterum ſit communis eorum Regula. Itaque figuræ tàm planæ, quàm ſolidæ ſunt in ratione omnium ſuorum Indiuiſibilium collectiuè: & ſi reperiatur in iiſdem quædam communis ratio, ſunt in ratione omnium ſuorum Indiuiſibilium diſtributiuè ad inuicem comparatorum.

In prioris Methodi gratiam illud obſeruant, videlicet ad indagandam rationem, atq; menſuram duarum datarum figurarum, tàm planarum, quàm ſolidarum, expendendam eſſe rationem, quam habent aggregata omnium Indiuiſibilium in ijs mente deſcriptibilium iuxtà datam Regulam.

Quid obſeruandum in gratiam prioris Methodi.

Pro ſecunda illud aduertunt, nempè quærendum eſſe, nùm in ſingulis Indiuiſibilibus in directum conſtitutis, ſiue ſint lineæ rectæ, ſiue plana, reperiatur quædam communis ratio.

Quid obſeruandū in gratiā ſecundæ.

Paucis autem, vt Methodum hanc explicemus primam, deindè verò ſecundam, oportebit quaſdam definitiones præmittere.

Si per tangentes oppoſitas cuiuſcunq; datæ figuræ planæ, duo plana inuicem parallela ducantur, recta, ſiue inclinata ad planum datæ figuræ hinc inde indefinitè producta, quorum alterum moueatur verſus reliquum eidem ſemper æquidiſtans, donec illi congruerit: ſingulæ rectæ lineæ, quæ in toto motu fiunt communes ſectiones plani moti, & datæ figuræ, ſimul collectæ, vocentur Omnes lineæ talis figuræ ſumptæ Regula vnâ earundem, hoc autem cum plana ſunt recta ad planam figuram. Cum verò ſunt inclinata vocentur omnes lineæ eiuſdem obliqui tranſitus datæ figuræ, Regula pariter earundem vnâ.

Prima definitio.

Cùm verò plana recta ſunt ad datam figuram, rectæ illæ lineæ iam dictę recti tranſitus vocantur: ſicuti obliqui tranſitus dicuntur, quando plana ad datam figuram fuerint inclinata.

Ex quo intelligitur cum oppoſitę tangentes Regulâ quacunque in data figura duci poſſint, etiam lineas omnes datę figurę Regulâ quacunq; rectâ lineâ propoſitâ, haberi poſſe, tùm recti, tùm etiam eiuſdem obliqui tranſitus.

Corollarium.

Si propoſito quocunque ſolido eiuſdẽ oppoſita plana tãgentia Regulâ quacunque ducta fuerint, hinc inde indefinitè producta, quorum alterum verſus reliquũ moueatur ſemper eidem ęquidiſtans, donec illi congruerit, ſingula plana, quæ quidem in toto motu concipiuntur in propoſito ſolido ſimul collecta vocentur, Omnia plana propoſiti ſolidi ſumptâ Regula eorundem vno.

Secunda definitio.

Ex quibus intelliges, quemadmodum propoſiti ſolidi oppoſita tangentia plana quacunque Regulâ duci poſſunt, itá eiuſdem omnia plana Regulâ quocunq; plano haberi poſſe.

Corollarium.

Si oppoſitis tangentibus planis occurrant interiùs duę rectę lineę, vna quidem perpendiculariter, reliqua autem obliquè: puncta, quę ſunt communes ſectiones propoſitę lineę perpendiculariter incidentis, & ſingulorum planorum, quę collecta dicuntur omnia plana, itá tamen producta, vt eaſdem ſecare poſſint; ſiue puncta, quę ſunt communes ſectiones eiuſdem, & moti plani, atque fiunt in toto motu, ſimul collecta vocentur Omnia puncta recti tranſitus propoſitę lineę perpendiculariter incidentis: quę in obliquè incidente vocentur eiuſdem obliqui tranſitus.

Tertia definitio.

Ex quibus licet colligere ſingula puncta recti tranſitus, vel obliqui incidentis lineę, nedum communes eſſe ſectiones illius, & ſingulorum, quę collecta dicuntur omnia plana propoſiti ſolidi, ſed etiam ſi per talem incidentem extendatur planum, eſſe communes ſectiones illius, & ſingulorum, quæ collectę dicuntur Omnes lineę planę figurę, cuius oppoſitę tangentes ſunt communes ſectiones plani eiuſdem figurę, & oppoſitorum tangentium dicti ſolidi; nam motum planum deſignat in plano ſecante rectam lineam, & vna ſimul pun-

Corollarium.

ctum in incidente, quod reperitur in illa recta linea, & ideò idem punctum eſt communis ſectio tùm moti plani, & rectæ incidentis, tùm vnius earum, quæ dicuntur omnes lineæ datæ figuræ planæ, ita tamen productæ, vt hanc incidentem ſecare poſſint, & eiuſdem incidentis.

Quarta definitio. Si inter alterum extremorum punctorum propoſitæ rectæ lineæ, & ſingula puncta, quæ ſimul collecta dicuntur omnia puncta recti, vel eiuſdem obliqui tranſitus, eiuſdem ſumamus interiacentes lineas, dicãtur iſtæ ſimul collectæ, Omnes abſciſſæ propoſitæ lineæ, quas, etiamſi non exprimatur, vocari ſupponemus recti tranſitus, ſi puncta ſint recti tranſitus: vel eiuſdem obliqui tranſitus, ſi puncta ſint eiuſdem obliqui tranſitus.

Quinta definitio. Rectæ lineæ verò in antecedentis definitionis propoſita linea inter eadem puncta, & reliquum extremorum interiacentes, dicentur reſiduæ omnium abſciſſarum propoſitæ lineæ recti tranſitus, ſi puncta ſint recti tranſitus: vel eiuſdem obliqui tranſitus, ſi ſumpta puncta ſint eiuſdem obliqui tranſitus.

Corollarium. Ex quibus intelliges cuilibet abſciſſæ in proximis definitionibus propoſitæ lineæ reſpondere vnam ex reſiduis, ita vt tot ſint illæ, quæ dicuntur reſiduę omnium abſciſſarum propoſitę lineę, quot illę, quę dicuntur eiuſdem omnes abſciſſę, ſiue recti, ſiue eiuſdem obliqui tranſitus; nam reſiduę omnium abſciſſarum propoſitę lineę interiacent inter reliquum extremum eiuſdem punctum, & eadem illa puncta, inter quæ, & extremum primò dictum interiacent omnes abſciſſę.

Sexta definitio. Si pro qualibet earum, quę dicuntur omnes abſciſſę propoſitę rectæ lineæ ipſa propoſita linea, ſiue eidem æqualis ſemel aſſumpta intelligatur, iſtæ ſimul collectæ dicentur, Maximæ omnium abſciſſarum propoſitæ lineæ, vel ſubintelligentur ſemper eſſe omnium, etiamſi dicerentur ſolummodò Maximæ abſciſſarum.

Corollarium. Quoniam verò omnes abſciſſæ tot ſunt, quot omnes reſiduæ; maximæ verò omnium abſciſſarum tot ſunt, quot omnes abſciſſæ; nam cuilibet abſciſſæ reſpondet vna maximarum, ideò maximæ omnium abſciſſarum propoſitæ lineæ tot erunt, quot etiam reſiduæ omnium abſciſſarum, quotcunq; ſint omnes abſciſſæ, vel reſiduæ, ideſt pro qualibet reſidua habemus quoq; vnam maximarum ijs ſemper recti, vel eiuſdem obliqui tranſitus aſſumptis.

Septima definitio. Si cuilibet omnium abſciſſarum propoſitæ rectæ lineæ adiuncta intelligatur alia recta linea cuidam æqualis, compoſitæ ex omnibus abſciſſis, & adiunctis, ſimul collectæ dicentur Omnes abſciſſæ propoſitæ lineæ, adiunctâ tali, nempè adiunctâ illâ, cui quæ adiuunguntur ſunt æquales; ſi verò fieret hæc adiunctio reſiduis, vel maximis omnium abſciſſarum, pariter dicerentur Reſiduæ, vel Maximæ omnium abſciſſarum adiunctâ eadem recti ſemper, vel eiuſdem obliqui tranſitus.

Octaua definitio A. Propoſitâ quacunque planâ figurâ, & in ea ductâ vtcunq; rectâ lineâ vſque ad ambitum hinc inde terminatâ, ſi ipſa recta linea deſcribere quancunq; figuram planam intelligatur non exiſtentem in plano propoſitæ figuræ, ac deinde reliquæ earum, quæ dicuntur omnes lineæ propoſitæ figuræ ſumptæ Regula iam ductâ lineâ, (& recti tranſitus ſi deſcripta figura ſit erecta plano propoſito: vel eiuſdem obliqui tranſitus, ſi illi ſit inclinata, eius nempè tranſitus, qui ſit in tali inclinatione) deſcribere intelligantur figuras planas ſimiles, ac ſimiliter poſitas, & æquidiſtantes primò deſcriptæ, ita vt omnes deſcribentes ſint deſcriptarum figurarum lineæ, vel latera homologa; omnes deſcriptæ figuræ ſimul ſumptæ dicentur Omnes figuræ planæ ſimiles talis propoſitæ figuræ ſumptæ Regulâ earum vnâ, vel Regulâ etiam ipſâ linea, vel latere deſcribente, vt ſi deſcriptæ figuræ eſſent quadrata, hæc dicerentur Omnia quadrata talis propoſitę figurę, vel ſi eſſent triangula ęquilatera, dicerentur omnia triangula ęquilatera eiuſdem.

B Solidum, cuius omnes deſcriptę figurę ſimiles ſunt omnia plana, dicetur Solidum ſimilare genitum ex propoſitâ figurâ iuxtà eandem Regulam, iuxtà quam ſumptę omnes dictę figurę ſimiles fuerunt; quę igitur ex figuris propoſitis vt ſic generantur, dicentur abſque alio addito Solida ſimilaria genita ex propoſitis figuris iuxtà Regulas omnium ſimilium figurarum, quę ipſorum euadunt omnia plana; propoſitę autem figurę, eorundem Genitrices figurę vocabuntur.

C Cum verò duarum Genitricium vtcunque figurarum omnes deſcriptę figurę nedum ſimiles erunt, quę reperientur in earum vnaquaque, ſed etiam quę ſunt vnius inuenientur

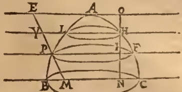
ſimiles

ſimiles omnibus figuris ſimilibus alterius propoſitæ figuræ, fuerint autem in vtroq; ſolido figuræ æquè eleuatæ ſuper plana Genitricium figurarum, tunc ſolida genita ex propoſitis figuris iuxtà Regulas eas, quæ ſunt Regulæ omnium ſimilium figurarum, earundem propoſitarum Genitricium figurarum dicentur ſolida inter ſe, vel ad inuicem ſimilaria genita ex dictis figuris iuxtà dictas Regulas, vel intelligentur ſemper eſſe inter ſe, ſeu ad inuicem ſimilaria; licet hoc non exprimatur, quotieſcunque contrarium aliquid non adijciatur.

Cùm autem duas figuras in eodem plano habuerimus in eadem altitudine exiſtentes, rectangula ſub ſingulis earum, quæ dicuntur omnes lineæ vnius propoſitarum figurarum, & illis in directum reſpondentibus in alia figura ſimul ſumpta ſic vocabimus, nempè rectangula ſub iiſdem figuris, Regulâ eadem, quæ eſt omnium ſumptarum linearum Regula. D.

Cùm verò propoſitarum figurarum altera fuerit parallelogrammum, cuius baſis, iuxtà quam altititudo ſumitur, ſit ſumpta pro Regula, dicta rectangula vocabuntur etiam omnia rectangula reliquæ figuræ, æquè alta, ac eorum vnum. E.

Hæc excerpſimus ex Auctore Methodi Indiuiſibilium: & vt par erat omninò immutata tranſtulimus; proximum eſt, vt breuiter hæc explicemus, deinceps vtranque Methodum appoſitis exemplis declaraturi.



Sit igitur quæcunq; figura ABC; eius verò oppoſitæ tangentes vtcunq; ductæ EO, BC, intelligantur verò per ipſas EO, BC indefinitè extenſa duo plana inuicem parallela, quorum quod tranſit per EO exempli gratia moueatur verſus planum per BC ſemper illi æquidiſtans, donec illi congruat; communes itaq; ſectiones talis plani fluentis cum ipſa figura ABC, quæ in toto illo motu perficiuntur, ſimul collectæ vocantur omnes lineæ figuræ ABC, è quibus aliquæ ſunt LH, PF, BC ſumptæ Regula earum vnâ, vt ipſi BC, & quidem recti tranſitus, cum plana parallela rectè ſecant figuram ABC: at verò eiuſdem obliqui tranſitus, cum plana parallela obliquè ſecant figuram ABC, & quidem obliqui tranſitus, nimirùm illius, qui in tali fit inclinatione. Vides igitur, quæ dicantur omnes lineæ figuræ ABC. *Supradictarū definitionum explicatio.* *Omnes lineæ.* *Recti trāſitus.* *Obliqui tranſitus.*

Intelligamus nunc per ABC repræſentari ſolidum, cuius duo oppoſita plana ſint tangentia, quæ quidem tranſeant per rectas EO, BC; intelligatur nunc moueri planum per EO extenſum verſus planum per rectam BC tranſiens, ſemper illi æquidiſtans; huius igitur plani fluentis, motumque ſubeuntis conceptæ in ſolido ABC figuræ, quæ quidem in vniuerſo motu fieri intelliguntur ob interſectiones plani cum figuræ ſolidę ſuperficie, vocantur omnia plana ſolidi ABC ſumpta Regulâ eorum vno; quorum aliqua ſunt intelligenda LH, PF, BC, quorum communes ſectiones cum figura ABC ſunt rectę LH, PF, BC; deinde ſint rectę ON, EM, quę occurrant planis per EO, & BC tranſeuntibus, occurrant, inquam, in punctis O,N;E,M, at verò recta ON perpendiculariter, EM verò obliquè in illa plana incidat; puncta igitur, quę ſunt communes ſectiones omnium planorum ſolidi ABC, productorum, ſi opus fuerit, & rectę ON vocantur ipſius omnia puncta recti tranſitus, quorum aliqua ſunt H,I,N. Quę inter ipſa, & extremum punctum O continentur, vt ipſę OH, OI, ON abſciſſę nuncupantur: at verò quę inter eadem puncta, & aliud extremum, quod eſt N, continentur, vt videlicet NI, NH, NO, reſiduę omnium abſciſſarum; tot ęquales ipſi ON, quot ſunt omnes abſciſſę, ſiue reſiduę omnium abſciſſarum ON, dicuntur maximę abſciſſarum, ſiue omnium abſciſſarum ON, quibus ſi adiungatur recta aliqua linea, dicuntur abſciſſę, reſiduę, ſiue maximę adiunctâ tali lineâ, omnes quidem recti tranſitus in recta ON, vt in EM dicuntur eiuſdem obliqui tranſitus, eius nempè, qui in tali fit inclinatione. *Omnia plana.* *Omnia pūcta recti trāſitus.* *Abſciſſa.* *Reſidua omniū abſciſſarum.* *Maxima abſciſſarum.* *Abſciſſa reſidua.*

Dicitur autem eadem puncta recti tranſitus, ſiue obliqui, fieri tùm ab omnibus planis propoſiti ſolidi, vt ABC, tùm ab omnibus lineis plani per eaſdem incidentes extenſi, vt ex. g. plani, quod per EO, BC tranſit, quod pariter tranſeat per ipſas ON, EM; idem ſiquidem planum, quod in ſolido ABC figuram producit LH, in figura plana ABC gignit rectam LH, & in recta ON punctum H, at verò in EM punctum Y, quod tranſit HL producta, vndè puncta H,Y dici poſſunt effecta à recta HY, atque hunc in modum omnia puncta recti tranſitus, quę videlicet exiſtunt in recta ON, dicenda ſunt fieri, ne dum à dictis planis

 paralle-

parallelis, ſed etiam à lineis parallelis figuræ ABC productis, ſi opus ſit, idque etiam intelligendum eſt in recta EM, cuius omnia puncta dicuntur eiuſdem obliqui tranſitus, qui videlicet in tali ſit inclinatione.

Deinde in eadem figura plana ABC, ſupponatur vtcunque recta BC, quæ figuram planam BC deſcribat eleuatam ſuper figuram ABC, at verò ſingulæ lineæ, quæ dicuntur omnes lineæ figuræ ABC ſumptæ Regulâ BC, recti tranſitus, ſi figura BC ſit erecta figuræ ABC; vel eiuſdem obliqui tranſitus, (qui nimirum in inclinatione deſcriptæ figuræ ad planum ABC ſit, ſi figura BC ſit inclinata ad figuram ABC,) deſcribere intelligantur figuras planas ſimiles, ſimiliter poſitas, & æquidiſtantes ipſi figuræ BC, ità vt deſcribentes ſint deſcriptarum figurarum lineæ, vel latera homologa, quarum figurarum aliquæ ſunt ipſæ BC, PF, LH; omnes igitur iſtæ ſimul ſumptæ vocantur omnes figuræ ſimiles ipſius figuræ ABC ſumptæ Regula figura BC, vel lineà, aut latere BC.

Omnes figuræ ſimiles.

Solidum ſimilare genitū ex figura plana.

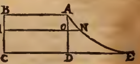
Solidum autem, cuius omnes dictæ figuræ ſimiles ipſius ABC ſunt omnia plana, dicitur ſolidum ſimilare genitum ex figura plana ABC iuxtà Regulam ipſam figuram, vel lineam BC, & ipſa figura ABC nuncupatur Genitrix eiuſdem ſolidi, quod ABC eſſe intelligitur.

Figura ſolidi Genitrix.

Solida ſimilaria.

Quod ſi alia figura adſit plana, cuius omnes lineæ Regulâ quadam ſumptæ ſimiles figuras planas deſcribant, & quidem ſimiliter poſitas, omnes vni cuidam æquidiſtantes, & ſimiles figuræ BC, & æquè eleuatas ſuper plana Genitricium figurarum; ſolida ſimilaria genita ex iſtis figuris iuxtà dictas Regulas vocantur inter ſe, vel ad inuicem ſimilaria; licet cum dicuntur ſolida ſimilaria genita ex talibus, & talibus figuris, & hoc etiam alio non addito, intelligantur ſemper inter ſe ea eſſe, vel ad inuicem ſimilaria, etſi non exprimatur, hoc autem niſi aliter explicetur.

Ad hæc exponantur duæ figuræ in eodem plano, ac in eadem altitudine, quæ ſint BCDA, ADE; ſit autem altitudo figuræ ABCD ſumpta reſpectu rectæ CD, & altitudo figuræ ADE reſpectu ipſius DE, quę intelligantur ex eadem parte à communi altitudine partes ęquales abſcindere, quę ſibi in directum erunt; ſit verò vtraquè communis Regula omnium linearum dictarum figurarum, ſitque ducta alia vtcunque eidem CE parallela MN, cuius portio exiſtens in figurà BD ſit MO, & manens in figurà ADE ſit ON, rectangula proindè CDE, MON, & reliqua rectangula omnia, quę ſub qualibet earum, quę dicuntur omnes lineę figurę BD. Regula CE, vel CD, & illi in directum poſita in figura ADE continentur, ſimul ſumpta, vocantur rectangula ſub figuris BCDA, ADE:



Rectangula ſub figuris.

Cęterùm ſemper erit aliqua eidem in directum, pręterquam fortè illi, quę figuram tangit, vt BA; poteſt ſiquidem in figura ADE illi loco lineę punctum vnum tantummodò reſpondere, huiuſmodi autem rectangulum non computatur, nec in cenſum venit, quia nihil illis adiungit, erit, inquam, hęc linearum reſpondentia in figura ADE iis, quę ſumuntur in BD, cum ſint in eadem altitudine ſumpta reſpectu earundem linearum, ſub quibus rectangula continentur.

Quod ſi contingeret earundem figurarum alteram eſſe parallelogrammum, & Regulam omnium eiuſdem linearum eſſe vnum eiuſdem laterum, quemadmodum CD, reſpectu cuius altitudo ſumitur, tunc quoniam illę, quę ęquidiſtant ipſi CD in parallelogrammo BD, ſunt eidem CD ęquales, ſuntque dictorum rectangulorum latera; propterea vocari poſſunt ea nedum rectangula ſub his figuris, ſed etiam hunc in modum appellari, nimirùm omnia rectangula figurę ADE, quę quidem figura haud neceſſariò eſt parallelogrammum, ęquè alta, ac vnum eorum, ac rectangulum CDE, altitudinis videlicet ęqualis ipſi CD.

Pręter hęc, duo etiam Poſtulata occurrunt, quorum primum eſt illud.

Prim. Poſtul.

Congruentium planarum figurarum omnes lineę ſumptę vna earundem, vt Regula communi, ſunt congruentes. Et congruentium ſolidorum omnia plana ſumpta, eorum vno, vt Regula communi, ſunt pariter congruentia.

Secundū Poſt.

Omnes figurę ſimiles alicuius figurę planę ſunt omnia plana ſolidi, quod terminatur ſuperficie, in quà iacent perimetri omnium dictarum ſimilium figurarum.

Animaduertendo quedā.

Vt verò hactenus tradita meliùs intelligantur, oportet aduertere Indiuiſibilia figurarum

inuicem

inuicem comparanda eſſe ſub quadam vniformi ratione, determinatoque ſpiſſitudinis, ſiue conſtipationis, quicumque ille ſit, gradu, aliàs niſi ſeruetur huiuſmodi vniformitas ſpiſſitudinis ipſorum Indiuiſibilium, fieri poterit, vt figuræ non ſint inter ſe æquales, quamuis Indiuiſibilia omnia, vtpotè obliqui tranſitus in vna figura, æqualia ſint omnibus Indiuiſibilibus, vtpotè recti tranſitus in alia figura.

Itaque ſi figuræ fuerint planæ, omnes lineæ ipſarum ſub eodem tranſitu accipiendæ ſunt, vel ſub recto, vel ſub obliquo, eiuſdem tamen obliquitatis; hunc enim in modum retinebitur ſemper in omnibus lineis idem ſpiſſitudinis, vel raritatis gradus.

His autem de rebus ſi quis alia nonnulla deſideret, conſulat Caualerium huius Methodi Auctorem; ſolum illud adijciam ſupradictam diuerſitatem in punctis quoque linearum adinueniri, quarum vna dicitur linea recti tranſitus, altera obliqui; vnde illius puncta dicuntur puncta recti tranſitus, iſtius verò puncta obliqui tranſitus; hæc eadem diuerſitas eſt in abſciſſis, reſiduis &c.

Proinde abſciſſæ, reſiduæ &c. hanc nomenclaturam ſortiuntur.

Caualerius porrò primæ Methodi fundamenta iecit oſtendendo primò propoſitionem illam.

Quarumlibet planarum figurarum omnes lineæ recti tranſitus, & quarumlibet ſolidarum omnia plana ſunt magnitudines inter ſe rationem habentes.

Secundò.

Æqualium planarum figurarum omnes lineæ ſunt æquales, & æqualium ſolidarum omnia plana ſunt æqualia, Regulâ quauis aſſumpta.

Tertiò.

Figuræ planæ habent inter ſe eandem rationem quam earum omnes lineæ iuxta quamuis Regulam aſſumptæ; & figuræ ſolidæ, quam earum omnia plana iuxta quamuis Regulam aſſumpta.

Quartò.

Si duæ figuræ planæ, vel ſolidæ in eadem altitudine fuerint conſtitutæ, ductis autem in planis, rectis lineis, & in figuris ſolidis, ductis planis, vtcunque inter ſe parallelis, quorum reſpectu prædictæ ſumpta ſit altitudo, repertum fuerit ductarum linearum portiones figuris planis intereeptas, ſeu ductorum planorum portiones figuris ſolidis interceptas, eſſe magnitudines proportionales, homologis in eadem figura ſemper exiſtentibus: dictæ figuræ erunt inter ſe, vt vnum quodlibet eorum antecedentium ad ſuum conſequens, in alia figura eidem correſpondens.

Prima propoſitio, item ſecunda, & tertia veritatem generalis regulæ demonſtrant iuxtà priorem Methodum aſſumptæ. At Propoſitio quarta eſt quaſi quidam nexus vtriuſque Methodi Indiuiſibilium, cùm in ea appareat comparatio omnium Indiuiſibilium, tàm collectiuè, quàm diſtributiuè ſumptorum; propterea quod ſingula Indiuiſibilia alicuius figuræ cum ſingulis Indiuiſibilibus alterius, eiſdem in directum poſitis, collata, reperiantur ad illam habere eandem rationem, quod ad poſteriorem Methodum pertinet: concluduntur omnia Indiuiſibilia ad omnia Indiuiſibilia eſſe, vt vnum ad vnum, quod priori Methodo congruit: vnde infertur figuras ipſas eſſe, vt vnum ad vnum.

Harum autem propoſitionum demonſtrationes, qualeſcunque ſint, apud ipſum videri poſſunt; nos tamen illas quatenus ad noſtram Methodum conducunt, aliâ viâ incedentes demonſtrare tentabimus, occurrentes difficultatibus, quæ aduerſus Indiuiſibilium Methodum afferri ſolent.

Ad ſecundam autem Indiuiſibilium Methodum quod attinet, non eſt cur hìc in eius conſideratione immoremur; tùm quia apud eius Auctorem videri poteſt, tùm etiam quia per ſe ipſam non adiuncta priori, magnam haud affert vtilitatem. Hìc porrò videtur adnotatione dignum, quòd ſi quiſpiam hanc per Indiuiſibilia procedentem Methodum minùs commendet, ex eo capite fortaſſe, quoniam ipſis Indiuiſibilibus vtitur; aduertat facilè reuocari poſſe ad quandam demonſtrandi rationem, quæ loco ipſorum Indiuiſibilium diuiſibilia quædam ſubſtituat, videlicet parallelogramma in planis, & parallelepipeda in ſolidis, quæ, cùm cuique perſpecta facilè admodum eſſe poſſint, piget in eorum tractatione detineri.

De

De Methodo innixa Grauitatis Centro.

Vſus centri grauitatis ad Geometrica Theoremata demonſtrãda in vſu fuit tũ apud Veteres, tum apud Recentiores.

IN rebus Geometricis ad Theoremata demonſtranda, & ad Problemata conſtruenda; non raro adhibitum fuiſſe grauitatis centrum, cùm à Veteribus, tùm à Recentioribus, perſpicuum eſt eorum cuicunque monumenta verſanti. Et ad Theoremata quod attinet, illud oſtenſum fuit, quòd *Parabole ſeſquitertia ſit trianguli eandem baſin, & altitudinem habentis:* ſic & de Hyperbole, quòd *cuiuslibet Hyperboles portio ad ſibi inſcriptum triangulum eiuſdem cum ipſa baſeos, ac altitudinis, eam habeat rationem, quam duæ tertiæ partes aggregati ex latere tranſuerſo, & diametri portione ad eam, quæ ex centro ſectionis ducitur ad portionis centrum grauitatis.* Et de Ellipſi, ac Circulo, quòd *omnis Ellipſeos, vel Circuli portio ad ſibi triangulum inſcriptum eiuſdem cum ipſa baſeos, ac altitudinis, eam habeat rationem, quam duæ tertiæ partes diametri portionis reliquæ ad eam, quæ ex figuræ centro ducitur ad grauitatis centrum in portione.* Præterea, quòd *in ſemicirculo, & quocunque circuli ſectore arcus ad duas tertias rectæ ſibi ſubtenſæ, eam habeat rationem, quam ſemidiameter, ad eam quæ ex centro ducitur ad ſectoris centrum grauitatis.* Et id genus alia, vt apud Auctores videri poſſunt.

Vſus centri grauitatis ad Problemata Geometrica conſtruenda.

Ad Problemata quod attinet; multa quidem præſidio centri grauitatis constructa fuerunt, & inter reliqua præclariſſimum illud, in quo iubemur *quadratum æquale circulo exhibere*; ſi quiſpiam enim centrum grauitatis ſemiperipheriæ adinuenerit, ac fecerit, vt recta à centro circuli ad huiuſmodi grauitatis centrum, quæ quidem eſt baſis Quadratricis, vt hæc, inquam, ad circuli radium, ita hic ad aliam quampiam; huius autem quadruplum factum ſit latus trianguli orthogonij, vnum ſcilicet circa rectum, aliud verò radius eiuſdem circuli; huiuſmodi enim triangulum circulo æquale erit; quare ſi huic exhibeatur quadratum æquale, hoc ipſum quadratum æquabitur circulo; & alia etiam in exemplum afferri poſſent. Sed hac de re infrà.

Multa de Grauitatis Centro tractantur.

Hìc porrò non nulla dicenda ſunt de Grauitatis Centro, in cuius gratiam non eſt prætereundum, quod ab alijs itidem animaduerſum fuit, Centrum nimirum vniuerſim acceptum, punctum eſſe quantitatis continuæ, & finitæ, ſignatum ſiue actu, ſiue potentia, vel in illa ipſa quantitate, eiuſue termino, vel extra cum certo quodam reſpectu, ſiue extenſionis, ſiue intercapedinis, ſiue habitudinis partium ad id, cuius dicitur centrum.

Centrorum vt & quantitatũ triplex genus

Centrorum autem, vt & quantitatum tripartitum videtur eſſe genus, nempe centrum Linearum, Superficierum, & Corporum. Et quidem ratione reſpectus, tria quoque alia centra recognoſcuntur, videlicet Figuræ, Magnitudinis, ac Grauitatis.

Cẽtrũ Figuræ quid?

Centrum Figuræ, *punctum illud* appellant, *in quo omnes diametri ſe ſe mutuò interſecant*, ſeu *à quo ſemidiametri exeunt.* Hoc autem propriè corporibus, ac ſuperficiebus conuenit, quibus propriè conuenit Figuræ nomen, licet etiam ad figuras conicas referri ſoleat. Et hoc tàm intra, quàm extra Figuram, eiuſque termino ſignatur; intra quidem vt in ſphæra, & circulo: extra, vt in conoide hyperbolico, & hyperbole: in termino, vt in hemiſphærio, ſemicirculo, omnibuſque ſectoribus.

Aliqui autem loquentes ſaltem de figuris rectilineis ordinatis, deſcripſerunt Figuræ centrum hunc in modum. *Figuræ aliquæ planæ multilateræ centrum habere dicuntur punctum illud, in quo omnes rectæ lineæ, vel angulos oppoſitos iungentes, biſariam ſecantur, vel ab angulis ductæ ad laterum oppoſitorum bipartitas ſectiones in eaſdem rationes.*

Centrum Magnitudinis quid?

Centrum Magnitudinis illud eſt punctum, quod vndique æqualiter ratione magnitudinis, vel extenſionis ab extremis abeſt. Hoc verò cuique quantitati finitæ conuenit, Lineis nimirum, Superficiebus, & Corporibus, ſed non ſingulis. Lineæ quandoquidem ordinatæ, ac vtrinque terminatæ centrum eſt illud punctũ, in quo ea biſariam diuiditur; at inter ſuperficies ſolus Circulus, inter ſolida ſola Sphæra eſt, cui Magnitudinis centrum propriè conueniat; impropriè tamen Polygonis, & Polyedris regularibus aptatur, in quibus videlicet latera hedra ab hoc ſecundùm ſe tota ſpectata, non autem ſecundum partes æquè recedunt; quo pacto Magnitudinis centrum extra quantitatem, cuius centrum dicitur, reperire licet; ſic ſe habent lineæ curuæ in ſe ipſas recurrentes, vt circularis, & elliptica; ſic ſe habent corona ſuperficialis, & annularia corpora.

Vel ſi dicere placet hoc centrum id eſſe punctum, quod in lineis eas biſſecat, in ſuperfi-

ciebus id, per quod vtcunque ducta recta linea ſuperficiem in duas æquales partes diuidit: in corporibus punctum illud, per quod vtcunque planum incedens æque partitur.

Hæc autem æqua partitio, tàm in lineis, quàm ſuperficiebus, atque corporibus ſic intelligenda eſt, vt partes illæ ſeorſum acceptæ ſint æquales, ac homogeneis æquiponderent.

Centrum grauitatis variè definitum fuit, dixerunt aliqui ſic definiendum, *Centrum grauitatis cuiuſque grauis eſt eiuſdem grauis medium*; ita quidem Ariſtoteles. Alij ſic, *dicimus autem centrum grauitatis vniuſcuiuſque corporis eſſe punctum quoddam intrapoſitum à quo ſi graue dependens mente concipiatur, dum fertur quieſcit, & ſeruat eam, quam in principio habebat poſitionem, neque in ipſa latione circumuertitur*; ita Pappus. Alij ſic, *centrum grauitatis vniuſcuiuſque ſolidæ figuræ, eſt punctum illud intrapoſitum, circa quod vndique partes æqualium momentorum conſiſtunt. Si enim per tale centrum ducatur planum, figuram quomodocunque ſecans, ſemper in partes æqueponderantes ipſam diuidet.*

Centri grauitatis variæ definitiones.

Qui hactenus de centro grauitatis tradita docuerunt, Phyſicè grauitatem ipſam contemplantes, ſolis corporibus adſcripſerunt, quibus re vera ineſt; ac ob id in ijs tantummodò grauitatis centrum agnouerunt, quibus cùm re ipſa tantùm grauitas inſit, & ipſum grauitatis centrum ineſſe poteſt.

Grauitas propriè corporibus ineſt.

Quamuis tamen nunquam Natura ſuperficies, & lineas à corporibus ſeiunxerit, à Mathematico tamen ſciungi permittitur, citra errorem. Non diſſimiliter, quamuis grauitas, grauitatiſque centrum ſolis corporibus inſit, nihilominus non ſine magno veritatis lucro ſibi Mathematicus arrogat, grauitatem ſuperficiebus, lineis, ac punctis ineſſe concipere. Quòd ſi permittendum, quod re verâ permitti debet, generalior eſt ineunda tractatio de ipſo grauitatis centro, ac propterea non ſiſtendum in deſcriptionibus ipſius hactenus traditis, quibus tantummodò centrum grauitatis, quod proprium eſt corporum, explicatur, ſed paulò vniuerſalior eſt afferenda definitio hunc in modum. *Grauitatis centrum vniuſcuiuſque finitæ quantitatis punctum eſt illud, vel in illa ipſa quantitate, eiuſue termino, vel extra poſitum, circa quod vndique partes æqualium momentorum conſiſtunt. Propterea quòd vel ipſum centrum, vel linea recta, ſiue planum per centrum quomodocunque ductum ſemper in partes æquè ponderantes propoſitam quantitatem diſpeſcet.*

Mathematicus grauitatē concipit ineſſe punctis, lineis, & ſuperficiebus, non ſine vtile.

Non eſt autē hìc prætereundum id, in quo nonnulli craſſiori Mineruа philoſophantes decepti ſunt, videlicet binas illas partes ab huiuſmodi puncto, aut plano ſecante factas æquipōderantes eſſe dicendas comparatione centri grauitatis totius; atque hunc in modum partes illas æqualium momentorum eſſe, non autē quaſi ſeorſim acceptæ, & ad trutinam reuocatæ æquiponderare debeant. Partes enim illæ æqualia momenta ſortiuntur ratione poſitionis, ac ſitus, quibus ſublatis, nihil prohibet quominus inæqualium illæ ſint ponderum: quæ quidem omnia facilè Libræ naturam perſcrutanti conſtabunt. Nō enim repugnat vt ea, quæ æquiponderant, etiam ſeorſim ſpectata æqualium ſint ponderum, id tamen neceſſarium non eſt ad æquilibrium, ſeu ad momentorum æqualitatem, cum teſtimonio libræ non rarò partes exigui ponderis ſeorſim ſpectatæ, ſi à centro longiùs abſint, æquiponderent partibus grauioribus propè centrum conſtitutis. Hæc autem vniuerſim dicta ſunto de grauitatis centro in triplici quantitatis genere; ſiquidem, vt paulò antea notauimus, non ſine magno ſapientiæ commodo, grauitatem ne dum corporibus, ſed etiam lineis, atque ſuperficiebus ineſſe concipimus. Obſeruarunt autem non rarò idem eſſe centrum grauitatis figuræ, eiuſdemque perimetri, quandoque verò non ita.

Quorundam error.

Nec etiam ommittendum eſt, quod in re, de qua agimus, non exigui momenti eſt, nimirum cùm grauitatem lineis, & ſuperficiebus ineſſe concipimus propriè loquendo, comparationem inſtituendam eſſe inter homogenea, quæ quantitate affecta intelligimus: vnde inter lineas, quas graues cōcipimus, inſtituenda eſt comparatio; item inter ſuperficies; tandem inter corpora; non autem inter lineas, & ſuperficies, vel inter ſuperficies, & corpora. De his tamen fuſiori calamo ſcribendum alibi.

Aduertenda quædam.

Reliquum eſt vt de vſu centri grauitatis ad dimenſiones, rationeſque figurarum ineundas, ſermonem inſtituamus. Non vno autem modo contingit; ducemus autem exordium ab eo, quem excoluit Antiquitas, iſque, vt perſpicuus reddatur, exemplis eum illuſtrabimus. Priùs tamen animaduertendum, eius vſum præcipuè conſiſtere, vt beneficio ipſius inter magnitudines rationem inueniamus; Ita planè ſuperiùs adnotatum fuit, ope centri grauitatis cognoſci quænam ſit ratio, videlicet ſeſquitertia, Parabolæ ad triangulum ſibi inſcriptum, & ſic de alijs.

De vſu centri grauitatis diſſerendum proponitur.

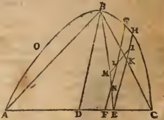
Metho-

Archimedes hunc vſum tenuit. Methodum hanc è Veteribus Archimedes in ſuo de Quadratura Paraboles Libro, lucu-lenter expreſſit, quamuis initio eam Mechanicam appellauerit, non ob id tamen deteſtabilem putes, cùm certis demonſtrationibus innitatur. Hunc porrò in modum ad Propoſitionem XVII vſque, proceſſit. Pergit deinde alia vtens, Methodo quæ purè Geometrica eſt, quæ quidem apud ipſum videri poteſt.

Sed, vt hęc aliquo illuſtremus exemplo, vnum, vel alterum afferemus ex ijs, quibus etiam & noſtra Methodo ſatisfacimus: propterea ſit

THEOREMA.

Exemplum LXXIV. *Parabole ſeſquitertia eſt trianguli eandem ſibi baſin, & eandem altitudinem habentis.*



Sit parabole AOBC, cui inſcriptum ſit triangulum ABC; vtriuſq; communis vertex eſto B, baſis autem AC. Dico parabolen AOBC, ſeſquitertiam eſſe trianguli ABC.

a 10. primi. Ducatur diameter BD, ſeceturque DC bifariã [a]
b 9. ſexti. in puncto E, & in F eá lege ſecetur, [b] vt ratio FC ad DF, ſit ſuperbipartiens tertias, hoc eſt, vt 5, ad
c 31. primi. 3: at verò per [c] puncta E, & F, agantur EH, FG parallelæ diametro DB; mox agatur BE occurrens FG in N; ſit autem portionis parabolicæ BHCB, grauitatis centrum I, punctum ſcilicet in kH, eiuſdem portionis diametro.

Ex I ducatur recta ad centrũ grauitatis ſemiparaboles BHCD, quod neceſſariò erit in recta FG, vt demonſtrabitur, nimirum L, & protracta ad partes L occurret rectæ BE in puncto, videlicet M, quod erit centrum grauitatis trianguli DBC, vt infrà dicetur; quare EB tripla erit ipſius EM, & punctum M neceſſariò cadet inter B, & N, vt paulò infra conſtabit.

Reſolutio.

Qvoniam integrã parabole AOBC, ſeſquitertia eſt trianguli integri ABC; ergo ſemi-
d 15. quinti. parabole DBHC ſeſquitertia erit [d] trianguli DBC: ſed MI eſt ſeſquitertia ipſius LI,
e 11. quinti. *f corol. 19. quinti.* vt mox videbimus; ergo [e] vt MI ad IL, ita ſemiparabole DBHC, ad triangulum DBC; ergo [f] per conuerſionem rationis, vt IM ad ML, ita ſemiparabole DBHC, ad para-
g 17. quinti. bolicam portionem BHCB; & [g] diuidendo vt LI ad ML, ita reciprocè triangulum DBC, ad portionem parabolicam BHCB. Quod ita ſe habet; nam M, eſt centrum grauitatis trianguli DBC: & I eſt centrum grauitatis portionis parabolicæ BHCB: & L eſt centrum grauitatis ſemiparaboles DBHC. Si autem cuiuslibet figuræ planæ vtcunque ſectæ centra grauitatis partium iungantur recta linea, huiuſmodi linea à centro grauitatis totius prædicti
h 8. primi Archim. æquipond. plani ita ſecatur, [h] vt ſegmenta è contrario reſpondeant partibus commemoratis.

Lemma I.

Quòd autem centrum grauitatis ſemiparaboles BHCD, ſit in recta FG, quæ parallela eſt ipſi DB, oſtendetur inferiùs. *Eſt enim ipſius FC ad DF ratio ſuperbipartiens tertias &c.* Oſtendetur inquam inferiùs, vbi de noſtra peculiari Methodo agetur, & quidem longè aliter, ac ab alijs preſtitum fuerit.

Lemma II.

Quod verò IL protracta ad partes L, occurrat centro grauitatis trianguli DBC, cuiuſmodi eſt ex hypotheſi punctum M, ſic oſtendo. *Quoniam enim I punctum, eſt centrum grauitatis portionis parabolicæ BHCB; & M, centrum grauitatis trianguli DBC; denique*

L eſt

L eſt centrum grauitatis ſemiparaboles BHCD; eſt autem ſemiparabole prædicta vtcunque diuiſa à recta BC in partes, quarum vna eſt portio parabolica BHCB, cuius centrum grauitatis eſt I; alia verò eſt triangulum DBC, cuius grauitatis centrum eſt M; ergo recta coniungens puncta I, M ſecari debet ab L, centro grauitatis totius magnitudinis, nempè ſemiparaboles BHCD: ſi igitur recta IL, non perueniret ad M, grauitatis centrum trianguli DBC, recta coniungens puncta M, I non tranſiret per L; alioquin duarum rectarum vnum foret commune ſegmentum LI; atque adeò non ſecaretur à centro grauitatis, nimirum ſemiparaboles BHCD. Quod eſt inconueniens.

Breuiùs ex octaua Prop. Æquiponderantium Archimedis.

Lemma III.

Quòd autem EM ſubtripla eſſe debeat ipſius BE, conſtat. *Nam grauitatis centrum vniuſcuiuſque trianguli eſt punctum in recta ducta à vertice biſſecante baſin, ita vt pars ad verticem, dupla ſit reliqua.*

Lemma IIII.

Quod autem MI ſit ſeſquitertia ipſius LI, ſic oſtenditur. *Qualium enim partium CD eſt octo, talium DE debet eſſe quatuor, cùm DC diuiſa ſit biſariam in E; eſt autem FC ex conſtructione quinque; ergo FE erit vnum; & quia FN parallela eſt ipſi BD, ob id erit, vt DE ad EF, ita BE ad EN; ſed DE ad EF, eſt in ratione quadrupla, cùm DE taxatâ, vt quatuor, FE valeat vnum; ergo BE ad EN, erit in ratione quadrupla; eſt * autem BE ad EM, in ratione tripla; ergo ſi BE taxetur duodecim, ME valebit quatuor, & NE valebit tria, atque adeò MN valebit vnum, itaque ME quadrupla erit ipſius MN; at ob parallelas NL, EI, quæ ratio eſt EM ad MN, eadem eſt IM ad ML; ergo IM quadrupla erit ipſius ML; quare per conuerſionem rationis MI ſeſquitertia erit ipſius LI.*

* *Ex eo quod præmiſſum eſt lemmate.*

Punctum M, cadet inter B & N; *Nam alioquin caderet extra FG, quod eſt abſurdum.*

Compoſitio.

QVoniam L eſt centrum grauitatis ſemiparaboles DBHC, vt vidimus; & I, eſt centrum grauitatis portionis parabolicæ BHCB; & M, eſt centrum grauitatis trianguli DBC; ergo erit, vt oſtendemus, reciprocè, vt LI ad ML, ita triangulum DBC ad portionem parabolicam BHCB; ergo componendo, vt IM, ad ML, ita ſemiparabole DBHC, ad parabolicam portionem BHCB; ergo per conuerſionem rationis, vt MI, ad IL, ita ſemiparabole DBHC ad triangulum DBC; ſed MI eſt ſeſquitertia ipſius LI; ergo ſemiparabole DBHC, ſeſquitertia erit trianguli DBC; ergo integra parabole ABHC, ſeſquitertia erit trianguli integri ABC, Quod oportebat &c.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Initium Reſolutionis, & finis Compoſitionis.

Quoniam integra parabole AOBC ſeſquitertia eſt trianguli integri ABC; ergo
Semiparabole DBHC ſeſquitertia erit trianguli DBC: ſed
MI eſt ſeſquitertia ipſius LI, ergo
Vt MI ad IL, ita ſemiparabole DBHC, ad triangulum DBC; ergo per conuerſionem rationis.
Vt IM ad ML, ita ſemiparabole DBHC ad parabolicam portionem BHCB: & diuidendo.
Vt LI ad LM, ita reciprocè triangulum DBC ad portionem parabolicam BHCB; Quod ita ſe habet: nam M, eſt centrum grauitatis trianguli DBC: & I, eſt centrum grauitatis portionis parabolicæ BHCB: & L, eſt centrum grauitatis ſemiparaboles DBHC. ergo IM ita ſecabitur in L, vt reciprocè &c.

Finis Reſolutionis, & Initium Compoſitionis.

Si autem cuiuslibet figuræ planæ vtcunque ſectæ centra grauitatis partium iungantur, rectâ lineâ, huiuſmodi linea à centro grauitatis totius prædicti plani ita ſecatur, vt ſegmenta è contrariò reſpondeant partibus commemoratis,

SCHOLION.

Ex dictis apparet vſus centri grauitatis ad oſtendendam rationem inter duas ſuperficies. Non diſſimiliter in corporibus ad idem, grauitatis centrum adhiberi ſolet. Obſerua autem in ſuperiori reſolutione, MI, adhiberi, tanquam libram, atque L, ſe habere, tanquam Hypomoclion, & ipſius libræ extremis M, I, intelligi appenſa grauia, nempè triangulum DBC, & ſpatium parabolicum BHCD.

Aliter.

QVoniam, vt infra demonſtrabimus, peculiarem noſtram Methodum tractantes, adhibito etiam grauitatis centro, ſpatium DBC, triplum eſt ſpatij BHCB; ergo componendo ſpatium DBHC quadruplum erit ſpatij BHCB; ergo per conuerſionem rationis ſpatium DBHC ſeſquitertium erit ſpatij BDC, ſed vt ſimplum ad ſimplum, ita duplū ad duplum; ergo parabole AOBHC, quæ eſt duplum ſpatij DBHC, ſeſquitertia erit trianguli ABC, quod eſt duplum ſpatij DBC.

Nec deſunt alij modi quibus, mediante centro grauitatis, hoc idem Theorema oſtendi poteſt.

Sed & illud quoque mediante grauitatis centro demonſtrabitur.

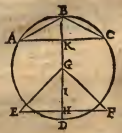
THEOREMA.

Exemplum LXXV.

Circuli ſegmentum ad inſcriptum ſibi triangulum eiuſdem baſeos ac altitudinis, eſt vt duæ tertiæ partes diametri ſegmenti reliqui ad rectam connectentem circuli centrum, & grauitatis centrum, quod ab initio proponebatur, ſegmenti.

Segmentum prædictum, vel eſt non maius, vel maius dimidio circuli. Sit primò non maius.

Eſto circulus ABCD, cuius centrum G, ſegmentum dimidio non maius ſit quod recta AC, & peripheria ABC continetur, cui ſit inſcriptum triangulum ABC, cuius altitudo, BK, quę ſit propterea ſegmenti ABC diameter. Manifeſtum autem, quod hæc producta, tranſibit per G circuli centrum. Reliqui ſegmenti diameter ſit KD, ſitq; ſegmenti recta AC, & peripheria ABC, comprehenſi, grauitatis centrum punctum L.



Oſtendendum eſt Circuli ſegmentum comprehenſum rectâ AC & peripheriâ ABC ad triangulum ABC eſſe, vt duæ tertiæ partes ipſius KD ad GL.

Fiat triangulum EGF, cuius baſis parallela, & æqualis AC, & altitudo GH æqualis AK, huius porrò grauitatis centrum ſit I, punctum, in quo GH ita diuiditur, vt GI ſit dupla ipſius IH.

Reſolutio.

QVoniam eſt vt duæ tertiæ partes ipſius Dk ad GL, ita ſegmentum ABC ad triangulum ABC; ſed vt GI ad GL, ita eſt ſegmentum ABC ad triangulum EGF; vt infra conſtabit; æquiponderant enim ex G, ergo per ſubtractionem æqualium rationum, vt duæ tertiæ partes ipſius DK, ad duas tertias partes ipſius GH, hoc eſt ad GI, ita triangulum EGF, ad triangulum ABC, ſed vt duæ tertiæ partes ipſius DK

ad

ad ipſam GI, ita DK ad GH; ergo vt DK ad GH, ita triangulum EGF ad triangulum ABC. Sed vt Dk ad Ak, ita Dk ad GH; ergo vt Dk ad AK, ita triangulum EGF, ad triangulum ABC; ſed vt Ak ad KB, ita Dk ad Ak; ergo vt AK ad KB, ita triangulum EGF ad triangulum ABC. Sed GH eſt ex conſtructione æqualis AK; ergo vt GH ad BK, ita triangulum EGF ad triangulum ABC. Quod ita ſe habet; ſunt enim triangula quorum baſes ſunt æquales, atque adeo ſunt inter ſe vt altitudines.

Lemma.

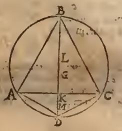
Quod autem ſit vt GI ad GL, ita ſegmentum ABC ad triangulum EGF, *noſtra peculiari Methodo inferius oſtendemus.*

Compoſitio.

QVoniam triangula ABC, EGF ſunt æqualium baſium, erunt inter ſe vt altitudines; ergo vt GH ad BK, ita triangulum EGF ad triangulum ABC, ſed GH ex conſtructione eſt æqualis AK; ergo vt AK ad KB, ita triangulum EGF ad triangulum ABC, ſed vt AK ad kB, ita Dk ad AK; ergo vt DK ad Ak, ita triangulum EGF ad triangulum ABC, ſed vt DK ad AK, ita DK ad GH; ergo vt DK ad GH, ita triangulum EGF ad triangulum ABC; ſed vt DK ad GH, ita eædem partes ipſius DK ad eaſdem partes ipſius GH, nempè duæ tertiæ partes ad duas tertias partes; ergo vt duæ tertiæ partes ipſius DK ad duas tertias partes ipſius GH, hoc eſt ad GI, ita triangulum EGF ad triangulum ABC; ſed vt GI ad GL, ita quidem eſt ſegmentum ABC ad triangulum EGF; ergo [a] vt duæ tertiæ partes ipſius Dk ad GL, ita ſegmentum ABC ad triangulum ABC. Quod opportebat oſtendere. *a 23. quinti.*

At quando ſegmentum fuerit maius dimidio.

Iunctis AD, DC, reliquæ portionis ADC grauitatis centrum eſto M, ex hactenus demonſtratis liquet, ſegmentum comprehenſum recta AC, & peripheria ADC, ad triangulum ADC, eſſe vt duæ tertiæ partes BK ad GM; at vt triangulum ADC ad triangulum ABC, ita eſt KD ad BK, ſeu vt duæ tertiæ ipſius KD ad duas tertias partes ipſius KB; ergo vt duæ tertiæ partes ipſius KD ad GM, ita erit [a] ſegmentum comprehenſum rectâ AC, & peripheriâ ADC ad triangulum ABC, ſed vt ſegmentum comprehenſum rectâ AC, & peripheria ABC, ad ſegmentum alterum ſub recta AC, & peripheria ADC, eſt [b] vt GM ad GL (eſt enim G cētrum grauitatis totius figuræ & L, ac M, ſunt centra partium;) ergo [c] vt duæ tertiæ partes KD ad GL, ita ſegmentum contentum rectâ AC, & peripheriâ ABC, ad triangulum ABC.



a 23. quinti.

b 8. æquipond. Archim.

c 23. quinti.

Conſpectus Reſolutionis, atq; Compoſitionis.

Quoniam eſt vt duæ tertiæ partes ipſius DK ad GL, ita ſegmentum ABC ad triangulum ABC; ſed *Initium Reſolutionis, & finis Compoſitionis.*
Vt GI ad GL, ita eſt ſegmentum ABC ad triangulum EGF; æquiponderant enim ex G. ergo per ſubtractionem æqualium rationum.
Vt duæ tertiæ partes ipſius Dk ad duas tertias partes ipſius GH, hoc eſt ad GI, ita triangulum EGF ad triangulum ABC; ſed
Vt duæ tertiæ partes ipſius DK ad duas tertias partes ipſius GH, ita DK ad GH; ergo
Vt Dk ad GH, ita triangulum FGE ad triangulum ABC, ſed
Vt Dk ad AK, ita DK ad GH; ergo

Vt DK ad AK, ita triangulum EGF ad triangulum ABC; ſed
Vt Ak ad kB, ita Dk ad Ak; ergo
Vt AK ad KB, ita triangulum EGF ad triangulum ABC; ſed
Vnica Reſolutionis, & ...tium Compoſitionis. *GH eſt ex conſtructione æqualis AK; ergo*
Vt GH ad Bk, ita triangulum EGF ad triangulum ABC. Quod ita ſe habet; ſunt enim triangula, quorum baſes ſunt æquales, atque adeo ſunt inter ſe, vt altitudines.

SCHOLION.

Ex his porrò, quæ modo dicebamus, facilè innoteſcet ratio circuli ad quadratum inſcriptum; ſi namque nos intelligamus AC ductam per centrum G, ad rectos angulos cum BD, & ad eius extrema ductis rectis ex B, fiet triangulum, ad quod ſemicirculus eam habebit rationem, quam habent duæ tertiæ partes ſemidiametri DG ad rectam coniungentem G centrum circuli, ſcilicet figuræ, & grauitatis, & centrum grauitatis ipſius ſemicirculi; quod comparatur per analogiſmum illum. Vt ſemiperipheria ad diametrum, ita tertia pars diametri ad aliam interceptam inter circuli centrum, & grauitatis centrum ſemicirculi: ſeu quod in idem redit; Vt ſemiperipheria circuli ad duas tertias partes diametri, ita ſemidiameter, ad interceptam inter circuli centrum, & centrum grauitatis ſemicirculi. Nam ſi fuerint duæ quantitates, fueritq; vt prima ad ſecundã, ita tertia pars huius ad aliam. Etiam vt prima ad duas tertias partes ſecundæ erit, vt dimidia pars ſecundæ ad illam; vnde ſi Geometricè reperiatur illud ſemicirculi centrum grauitatis, & Geometricè quoq; quadratum circulo æquale exhibebitur. Obſerua autem vſum centri grauitatis, in ſupraposita Reſolutione, non vno in loco.

Sed nondum ad generalem formam Theorema redactum eſt; nam hoc proprium eſt ipſius circuli, quatenus GH trianguli altitudo facta eſt æqualis AK, quæ media proportionalis eſt inter DK, KB; ſed ſi GH intelligatur potens rectangulum DKB, quamuis non ſit æqualis AK, quæ eſt ſemibaſis trianguli ABC, fiet Theorema commune circulo, & Ellipſi, qua de re hìc non nulla dicenda.

Commune autem fiet, ſi præcipiamus, loco ipſius AK, pro ipſa GH in triangulo EGF ſubſtitui rectam, quæ poſſit rectangulum BKD; in Ellipſi ſiquidem AK non eſt huiuſmodi, quamuis in circulo ſit, hoc autem intellecto demonſtrationem contexere licebit ad eum, qui ſequitur, modum.

THEOREMA.

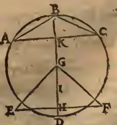
Exemplum LXXVI.

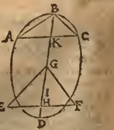
Cuiuslibet circuli, ac Ellipſeos quidem ſegmentum ad inſcriptum ſibi triangulum eiuſdem baſeos, ac altitudinis, eſt, vt duæ tertiæ partes diametri ſegmenti reliqui ad illum, quæ ex figuræ centro ad grauitatis centrum eius, quod initio dicebatur, ſegmenti.

Segmentum prædictum, vel eſt non maius, vel maius dimidio circuli: ſit primò non maius.

Reſolutio.

QVoniam igitur, vt duæ tertiæ partes ipſius Dk ad GL, ita ſegmentũ ABC ad triangulũ ABC; ſed vt GI ad GL, ita eſt ſegmentũ ABC ad triangulũ EGF, vt infra conſtabit; ergo vt duæ tertiæ partes DK ad GI, ita a triãgulũ EGF, ad triangulũ ABC;





a per ſubtractionē æqualium rationū.

ſed

ſed vt DK ad GH, ita duæ tertiæ partes ipſius DK ad GI, nempè ad duas tertias partes ipſius GH; ergo vt DK ad GH, ita triangulum EGF ad triangulum ABC; ſed vt GH ad BK, ita DK ad GH, cùm GH, ex conſtructione poſſit rectangulum BKD; ergo vt GH ad BK, ita triangulum EGF, ad triangulum ABC. Quod ita ſe habet; prædicta enim triangula EGF, & ABC, cùm æquales habeant baſes, erunt inter ſe in ratione ipſarum GH, Bk.

Lemma.

Quòd autem ſit, vt GI ad GL, ita ſegmentum ABC ad triangulum EGF, oſtendemus infra, noſtrâ peculiari Methodo vtentes.

Compoſitio.

QVoniam itaquè triangula EGF, & ABC ſunt ſuper æqualibus baſibus conſtituta, erunt inter ſe vt rectæ GH, BK; ergo vt GH ad BK, ita triangulũ EGF ad triangulum ABC, ſed vt GH ad BK, ita Dk ad GH, cùm GH poſſit rectangulum BKD; ergo vt Dk ad GH, ita triangulum EGF ad triangulum ABC; ſed vt DK ad GH, ita duæ tertiæ partes ipſius DK ad duas tertias partes ipſius GH, nempè ad GI; ergo vt duæ tertiæ partes Dk ad ipſam GI, ita triangulum EGF ad triangulum ABC; ſed vt GI ad GL, ita quidem eſt ſegmentum ABC ad triangulum EGF, vt vidimus; ergo [a] vt duæ tertiæ partes ipſius DK ad GL, ita ſegmentum ABC, ad triangulum ABC. Quod oportebat oſtendere. a 23. quinti.

At quando ſegmentum fuerit maius dimidio, ratiocinandum vt ſupra, quodque de circulo diximus, Ellipſi eſt accommodandum.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Quoniam igitur vt duæ tertiæ partes ipſius DK ad GL, ita ſegmentum ABC ad triangulum ABC; ſed *Initium Reſolutionis, & finis Compoſitionis.*
Vt GI ad GL, ita eſt ſegmentum ABC ad triangulum EGF; ergo
Vt duæ tertiæ partes Dk ad GI, ita triangulum EGF, ad triangulum ABC: ſed
Vt DK ad GH, ita duæ tertiæ partes ipſius DK ad GI, nempè ad duas tertias partes ipſius GH; ergo
Vt Dk ad GH, ita triangulum EGF ad triangulum ABC: ſed
Vt GH ad Bk, ita DK ad GH, cum GH ex conſtructione poſſit rectangulum BkD; ergo *Finis Reſolutionis, & initium Compoſitionis.*
Vt GH ad Bk, ita triangulum EGF, ad triangulum ABC. Quod ita ſe habet; prædicta enim triangula EGF, & ABC, cum æquales habeant baſes, erunt inter ſe, vt GH ad Bk, atq; adeò altitudines.

In eo igitur hæc Methodus conſiſtit, quod vtatur principijs mechanicis. Mechanica verò principia dico, quæ grauitatis centrum concernunt; omnis quandoquidem demonſtratio è principijs concluſionem deducit. Principiorum autem nomine medium intelligitur; hinc porrò demonſtratio nomenclaturam conſequitur; & demonſtratio ipſa talis eſt, cuiuſmodi eſt medium; & quamuis demonſtrationis principia complexa ſint, medium autem quid incomplexum, principiorum tamen, nomine quæ complexa ſunt, medium intelligitur; quoniam ab hoc illa conditionem ſortiuntur. Quamobrem principia complexa illa mechanica dicentur, quatenus in ijs mechanicum medium continetur. Mechanicum autem erit ſi grauitatis centrum extiterit. *In quo hæc methodus conſiſtat.*

Cæterùm vniuerſalis illa reſolutionis Methodus ab Antiquis exculta, de qua ſuperiùs abundè tractauimus, Mechanicæ demonſtrandi rationi maximè accommodatur, vt vidimus. Et hæc quantum ad antiquum vſum centri grauitatis; recens autem mox explicabitur modus adhibendi grauitatis centrum, ad Geometricas veritates indagandas.

Modus igitur alter adhibendi grauitatis centrum erit huiuſmodi, vt rectè dixeris, eum conſiſtere in certa quadam cuiuſuis quantitatis Rotundæ compoſitione, reſolutione, atque in hinc deductis dimenſione, comparatione, &c. Sic enim ferè eius Auctor Guldinus loquitur, Rotundi nomine intelligendo lineas, ſuperficies, & corpora, quæ aliquo pacto ex ſimplici quodam circulari motu, quem *rotationem* appellat, ortum ducunt, adeò vt Rotundi *Modus alter adhibendi centrum grauitatis.* *In quo hæc Methodus conſiſtat.*

Quid Rotūdi nomine ſit intelligendum.

tundi nomine ne dum Sphæram, Conum, Cylindrum, Sphæroidem, Conoidem &c. ſed & illorum ſuperficies ac lineas, quæ in ijs per motum illum circularem deſignantur, intelligere debeamus.

Motus localis ſimplex in duplici diſcrimine.

Duplex Poteſtas Directa, & Rotunda.

Quoniam autem duplex eſt ſimplicis motus localis quidem ſpecies, prout ad præſens attinet inſtitutum; nimirum rectus, & circularis, ita fit vt Poteſtas Geometrica à motu originem ſumens in duplici ſit diſcrimine, Directa ſcilicet, & Rotunda; illa ex motu recto, hæc autem ex circulari naſcitur.

Vtraque Poteſtas tripartitò diuiditur.

Vtraque Poteſtas tripartitò diuiditur iuxta triplicem quantitatis continuæ ſpeciem, ita fit vt primi gradus Poteſtas ſit Linearis, ſecundi Superficialis, tertij Corporea. Quorum graduum ortus ita ſe habent; primus ex motu puncti, ſecundus ex motu lineæ, tertius ex motu ſuperficiei: vnde puncti quidem Poteſtas eſt linea: lineæ ſuperficies: ſuperficiei corpus.

Linea recta quid?

Linea recta eſt Poteſtas primi gradus.

Iam enim vulgatum eſt apud Mathematicos lineam rectam nil aliud eſſe quam veſtigium puncti motum in plano rectà ſubeuntis; imaginantur enim punctum ipſum in directum moueri ſuper planum, veſtigiumque relictum ſine latitudine, & ſine profunditate, lineam eſſe; atque adeò ſi Poteſtas dici debet, quæ ex motu naſcitur, linea recta, Poteſtas erit, & quidem primi gradus.

Parallelogrāmum eſt Poteſtas ſecundi gradus.

Quòd ſi huiuſmodi lineam genitam imaginemur in plano quopiam tranſuerſim moueri ſibi parallelam, ita vt eius extrema puncta binas deſcribant lineas, priori quidem ad rectos angulos, orietur parallelogrammum rectangulum Poteſtas ſecundi gradus.

Parallelepipedum eſt Poteſtas tertij gradus.

Si demum ſuperficiem iam ortam eleuari, aut deprimi nos intelligamus, vt ſibimet ſemper ſit parallela, ita vt eius termini, ſcilicet extremæ lineæ plana deſcribant, quæ ad primum planum ſint ad angulos rectos, orietur corpus planis vndique rectangulis comprehenſum, quorum bina oppoſita perpetuò ſunt parallela, quod parallelepipedum appellatur, eſtque Poteſtas tertij gradus. Poteſtatis autem Directæ ortus hic eſto.

Prædictæ Poteſtatis quilibet gradus diuiditur in Iuſtam, maiorē, & minorem Iuſta.

In ſecūdo gradu Iuſta Poteſtas eſt quadratū. Rectāgulum altera parte breuius Poteſtas minor Iuſta: altera verò parte longius Poteſtas maior Iuſta.

In tertio gradu Iuſta Poteſtas eſt cubus. Parallelepipedum quod altitudine cubū non adæquat, Poteſtas eſt minor iuſta, quæ verò excedit, maior iuſta.

Poteſtatis iam dictæ quilibet gradus, diuiditur in Iuſtam, Maiorem Iuſta, & Minorem Iuſta; quamuis autem in primo gradu, in quo eſt linea huiuſmodi partitio abſolutè locum habere minimè videatur, cùm linea quæcunque, ſiue recta, ſiue circularis Iuſta Poteſtas dici poſſit; comparatiuè tamen etiam maior, & minor admitti debet. In ſecundo gradu vbi ſuperficies lineæ rectæ Iuſta Poteſtas quadratum erit. At rectangulum altera parte breuius eſt Poteſtas Minor Iuſta, altera verò parte longius Poteſtas eſt Maior Iuſta. In tertio denique gradu Poteſtas Iuſta eſt Cubus, vnde parallelepipedum quod altitudine cubum non adæquat Poteſtas eſt Minor Iuſta, quod verò Cubum altitudine excedit, Poteſtas eſt Maior Iuſta.

Rotunda Poteſtas eſt amplior quam Directa.

Poteſtates Rotundæ, & rotunda corpora ſunt infinita.

Rotunda Poteſtas numeroſior eſt, infinitas ſub ſe continens magnitudines, ad tria tamen genera facilè reuocabiles, loquendo de Poteſtatibus ſecundi, & tertij gradus, nam ad primum quod attinet, vnicam ſpeciem continet, videlicet lineam, & quidem circularem. Poteſtas autem ſecundi gradus genita ex linea ne dum recta, ſed ex quacunque ſiue ſimplici, recta videlicet, & circulari, ſiue mixta quauis, dummodo intelligantur omnes eius partes in eodem plano conſiſtere, infinities multiplicari poteſt; vnde infinitæ ſunt Poteſtates ſiue ſuperficies Rotundæ. Hac itaque ratione Poteſtas tertij gradus ex quacunque ſuperficie plana lineis, & quotcunque, & quibuſcunque terminata naſcitur; ac propterea huiuſmodi Poteſtates, ſiue Rotunda corpora infinita ſunt, quorum geneſis luculentius hic explicabitur.

Vt enim Directæ Poteſtates fieri concipiuntur ex motu recto magnitudinis illius, quæ rectà progrediendo, illas deſcribit; non diſſimiliter Poteſtates Rotundæ fiunt ex circulari motu puncti, vel magnitudinis, quæ per rotationem circa centrum firmum ac certum, vel immobilem axem, eaſdem progignit; quamobrem primi gradus Poteſtas eſt veſtigium, quod poſt ſe aliquod punctum relinquit in eodem plano cum centro ſui motus ſitum, circumductum in orbem. Hoc autem punctum non aliam ſui ſitus differentiam agnoſcit, quàm illam, quæ naſcitur ex diuerſa ipſius à centro rotationis elongatione, quæ quando nulla fuerit, ſed potius rotandum punctum cum ipſo centro motus, vel rotationis conuenit, alia tunc Poteſtas non eſt Iuſta ſanè dicenda, quàm illud ipſum punctum, quo cùm nihil liceat minus aſſignare, duas tantummodo ſpecies admittit Iuſtam, & iuſta Maiorem; Iuſta, propterea quod præciſè in ſe ipſam cùm ducitur, ſiue directè, ſiue circulariter di-

ſcenda eſt; vnde punctum in ſe ipſum producit punctum, quod quidem à centro rotationis diſiunctum, perfectam circuli peripheriam deſcribit.

Sicut Poteſtates Directa ex motu recto, ita Rotunda ex motu circulari fiunt.

Innumeræ ſunt autem Rotundæ Poteſtates ſecundi, & tertij gradus, cùm quantitates vnde naſcuntur, lineæ videlicet, & ſuperficies, ne dum variæ eſſe poſſint, ſed varios quoque ſitus obtineant; nihil tamen prohibet quin ad finitas ſpecies, ac genera reuocentur. Et primo quidem retentâ illâ partitione Poteſtatis in Iuſtam, Maiorem, & Minorem Iuſtâ, aliora quædam genera ſunt addenda iuxtà ſitum. Hic enim Rotundæ ſeu circumuoluendæ quantitatis, aut Horizontalis, aut Verticalis, aut Obliquus eſt, habitâ ratione ad horizontem eundem; vnde Poteſtates Rotundæ fiunt Horizontales, Verticales; & Obliquæ. Quòd ſi eadem quantitas Rotanda exiſtens, aut Horizontalis, aut Verticalis, aut Obliqua ad centrum, vel axem ſui motus, tam propinquè accedere poſſit, vt eundem ſitum retinens propinquiùs accedere nequeat, quando ſcilicet in ſui vel aliqua parte, aut puncto, punctum prædictum vel axem contigerit, vna procreabitur Poteſtas, ſiue Horizontalis, ſiue Verticalis, ſiue Obliqua.

Puncti Poteſtas Iuſta eſt punctum; habet Poteſtas Iuſta Maiorem ſed non minorem.

Puncto à centro diſiuncto ſui reuolutione perfectam peripheriam circuli deſcribit.

At ſi quantitas eadem Rotanda in tantum acceſſerit, vt centrum motus, vel partem axeos in ſe receperit, & ſecundùm aliquam ſui partem vltra eundem proceſſerit, & ab axe diſſecta fuerit, tunc Poteſtas generabitur minor Iuſtâ. Alia multa addit Guldinus, & exemplis illuſtrat, quæ apud ipſum videri poſſunt.

Poteſtates Rotundæ ſecundi & tertij gradus multiplicantur ob triplicem ſitum ſcilicet horizontalē, verticalē & obliquum quantitatum vnde naſcuntur.

Solùm hic definitiones quaſdam commemorabimus.

Rotatio, motus eſt ſimplex, & perfectè circularis circa centrum conſiſtens, aut immotum axem, qui quidem Rotationis axis nuncupatur, circumuehens ſiue punctum, ſiue lineam, ſiue planam ſuperficiem, quæ poſt ſe tanquam veſtigium relinquat deſcribat, ſiue efficiat Rotundam vel lineam, vel ſuperficiem, vel quantitatem corpoream.

Poteſtates Rotundæ ſūt horizontales, verticales, & obliquæ.

Quod autem hoc motu circumagitur dicitur punctum, vel linea, vel ſuperficies, vel quantitas Rotanda, ſiue Rotata; at verò genita ex hac rotatione quantitas, dicitur Poteſtas eius, quod circumuectum eſt, generalique nomine Rotundum dicitur.

Poteſtas Rotunda Iuſta quando generetur.

Radius Rotationis eſt linea recta finita, horizonti parallela, ad axem rotationis perpendicularis, in quo axe ſiue in rotationis centro alterum ipſius punctum extremum conſiſtit, alterum autem in grauitatis centro rei illius, quæ rotatur, & qua Poteſtatem generat, infigitur.

Quando generetur Poteſtas Rotunda Minor Iuſta.

Huiuſmodi autem linea concipitur in eodem plano perpetuò conſiſtere cum puncto illo, linea, vel ſuperficie, quæ rotatur, ac in eius centro grauitatis terminatur, eamque ſibi circumducit affixam, ea lege vt hic Radij terminus circumagatur altero permanente immoto in centro, vel axe Rotationis.

Prima. Quid ſit Rotatio.

Via rotationis eſt circuli circumferentia; quam in rotatione deſcribit grauitatis centrum quantitatis rotata, ſiue terminus radij rotationis circumlatus.

Secunda. Quid ſit quātitas Rotāda, vel rotata.

Remotio, ſiue diſtantia, ac elongatio puncti, ſeu quantitatis, quæ rotatur à rotationis axe, propriè quantitas eſt Radij rotationis. Propriè autem dicitur, quia remotio illa quandoque ſumitur indeterminatè, ita vt quantitas Rotanda eſſet dicta à rotationis axe remota, quæ ipſum nullo modo tangeret; & eadem quantitas nihil prorſus ab eodem axe remota diceretur, quæ ipſum in aliqua ſui, ſiue puncto, ſiue parte contingeret.

Tertia. Radius Rotationis quid.

Quarta. Via rotationis quid.

Remotio, ſeu elōgatio pūcti ſeu quātitatis quæ rotatur quid ſit.

Sed pro Compoſitione Poteſtatum Rotundarum, Generalis hæc Regula traditur.

Quantitas Rotanda in viam rotationis ducta producit Poteſtatem Rotundam, vno gradu altiorem Poteſtate, ſiue quantitate rotatâ.

Regula generalis.

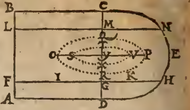
Generalem hanc Regulam, etſi veriſſimam, indemonſtratam tamen reliquit huius Methodi Auctor. Sed ex ijs, quæ Ioannes Antonius Roccha felicis memoriæ, cuius conſuetudine Ferrariæ, valdè familiariter vtebar, ex ijs, inquam, quæ Caualerio communicauerat, mihique oſtenderat, demonſtrari commodè poſſet. Erat autem huiuſmodi.

Hanc regulā generalem eſſe veriſſimā indemonſtratā tamen Auctor reliquit.

Lemma.

Si figurâ plana ſuper aliqua ſui recta linea figuram ipſam ſecante libretur, erunt momenta ſegmentorum figuræ, vt ſunt ſolida Rotunda ab ipſis ſegmentis circa ſecantem lineam reuolutis, deſcripta.

Sit fi-



Sit figura ABEA, quam ſecet recta quæpiam CD in partes ABCD, & CED: concipiatur autem circa ipſam CD, velut circa axem, librata reuolui. Dico momentum figuræ ABCD, ad momentum figuræ CED eſſe, vt ſolidum Rotundum genitum ex rotatione figuræ ABCD, ad ſolidum Rotundum procreatum ex rotatione figuræ CED, reuoluta circa eundem axem CD. Sumptis in CD axe quibuſcunque punctis G, M, per quæ agantur FH, LN; ductæque ſint ipſi CD ad rectos angulos; vel ſi ſegmentum ABCD fuerit rectangulum, intelligantur ductæ parallelæ ipſi AD, ita vt portionibus FG, LM exiſtentibus in figura BD, reliquæ GH, MN exiſtant in figura CED. Diuiſis autem FG, GH, bifariam in punctis I, & K.

Quoniam igitur momentum rectæ FG ad momentum rectæ GH, ſi intelligatur vtraque circa G librari, rationem habet compoſitam ex ratione magnitudinis FG, ad magnitudinem GH, & ex ratione IG, diſtantiæ centri grauitatis I, ex puncto G, ad GK diſtantiam centri grauitatis K, ab eodem puncto G (eſt enim I, centrum grauitatis magnitudinis FG, vt K, centrum grauitatis magnitudinis GH,) hoc eſt ex ratione FG ad GH; vt enim ſimplum ad ſimplum, ita duplum ad duplum; ſed duæ rationes FG ad GH, componunt rationem quadrati FG ad quadratum GH; ergo momentum rectæ FG ad momentum rectæ GH, erit, vt quadratum FG ad quadratum GH; hoc eſt vt circulus, cuius radius FG ad circulum, cuius radius GH. Nec diſſimiliter momentum rectæ LM, ad momentum rectæ MN, erit, vt quadratum LM ad quadratum MN; & ſic de reliquis. Deinde verò momentum FG ad momentum LM, eſt, vt quadratum FG ad quadratum LM, & ita ſemper; ergo omnes primæ ſimul magnitudines, videlicet omnia momenta figuræ BD, ad omnes ſecundas ſimul, nempè ad omnia momenta figuræ CED, erunt vt omnes tertiæ ſimul, ſcilicet vt omnia quadrata figuræ BD, ad omnia quadrata figuræ CED, ſeu quod idem eſt, momentum figuræ BD ad momentum figuræ CED, erit, vt omnia quadrata figuræ BD, ad omnia quadrata figuræ CED; hoc eſt vt omnes circuli figuræ BD, quorum ſcilicet radij ſunt omnes lineæ prædictæ figuræ BD, ad omnes circulos figuræ CED, quorum ſcilicet radij ſunt omnes lineæ prædictæ figuræ; ſeu quod idem eſt, vt rotundum ex figura BD ad rotundum ex figura CED.

His præhabitis pergit Caualerius. *Figuræ quidem CED grauitatis centrũ eſto V, in prædicta rotatione deſcribens circuli peripheriam VTSXV, quæ via rotationis dicitur prædicti centri grauitatis V, & YV rotationis radius. At verò figuræ BD grauitatis centrum eſto O, ſitque OY perpendicularis ipſi CD, rotationis radius, & ORPQO via rotationis.*

Supradictæ Regulæ demõſtratio. *Quoniam igitur ratio momenti figuræ BD ad momentum figuræ CED, compoſita eſt ex ratione prædictarum figurarum BD, CED, & ex ratione radiorum OY, YV, qui quidem ſunt diſtantiæ centrorum grauitatis O, & V, ab axe CD, ſeu ex ratione peripheriarum, ſeu viarum rotationis ORPQO, & SXVTS; At verò ex huiuſmodi rationibus componitur quoque ratio columnarium, ſeu cylindricorum, quorum baſes ſunt figuræ BD, CED, altitudines verò ſunt rectæ, quarum vna æqualis eſt viæ rotationis ORPQO, alia æqualis viæ rotationis SXVTS; ergo Rotunda prædicta ex BD, & CED deſcripta, erunt in ratione prædictorum cylindricorum; ſed Rotundum ex BD deſcriptum æquale eſt cylindrico, cuius baſis BD, altitudo verò recta æqualis viæ rotationis ORPQO: Rotundum autem deſcriptum ex CED æquale eſt cylindrico, cuius baſis CED, altitudo autem recta æqualis viæ rotationis SXVTS, vt mox conſtabit: cylindricus verò cuius baſis CED, altitudo æqualis viæ rotationis SXVTS, fit ex ductu CED in prædictam altitudinem; ergo etiam rotundum ex figura CED, fit ductu huiuſmodi figuræ, quæ eſt quantitas rotata in SXVTS, viam rotationis. Ergo quantitas Rotata ducta in Viam rotationis, Poteſtatem facit vno gradu altiorem quantitate rotatâ.*

Quòd autem Cylindricus in baſi BD, altitudinem habens æqualem viæ rotationis ORPQO, æqualis ſit Rotundo ex figura BD, ſic oſtenditur. *Rotundum ex figura BD, idem eſt quòd cylindricus, baſin habens circulum, cuius radius AD, altitudinem autem CD; hic autem cylindricus æqualis eſt alteri, cuius baſis BD, altitudo verò rotationis via ORPQO; eorum enim baſes altitudinibus reciprocantur; vt enim circulus, cuius radius AD ad figuram BD, ita reciprocè altitudo æqualis viæ rotationis ORPQO, ad altitudinem CD; propterea quod circulus, cuius radius AD, fit ex ductu ipſius AD, in ſemiperipheriam à ſe deſcriptam, hoc eſt in viam*

rotatio-

rotationis ORPQO, quæ dimidia eſt prædicta peripheriæ: at verò figura BD, fit, ductu AD, in DC; quare vt circulus, cuius radius AD ad figuram BD, ita reciprocè eſt via rotationis ORPQO ad CD; cylindricus igitur baſin habens BD, altitudinem verò æqualem rotationis viæ ORPQO, æqualis eſt Rotundo ex BD. Hinc & cylindricus, cuius baſis CED, altitudo verò æqualis viæ rotationis SXVTS, æquabitur Rotundo ex figura CED; ſunt enim huiuſmodi ſolida proportionalia, vt vidimus; quarè ſi cylindricus in baſi BD, altitudinem habens viam rotationis ORPQO, æqualis eſt Rotundo ex figura BD; etiam Cylindricus, cuius baſis CED; altitudo via rotationis SXVTS, æquabitur Rotundo ex figura CED. Quod oportebat oſtendere.

Hinc Generalia quædam inferuntur Corollaria.

Corollarium primum.

Primum. Cùm manifeſtum ſit vnius, eiuſdemque quantitatis varias fieri poſſe Poteſtates, & ex hac Regula conſtet omnes fieri ex ductu eiuſdem quantitatis rotandæ in viam rotationis, neceſſariò conſequitur, ſi viæ rotationis ſint æquales, Poteſtates etiam æquales fore; ſi verò eædem viæ fuerint inæquales, Poteſtates etiam inæquales fore, ac eandem ad ſe inuicem rationem habituras, quam habent rotationis viæ, atque adeò quam habent radij rotationis, cùm peripheriæ ſint vt radij. Contrà verò ſi radij ſint ijdem, vel æquales, rotandæ etiam quantitates inæquales, Poteſtates etiam inæquales fore, & in eadem inter ſe ratione, quam habent quantitates rotandæ.

Corollarium ſecundum,

Secundum. Si quantitates rotandæ binæ ſint & inæquales, & Poteſtates æquales producant, ſequitur etiam vias, & radios rotationis inæquales eſſe, & eandem reciprocè rationem habituros inter ſe, quam habent quantitates rotandæ. Et contra ſi radij, aut viæ rotationis ſint cum quantitatibus rotandis reciprocè proportionales, erunt etiam Poteſtates inter ſe æquales.

Corollarium tertium.

Tertium. Si verò tàm quantitates rotandæ, quàm viæ, ſiue radij rotationis ſint inæquales, ſequitur Poteſtatum rationem eſſe compoſitam ex ratione quantitatis rotatæ vnius ad quantitatem rotatam alterius, & ex ratione viæ, vel radij illius vnius ad viam, vel radium huius alterius.

Corollarium quartum.

Quartum. Quando termini intermedij rationum componentium ſunt ijdem, vt ſi ratio A ad E, dicatur compoſita ex ratione B ad C, & ex ratione C ad D, vbi intermedij termini C, & C, ſunt ijdem, tunc quoniam rationes componentes ſunt continuatæ in tribus terminis B, C, D, concluditur rationem compoſitam A ad E, eandem eſſe cum ratione B ad D.

Hæc Methodus cētri grauitatis indagationem requirit, et primo incipit ab eius vſu in punctis, ac lineis.

Methodus autem hæc, vt diximus, grauitatis centro vtens procedit; vnde illius notitiam, atque adeò indagationē, in omnibus aſſumptis conſiderandis debet habere perſpectā. Sequitur vſus centri grauitatis, & primo punctorum, ac linearum rectarum, hoc eſt de compoſitione Poteſtatum Rotundarum à punctis, ac lineis rectis deſcriptarum.

Prima poteſtas rotunda.

Primò Poteſtas rotunda componitur, quæ deſcribitur à puncto vno, vel pluribus.

Poteſtas rotūda vnius puncti exponitur,

Si propoſitum ſit punctum vnum, datuſque ſit radius rotationis illius, & oporteat ipſius Poteſtatem rotundam componere. Ex rotationis radio, tanquàm ſemidiametro, inueniatur circuli peripheria, quam datū punctū in rotatione deſcribit; ea nāque Problemati ſatisfacit.

Quando plura ſunt puncta, ſine reſpectu ad poſitionem.

Quòd ſi plura ſint puncta data, quodlibet verò cum ſuo rotationis radio ſine vllo reſpectu ad illorum poſitionem, plures quoque erunt quærendæ circulorum ad radios datos peripheriæ; illæ namque, ſi ita petatur, vnam in ſummam colligendæ ſunt, vel quælibet ſeorſum deſignanda.

Quando plura ſunt in certa poſitione,

Quòd ſi plura ſint puncta data in certa poſitione quadam, tàm inter ſe, quàm reſpectu axeos, ducendæ ſunt ex punctis datis ad axem rotationis lineæ rectæ perpendiculares, quarum quantitas, ſi fuerit ignorata, eſt exploranda; eæ ſiquidem ſunt rotationis Radij, cum quibus procedendum, vt ſupra.

Quomodo indaganda vnica peripheria ſingulis æqualis, data punctorum pluralitate &c.

Quod ſi in hac punctorum pluralitate certā poſitione datorum, vnica ſit inuenienda peripheria, omnibus peripherijs à ſingulis punctis deſcriptis ſimul ſumptis æqualis; reſpiciendum erit ad diuerſas punctorum poſitiones, quæ multifariam contingunt. Primò, vt omnia puncta ſint in eadem recta linea conſtituta; quod trifariam accidit; nam illa ad axem rotationis, vel erit perpendicularis, vel parallela, vel obliqua.

Quādo plura data ſunt pūcta ſine certo poſitionis ordine.

Tandem ſi plura ſint data puncta ſine vllo certo ſuæ poſitionis ordine, ac ob id quomodocunque fortuitò conſtituta, tunc procedendum vt ſupra, cùm data puncta eſſent in data obliqua, conſtituta; ſinguli enim radij ſunt ſeorſim inquirendi, coniungendique, & ad compoſitum ex omnibus correſpondens, inquirenda eſt peripheria, quæ propoſito ſatisfaciet.

Poteſtas, quã data recta efformat, & quidem Horizontalis, Verticalis, & obliqua componitur.

Poteſtas rotunda componenda ſit, quam data recta linea efformat, & quidem Horizontalis, Verticalis, & Obliqua.

Pro horizontali propoſita linea applicetur horizontaliter, hoc eſt, perpendiculariter ad axem rotationis; ſumatur eius centrum grauitatis, punctum ſcilicet, in quo ipſa biſariam diuiditur, vnde rotationis Radius erit eius dimidium; reperiatur rotationis via, quæ erit peripheria deſcripta ab huiuſmodi radio; hæc enim ducta in propoſitam quantitatem rotatam, & producet Poteſtatem Horizontalem Iuſtam.

Poteſtas Verticalis iuſta, lineæ rectæ nulla eſt, niſi ipſamet linea.

Poteſtas Verticalis iuſta huius lineæ nulla eſt, niſi ipſamet linea propoſita; tunc enim euadit axis immobilis.

Poteſtas obliqua pro ſui cõpoſitione, quid requirat.

Poteſtas obliqua requirit pro ſui compoſitione, præter quantitatem lineæ, cuius deſideratur poteſtas, etiam ipſius lineæ ad axem inclinationem; vel rectam lineam ab aliquo noto puncto datæ rectæ ad axem perpendiculariter ductam. Factâ igitur eius inclinatione ad axem in dato angulo, & ex eius centro grauitatis ducatur ad axem perpendicularis, quæ rotationis Radius erit, ac ob id rotationis via non ignorabitur, quæ ducta in propoſitam lineam veluti in quantitatem rotatam, producit Poteſtatem Iuſtam Obliquam propoſitæ lineæ, quæ quidem Poteſtas eſt ſuperficies Conica perfecti Coni iſoſcelis.

Poteſtates maiores iuſtis.

Poteſtates autem maiores Iuſtis componendæ ſint. Data ſit remotio ipſius ab axe rotationis recta quæpiam, cui in directum ponatur propoſita linea horizontaliter ad axem applicata, ita vt fiat vna linea recta. Centrum grauitatis propoſitæ lineæ eſt punctum, in quo ipſa biſariam diuiditur, inter quod & axem intercipitur aggregatum ex linea remotionis, & ex dimidio propoſitæ lineæ; quod eſt rotationis Radius; vnde rotationis via non ignorabitur, quæ ducta quidem in propoſitam lineam quantitatem rotatam producit Poteſtatem Horizontalem Iuſtâ maiorem eiuſdem propoſitæ lineæ, quæ quidem Poteſtas eſt figura plana circularis, duabus peripherijs perfectis comprehenſa, alterâ conuexa, alterâ verò concaua, eaque corona commodè dici poteſt.

Poteſtas Verticalis iuſta maiore.

Poteſtas Verticalis Iuſta maior deſcribitur per lineam propoſitam perpendiculariter erectam, factoque Radio rotationis, qui ſit æqualis lineæ remotionis, rotationis via innoteſcet; quæ ducta in propoſitam lineam rotatam, componet Poteſtatem Verticalem iuſtâ maiorem. Huiuſmodi autem Poteſtas eſt ſuperficies Cylindri.

Poteſtas obliqua iuſta maiore.

Poteſtas Obliqua iuſtâ maior, vt componatur, præter lineam cuius danda eſt poteſtas, dari quoque debet angulus inclinationis, quem ipſa facit cum axe; vel perpendicularis ex centro ipſius ad axem, vel binæ quæcunque rectæ ex binis ipſius punctis ad axem perpendiculariter ductæ; ex his enim conſtabit Radius rotationis ſecans propoſitam lineam biſariam, atque adeo in eius centro grauitatis: vnde rotationis via prodibit, quæ ducta in propoſitam quantitatem rotatam procreabit Poteſtatem Obliquam iuſtâ maiorem, & huiuſmodi Poteſtas eſt ſuperficies fruſti Conici.

Poteſtas rotunda, quam binæ rectæ ſimul ſumptæ deſcribũt, vt cõponatur.

Poteſtas rotunda, quam binæ rectæ ſimul ſumptæ deſcribunt, componitur ad eum, quĩ ſequitur modum.

Poteſtas Rotunda quã binæ rectæ ſimul ſũpta deſcribunt quomodo, componatur.

Poteſtas rotunda, quam binæ rectæ ſimul ſumptæ deſcribunt ita componitur. Datæ ſint duæ rectæ quarum altera concidat cum axe rotationis, altera verò poſita ſit extra illum, & ſit earum iuſta Poteſtas componenda. Vna ſit quæ cum axe coincidat; altera verò extra axem erit ad priorem vel recta, vel obliqua, vel demum eidem parallela, vtcunque ſe habeat, ſat eſt alterius tantum lineæ, quæ eſt extra axem poteſtatem componere: Vnde ex antecedenti, oblato Problemati fit ſatis, recta ſiquidem in axem coincidens, cùm rotationem non ſubeat, nullam poteſtatem procreat.

Alio modo idẽ perficitur.

Quod ſi placet vtriuſque datarum linearum commune grauitatis centrum reperire, deinde radium ac rotationis viam, in quam vtraque ſimul ducatur linea, eadem reperietur poteſtas.

Quando datæ rectæ fuerint adinuicem inclinatæ.

At ſi duæ datæ rectæ ſint ad inuicem inclinatæ, vt quempiam angulum conſtituant, & earum Poteſtas Rotunda Iuſta ſit componenda. Animaduertendam earum applicationem ad axem rotationis biſariam contingere. Vel vt vtraque extremitas earum vbi non conueniunt, vel vna tantum axem attingat. Poſterior caſus communi Regula abſoluitur; quòd ſi vtraque extremitas axem contingat, ratione tam inclinationis linearum ad ſe inuicem, quàm applicationis earundem ad axem, tres dantur caſus: primò vt exiſtente vna ad axem obliquâ, altera ſit ad eundem recta; ſecundò, ſi hæc altera etiam ſit obliqua,

ſita

ſita ſit ſupra perpendicularem. Tertiò infrà.

E duabus datis inuicem inclinatis, cuius extremum vnum tangit axem, diuidatur biſariam, & ex puncto diuiſionis, quod eſt grauitatis centrum, ducta ſit perpendicularis ad axem, hic erit rotationis Radius æqualis dimidio illius, quæ ex altero extremo prædictæ lineæ perpendiculariter cadit ad axem, vel etiam illi, quæ à biſſectionis puncto alterius obliquæ, ſcilicet infra perpendicularem ad axem, cadit pariter perpendicularis ad axem: alterâ æquali obliquâ exiſtente ſupra perpendiculari; Rotationis igitur via non ignorabitur, quæ ducta in aggregatum ex maiori è duabus inclinatis, & ex minori, ſiue ſupra, ſiue infra perpendicularem, Iuſtam facit Poteſtatem. Huiuſmodi autem Poteſtas eſt ſuperficies Rhombi ſolidi à triangulo, cuius baſis eſt axis, latera verò ſunt duæ rectæ datæ ad inuicem inclinatæ, quarum minor cadit infra perpendicularem. Vel eſt ſuperficies duorum conorum &c.

Poteſtates autem Iuſtis maiores pro expoſitis lineis, ex dictis innoteſcunt. *Poteſtates Iuſtis maiores ex dictis colligi poſſunt.*

Quod ſi binæ datæ rectæ huiuſmodi ſint, quæ non faciant angulum, aut ſe mutuo tangant, ſed vel ſint parallelæ, vel ad inuicem obliquæ, ratione axeos tertiam conſequuntur differentiam; ſi enim parallelæ ſunt vtræque, vel rectæ ad axem, vel obliquæ, vel vna obliqua, & altera recta, habitis centris grauitatis, & Radijs rotationis, rotationis via non latebit. *Caſus alter.*

Poteſtates Rotundæ plurium rectarum linearum, comparantur compoſitione facta, vt ſequitur. *Poteſtates Rotunda plurium rectarum linearum.*

Ex communi Regula ſupra tradita componatur Poteſtas. Si Poteſtas ſit efformanda, quæ fruſti conici ſuperficies ternas contineat, nempe ſuperficiem conicam cum ſuis duabus baſibus: inueniatur Poteſtas binarum rectarum ſimul, quæ ſunt diametri baſium: deinde reperiatur Poteſtas lateris ſuperficiei conicæ ſeorſim priori addenda, vel ſingularum rectarum Poteſtates componantur.

Quando verò dantur centrum cõmune, & Radius rotationis cũ ipſis lineis &c; Cùm enim duæ rectæ ſe mutuò ſecuerint, & bina ſegmenta vnius, ac bina ſegmenta alterius fuerint æqualia, interſectioniſque punctum omnium ſimul commune centrum, Radiuſque rotationis dimidium ſit eius, quæ eſt ad rectos angulos cum axe, Poteſtas componetur, ducendo rotationis viam, quæ latere non poteſt; cùm Radius ſit cognitus, in ſummam quatuor datarum rectarum. Quod etiam intellige, ſi ipſæ datæ forent vt binæ tantum.

At ſi plures datæ rectæ inter ſe omnes æquales extiterint, ac in tali ſitu poſitæ, vt commune centrum facilè comparari queat, faciliùs per viam rotationis componitur Poteſtas, quàm per plures.

Poteſtas communis linearum rectarum æqualium, ſegmento circulari inſcriptarum, componitur, vt ſequitur. *Poteſtas communis linearũ rectarum æqualium, ſegmento circulari inſcriptarum.*

Propoſitarum linearum æqualium, & numero pariter parium, peripheriæ circularis ſegmenti ordine continuo inſcriptarum, vel etiam circumſcriptarum, commune centrum grauitatis inueniatur, & ex illo vnico Poteſtas ſimul omnium ſumptarum reperietur; & quidem attendendo, vel ad diametrum circuli, vel baſin, chordam, ſiue ſubtenſam ſegmenti, licet Poteſtates componere iuxta triplicem differentiam Horizontalem, Verticalem, & Obliquam, & quidem, Iuſtas, vel Iuſtis maiores.

Vnde ſi fuerint quotcunque, exempli gratia, octo, lineæ æquales, circularis peripheriæ ſegmento ordine quidem inſcriptæ, ſiue illud ſemicirculari ſit maius, vel minus, vel æquale, communeque ipſis grauitatis centrum innotuerit, ac oporteat earum primo Poteſtatem Iuſtam horizontalem componere; ſitque ſegmentum minus tertia pars peripheriæ circuli, maius autem duæ tertiæ partes, notaque ſit diameter, conſtabit ſubtendens vnum ex octo arcubus, tùm in minori ſegmento, tùm in ſemicirculo, tùm in ſegmento maiori; cùmque totius arcus axi ſupponatur perpendicularis in minori ſegmento, dimidium ipſius erit rotationis radius, nempè ſinus ſextantis; in reliquis autem circuli ſemidiameter, velut æqualis rectæ, quæ propriè rotationis radius dicitur, ductæ à grauitatis centro portionis perpendicularis ad axem: Vnde ad harum Poteſtatum Horizontalium compoſitionem non eſt opus notitiâ communis centri grauitatis, cùm ſatis ſuperque ſit nouiſſe illud eſſe in recta tendente ad verticem portionis; radio autem cognito, rotationis via non latebit pro omnibus ſegmentis. Rotationis via igitur ducta in aggregatum octo linearum rectarum, ſeg-

mento ordine inſcriptarum producit Horizontalem Iuſtam Poteſtatem ipſarum, & quidem pro ſegmento minori, pro ſemicirculo, & pro ſegmento maiori, prout ducta fuerit in aggregatum prædictarum linearum octo, vnius, vel alterius ſegmenti.

Superficies ex huiuſmodi rotationibus ortæ, conicæ ſūt.

Omnes autem hæ ſuperficies ex rotatione ortæ, Conicæ ſunt, binæ ſcilicet ſupremæ, ſemianuli Rhombici ſuperficiem efformantes, reliquę ſunt Conorum decurtatorum, vel ſi mauis Annulorum.

Ad Poteſtates Iuſtas Verticales quod attinet. Subtendens circuli ſegmentum euadit rotationis axis, Radius porrò ea recta, quæ ex centro grauitatis communi iam dicta ſuper ſubtenſam perpendiculariter cadit; Bifariam verò prædictarum Poteſtatum inquiſitio poteſt inſtitui. Primò vel communi iam explicatâ regulâ. Secundò ex ijs, quæ iam fuerunt inuentæ, Poteſtatibus.

Poteſtatum inquiſitio bifariam inſtitui poteſt.

Pro primo modo quid agendum.

Pro primo modo ex Radijs rotationum vijs inuentis, & in ſummam rectarum datarum ductis, quæſita Poteſtas prodibit; ad id autem eſt opus rotationum Radijs, ſine quibus latent earundem rotationum viæ, pro quo non vna eſt inquiſitionis ratio; nam pro ſegmento minori fiat vt dimidia ſumma ipſarum rectarum ad dimidiam baſin ſegmenti, ita rectæ à circuli centro perpēdicularis ſuper vnam datarum rectarum, ad aliam, quæ erit, coniungens circuli centrum, & centrum grauitatis commune datarum linearum, ordine inſcriptarum, à qua ſubductâ differentiâ inter ſemidiametrum, & perpendicularem à verticæ ipſius ſegmenti, remanet rotationis Radius: Vnde rotationis via perſpecta erit, & Poteſtas Verticalis Iuſta.

Pro ſemicirculo.

Pro ſemicirculo, fiat vt dimidia ſumma rectarum inſcriptarum ad ſemidiametrum, ita perpendicularis à centro ſuper vnam ex inſcriptis ad aliam quæ erit rotationis Radius. Vnde via rotationis non ignorabitur, & Poteſtas Verticalis Iuſta.

Pro ſegmento maiori.

Pro ſegmento maiori, fiat vt dimidia ſumma inſcriptarum ad dimidiam baſin ſegmenti, ita perpendicularis ducta à centro ſuper vnam ex inſcriptis, ad aliam diſtantiam inter commune centrum grauitatis, & centrum circuli, cui addito exceſſu perpendicularis à vertice ad baſin ſegmenti, Radius rotationis innoteſcet: vnde, & rotationis via non latebit, quamobrem & Poteſtas Verticalis Iuſta perſpecta fiet.

Aliæ Verticales poteſtates emergunt.

Aliæ itidem Poteſtates emergent Verticales, ſi loco axeos iam dicti ſtatuatur recta illi parallela tangens ſegmenti verticem.

Alia etiam ratione hæ, ſimileſque Poteſtates procreantur; ſiquidem cùm eiuſdem quantitatis variæ componi poſſint Poteſtates, & Horizontales, & Verticales, & infinitæ Obliquæ, eæque vel Iuſtæ, vel Iuſtis Maiores, omnes tamen eandem inter ſe rationem habebunt, quam illarum Radij rotationis ex quibus fuerunt procreatæ habebant. Vnde fit vt cuiuſuis quantitatis, & quauis data Poteſtate cum ſuo rotationis Radio, alia eiuſdem quantitatis Poteſtas procreari poſſit per inſtitutum analogiſmum, ſi ipſius aſſignetur rotationis Radius. Vt ſi fiat quemadmodum Radius rotationis Poteſtatis Horizontalis ad Radium rotationis Poteſtatis Verticalis, ita Poteſtas Iuſta inſcriptarum Horizontalis ad aliud, & hoc erit Poteſtas Verticalis.

Poteſtates Rotunda perimetri triangulorum, & quadrangulorum.

Poteſtates Rotundæ perimetri triangulorum, & quadrangulorum, componuntur vt ſequitur.

Bifariā poteſt contingere, vt triangulum, atq; quadrāgulum Iuſtā Poteſtatem componant.

Bifariam poteſt contingere, vt triangulum atque quadrangulum Iuſtam Poteſtatem componant. Vel enim primo habebit latus vnum ita poſitum, vt cum rotationis axe coincidat, vel ſecundò eundem in puncto alicuius anguli tantùm continget.

In primo caſu bifariam perimetri poteſtas fieri poteſt. Primò, vt binorum tantum laterum, quorum neutrum coincidit cum axe, rationem habeamus, adeo vt via rotationis ducatur in ſummam binarum illarum rectarum; proueniet enim Poteſtas Iuſtas Verticali perimetri totius trianguli. Quo quidem artificio vtendum quoties, & centrum grauitatis binarum linearum prædictarum, & Radius rotationis facilius compariri poterit, quàm ſi commune centrum tribus lineis inquirendum foret.

Secundò etiam Poteſtas fiet ſi centrum inquiratur totius perimetri, rotationiſque via ducatur in totum perimetrum; eadem enim omninò Poteſtas procreabitur, quod intelligendum quoque de pluribus; tunc autem hæc præferenda eſt ratio, quando Radius rotationis faciliùs pro hac, quam pro illa comparatur.

Quòd ſi triangulum aliquo ſuo angulo rotationis axem attingat, perimetri poteſtatem bifariam

biſariam aſſequemur, vel ita vt latus vnum ipſius trianguli ſit rectum ad axem, & ſic fiet Poteſtas Iuſta Horizontalis; vel vt vnum latus ſit parallelum axi, & fiet Poteſtas Iuſta Verticalis; vel nullum latus ſit aut rectum, aut parallelum ad axem, & fiet Poteſtas perimetri eiuſdem trianguli iuſta Obliqua.

Quando triangulum aliquo ſuo angulo rotationis axem attingit.

Poteſtas Iuſta Horizontalis. Iuſta Verticalis. Iuſta Obliqua.

Poteſtates Iuſtis maiores fient, ſi Radio rotationis, de quo hactenus, tantum additum fuerit, quantum remotio quantitatis rotandæ requirit; cætera autem vt ſupra peragenda.

Cingulorum, & Gnomonum Poteſtates ex Regula vniuerſali depromuntur; habito ſiquidem grauitatis centro, recta ex illo ad axem rotationis, determinat Radium rotationis: vnde rotationis via non latebit, quæ quidem ducta in quantitatem rotatam, Poteſtatem procreat. Solum id præ oculis habendum, num præſtet vti centro communi, an verò particulari linearum.

Cingulorũ, & Gnomonũ Poteſtates ex generali Regula depromuntur.

Poteſtas perimetri Polygonorum regularium inquiritur ſic. Reperiatur rotationis Radius, qui facilè comparabitur cùm circuli centrum idem ſit, quod polygoni eidem inſcripti centrum grauitatis, hinc ducta perpendicularis ad axem eſt rotationis Radius: vnde via rotationis non ignorabitur, quæ quidem ducta in quantitatem rotatam, Poteſtatem procreabit quæſitam.

Poteſtas perimetri polygonorum regularium.

Rotunda.

Verticalis dicetur ea, quæ oritur ex polygono, cuius vnum latus, aut commune eſt cum axe rotationis, aut eidem parallelum. Horizontalis verò dicetur quando latus vnum eſt horizonti parallelum, quæ abſolutè intelligi poſſunt pro polygonis laterum numero imparium, vel quorum laterum numerus non eſt pariter par; tunc enim vt Poteſtas Verticalis dicatur, latus vnum polygoni rotandi erit vel parallelum, vel incidet cum axe rotationis, & vel duo anguli reſpondebunt alter vertici, & alter horizonti, vel vnus ſaltem ſiue vertici, ſiue horizonti, prout hoc, vel illud latus euaſerit axis.

Verticalis Poteſtas quæ nã dicenda. Quæ dicenda Horizontalis.

Quando verò laterum numerus eſt pariter par, latus autem vnum incidit in axem rotationis, vel cum eo parallelum eſt, erit itidem oppoſitum latus eidem axi parallelum, ſed & alia duo erunt horizonti parallela; ex quo ambigendum num illa Poteſtas, Verticalis potius, an Horizontalis dicenda ſit, ſed hoc nihil refert. Cæterum Obliquæ Poteſtates dicentur, quibus nec horizontalis, nec verticalis ratio aptari poteſt.

Obliqua Poteſtates quæ dicantur.

Verticalis Poteſtas Iuſta vt componatur, fiat Radius rotationis ea linea, quæ perpendicularis eſt ad vnum latus polygoni, qui quidem Radius etiam Poteſtati Horizontali inſeruiet, quando ſcilicet numerus laterum pariter par extiterit; alioquin ſi numerus alius fuerit, ita vt angulus axem rotationis tangat, rotationis Radius pro Poteſtate Horizontali, erit ipſa circuli ſemidiameter, cui polygonum inſcriptum eſt, ſi laterum numerus par fuerit. Quod ſi fuerit impar, Radius rotationis erit æqualis medietati rectæ illius, quæ vnum, aut plures angulos numero impares ſubtendit; at pro Obliquis Poteſtatibus Iuſtis, rotationis Radius neque erit ea, quæ recta ex centro circuli ad axem eſt, nec circuli ſemidiameter, ſed minor ſemidia metro, & maior perpendiculari ſupradicta.

Verticalis Poteſtas Iuſta vt componatur.

Poteſtas verò cuiuſuis circularis peripheriæ circulum totum non ambientis, componetur ſic.

Poteſtas cuiuſuis peripheriæ circulum non ambientis.

Vt enim rectarum æqualium circulari ſegmento inſcriptarum Poteſtates componuntur, ſic etiam ipſarum circularium peripheriarum. Ex centro igitur grauitatis datæ peripheriæ, quod ſanè diuerſum omninò eſt, à communi centro grauitatis inſcriptarum, & reliqua peragantur vt ibi; Poteſtates enim emergent Horizontales, Verticales, & Obliquæ; ducenda eſt autem propoſita peripheria in ſuam rotationis viam, quemadmodum inſcriptarum aggregatum ducebatur in communem viam rotationis.

Poteſtas circuli componetur eodem modo, quo partium Poteſtas componebatur: ſolum illud intereſt, quod integra circuli peripheria ſit ſibi ſemper æqualis, & vniformis, ac in ſui medio centrum grauitatis obtineat: vnde facillimè eius rotationis Radius innoteſcit; quia tamen ratione axeos rotationis eodem ſe ſe ſemper habet modo, quamcunque peripheriæ partem ei obuertat, Poteſtas eius iuſta quidem, & alia iuſtâ maior dici poterit; nullam tamen hæc Poteſtas Horizontalis, Verticalis, aut Obliquæ, differentiam admittet, quamuis in circulo diametrum aliquam elegeris, & eam nunc horizonti, nunc verticali parallelam, vel etiam ad rotationis axem, qui verticalis dicitur, obliquam poſueris; eadem ſiquidem perpetuò orietur Poteſtas idemque rotationis Radius, qui ſemper in Iuſta quidem eſt ſemidiameter circuli, Poteſtas verò eſt ſuperficies Annuli ſtricti, ac ortum ducit

Poteſtas circuli qua ratione componatur.

ducit ex propoſitæ peripheriæ ductu in ſe ipſam; ſiquidem rotationis Radius eſt eiuſdem peripheriæ ſemidiameter; quamobrem rotationis via æqualis eſt eidem propoſitæ peripheriæ.

Radius rotationis Poteſtatis maioris qualis ſit.

Radius autem rotationis Poteſtatis maioris Iuſtæ tantum ſuperat ſemidiametrum circuli propoſiti, quantum extremum punctum ipſius ab axe remouetur. At ipſa Poteſtas eſt ſuperficies Annuli abſolutè dicti, oriturque ex ductu propoſitæ peripheriæ in illam peripheriam, quæ ad propoſitam, eandem habet rationem, quam habet Radius rotationis ad ſemidiametrum oblati circuli.

Poteſtates perimetri ſegmentorũ, aliarũq; circuli partium, quomodo componantur.

Poteſtates autem perimetri ſegmentorum, aliarumque circuli partium componuntur, vt ſequitur. Circuli partes, quæ fiunt ex ſectione rectæ lineæ, diſtribuuntur in ſegmenta, ſectores, ſectorum æmulos, fruſta, & alia ſine certo nomine varia. Perimetrorum verò figurarum iſtarum mixtilinearum Poteſtates componemus hac arte.

Poteſtates perimetrorum mixtilinearũ figurarũ quomodo componantur.

Et primò ad circulorum ſegmenta quod attinet; ſi Poteſtas eorum Horizontalis efformanda ſit, obſeruandum eſt illud, quod in ſegmento, quod minus eſt ſemicirculo, Radius rotationis eſt ipſius ſemibaſis, ſeu ſemichorda; in reliquis autem circuli ſemidiameter; propterea quod huiuſmodi lineæ ſunt æquales, ductis à grauitatis centro ipſius ſegmenti ad rotationis axem, cui ſegmenti baſis eſt perpendicularis: vnde rotationis Radij ſunt, quibus cognitis, rotationis viæ innoteſcunt, at via rotationis ducenda eſt in quantitatem perimetri; hoc enim pacto Poteſtates Iuſtæ Horizontales producentur. Huiuſmodi autem Poteſtates ſunt ſuperficies partis Annuli ſtricti deficientis ab integro iuxta defectum ſegmenti à toto circulo.

Poteſtatum Verticalium eorundem ſegmentorũ quomodo ſe habeant.

Poteſtatum Verticalium eorundem ſegmentorum compoſitio non differt à compoſitione Poteſtatum peripheriarum; baſis enim ſegmenti, cùm ſit rotationis axis, ex eo nec rotatur, nec vllam ſuperficiem deſcribit; quamobrem via rotationis, ac eius Radius cum ſupradictis coincidunt, atque via illa ducenda eſt in ſolam ſegmenti peripheriam, vt fiat hoc loco componenda Poteſtas. Huiuſmodi autem Poteſtas ex ſegmento minori erit ſuperficies ſemiannuli Citrij, Stricti, & Lati; ex ſemicirculo erit ſuperficies ſemiannuli ſtricti, & ex ſegmento maiori ſuperficies Annuli ſtricti, ſimiliter plus quam ſemiſſis.

Quando Rotationis axis mutatur, ſitq; priori parallelus.

Quod ſi rotationis axis mutetur, fiatque alius priori parallelus ſegmenti, peripheriam in vertice contingens, fiet rotationis Radius ex communi rotationis centro ad axem perpendiculariter erectus, & fiet diuerſa Poteſtas: vnde peripheria ſegmenti concauam ſuperficiem deſcribet, eiuſque baſis, cylindricam.

Poteſtates obliquæ, & Verticales, &c.

Poteſtates Obliquæ, quemadmodum, & Verticales, vt deſcribantur, opus eſt centro grauitatis proprio perimetri ipſius ſegmenti; inde ſiquidem ducenda eſt recta ad axem perpendicularis, vt fiat rotationis Radius, hinc habebitur via rotationis, nimirum peripheria Radio ipſo deſcripta; hæc autem via ducta in propoſitum perimetrum, velut in quantitatem rotatam, Iuſtam Obliquam Poteſtatem producet.

Poteſtates ſegmentorũ Iuſtis maiores.

At verò Poteſtates ſegmentorum propoſitorum Iuſtis maiores fient, ſi accipiantur Radij rotationis maiores.

Poteſtates horum perimetrorũ, quomodo facilius cõponantur.

Poteſtates horum perimetrorum componentur faciliùs, ſi peripheriarum, ſegmentorum, & baſium Poteſtates ſeorſim efficiantur, & vtræque coniungantur, faciliùs, inquam, efficientur, quàm vt centrum grauitatis vtriuſque commune inquirendo, & reliqua peragendo.

Hactenus dicta, ſunt intelligenda de ſectoribus, eorũdemq; æmulis.

Hactenus tamen dicta intelligenda ſunt de ſectoribus, eorundemque æmulis, non tamen eodem modo diſcurrendum de fruſtis, quæ ex peripheria circuli abſcinduntur à duabus rectis parallelis æqualiter à centro circuli remotis; propterea quod grauitatis centrum perimetri illius idem eſt, quòd circuli centrum, ac ob id Radius rotationis communis, facilè & rotationis via, & Poteſtas comparatur.

Poteſtas Perimetri lunularum.

Poteſtas perimetri Lunularum, Arcuatarum figurarum, & Securicularum, Coronarumque, hac lege perficitur.

Bifariam perimetri Lunularum Poteſtas efformari poteſt, vel ex centris grauitatis ſingularibus, vel ex communi centro grauitatis; alteruter autem modus eſt eligendus, prout facilitas, vel commoditas poſtulabit. Præſtat tamen definire, quæ nam ex ipſis Poteſtatibus dicenda ſit Horizontalis, quæ Verticalis, & quæ Obliqua.

Horizontalis poteſtas.

Horizontalis illa dicetur, quando axis rotationis parallelus eſt rectæ tranſeunti per centra circulorum, à quibus fit Lunula, & huiuſmodi axis tetigerit exteriorem circulum in

alterutra parte à dexteris, vel à ſiniſtris, nam ex huiuſmodi rotatione Poteſtas orietur Horizontalis Iuſta. Quòd ſi idem axis à prædictis punctis remoueatur, fit Poteſtas maior Iuſtâ.

Quando Lunula fit per interſectionem circulorum.

Quòd ſi Lunula fiat per interſectionem circulorum, Horizontalis Poteſtas Iuſta pro rotationis axe aſſumet rectam perpendicularem ad eam, quæ nectit puncta interſectionis circulorum, ſimulque tangit peripheriam conuexam, ac Iuſtâ maior eundem axem, ſitu eodem permanente, magis à centro grauitatis remouebit.

Poteſtates Verticales Iuſtæ perimetri Lunularum.

Poteſtates autem Verticales Iuſtæ perimetri earundem Lunularum fient, ſi rotationis axis ſtatuatur recta quæpiam, & quidem cùm Lunula fiat per contactum circulorum, rotationis axis tetigerit vtrunque circulum, atque adeò in puncto contactus vtriuſque circuli, fuerit perpendicularis rectæ tranſeunti per vtriuſque circuli centrum; Iuſtis autem maiores proueniunt Poteſtates, ſi rotationis axis, longiùs à centro grauitatis receſſerit.

Aliæ Poteſtates Iuſtæ Verticales.

At verò Poteſtates aliæ Iuſtæ Verticales earundem Lunularum, immò & Iuſtis maiores fient ſi rotationis axis non ſtatuatur recta tangens vtcunque circulum, nimirum in mutuo horum contactu, ſed eidem potius extiterit parallelus in oppoſito puncto circuli exterioris, at in reliquis, quando ſcilicet Lunula fit per interſectionem ipſorum circulorum, circulum tetigerit in puncto Verticali, fueritque parallelus rectæ tranſeunti per puncta interſectionum eorundem circulorum; hoc enim pacto perimetri lunularum Poteſtates Iuſtæ fient; Poteſtates autem Iuſtis maiores, ab axe radio magis ab eodem puncto contactus vel vno interſectionum, extrorſum remoto.

Poteſtates Obliquæ perimetri Lunularum.

Poteſtates Obliquæ perimetri dictarum Lunularum prouenient, ſi rotationis axis aliter quàm dictum fuit ſe ad perimetrum Lunularum habuerit, & Iuſtæ, & Iuſtis maiores.

Poteſtates Arcuatarum figurarum.

Ad arcuatas figuras quod attinet, loquendo de præcipuis, quæ nimirum ex binis ſegmentis circuli æqualibus componuntur, quarum commune grauitatis centrum perimetri eſt in quo ſe mutuo ſecant ad angulos rectos, lineæ, quarum vna tranſit per interſectiones peripheriarum, altera verò biſſecat eaſdem peripherias; itaque perimetri huiuſmodi Poteſtas Horizontalis Iuſta rotationis habet axem, rectam, quæ tangit in punctis vbi arcus ſe mutuo ſecant, & rectæ nectenti huiuſmodi puncta perpendicularis eſt, cuius dimidium eſt rotationis Radius, & hoc quando arcus ſunt minores ſemiperipheria; quod ſi maiores extiterint, recta quæ perpendicularis eſt ei, quæ biſſecat arcus, fueritque tangens alterutrius; Radius verò rotationis erit dimidium biſſecantis arcus, &c.

Sic de ſecuricularum perimetro, ſuo modo intelligendum.

Poteſtates perimetri Ellipſeos &c.

Poteſtates autem perimetri Ellipſeos, & reliquarū conicarum ſectionū comparari poterūt ſic. Ad perimetri Poteſtatem Iuſtam Horizontalē quod attinet, axis rotationis ſit recta perpendicularis Horizonti tangens perimetrum in extremo puncto axeos longioris; Radius ſit ſemiaxis longior, vnde via rotationis non ignorabitur, quæ quidem ducta in perimetrum producit Poteſtatem Horizontalem Iuſtam, quæ eſt ſuperficies Annuli Elliptici ſtricti lati.

Horizontalis Iuſta.

Verticalis Iuſta.

Poteſtas autem perimetri eiuſdem Verticalis Iuſta comparabitur ſi ſit rotationis Radius ſemiaxis breuior, eodem exiſtente axe: Vnde Poteſtas Verticalis quæſita eſt medietas ipſius Horizontalis, cum perimeter vtrobique ſit idem, & Radius prior ad hunc ſit vt 2, ad 1; hæc ſuperficies erit Poteſtas Annuli Elliptici ſtricti, alti.

Poteſtas Obliqua.

Ad componendam autem Poteſtatem Obliquam, oportet cognoſcere primò quantitatem Radij rotationis, qui ſi non detur, erit producendus axis Ellipticus, Maior, vel Minor, vſque ad axem rotationis, vt fiat triangulum rectangulum, ex quo datis, vel inquiſitis, neceſſarijs, Radius Rotationis comparabitur. Reliqua vt ſupra de cæteris.

Poteſtas maior Iuſta.

Poteſtates maiores Iuſtis componentur non diſſimiliter; ex Radijs vijſq; rotationis maioribus &c.

Poteſtas rotunda, quam planum triāguli rectilinei deſcribit.

Poteſtas autem rotunda, quam planum trianguli rectilinei deſcribit, componetur, vt ſequitur.

Propoſitum ſit aliquod triangulum Iſoſcele, cuius grauitatis centrum notum ſit redditum; punctum enim eſt illud, ita diuidens rectam ex vertice in medium baſeos ductam, vt pars Verticalis ad reliquam ſit in ratione dupla. Huius autem trianguli diuerſimodè ad axem rotationis applicati ſit opus rotundam Poteſtatem componere, quæ quidem vt ex applicatione ad axem trianguli rectanguli conſtare poteſt, vbique Iuſta erit.

Ex omnibus autem applicationibus trianguli rotandi ad axem rotationis, ea ſeligenda illa,

illa, vnde rotationis Radius faciliùs innoteſcit, atque adeò Via rotationis, ac demum Poteſtas comparatur; vnde, & Reliquæ Poteſtates efformantur.

Si igitur propoſiti trianguli Iſoſcelis baſis coincidit cum rotationis axe, Radius rotationis erit tertia pars rectæ ex vertice biſſecantis baſin, verſus eandem baſin; in eo ſiquidem puncto eſt grauitatis centrum. Inde facilè conſtat rotationis Via, quæ ducta in quantitatem rotatam, nempè aream trianguli, producit Poteſtatem trianguli, ratione baſis Verticalem. Huiuſmodi autem Poteſtas eſt Rhombus ſolidus.

Poteſtas Verticalis eiuſdẽ trianguli.

Poteſtas autem Verticalis, eiuſdem trianguli, alia comparabitur, ſi alius ſtatuatur Rotationis axis, per verticem trianguli, æquidiſtanter baſi ductus. Tunc autem rotationis Radius eſt pars biſſecantis baſin ex vertice, pars, inquam, continens duas tertias partes verſus eundem verticem; hic autem Radius cum duplus ſit ſuperioris, Poteſtas etiam inde orta dupla erit ipſius. Hęc autem eſt reſiduum, quod ſupereſt ex Cylindro, cuius altitudo eſt baſis ſupradicti trianguli, & ſemidiameter baſeos eſt recta ex vertice biſſecans baſin, ſi nimirum ex eo tollatur quantitas Rhombi ſolidi iam dicti.

In reliquis triangulorum Poteſtatibus componendis quid agendũ.

In reliquis autem triangulorum Poteſtatibus componendis, illud præcipuè curandum, vt Radij rotationis quantitas commodè reperiatur: vnde ſi propoſitum triangulum fuerit ſic applicatum axi, vt non baſis, ſed vnum è cruribus cum axe coincidat, rotationis autem Radius ſit recta à centro grauitatis perpendicularis ipſi axi, quæ facilè, ob ſimilitudinem triangulorum, comparabitur; ad efformandam Poteſtatem procedendum ſic: Fiat vt Radius rotationis ſupra iam habitus ad hunc rotationis Radium, ita Poteſtas ſuperiùs producta ad aliud; & ſic habebitur ex Corollario primo Poteſtas debita poſteriori Radio ratione verticalis cruris. Eſt autem huiuſmodi Poteſtas Rhombus ſolidus conſtans è duobus conis Iſoſcelibus inæqualibus.

Alia Verticalis eiuſdem trianguli Poteſtas.

Nec diſſimiliter ſit alia Verticalis eiuſdem trianguli Poteſtas, ſi rotationis axis alius ponatur recta parallela axi iam dicto, tranſiens per anguli verticem, cui ſubtenditur iam dictus axis; reperietur enim Radius rotationis, itemque rotationis via, atque tandem Poteſtas.

Poteſtas Horizõtalis eiuſdem trianguli.

Fiet etiam Poteſtas Horizontalis eiuſdem trianguli, vno ex cruribus Horizontaliter conſtituto; ob ſimilitudinem enim triangulorum rotationis Radius comparabitur; vnde rotationis via non latebit, atque adeò Poteſtas.

Alia Horizõtalis poteſtas.

Alia etiam eiuſdem trianguli Poteſtas Horizontalis fiet, ſi alius ſtatuatur axis priori parallelus, tranſiens per extremum alterum cruris Horizontaliter conſtituti.

Poteſtas Obliqua.

Poteſtas autem Obliqua eiuſdem trianguli fiet, in eo ſitu conſtituti, vt nullum ipſius latus ſit ad axem perpendiculare, vel parallelum. Sic etiam ſuo modo habebitur Poteſtas efformans Conum ſimplicem &c.

Cæterarum autem ſpecierum triangulorum rectilineorum non diſſimili arte poterunt efformari Poteſtates.

Poteſtates Rotũda Quadrilaterorum.

Poteſtates Rotundæ Quadrilaterorum rectilineorum ſic efficiuntur. Quadrilatera enim ſunt Quadratum, altera parte longius, altera parte breuius, Rhombus, Rhomboides, Trapetium binarum parallelarum, Trapetium vnius anguli recti, Trapetium abſolutè ſumptum, horum autem inquiratur Poteſtas.

Poteſtas Quadrati.

Poteſtas quadrati explicabitur infra, cùm de Polygonis regularibus.

Quãdo fuerit figura altera parte longior.

Altera parte longius ſuam efformat Poteſtatem, ſi minus latus ſtatuatur coincidens cum axe. Altera parte breuius ſi maius latus. Itaque vnica eſt figura, vnicaque ipſius Poteſtatis Compoſitio; at iuxtà diuerſam ipſius ad axem rotationis applicationem, Poteſtates diuerſæ. Horizontalis dicetur, ſi longius latus Horizontaliter rotetur: Verticalis, ſi Verticaliter: Obliqua, ſi obliquè. Poteſtas autem eius Rotunda Iuſta erit, cũ figura rotanda axem attigerit: Maior Iuſtâ, ſi ab eodem remota fuerit; quod de reliquis quadrilateris itidem intelligendum.

Si itaque fuerit figura alterâ parte longior, cuius latus longius ſit perpendiculare ad axem rotationis, & Horizontaliter rotetur, latus autem breuius cum axe coincidat, altero in proprio ſitu, ſitque à centro grauitatis ducta recta perpendiculariter ad axem, quæ quidem dimidium erit lateris longioris, & erit Radius rotationis, quæ ducta in aream figuræ quantitatem rotatam, procreat Poteſtatem Rotundam ipſius figuræ, quæ Cylindrus eſt latus, cuius altitudo eſt latus breuius; latus autem longius eſt ſemidiameter circuli, qui baſis eſt eiuſdem Cylindri.

Ver-

Verticalis Poteſtas duplo minor eſt, cùm rotationis Radius ſubduplus fuerit prioris, atque adeo Poteſtas etiam ſubdupla eſt, ex hac rotatione fit cylindrus altus, cuius axis eſt latus longius ſemidiameter baſeos eſt latus breuius.

Quando altera parte longior figura habet latera in obliquo ſitu ad axem.

Si verò fuerit alterá parte longior figura, ita vt eius latera obliquum ſitum obtineant ad eundem axem rotationis, latuſque longius, atque adeò breuius datos angulos efficiat, cum, reperietur rotationis Radius, fiat autem vt Radius Poteſtatis Horizontalis iam inuentæ ad hunc Radium, ita prædicta Poteſtas Horizontalis ad aliud, & prouenict Poteſtas quæſita. Non diſſimiliter procedendum cum Rhombo, Rhombide &c.

Poteſtates multangulorũ laterum.

Poteſtates autem multangulorum laterum pariter parium, ſectori, vel ſegmento circuli inſcriptorum, componentur ad eum, qui ſequitur, modum.

Prædictarum figurarum centra grauitatis inueniantur, & Poteſtas rectarum linearum æqualium ſegmento circuli inſcriptarum reperiatur; ſecus autem de ſectore.

Duplex modus cõponendi poteſtatem horum multangulorum.

Duplex autem eſt modus componendi Poteſtatem horum multangulorum. Primus ex centris grauitatis, Radijs, ac vijs rotationis triangulorum proprijs, ac ſingularibus: ſecundus ex communi vnicoque multanguli centro, & hic ſanè facilior. In Compoſitione Poteſtatis Horizontalis, in qua peripheriæ chorda perpendicularis exiſtit ad axem rotationis non eſt opus communi illo grauitatis centro, ſed ſatis eſt conſtare id in recta illa, quæ ex medio ſubtenſæ perpendiculariter ad eam in multangulo educitur, conſiſtere; propterea quod ex huius puncto quouis recta ducta perpendiculariter ad axem æqualis eſt rotationis Radio: at pro Verticali, & Obliqua Poteſtate componenda opus eſt centro iam dicto. Poteſtas autem comparatur ductâ rotationis via in aream multanguli propoſiti.

Poteſtas Horizontalis multanguli ſemicirculo inſcripti.

Sit componenda Poteſtas Horizontalis multanguli ſemicirculo inſcripti octo æqualibus rectis diametro circulo contenti, & procedatur, vt diximus.

Sic etiam, & ſuo modo Poteſtas Verticalis componetur.

Poteſtates autem polygonorum regularium, componentur hoc modo.

Poteſtas polygonorum regularium.

Si componenda ſit Poteſtas alicuius polygoni, iam ex ſupradictis conſtat quid agendum. Sit primo illud octogonum, cuius Poteſtas Rotunda, ſiue Horizontalis, ſiue Verticalis (eſt enim eadem) componenda ſit; cognita autem diametro, cognoſcetur, & latus, itemque perpendicularis à centro ad latus ipſum, eritque rotationis Radius: vnde cognoſcetur via rotationis, quæ ducta in aream figuræ, dabit Poteſtatem eiuſdem Horizontalem, ſeu Verticalem.

Poteſtas Rotunda cuiuſcunq; figuræ rectilineæ.

Poteſtas verò Rotunda cuiuſcunque figuræ rectilineæ, componetur, vt ſequitur.

Ad triangula, quadrilatera, ac multangulos, circulo, partibuſque eius inſcriptos, quod attinet, iam ſupra locuti ſumus: vnde ſupereſt de varijs atque diuerſis variorum rectilineorum ſpeciebus aliquid inſinuemus. Habito centro grauitatis propoſiti rectilinei inquirendus eſt radius rotationis, eiuſque via; nam hæc ducta in aream rectilinei Rotundam Poteſtatem quæſitam componet. Hæ autem variæ erunt Poteſtates, ne dum propter varietatem rectilineorum, ſed etiam propter variam eiuſdem rectilinei ad axem rotationis applicationem.

Ad inquirendum Radium rotationis, præhabendum eſt grauitatis centrum, & ſi placet vnicum propoſiti rectilinei centrum, opus erit non rarò propoſitum rectilineum, in triangula, quadrangula reſoluere; harum autem partium aream ſi non habeamus, arearum ſaltem rationem oportet cognoſcere. Cùm igitur ad Poteſtatis compoſitionem areæ totius propoſiti rectilinei cognitio requiratur, eaque multoties haberi nequeat, niſi ex cognitione, & collectione arearum ipſorum triangulorum, & quadrangulorum, conſiderandum an expediat ex his particularum centris potius Potdſtates particulares, componere, eaſque in vnam ſummam colligere, an ex vnico totius figuræ centro, ſuam efficere Poteſtatem.

Poteſtas Circuli.

Poteſtas circuli comparabitur ſic. Iuſta Poteſtas circuli, fit ex ductu peripheriæ ipſius, quæ rotationis via eſt, in aream eiuſdem circuli, ſtrictuſque Annulus procreatur. Iuſtâ verò Maior fit ex ductu peripheriæ illius circuli, cuius ſemidiameter eſt Radius rotationis; qui quidem Radium dati circuli tantum ſuperat quanta eſt circuli eiuſdem ab axe rotationis remotio, in eandem circuli aream, prouenitque Annulus abſolutè dictus.

Poteſtas ſemicirculi.

Poteſtas ſemicirculi, ſegmentorum, ſectorum, reliquarumque circuli partium, componetur, vt ſequitur.

Semicirculi, reliquarumque circuli ſegmentorum Poteſtatum Rotundarum compoſitio non differt à reliquis.

Horizontalis poteſtas Iuſta.

Horizontalis autem Poteſtas Iuſta, vbi videlicet diameter ſemicirculi, ſiue baſis ſegmenti ad rotationis axem perpendicularis eſt, partem efficit Annuli ſtricti per ſectionem plani paralleli ipſi Horizonti genitam, componitur ab area ſemicirculi, & ſegmenti maioris, quorum ſemidiameter, minoris verò baſis dimidium, radio rotationis æquantur, ducta in vias proprias rotationis. Hic autem aduerte, ad hoc haud opus eſſe grauitatis centro, ſed ſatis, ſuperque eſſe, vt conſtet, illud eſſe in recta, quæ perpendiculariter erigitur ex biſſectionis puncto baſeos ipſius ſegmenti.

Poteſtas Iuſta Verticales.

Ad Compoſitionem autem Poteſtatum Iuſtarum Verticalium quod attinet, quando ſcilicet baſis ſegmenti, vel diameter ſemicirculi cum axe rotationis coincidit, aduertendum per rotationem ſegmenti minoris fieri corpus citrij, per ſemicirculi rotationem, ſphæram perfectam, per circumactum ſegmenti maioris, naſci corpus mali. Radij autem rotationis ſunt rectæ ductæ à centro grauitatis figurarum perpendiculariter ad axem: hinc cognita rotationis vi, eaque ducta in aream figuræ exhibet Poteſtatem Iuſtam Verticalem; ita etiam ſuo modo fiunt Poteſtates Obliquæ corundem ſegmentorum, fiunt etiam Poteſtates Rotundæ ſectorum circuli &c.

Poteſtates Lunularum.

Poteſtates autem Lunularum, Arcuatarumque figurarũ, Securicularum, & Coronarum, fiunt ad eum modum, qui facilè ex hactenus dictis colligitur.

Poteſtas Rotũda Ellipſeos

Poteſtas Rotunda Ellipſeos componitur ſic; & quidem Poteſtas Iuſta Horizontalis, quando ſcilicet axis longior Horizonti congruit, vel ad axem rotationis eſt rectus conſtituit Annulum Ellipticum ſtrictum, & latum. At verò Poteſtas Verticalis eſt Annulus Ellipticus ſtrictus,& altus; at Poteſtates ab Ellipſibus deſcriptæ cuius axes ad rotationis axem ſunt obliqui, vocantur etiam Annuli ſtricti Elliptici, ſed Obliqui.

In Poteſtatis Iuſtæ Horizontalis compoſitione rotationis Radius eſt ſemiaxis maior, vnde innoteſcit rotationis via, quæ quidem in aeram Ellipſeos ducta, Poteſtatem Iuſtam Horizontalem procreat.

At huius Poteſtatis medietas Poteſtas eſt Verticalis Iuſta cum rotationis Radij in ea ſint ratione.

Poteſtas Obliqua.

Poteſtas autem Obliqua ſimiliter colligitur ex ratione Radiorum rotationis.

Poteſtates Iuſtis maiores.

Poteſtates autem Iuſtis Maiores ſunt Annuli quidem Elliptici, & Horizontalis Poteſtas latum conſtituit Annulum.

Poteſtates Rotunda ſemiellipſeos &c.

Poteſtates autem Rotundæ ſemiellipſeos reliquarumque partium Ellipticarum, hac arte perficiuntur.

Diuiditur Ellipſis in diuerſas partes eodem omninò modo quo circulus, quæ etiam iiſdem nominibus appellari poterunt, ac propterea dabitur ſemiellipſis, ſegmenta minora, & maiora, ſectores ad centrum, & ad peripheriam, fruſta &c. Datis autem centro, & diametro Ellipſeos dabuntur etiam prædictarum partium grauitatis centra, atque areæ; quamobrem Poteſtates illarum componentur non aliter, quàm Poteſtates partium circuli, ſic comparabitur Poteſtas Iuſta Horizontalis, ſemiellipſeos, quæ eſt ſemiannulus ellipticus ſtrictus, vel latus, vel altus, prout Ellipſis per axem, vel Maiorem, vel Minorem ſecta eſt, nam rotationis eſt ſemiaxis maior, & ſemiaxis minor pro alta &c.

Poteſtas Iuſta Verticalis æquatur ſphæroidi.

Poteſtas autem Iuſta Verticalis æquatur Sphæroidi. Rotationis Radius idem eſt qui ſemiellipſeos circa maiorem, vel minorem axem deſcriptæ, prout Poteſtas alta, vel lata facienda ſit.

Horizontales, & Obliqua Poteſtates Iuſta maioresq́; Iuſtis quomodo fiant.

Horizontales etiam, & Obliquæ Poteſtates Iuſtæ, ſicut & maiores Iuſtis, quomodo fiant, quemadmodum & multa alia ad hoc ſpectantia facilè quidem ex dictis intelligitur.

Poteſtas Rotũda paraboles Horizontalis. Verticalis, & Obliqua.

Poteſtas etiam Rotunda Paraboles componitur.

Integræ autem Paraboles Rotundæ Poteſtas Horizontalis fit, quando baſis ipſius ad rotationis axem perpendicularis eſt. Verticalis quando baſis cum axe coincidit, vel ei parallela eſt. At verò Obliqua, ſi ad axem baſis Obliqua fuerit.

Horizontalis Iuſta quomodo dici cõſueuit.

Horizontalis Iuſta dici conſueuit Annulus, vel ſemiannulus ſtrictus parabolicus. Verticalis Iuſta refert Citrium parabolicum. Sed & multa alia ad hoc ſpectantia ex dictis colligi poſſunt.

Generalis Regula Reſolutionis Poteſtatũ.

Hucuſque ſummatim attulimus in huius Methodi gratiam, quæ pertinent ad Poteſtatum ſyntheſin: nunc innuam, quæ faciunt ad Analyſin, pro qua ea Generalis Regula traditur.

Poteſtas

Poteſtas data applicetur parti componenti datæ, & quantitas quæ inde oritur, partem alteram componentem manifeſtabit.

Quoniam autem quantitates componentes ſunt quantitas rotata, & via rotationis, propterea alterutrâ datâ, altera per applicationem Poteſtatis ad illam non ignorabitur: Vnde ex rotationis Radio, rotationis via prodibit, & contra.

Via rotationis ex Radio, & Radius ex illa innoteſcit per proportionem ſemidiametri ad peripheriam. Radius porrò centrum grauitatis quantitatis rotatæ, vel in puncto, vel in linea determinat, & quidem iuxta ſpeciem Poteſtatis, ſiue ea fuerit Iuſta, vel Iuſta Maior, quæ ex figura ipſa datæ Poteſtatis deprehendetur. Nam ſi figuræ pars aliqua, aut linea, aut punctum rotationis axem attigerit, Poteſtas propoſita Iuſta eſt. Quod ſi axis nullo modo attingatur, & tamen ab ipſa Poteſtate ambiatur, ea erit Iuſtâ maior. Iuſtis minores non minus in Reſolutione, quàm in Compoſitione negligantur.

Quando Poteſtas Iuſta fuerit. *Poteſtas Iuſta maior.* *Poteſtates Iuſtis minores negliguntur.*

Poteſtates autem Rotundæ a lineis rectis deſcriptæ reſoluuntur ſic. Poteſtas Rotunda à linea recta deſcripta cùm ſit ſuperficies, vel circularis, vel Conica, vel Cylindrica, eaque vel Horizontalis, vel Obliqua, vel Verticalis, & quidem vel Iuſta, vel Iuſtâ maior; hæc autem omnia ex ipſa data Poteſtatis figura, vel nomine cognoſcentur.

Poteſtates Rotundæ à lineis rectis quomodo reſoluātur.

Sit itaque primò tanquam Poteſtas oblatum planum circuli; ſtatim autem pronunciandum eſt, hanc eſſe Poteſtatem Rotundam ſecundi gradus à linea recta creatam, Iuſtam Horizontalem. Datâ igitur circuli quantitate, itemque lineâ rotatâ vnde Poteſtas procreata eſt, per hanc ipſam lineam ibi datur Poteſtas, & prodibit rotationis via, hoc eſt peripheria, ex qua innoteſcet Radius rotationis determinans in linea data ex centro circuli, centrum grauitatis ipſius lineæ rotatæ.

Quòd ſi loco lineæ rotatæ data ſit via rotationis, ad hanc applicatâ Poteſtate, proueniet quantitas lineæ rotatæ.

Nec diſſimiliter ſi eiuſdem lineæ detur Poteſtas, quæ ſit ſuperficies Coni Iſoſcelis, ex quo intelligimus Poteſtatem eſſe Iuſtam Obliquam, hac applicata ad lineam rotatam, prodibit rotationis via, cuius radius indicat remotionem centri grauitatis lineæ rectæ, quæ conicam ſuperficiem deſcripſit ab axe rotationis, quæ duplicata dat quantitatem conicæ baſeos. At verò angulus, quem axis coni cum eiuſdem latere conſtituit, eſt inclinatio lineæ rotatæ ad axem rotationis; Cùm autem loco quantitatis lineæ rotatæ, vnà cum Poteſtate data fuerit via rotationis, Poteſtas ad hanc viam applicata, dabit quantitatem lineæ rotatæ.

Poteſtates Iuſtis maiores ſunt ſuperficies circulares, coronæ nuncupatæ, conicæ verò ſunt coni imperfecti, & ſuo modo reſoluuntur.

Poteſtates Iuſtis maiores.

Vnde ſi data ſit Poteſtas reſoluenda, quæ ſit ſuperficies fruſti conici, & vnà cum ipſa data ſit recta linea rotata, ſi per hanc diuidatur Poteſtas, via rotationis eiuſque radius comparabitur. Inclinatio autem lineæ rotatæ ad axem prodibit, ſi quadratum altitudinis fruſti ſubtrahatur ex quadrato lateris; remanebit enim quadratum baſeos trianguli rectanguli, cuius hypotenuſa eſt prædictum latus, & cathetus altitudo fruſti, ex quibus colligetur inclinatio quæſita.

Sic etiam ſi propoſita ſit reſoluenda Poteſtas à pluribus, quàm vna recta deſcripta, quemadmodum eſt ſuperficies Rhombi ſolidi deſcripta à binis rectis, vnà cum quantitate earundem ſimul ſumptarum; ad hanc enim applicata Poteſtate, prouenie rotationis via, eiuſque radius: vnde conſtabit remotio centri grauitatis ipſarum linearum ab axe.

Poteſtas à pluribus quàm vna recta etc.

Idem iudicium ferendum de reliquis Poteſtatibus deſcriptis à pluribus rectis.

Poteſtates à lineis curuis, mixtiſque deſcriptæ, ſuam habent reſolutionem: vnde ſi detur ſphærica ſuperficies, Poteſtas quidem Verticalis peripheriæ ſemicirculi Iuſta data ſit, atque data via rotationis, ad quam ſi applicetur Poteſtas prouenie ſemiperipheria circuli maximi in ſphæra, ex cuius rotatione ſphærica ſuperficies compoſita fuit; & contra ſi loco viæ rotationis data fuiſſet quantitas ſemiperipheriæ rotatæ, ad hanc applicatâ Poteſtate, prodijſſet rotationis via. Reſolutio etiam Poteſtatum à planis rectilineis factarum inſtituitur. Si igitur detur Poteſtas aliqua reſoluenda ſimul dari debet vel via rotationis, vel planum rotatum, alterutro autem dato, per vnicam diuiſionem alterum innoteſcit.

Nec diſſimili artificio Poteſtates Rotundæ, à planis curuilineis ortæ, reſoluuntur: vt ſit propoſita ſphæra, tanquàm Poteſtas Rotunda, reſoluenda deſcripta à plano ſemicirculi; ſitque data ſimul etiam area ſemicirculi; per hanc enim diuiſâ Poteſtate, via rotationis prodibit &c.

Poteſtas Rotunda in directam tráſmutatur.

Poteſtas autem Rotunda tranſmutatur in Directam; ſi namque Poteſtas Rotunda data fuerit in numeris, & ea quidem ſuperficies extiterit, extrahatur radix eius quadrata; ſi corpus extrahatur cubica; quod ſi præciſè fieri non poterit, fiat per approximationem. Vel Poteſtas illa applicetur ad certum quendam numerum, prodibit alter, & ambo erunt latera rectanguli æqualis propoſitæ Poteſtati, quando hæc fuerit ſuperficies. Quòd ſi fuerit corpus, prodibit ſuperficies expreſſa numeris, quæ ducta in numerum diuidentem faciet parallelepipedum æquale ſolidæ Poteſtati. Sed huiuſmodi applicationes etiam Geometricè fieri poſſunt.

Hæc autem ſummatim fuerunt à nobis exhibita, in gratiam huius Methodi, quam certè ob oculos ponere non licebat, his neglectis. Qui verò cupit hæc eadem cumulatè tractata inſpicere, adeat huius Methodi Auctorem Guldinum.

Supereſt, vt pauca quædam exempla nos afferamus in medium, quibus videlicet, hæc ipſa Methodus illuſtretur.

Sed vt Methodum hanc, quatenus centro grauitatis vtitur, magis explicemus, iuuabit Theoremata quædam in exemplum afferre, & quidem è numero eorum, quibus etiam noſtrâ peculiari Methodo ſatisfacimus; inde ſiquidem Lector facilè intelliget, vtra earum ſit plauſibilior, vel ſaltem quid inter vtramque interceſſe videatur.

THEOREMA.

Exemplum LXXVII.

Circuli inter ſe ſunt, vt à ſemidiametris, diametris, &c. ſemicircumferentijs, circumferentijs, &c. quadrata.

Poteſtas Rotunda horizontalis Iuſta, quam recta linea efformat, ſic comparatur. Extremo lineæ datæ Horizontaliter poſitæ immoto, ac ſtabili, dum linea reuoluitur puncto, in quo ipſa biſariam diuiditur, quodque eius eſt grauitatis centrum, peripheriam deſcribit, quæ rotationis via dicitur, cuius Radius eſt dimidium ipſius lineæ; ducta autem rotationis via in lineam rotatam, comparatur Poteſtas Iuſta Horizontalis Rotunda, quæ eſt circuli planum, cuius ſemidiameter eſt linea rotata; ergo circulus æqualis eſt rectangulo ſub ſemidiametro, & rotationis via, hoc eſt ſemiperipheria ipſius circuli (eſt enim via rotationis peripheria circuli deſcripti ſemidiametro, quæ dimidium eſt peripheriæ circuli, de quo inſtituitur comparatio; vtq; ſemidiameter ad ſemidiametrum, ita peripheria ad peripheriam;) ergo circulus ad circulum eſt, vt rectangulum ad rectangulum, ſed rectangulorum ratio componitur ex rationibus laterum, ergo circulorum ratio componitur ex rationibus laterum rectangulorum; ſed ratio laterum eſt eadem, cum vt ſemidiameter ad ſemidiametrum, ita ſit ſemiperipheria ad ſemiperipheriam; atq; adeò rectangulorum ratio eſt ratio duplicata laterum; & quæ eſt ratio rectangulorum, eadem eſt circulorum; ergo circulorum ratio eſt duplicata laterum, ſeu vt quadrata laterum; ergo vt quadratum ſemidiametri vnius circuli ad quadratum ſemidiametri alterius circuli; vel vt quadratum ſemiperipherię ad quadratum ſemiperipherię; atque adeò vt quadratum diametri ad quadratum diametri; vel vt quadratum integræ peripheriæ ad quadratum integræ peripherię, ita circulus ad circulum, &c.

THEOREMA.

Exemplum LXXVIII.

Cylindri recti curua ſuperficies ad baſin eſt, vt latus eiuſdem Cylindri, ad quartam partem diametri eiuſdem baſeos.

Ratio enim ſuperficierum, quarum vna eſt curua Cylindri recti, altera eſt baſis, componitur [a] ex ratione lateris ipſius cylindri, ad ſemidiametrum baſeos, & ex ratione eiuſdem ſemidiametri, ad dimidium ſemidiametri, ſeu ad quartam partem diametri, ergo ſuperfi-

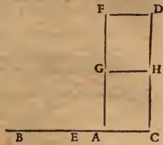
[a] *In Corol. tertio.*

perficies cylindri curua ad baſin, eſt [b] vt altitudo Cylindri, ad quartam partem diametri baſeos. [b] Ex Corol. quarto.

THEOREMA.

Exemplum LXXIX.

Omnis Cylindri recti ſuperficies ſine baſibus, æqualis eſt circulo, cuius ea, quæ ex centro, media proportionalis eſt inter latus, & diametrum baſeos eiuſdem Cylindri.



Sit recta FA, quæ circa axem DC rotetur, mediante radio GH recta, quæ eſt ad rectos angulos ipſi DC, biſſecans FA in puncto G, vbi centrum eſt grauitatis ipſius FA, quæ per hanc rotationem cylindricam ſuperficiem deſcribat. Reperiatur inter FA, & duplam AC, (eſt autem AC ſemidiameter baſeos ipſius cylindri) reperiatur, inquã, inter FA, & duplam AC, diametrum baſeos ipſius cylindri, media proportionalis BC, quæ, ſi biſſecetur in E, ibi huiuſmodi lineæ erit grauitatis centrum. Oſtendendum eſt cylindricam ſuperficiem æqualem eſſe ſuperficiei circuli deſcripti, à ſemidiametro BC, cuius rotationis Radius eſt recta EC, circa eundem axem DC. Quoniam igitur ſuperficies cylindrica æqualis eſt rectangulo ſub recta FA, latere cylindri, & via rotationis, ſeu peripheria circuli, cuius ſemidiameter GH, ſiue AC, quæ illi eſt æqualis. At verò circuli, cuius ſemidiameter BC, ſuperficies, æqualis eſt rectangulo ſub recta BC, & via rotationis, ſiue peripheria, cuius radius EC; vt autem peripheria ad peripheriam, ita eſt diameter ad diametrum; propterea, acceptis diametris loco ipſarum peripheriarum, nimirùm dupla AC, & dupla EC, quæ eſt ipſa BC,

Erit, vt rectangulum ſub FA, & via rotationis, cuius ſemidiameter AC, ad rectangulum ſub BC, & via rotationis, cuius radius EC, ita rectangulum ſub FA, & dupla AC, quæ eſt diameter, loco viæ rotationis, atque peripheriæ, ad rectangulum ſub BC, & dupla EC, quæ eſt BC, diameter, loco viç rotationis, atque peripheriç. Sed cylindrica ſuperficies erat çqualis rectangulo ſub FA, & via rotationis, cuius radius AC, & circulus, cuius ſemidiameter BC erat æqualis rectangulo ſub BC, & via rotationis, cuius radius EC; ergo vt rectangulum ſub FA, & dupla AC, ad quadratum BC, ita cylindrica ſuperficies ad circulum, cuius ſemidiameter BC; ſed rectangulum ſub FA, & dupla AC, æquale eſt quadrato BC; ergo cylindrica ſuperficies æquabitur circulo, cuius ſemidiameter BC.

THEOREMA.

Exemplum LXXX.

Cuiuſcunque coni Iſoſcelis ſuperficies ad baſin, eam habet rationem, quàm latus Coni ad Radium circuli, qui baſis eſt coni.

Quoniam conica ſuperficies naſcitur ex latere coni in viam rotationis, hoc eſt in peripheriam, cuius Radius eſt dimidium Radij baſeos ipſius coni: at verò circulus, qui eſt baſis coni, naſcitur ex ductu eiuſdem peripheriæ, quæ erat dicta via rotationis, in ſemidiametrum eiuſdem baſeos; ergo ſuperficies conica, ad ſuperficiem circuli, qui eſt baſis ipſius coni, eſt, vt latus coni, ad Radium circuli, qui baſis eſt coni; ex prima Sexti Elementorum.

THEOREMA.

Exemplum LXXXI.

Cuiuſcunque ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli eorum, qui ſunt in ipſa.

Quoniam enim eſt, vt medietas viæ rotationis, ſiue ſemiperipheria minor, ad ſemiperipheriam maiorem, nimirùm circuli maximi ipſius ſphæræ, ita Radius illius ad Radium iſtius; ſed vt Radius ad Radium, ita ſemiſubtenſa ſemicirculi maximi, hoc eſt Radius ipſius ad

arcum

arcum quadrantis, ſeu ad quartam partem ipſius peripheriæ maximi circuli; ergo etiam vt medietas viæ rotationis ad ſemiperipheriam circuli maximi, ita Radius ipſius ad quartam partem peripheriæ eiuſdem; ergo rectangulum ſub extremis, hoc eſt ſub ſemiſſe viæ rotationis, & quarta parte maioris peripheriæ, æquatur rectangulo ſub medijs, nempè ſub ſemiperipheria circuli maximi, & Radio eiuſdem; ſed rectangulum illud æquatur quartæ parti ſuperficiei ſphæricæ, nam tota ſuperficies ſphæræ producitur ex tota via rotationis in ſemiperipheriam maximam; rectaugulum autem hoc nempe ſub ſemiperipheria circuli maximi, & Radio eiuſdem æquatur circulo maximo eiuſdem ſphæræ; ergo tota ſphærica ſuperficies æquatur quadruplo circulo maximo eiuſdem ſphæræ.

Exemplum LXXXIII.

THEOREMA.

Omnis ſphæra quadrupla eſt coni, baſin quidem habentis æqualem maximo circulo eorum, qui in ſphæra, altitudinem verò Radium ſphæræ.

Intelligatur dimidium circuli maximi ipſius ſphæræ, eique inſcriptum triangulum rectangulum, angulum habens rectum ad centrum circuli, baſis ſemidiameter ipſius circuli, quæ ſcilicet tendit à centro biſſecans ſemiperipheriam, perpendiculum verò altera ſemidiameter, atque adeo in hoc triangulo hypotenuſa ſit recta ſubtendens quadrantem totius peripheriæ. Manifeſtum eſt ex rotatione ſemicirculi, circa diametrum, veluti, circa axem ſphæram procreari; ex rotatione verò trianguli fieri conum cuius baſis circulus maximus ipſius ſphæræ, altitudo verò ſemidiameter eiuſdem. Oſtendendum eſt ſphæram eſſe quadruplam huiuſmodi coni. Intelligatur factum aliud triangulum ſimile, & æquale iam dicto, ita vt ex vtroque coaleſcat ſemiquadratum inſcriptum ſemicirculo. Quoniam igitur eſt ſemicirculus ad ſemiquadratum, vt ſemicircumferentia ad diametrum (circulus enim ad quadratum ſibi inſcriptum eſt vt ſemiperipheria ad diametrum, cùm latus quadrati inſcripti ſit medio loco proportionale inter diametrum, & ſemidiametrum: atque adeo ſit æquale rectangulo ſub diametro, & ſemidiametro; ſed ſemiperipheria ducta in eundem radium æquatur circulo; ergo vt ſemiperipheria ad diametrum, ita circulus ad quadratum ſibi inſcriptum: atque adeo ita ſemicirculus ad ſemiquadratum). At verò ſphæra componitur ex rotatione ſemicirculi, hoc eſt ex ductu areæ ſemicirculi in quatuor tertias partes diametri; duplus verò conus, hoc eſt Rhombus, quem rotatio ſemiquadrati circa axem eundem deſcribit, componitur ex ductu areæ eiuſdem ſemiquadrati in tertiam partem peripheriæ; ſiquidem rotationis Radius eſt tertia pars ſemidiametri, atque adeo via rotationis eſt tertia pars peripheriæ maximi circuli. Ergo ſphæra ad duplum conum eſt, vt productũ ex ſemicirculo in quatuor tertias partes diametri, ad productũ ex ſemiquadrato in tertiam partem peripheriæ. Sed vt ſemicirculus ad ſemiquadratum, ita erat ſemicircumferentia ad diametrum; ergo productum ex ſemicircumferentia in quatuor tertias partes diametri, ad productum ex diametro in tertiam partem circumferentiæ, erit, vt productum ex ſemicirculo in quatuor tertias partes diametri, ad productum, ex ſemiquadrato in tertiam partem circumferentiæ, ſed in hac rectangulorum ratione erat ſphæra ad duplum conum; ergo ſphæra ad duplum conum erit vt productum ex ſemicircumferentia in quatuor tertias partes diametri ad productum ex diametro in tertiam partem circumferentiæ, ſeu ad productum ex tertia parte diametri In integram circumferentiam, ſeu ad productum ex duabus tertijs partibus diametri in ſemicircumferentiam; ſed productum ex ſemicircumferentia in quatuor tertias diametri partes eſt duplum producti ex duabus tertijs partibus diametri in eandem ſemicircumferentiam; ergo ſphæra ad duplum conum eſt in ratione dupla; ergo ſphæra ad ſimplum conum eſt in ratione quadrupla.

De Methodo Progreſsionibus innixa.

Mirabilis vſus vtriuſq; Progreſſionis.

SAtis quidem liquet Progreſſionem eſſe duplicem, quarum vna Arithmetica, altera autem Geometrica eſt. In illa termini perpetuò ſe æqualiter excedunt, in hac proportionaliter ſe habent. Mirabilis eſt vtriuſque vſus ad Geometricas veritates indagandas.

Ad Arithmeticam Progreſſionem quod attinet, ſi rectè nos attendamus comperiemus

per

per illam, quamplurima Theoremata demonſtrari poſſe, quibus tamen profitemur Geometricè magis peculiari noſtra Methodo ſatisfieri.
Sunt autem Theoremata quædam velut huius Methodi cardines, vt.

Propoſitio.

Series quantitatum Arithmeticè proportionalium (ſiue iuxta ſeriem numerorum quadraticorum) continuo creſcentium, à, o, vel punčto inchoatarum numero, vel finitarum, vel infinitarum eſt ad ſeriem totidem maximæ æqualium in ratione ſubdupla.

In hac quinque ſpectanda ſunt. Minor terminus; Maior Progreſſionis exceſſus: Terminorum multitudo; & eorundem Aggregatum, de quibus alibi.

Idque ſic oſtendant, Eſto primus terminus Progreſſionis Arithmeticæ o, ſecundus 1, vltimus l, terminorum multitudo erit l ✱ 1, cuius dimidium ductum in l, dabit ſummam ipſius Progreſſionis, nempe $\frac{l+1}{2}$ l. *Experire in numeris, idq; luculentius conſpicies.*

Vel ſuppoſito terminorum numero, a, quantuſcunque ſit terminus ſecundus, ſumma ſerici erit $\frac{1}{2}$ a l. Hinc

THEOREMA. *Exemplum LXXXIV.*

Triangulum ad parallelogrammum eiuſdem baſeos, ac altitudinis eſt in ratione ſubdupla.

Triangulum enim conſtat ex rectis potentia quidem infinitis parallelis Arithmeticè proportionalibus a puncto vel o inchoatis, quarum maxima eſt baſis; parallelogrammum vero ex totidem baſi æqualibus. Item

THEOREMA. *Exemplum LXXXV.*

Pyramidoides, vel Conoides parabolicum eiuſdem baſeos, ac altitudinis, ſiue erectum, ſiue inclinatum eſt in ratione ſubdupla.

Pyramidoides enim vel Conoides parabolicum conſtat ex planis potentia quidem infinitis Arithmeticè proportionalibus, à puncto inchoatis, quorum maximum eſt baſis, Priſma verò, vel Cylindrus, ex totidem baſi æqualibus.

Et alia multa ſequuntur.

Propoſitio.

Series infinita quantitatum in duplicata ratione Arithmeticè proportionalium (ſiue iuxta ſeriem numerorum quadraticorum) continuè creſcentium à, puncto, vel o inchoatarum; ad ſeriem totidem maxima æqualium rationem ſubtriplam ſuperat, eſtq; exceſſus ea ratio quam habet vnitas ad ſextuplum numeri terminorum poſt o, ſiue quam habet radix quadratica termini primi poſt o, ad ſextuplum radicis quadrata termini maximi.

Vt ſi terminus poſt o, primus ponatur 1, vltimus autem l, erit $\frac{1+1}{3}$ l ✱ $\frac{1+1}{4}$ l. Summa.
Vel (poſito numero terminorum a: vltimiq; latere l.) $\frac{1}{3} l^2 + \frac{a}{6a-6} l^2$. Cum autem numero …inorum excreſcente, exceſſus ille ſupra rationem ſubtriplam, ita continuò minuatur, *Experire in numeris, idq; luculentius conſpicies.*
v…dem quolibet aſſignabili minor euadat, ſi in infinitum procedatur, intelligitur euanitus; quare.

Propoſitio.

Series potentia infinita quantitatum in duplicata ratione Arithmeticè proportionalium, (ſiue iuxta ſeriem numerorum quadraticorum) continuè creſcentium à puncto, ſiue o; inchoatarum; eſt ad ſeriem totidem maxima æqualium, in ratione ſubtripla.

Hinc

Hinc porrò multa colliguntur, nempe.

THEOREMA.

Exemplum LXXXVI. *Conus, vel Pyramis, ad Cylindrum, vel Priſma eiuſdem baſeos ac altitudinis eſt in ratione ſubtripla.*

Conus enim, & Pyramis conſtant ex ſimilibus, & parallelis planis potentia quidem infinitis in duplicata ratione Arithmeticè proportionalium conſtitutis, quorum minimum eſt punctum, maximum verò baſis. Cylindrus autem, vel Priſma ex totidem maximo æqualibus. Item

THEOREMA.

Exemplum LXXXVII. *Complementum Semiparaboles, ſpatium ſcilicet, quo Semiparabole complet parallelogrammum eſt ad parallelogrammum in ratione ſubtripla. Hinc*

THEOREMA.

Exemplum LXXXVIII. *Semiparabole ad prædictum parallelogrammum eſt in ratione ſubſeſquialtera.*

Sunt enim diametri ſegmenta in duplicata ratione ſemiordinatim applicatarum ſibi reſpondentium, vnde rectæ omnes ductæ parallelæ diametro in complemento iam dicto ſunt in duplicata ratione partium ſumptarum in recta tangente paraboles verticem Arithmeticè proportionalium, quibus nempè reſpondent ſemiordinatim applicatæ. Series igitur rectarum in complemento ad ſeriem maximæ æqualium in parallelogrammo, ex præmiſſo Theoremate erit in ratione ſubtripla; ergo, & complementum ad parallelogrammum erit in ratione ſubtripla. Atq; adeo ſemiparabole eſt ad idem parallelogrammum in ratione ſubſeſquialtera. Hinc & multa alia etiam colliguntur.

Adi Vallis Arith. Infinitorum.

SCHOLION.

Aduertenda quadam.

Aduertendum eſt autem in Progreſſionibus commemoratis, quando ſcilicet fit ſeries quantitatum in duplicata ratione Arithmeticè proportionalium, immò & in triplicata &c. propoſitiones non verificari de multitudine determinata, hoc eſt de terminis acceptis ſecundùm determinatam multitudinem, ſed oportet in infinitum abire. Vnde ſi exempli gratia, ſumantur decem termini Arithmeticè proportionales incboantes à, o, ſumantur, & eorum quadrata; horum ſeries non eſt ſubtripla ſeriei æqualium maximo termino. Secus autem euenit ſi comparetur ſeries ipſorum terminorum Arithmeticè proportionalium inchoantium à, o, eaque comparetur cum ſerie maximo æqualium; præciſè ſiquidem huius illa ſubdupla eſt, accepta etiam ſecundum quamcunque determinatam multitudinem. Series igitur quadratorum ſpectari poteſt, vel prout abitura in infinitum, vel prout abyt: priori modo non eſt ſubtripla terminorum maximo æqualium, ſed maiorem rationem habet; prout autem abyt in infinitum, ſubtriplam rationem obtinet; hunc enim in modum exceſſus continuò decreſcentes in infinitum, euanuerunt. Hoc animaduertiſſe iuuat, quod in conſimilibus frequenter accidit, idque etiam in Progreſſionibus Geometricis, infra conſtabit.

Ita quoque notare licet in comparatione facta inter omnia quadrata alicuius lineæ, & quadrata totidem partium eiuſdem, quadrata ſiquidem omnium partium cuiuſcunque rectæ ſubtripla ſunt totidem quadratorum totius; ſunt enim in ratione Coni ad Cylindrum, quod tamen intelligendum ſecundùm proceſſum in infinitum. Vt ſi rectæ cuiuſdam decem partes acceperis, initio ſemper facto ab extremo vno ipſius, adeo vt ſemper minores in maioribus includantur vtcunq; non propterea decẽ illarũ partiũ quadrata ſimul ſumpta erunt in ratione ſubtripla, ad totidem quadrata totius ſimul accepta. Sunt enim illæ partes Arithmeticè

thmeticè proportionales, perpetuò ſe excedentis æqualibus exceſſibus; quamobrem eſt ſeries infinita quantitatum in duplicata ratione Arithmeticè proportionalium continuè creſcentium, à puncto, ſeu o, exordientium, hoc eſt quadratorum partium prædictarum, atque adeo erit ad ſeriem totidem maxima æqualium, hoc eſt ad totidem quadrata totius in ratione ſubtripla.

Si quis autem contentus aliunde cognouiſſe, conum eſſe ſubtriplum cylindri eiuſdem baſeos, ac altitudinis, Theorema propoſitum Geometricè demonſtrabit: vnde & alia plurima innoteſcent; duplatis enim partibus fient diametri circulorum coni, totaque linea itidem duplata fient diametri circulorum cylindri eiuſdem baſeos, ac altitudinis cum cono. At ſi per Theorema iſtud, illud itidem demonſtrare velis, aliunde hoc oportebit oſtendere, vt paulò antea inſinuauimus, quod in ſecundo libro cumulatius tractabimus.

Hæc autem admirationem ingerunt, nam ſi nos intelligamus conum, & cylindrum eiuſdem baſeos, ac altitudinis, determinatamque multitudinem planorum, baſi parallelorum ſecantium tam cylindrum, quam conum; communes quidem planorum, tam cum cylindro, quàm cum cono ſectiones erunt circuli, nullus tamen præter vnum circulorum cylindri poterit eſſe triplus circuli ſibi reſpondentis in cono, adhuc tamen omnes circuli cylindri tripli erunt omnium circulorum in cono eiuſdem baſeos, ac altitudinis. In his igitur vides abeundum eſſe in infinitum, *Aduertenda quædam.*

Propoſitio.

Series quantitatum in triplicata ratione Arithmeticè proportionalium, ſiue iuxtà ſeriem numerorum cubicorum continuè creſcentium, à puncto, vel o, inchoatarum, eſt ad ſeriem totidem maxima æqualium eſt in ratione, quæ ſubquadruplam ſuperat, & huiuſmodi rationis exceſſus eſt ratio, quam habet vnitas ad quadruplum numeri terminorum poſt o, ſiue quam habet cubica radix termini primi poſt o, ad quadruplum radicis cubicæ termini maximi.

Vt $\frac{1+1}{4} 1^3 + \frac{1+1}{4} 1^3$ Vel $\frac{2}{4} 1^3 + \frac{2}{4} 1^3 =$ [illegible].

Cum verò creſcente numero terminorum exceſſus ille ſupra rationem ſubquadruplam, ita continuo decreſcit, vt tandem quolibet aſſignabili, ſit minor propterea ſi in infinitum procedatur, omninò euaneſcet; quare. *Exemplum LXXXIX.*

T H E O R E M A.

Series infinita quantitatum in triplicata ratione Arithmeticè proportionalium, ſiue iuxtà ſeriem numerorum cubicorum continuè creſcentium, à puncto, ſeu o, inchoatarum, eſt ad ſeriem totidem maximè æqualium in ratione ſubquadrupla.

Hinc.

T H E O R E M A. *Exemplum LXXXX.*

Complementum ſemiparaboles cubicæ ad ſuum parallelogrammum eſt in ratione ſubquadrupla, ac propterea, & ipſa ſemiparabole eſt in ratione ſubſeſquitertia.

Hinc & multa alia colliguntur.

Quo autem pacto ſit indaganda ratio, quam habet ſeries ad ſeriem, de quibus ſupra, in Secundo Libro explicabimus.

Hic autem non præteribo quod vlterius perſpicuum fiet nimirum plurima beneficio Progreſſionis Arithmeticæ demonſtrata facilius oſtendi, & magis fortaſſe Geometricè per decreſcentiam exceſſus, atque defectus: vnde hæc magna ex parte ad peculiarem noſtram Methodum reuocantur. *Adnotanda quædam.*

Ad Geometricam Progreſſionem quod attinet, illud dicendum occurrit, quòd huic etiam, Methodus inniti poteſt; obſeruata ſiquidem ipſa Progreſſione, multoties innoteſcit ratio quæſita: vnde qui adnotarunt, parabolen aggregatum eſſe quoddam infinitarum numero magnitudinum in proportione quadrupla, quarum prima eſt triangulum eiuſdem baſeos ac altitudinis cum illa: ſecunda eſt aggregatum ex duobus triangulis deſcriptis in duobus ſegmentis eiuſdem paraboles, & ita deinceps; parabolen autem eſſe aggregatum omnium terminorum, adnotarunt ſimul, primam illam magnitudinem, ſeu primum ter- *De Geometrica Progreſſione diſſerunt.*

Mm minum,

minum, nempè triangulum eiuſdem baſeos, ac altitudinis cum parabola, medio loco proportionalem eſſe inter primam differentiam, & ipſam parabolen; quare ſi primus terminus valet quatuor, ſecundus terminus valebit vnum; prima igitur differentia valebit tria: quare aggregatum omnium, vt parabole ad primum terminum, ſcilicet ad triangulum eiuſdem baſeos, ac altitudinis, ita hoc ipſum triangulum, quod valebat quatuor, ad primam differentiam, quæ valebat tria. Ex Progreſſionis Geometricæ ſiquidem natura primus terminus eſt medio loco proportionalis inter primam differentiam, & aggregatum terminorum omnium: Vnde parabole ſeſquitertia eſt ipſius trianguli.

Vſus Geometricæ Progreſſionis.

Quemadmodum igitur vſus Arithmeticæ Progreſſionis in eo conſiſtit, vt attendamus num in ijs, de quibus agimus huiuſmodi Progreſſio locum habeat, nam ipſius Progreſſionis ſymptomata nobis ſuppeditant quid in re propoſita dicendum, pro affectionibus demonſtrandis; non diſſimiliter de Progreſſione Geometrica ſentiendum; huius enim vſus in eo poſitus erit, num locum obtineat in re ſubiecta, nam attendendo eiuſdem Progreſſionis naturam, ac inde conſequentia, facilè deprehendemus oblati Theorematis reſolutionem. Cæterùm huiuſmodi Progreſſio, quam in infinitum concipimus, quantitati diſcretæ, & continuæ communis eſt, ac in continua tripartito continget, iuxtà triplex quantitatis genus, nempè lineam, ſuperficiem, & corpus; in Superficiebus autem, & corporibus attendi figurarum ſimilitudo poteſt, iuxta quam Progreſſio ipſa præclara quidem habet ſymptomata, quorum beneficio multa innoteſcent in ijs, in quibus Progreſſio ipſa locum obtinuerit.

Illud etiam addendum, ſcilicet huiuſmodi Progreſſionem, quamuis tendentem in infinitum, terminari adhuc, neque mirum, quoniam illa tendentia eſt ſecundùm partes perpetuo minores; terminatur autem per modum vnius. Ita profectò Progreſſio illa triangulorum in parabole in ratione quadrupla, terminatur in parabolen; ſic de multis, multiſque alijs Progreſſionibus planorum præſertim ſimilium, itemque ſolidorum.

Nec prætereundum, quod ſuperius innuimus Progreſſionem ipſam accipiendam eſſe, vt iam abijt in infinitum.

DE AVCTORIS METHODO PECVLIARI, AC PROPRIA

Per decreſcentiam exceſſûs, atque defectûs in infinitum abeuntem Particularium omnium feraciſſima, velut illa, qua obſcurioribus Theorematibus, facilè, ac expeditè fit ſatis, præſertim ijs, quæ cum Veteres, tum Recentiores laborioſè demonſtrarunt.

ET quòd ferax admodum ſit, & quòd valde facilis Methodus, de qua loquimur, magni fieri debet. Neminem tamen admiratio ſubeat, quòd hanc nobis vendicemus, quamuis ab aliquo alio fuerit non nihil inſinuata; propterea quod nec illam generali ratione tractauit, nec firmis demonſtrationibus ſtabiliuit. Vtrunque verò præſtitiſſe nos arbitramur. Si igitur id admittendum, quod cæcinit Lyricus de Poeta loquens,

In Arte Poetica.

Publica materies priuati iuris erit, ſi
Nec circa vilem, patulumque moraberis orbem,
Nec verbum verbo curabis reddere fidus
Interpres.

Multo magis nobis materiam hanc aſſumentibus, id euenturum dixeris.

Primum autem videtur operæ pretium in medium afferre demonſtrationem, qua Vir non vulgaris eruditionis eſt vſus ad Methodum hanc ſtabiliendam, quam nos, priuſquam libellum ipſius datum eſſet adire, eramus meditati; Poſtmodũ cautiores facti exiſtimauimus, in errorem nos incidiſſe, eùm autem eadem demonſtratione illum vſum, aduerteremus; ſiquidem auctoritas ipſius apud nos plurimum habebat momenti, ſuſpicari cæpimus nos non allucinatos fuiſſe in ipſa demonſtratione contexenda, ſed potius in decernendo, quòd ea minus foret idonea; iterum igitur cùm eandem ad trutinam reuocandam ſuſciperemus, tandem dubitauimus, & nos, & illum fuiſſe deceptos, ac propterea Methodum hanc longè aliter demonſtrationum robore firmandam.

Demon-

Demonſtratio verò, quam ille typis commiſit, ſe ſe habet, vt ſequitur.

Datæ ſint binæ quantitates A, & B, ſiue ſuperficies, ſiue corpora; data ſit item ratio quæcunque E ad F.

Si quantitatibus A, & B, aliæ atque aliæ magnitudines ſine termino inſcribi poſſint, quæ & eam ſemper inter ſe rationem ſeruent, quam E ad F, & quantitates ipſas A, B, exhauriant, hoc eſt ab ipſis deficiant defectu quantumuis paruo.

Z X E F

A B

M. N.

Erit quantitas A ad quantitatem B, vt E ad F.

Si non; erit ratio A ad B, maior, aut minor ratione E ad F. Sit primo maior.

Aliqua igitur quantitas Z, minor quàm A, erit ad B, vt E ad F. Inſcribantur ipſis A, & B, magnitudines binę M, N; M quidem ipſi A: N verò ipſi B, eâ lege vt M, minus deficiat ab A, quam Z, ac proinde ſit maius quàm Z, & ſimul rationem talem habeat ad N, quam E ad F; hoc enim totum fieri poterit per hypotheſin.

Quoniam igitur M maius eſt quàm Z, erit M ad B in maiori quàm Z ad B; at Z erat ad B, vt E ad F; ergo M eſt ad B in maiori quàm E ad F, hoc eſt, M eſt ad B, in maiori, quàm M ad N; ergo N magnitudo inſcripta ipſi B, maior eſt quàm B, pars ſuo toto, quod fieri non poteſt; non igitur ratio A ad B, maior ratione E ad F.

Quare cum ratio A ad B, neque maior ſit ratione E ad F, neque minor, ęqualis erit, Quod erat demonſtrandum.

Idem lineis quadrat, ſi loco figurarum inſcriptarum partes eadem lege auferantur,

Corollarium.

Si quantitatibus A, & B, aliæ magnitudines inſcribi poſſint, quæ & ſemper æquales ſint inter ſe, & quantitates ipſas A, B, exhauriant.

Erit quantitas A, æqualis quantitati B.

Patet ex Propoſitione: nam ratio E ad F iſthic data fuit quęcunque, ac proinde etiam ratio ęqualitatis.

Huius demonſtrationis Auctor in eo peccaſſe videtur, & quod Theorema non ſecundùm generalem rationem condiderit; nihil enim refert quod quantitates ſic ſe habeant, vt vna ſit tanquam figura alteri inſcripta &c., & quod in ipſa demonſtratione ad pauca ſe reſtringens defecerit,

Antequam autem nobis datum eſſet adire huius Auctoris lucubrationes aliquomodo ſimilem demonſtrationē ſequentem excogitauimus; re tamen diligentiùs introſpecta, viſa eſt nobis ſuſpecta, vt paulò poſt dicemus. Poſtmodum diſieſtis tenebris veritas enituit,

Non diſſimiliter nos ratiocinati eramus.

Sint quantitates A, B, totidem aliæ C, D, minores, quæ per incrementa ſemper ac ſemper minus deficiendo ab ipſis A, B, deficere tandem poſſint defectu minori quacunque data quantitate; perpetuò tamen ſeruantes eandem rationem, quæ eſt E ad F. Dico A, ad B, rationem habere, vt E ad F.

G

A B

C D E F

Si non eſt A, ad B, vt E ad F, habebit A ad B, maiorem, vel minorem rationem, quàm E ad F. Habeat primò maiorem rationem, & fiat vt E ad F, ita G ad B; ergo A maior erit quàm G. Vel ergo C maior eſt quàm G, vel non maior; ſit primò maior. Quoniam igitur C maior eſt quàm G; ergo C ad B maiorem habebit rationem, quàm E ad F; ſed vt E ad F, ita C ad D; ergo C ad B maiorem habebit rationem quàm ad D; ergo D maior erit quàm B, contra hypotheſin; ſupponimus enim B maiorem eſſe quàm D.

Si verò non fuerit maior quàm G. Quoniam G minor eſt quam A intelligi poterit C maior quàm G, minor tamen quàm A, ſimulque rationem habere ad D, quæ eſt E ad F. Quoniam igitur C maior eſt quàm G, erit C ad B, in maiori ratione quàm G ad B; erat autem G ad B, vt E ad F; ergo C ad B erit in maiori ratione quàm E ad F, hoc eſt C ad B erit in maiori ratione quàm ad D; ergo D maior erit quàm B, contra hypotheſin; non igitur A ad B maiorem habet rationem quàm E ad F.

Non diſſimiliter ſi ratio A ad B, ſupponatur eſſe minor ratione E, ad F,

Hæc demonſtratio, vel eo nomine ſuſpecta viſa eſt, vt modo innuimus, quoniam hypotheſis vna deſtruere videtur alteram, quarũ vtraque fit ad demonſtrandum. Supponit enim C ad D, eſſe vt E ad F, & in eadem ratione eſſe G ad B, facit ex conſtructione; ſupponit autem D minorem eſſe quàm B, quemadmodum C minorem quàm A: deinde C maiorem eſſe quàm G, hæc tamen ſuppoſitio deſtruit antecedentem, quæ deinde tamen in demonſtratione adhibetur, at cùm ſemel deſtructa fuerit, nequit amplius vſurpari. Quòd autem hęc ſuppoſitio deſtruat antecedentem apparet. Si enim eſt, vt C ad D, ita G ad B, & C fuerit maior quàm G, non poterit D ſupponi minor quàm B, ſed maior eſſe neceſſariò debet;

Circa ſuperiorem demonſtrationem difficultas.

Mm 2 quamo-

quamobrem demonſtratio non deducit ad inconueniens; ſi enim fuerit, vt G ad B, ita C ad D, & C fuerit maior, quàm G, nullum erit incommodum, quòd D ſit maior, quàm B; in tantum enim inconueniens foret, in quantum D ſupponeretur minor, quàm B, ſed non ſupponitur amplius minor; quoniam tametſi ab initio ita ſupponeretur, ſupponendo tamen C maiorem, quàm G, itemque, vt G ad B, ita C ad D, neceſſariò conſequitur, vt D ſit maior, quàm B; quamobrem ſuppoſitio prior illa deſtruitur: vnde non licet illam amplius in ipſa demonſtratione adhibere.

In ſecundo verò caſu, quando ſcilicet C, non eſt maior, quàm G, intelligi quidem poteſt magnitudo adaucta, quæ minor ſit, quàm A, maior tamen, quàm G, eaque appelletur pariter C: ſed hæc intelligi non poterit eſſe ad aliam D, vt E ad F, niſi pariter D ſit maior, quàm B, cùmſupponamus eſſe, vt E ad F, ita G ad B: & vt G ad B, ita C ad D. Dum enim ſupponebamus D, minorem eſſe, quàm B: deinde volumus eſſe, vt E ad F, ita G ad B, & ita C ad D, ſupponendo C adauctam, quæ pariter nuncupetur C (nihil enim refert quocunque modo appelletur) eamque maiorem eſſe, quàm G; hæc ſecunda ſuppoſitio deſtruit antecedentem; non enim fieri poterit, vt ſit C ad D, quemadmodum G ad B, & C ſit maior, quàm G, at verò D ſit minor, quàm B.

Quapropter hæc demonſtratio non videbatur deducens ad inconueniēs. Si enim fuerit, vt G ad B, ita C ad D; at verò C ſit maior, quàm G, nullum eſt inconueniens, quòd D ſit maior, quàm B: immò neceſſariò debet eſſe maior; neque inconueniens eſt, quia D ſupponebatur minor, quàm B, quoniā hæc ſuppoſitio deſtructa eſt per ſubſequentē, quando enim intelleximus eſſe, vt E ad F, ſeu, vt G ad B, ita C ad D, & C maiorē eſſe, quàm G; nequit enim retineri prior ſuppoſitio, quæ erat, vt D, ſit minor, quàm B. Quod ſi videatur inconueniens poſitum in eo, quòd ſi A maiorem habet rationem ad B, quàm E ad F, aliqua quantitas minor quàm A, puta G, erit ad B, vt E ad F: atque adeò licebit (& hoc erit inconueniens dicet aliquis) ſumere quantitatem C maiorem, quàm G, & minorem, quàm A, & facere, vt E ad F, ita C ad D; atque adeò D maiorē eſſe, quàm B, contra hypotheſin; ſiquidem ſupponebatur tàm C, quàm D minor, quàm ſit A, & B. Sed hæc eſt imaginationis deceptio; non enim D, modò eſt amplius ex quantitatibus inſcriptibilibus in infinitum ipſi B, ſed potius ex eo, quia factum eſt, vt E ad F, ſeu vt G ad B, ita C ad D; factaque eſt C maior, quàm G, quantitas D eſt quædam noua quantitas extra infinitam multitudinem earum, quæ in infinitum ſupponebantur inſcriptibiles ipſi B: vnde nullum inconueniens, quòd D maior ſit, quàm B.

Diluitur difficultas. Sed ratio E, ad F, eſt omnium inſcriptibilium ipſis A, B. At ex eo quod A ad B, ſupponit aduerſarius maiorem, vel minorem, habere rationem, quam E ad F, ſed & non ex noua quadam hypotheſi, hæc omnia ſequuntur, inter quæ quod D è numero inſcriptibilium, ſit maior, quàm B.

Obſeruanda quædam. Vbi obſeruandum; quando nos conteximus demonſtrationem ducentem ad inconueniens, quatenus aliquid infert contra hypotheſin, tunc deſtruitur quidem hypotheſis per ipſum inconueniens, dummodo huiuſmodi hypotheſis ſemper retenta fuerit, atque hunc in modum licet demonſtrare deſtruendo hypotheſin; ſed non licet illam deſtruere, & poſtmodum eam adhibere, veluti non deſtructam, & deducere ad inconueniens, quatenus quod infertur deſtruat illam, quæ amplius non eſt, vtpotè iam deſtructa per aliam ſuppoſitionem.

Supradictorū Epilogus. Itaque ſumma hæc eſt, quòd in demonſtratione deducente ad inconueniens non hypotheſis, ſed falſum, quod in demonſtrationis progreſſu offendimus, hypotheſin deſtruit; propterea quòd vt ſuperiùs, docuimus deductio ad impoſſibile, eſt aſſumptio eius, quod quæſito contradicit, tanquàm conceſſi per conſequentia, ad id, quod vero conceſſo opponitur; in hac enim ſumimus id, quod quæſito contradicit, idque ſupponentes progredimur, donec in aliquod incidamus abſurdum, per quod ſuppoſitione deſtructa, confirmetur id, quod à principio quærebatur.

Quoniam hæc noſtra Methodus præſertim locum obtinet in figuris circulo inſcriptis, & circumſcriptis, cuidam propterea videri poſſet hanc niti reſolutioni figuræ, tàm inſcriptæ, quàm circumſcriptæ circulo in ipſum circulum. Hoc autem incautè ſi nos explicemus, pugnantia videremur admittere; propterea quod polygona circulo inſcribi poſſunt, & circumſcribi, ordinata quidem in infinitum, ita vt non ſint tot quin plura. Cum hoc autem progreſſu in infinitum nequit cohærere deſinentia, qua diceret quiſpiam, polygona ipſa

tan-

tandem in circulum deſinere. Nec illud eſt plauſibile, quod tamen nonnullis arriſit, nimirum deſinentiam eſſe in polygonum infinitorum laterum, cuiuſmodi circulus eſſe videri poſſet; hoc enim haud minus repugnat, propterea quòd circulus id ſibi vendicat, vt rectæ ductæ à centro ad ſingula peripheriæ puncta ſint inter ſe æquales: polygonum autem ſiue conſtet angulis, & lateribus numero infinitis, ſiue finitis; hoc profectò habet, vt angulis, lateribuſque conſtet; hoc enim ſonat nomen illud polygonum. Si namque conſtat angulis, anguli continentur lateribus; ergo, & angulis, & lateribus conſtare debet; quæ quidem figura præcipuum illud habet, quod rectæ omnes à centro ductæ ad vertices ſingulorum angulorum, ſint inter ſe æquales, & quæ perpendiculares ab eodem centro ad ſingula latera ducuntur, ſint itidem inter ſe æquales (loquimur enim de polygonis ordinatis); at verò vnaquæque ducta à centro ad verticem anguli maior eſt eâ, quæ ducitur ab eodem centro perpendicularis ad latus; non itaque omnes illæ ductæ à centro ad polygoni ambitum, ſunt inter ſe æquales; polygoni igitur ambitus eſſe non poterit circuli circumferentia. Non eſt itaque circulus polygonum infinitorum laterum. *Circulus non eſt polygonum infinitorum laterum.*

Illud etiam accedit, quòd infinitum huiuſmodi, multitudo ſcilicet angulorum, quibus polygonum conſtaret, foret in actu; hoc autem infiniti genus nunquam agnouit Natura.

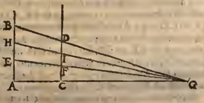
Noſtra igitur Methodus, vt robore conſtet, haud indiget huiuſmodi deſinentiâ, quaſi circulus intrinſecus illius Progreſſionis in infinitum ſit terminus, ſed potius terminus quidam extrinſecus, vt polygona per ſui incrementa, ſi fuerint inſcripta, & per decrementa, ſi fuerint circumſcripta, multiplicatis angulis, atque lateribus, differre poſſint ſemper à circulo minori, quacunque data quantitate.

Theoremata quadam Καθολικὰ, *quibus Auctoris Methodus innititur.*

THEOREMA I.

Si quotcunque fuerint quantitates, è quarum ſingulis partes in eadem ratione cum illis acceptæ ſint. Dico has poſſe, per συνεχεῖς ἐπαυξήσεις, continuata incrementa, *ſemper ac ſemper ab illis minus deficiendo, tandem deficere defectu minori quacunque datâ quantitate, rationem eandem inter ſe perpetuò ſeruantes.*

Sint duæ quantitates AB, CD, quarum partes AE, CF, in eadem ſint ratione cum illis. Dico AE, CF, augeri poſſe in infinitum eadem ratione retentâ, vt minus, ac minus ab ipſis AB, CD, deficiendo, tandem deficiant defectu minori quacunque datâ quantitate.



Diſponantur AB, CD parallelæ; ductaque ſit AC, eaque protracta ſit ad partes C in infinitum; per E, F; ducta ſit EF, quæ protracta ad partes F, occurrat ipſi AC productæ in G: occurret autem cùm CF fuerit minor, quàm AE; agatur GD, quæ producta ad partes D, neceſſariò tranſibit per B.

Quoniam igitur inter E, B, infinita cadunt puncta, ſumatur H; & per H agatur HG, occurrens FD in I. Manifeſtum eſt AH, maiorem eſſe, quàm AE, atque adeò & CI, quàm CF, & tamen AH, & CI, in eadem eſſe ratione cum AE ad CF, vel AB ad CD: item AH, minus deficere ab AB, quàm AE; & CI minus deficere ab ipſa CD, quàm CF.

Rurſus quoniam inter H, B infinita cadunt puncta, in infinitum hoc modo licebit abire, ita vt minores à maioribus AB, CD ſemper minus, ac minus deficiendo, tandem deficiant defectu minori quacunque datâ quantitate, rationem eandem inter ſe perpetuò ſeruantes, quæ eſt AE ad CF, vel AB ad CD.

SCHOLION.

Obſeruandum eſt autem, quòd expoſitum Theorema de lineis, cuicunque generi quantitatis aptari poteſt, vnde concipere licet, vt AB ad CD, ita polygonum ad polygonum, & vt AE ad CF, ita quoque polygonum ad polygonum. Nec diſſimiliter de ſolidis. Quamobrem accepto puncto H, ductaque HG, vt ſupra, intelligere poterimus polygonum ad polygonum eſſe, vt AH ad CI; & de ipſiſmet polygonis ratiocinari non ſecus, ac de ſimplicibus longitudinibus. *Obſeruandum.*

Aduer-

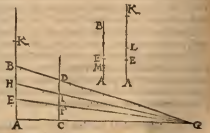
Aduertendum eſt vlterius, Theorema ſuperius, à nobis conditum fuiſſe de ratione maioris, vel minoris inæqualitatis; nam de æqualitatis ratione profectò difficultas nulla; quod enim hic oſtenditur per lineas coeuntes in puncto, ibi per lineas parallelas demonſtraretur.

THEOREMA II.

Si quotcunque fuerint quantitates, à quarum ſingulis partes acceptæ ſint, quæ per συνεχεῖς ἐπαυξήσεις, continuata incrementa, *ſemper ac ſemper minus deficiendo ab illis, deficiant tandem defectu minori quacunque data quantitate, rationem eandem inter ſe perpetuò ſeruantes.*

Dico quantitates illas in eadem eſſe ratione cum iſtis.

Sint duæ quantitates AB, CD, diſpoſitę inter ſe parallelæ; ductaque ſit AC protracta ad partes C in infinitum; ſintque acceptæ partes AE, CF, quæ per continuata incrementa ſemper, ac ſemper minus deficiendo ab ipſis AB, CD, deficere tandem poſſint defectu minori quacunque data quantitate, perpetuò ſeruantes eandem inter ſe rationem, quæ eſt AE ad CF. Dico quantitates illas AB, CD, in eadem eſſe ratione cum ipſis AE, CF.



Hoc Theorema conuerſum eſt præcedentis, atque hunc in modum demonſtrabitur.

Si, vt eſt CF ad AE, non ita eſt CD ad AB, ſit, vt CF, ad AE, ita CD ad aliquam aliam, quæ maior erit, vel minor, quàm AB.

Sit primùm maior, vt AK. Quoniam igitur ex hypotheſi AE, CF, per incrementa minus, ac minus deficiendo ab ipſis AB, CD, tandem deficiunt defectu minori quacunque data quantitate, ſemper eandem rationem ſeruantes, quæ eſt AE, ad CF. Idem autem ex hactenus demonſtratio a contingет in AK, CD, cùm ex conſtructione ſit, vt AE ad CF, ita AK ad CD; ergo AE debebit per continuata incrementa, deficiendo ab ipſis AB, Ak, deficere tandem defectu minori quacunque data quantitate, ſeruando ſemper eandem rationem, quæ eſt AE, ad CF, ſeu AK ad CD; quod eſt falſum; Idque ſic oſtendo; Ratio enim AE ad CF, ſeruari poterit facto incremento ipſi AE, in ordine ad AK, ita vt AE adaucta deficiat ab ipſa AK defectu minori aliquà datà quantitate, & non facto incremento ipſi AE, in ordine ad AB, immò facto decremento.

a. ex. antecedenti.

Supponamus enim rationem AE ad CF eſſe duplam; ſupponamus itidem factum eſſe ipſi AE incrementum vſque ad L, ita vt AL, ſit minor, quàm dupla ipſius AB; tunc, ad hoc vt ſit, quemadmodum AE ad CF, hoc eſt in ratione dupla, ita AL ad aliam, neceſsè eſt hanc aliam AM, minorem eſſe ipsâ AE; itaque AE deficiet ab ipſa Ak, defectu minori aliquâ datâ quantitate, & quidem per incrementum; & non deficiet ab AB per incrementum, ſed per decrementum, etiam ſeruata ratione AE ad CF. Quod erat probandum.

Non diſſimiliter, ſi ea fuerit minor, quàm AB &c.

THEOREMA III.

Si ſint quotcunque fuerint quantitates, è quarum ſingulis partes in eadem ratione cum illis acceptæ ſint. Dico, illas poſſe per continuata decrementa, ſemper has minus, ac minus excedendo, tandem excedere exceſſu minori quacunq; data quantitate, rationem eandem inter ſe perpetuò ſeruantes.

THEOREMA IV.

Si quotcunque fuerint quantitates, è quarum ſingulis partes acceptæ ſint, ita vt illæ per continuata decrementa ſemper minus, ac minus has excedendo, tandem excedere poſſint ex-

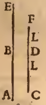
exceſſu

ceſſu minori quacunque data quantitate, perpetuò ſeruantes inter ſe rationem eandem. Dico has in eadem eſſe ratione cum illis.

THEOREMA V.

Si quotcunque fuerint quantitates, quarum ſingulis alia maiores accepta ſint in eadem ratione cum illis. Dico, has poſſe per μείωσιν, decrementum, *ſemper ac ſemper minus illas excedendo, tandem excedere exceſſu minori quacunque data quantitate, ſemper eandem inter ſe rationem ſeruantes.*

Sint quantitates AB, CD, quibus acceptæ ſint maiores AE, CF, in eadem ratione cum illis. Dico has per continuata decrementa ſemper ac ſemper minus illas, nempè AB, CD excedentes, tandem excedere exceſſu minori quacunque data quantitate rationem eandem inter ſe perpetuo ſeruantes.

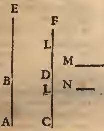


Si non ita, ſaltem reſpectu alicuius quantitatis, quæ minor ſit, vel maior alterutri ipſarum AB, CD; id fieri poterit. Sit primo reſpectu CD, nempè CL, ſiue minor, ſiue maior. Quoniam igitur AE, CF per continuata decrementa ſemper minus excedendo ipſas AB, CL, tandem excedere poſſunt exceſſu minori quacunque data quantitate, eadem perpetuo ſeruata ratione, quæ eſt AE ad CF vel AB ad CD; ergo erit [a] vt AE ad CF atq; adeò vt AB ad CD, ita AB ad CL. Quod eſt inconueniens.

[a] ex antecedenti.

THEOREMA VI.

Si quotcunque fuerint quantitates, quarum ſingulis alia maiores accepta ſint, qua per μείωσιν, decrementum *ſemper, ac ſemper minus illas excedendo, tandem excedere poſſint exceſſu minori quacunque data quantitate, ſemper eandem inter ſe rationem ſeruantes. Dico quantitates illas in eadem eſſe ratione.*



Sint quantitates AB, CD, quibus aliæ maiores acceptæ ſint AE, CF, quæ per decrementum ſemper, ac ſemper minus excedendo ipſas AB, CD, rationem eandem inter ſe perpetuò ſeruent, quæ eſt M ad N. Dico AB ad CD eſſe vt M ad N. Si enim AB non eſt ad CD, vt M ad N, erit AB ad aliam CL, vel minorem, vel maiorem ipſa CD, in ratione M ad N. Quoniam igitur AB ad CL eſt, vt M ad N, ſed vt M ad N, ita eſt AE ad CF; ergo vt AE ad CF, ita AB ad CL; ergo AE, CF per continuata decrementa ſemper minus excedendo ipſas AB, CL, tandem excedere poterunt [a] exceſſu minori quacunque data quantitate, eâdem perpetuò ſeruatâ ratione M ad N; ſed ex hypotheſi AE, & CF, per continuata decrementa ſemper minus excedendo ipſas AB, CD, tandem excedere poſſunt exceſſu minori quacunque data quantitate, ſemper eâdem ſeruata ratione, quæ eſt M ad N; ergo eadem CF, per continuata decrementa excedere pôterit duas CD, CL, inæquales perpetuo ſeruata eadem ratione, quæ eſt M, ad N. Quod eſt impoſſibile.

[a] ex tertia huius.

Hoc idem Theorema hunc etiam in modum enunciari potuiſſet:

Si quantitas prima ſemper minus excedendo ſecundam, excedere tandem poſſit exceſſu minori quacunque data quantitate, ſic tertia reſpectu quarta, eadem perpetuò ſeruata ratione inter primam, & tertiam. Dico ſecundam ad quartam in eadem eſſe ratione.

THEOREMA VII.

Si quatuor ſint quantitates proportionales, ex ſecunda, & quarta ſumi poterunt partes, qua per continuata incrementa, ſemper minus deficiendo ab ipſis, tandem deficere poſſint defectu minori quacunque data quantitate, ita vt, qua ratio ſit prima ad ſingulas partes ſecunda, eadem ſit tertia ad ſingulas partes quarta.

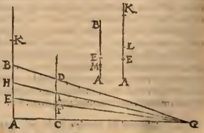
Sint

Aduertendum eſt vlterius, Theorema ſuperius, à nobis conditum fuiſſe de ratione maioris, vel minoris inaqualitatis; nam de æqualitatis ratione profectò difficultas nulla; quod enim hic oſtenditur per lineas coeuntes in puncto, ibi per lineas parallelas demonſtraretur.

THEOREMA II.

Si quotcunque fuerint quantitates, à quarum ſingulis partes acceptæ ſint, quæ per συνεχῆ ἐπαυξήσεις, continuata incrementa, ſemper ac ſemper minus deficiendo ab illis, deficiant tandem defectu minori quacunque data quantitate, rationem candem inter ſe perpetuò ſeruantes.

Dico quantitates illas in eadem eſſe ratione cum iſtis.



Sint duæ quantitates AB, CD, diſpoſitę inter ſe parallelæ; ductaque ſit AC protracta ad partes C in infinitum; ſintque acceptæ partes AE, CF, quæ per continuata incrementa ſemper, ac ſemper minus deficiendo ab ipſis AB, CD, deficere tandem poſſint defectu minori quacunque data quantitate, perpetuò ſeruantes eandem inter ſe rationem, quæ eſt AE ad CF. Dico quantitates illas AB, CD, in eadem eſſe ratione cum ipſis AE, CF.

Hoc Theorema conuerſum eſt præcedentis, atque hunc in modum demonſtrabitur.

Si, vt eſt CF ad AE, non ita eſt CD ad AB, ſit, vt CF, ad AE, ita CD ad aliquam aliam, quæ maior erit, vel minor, quàm AB.

Sit primùm maior, vt AK. Quoniam igitur ex hypotheſi AE, CF, per incrementa minus, ac minus deficiendo ab ipſis AB, CD, tandem deficiunt defectu minori quacunque data quantitate, ſemper eandem rationem ſeruantes, quæ eſt AE, ad CF. Idem autem ex hactenus demonſtratis contingct in AK, CD, cùm ex conſtructione ſit, vt AE ad CF, ita AK ad CD; ergo AE debebit per continuata incrementa, deficiendo ab ipſis AB, Ak, deficere tandem defectu minori quacunque data quantitate, ſeruando ſemper eandem rationem, quæ eſt AE, ad CF, ſeu AK ad CD; quod eſt falſum. Idque ſic oſtendo; Ratio enim AE ad CF, ſeruari poterit facto incremento ipſi AE, in ordine ad AK, ita vt AE adaucta deficiat ab ipſa AK defectu minori aliquâ datâ quantitate, & non facto incremento ipſi AE, in ordine ad AB, immò facto decremento.

a ex antecedenti.

Supponamus enim rationem AE ad CF eſſe duplam; ſupponamus itidem factum eſſe ipſi AE incrementum vſque ad L, ita vt AL, ſit minor, quàm dupla ipſius AE; tunc, ad hoc vt ſit, quemadmodum AE ad CF, hoc eſt in ratione dupla, ita AL ad aliam, neceſsè eſt hanc aliam AM, minorem eſſe ipsâ AE; itaque AE deficiet ab ipſa Ak, defectu minori aliquâ data quantitate, & quidem per incrementum; & non deficiet ab AB per incrementum, ſed per decrementum, etiam ſeruata ratione AE ad CF. Quod erat probandum.

Non diſſimiliter, ſi ea fuerit minor, quàm AB &c.

THEOREMA III.

Si ſint quotcunque fuerint quantitates, è quarum ſingulis partes in eadem ratione cum illis acceptæ ſint. Dico, illas poſſe per continuata decrementa, ſemper has minus, ac minus excedendo, tandem excedere exceſſu minori quacunq; data quantitate, rationem candem inter ſe perpetuò ſeruantes.

THEOREMA IV.

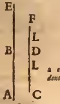
Si quotcunque fuerint quantitates, è quarum ſingulis partes acceptæ ſint, ita vt illæ per continuata decrementa ſemper minus, ac minus has excedendo, tandem excedere poſſint exceſſu

ceſſu minori quacunque data quantitate, perpetuò ſeruantes inter ſe rationem eandem. Dico has in eadem eſſe ratione cum illis.

THEOREMA V.

Si quotcunque fuerint quantitates, quarum ſingulis alia maiores accepta ſint in eadem ratione cum illis. Dico, has poſſe per μείωσιν, decrementum, *ſemper ac ſemper minus illas excedendo, tandem excedere exceſſu minori quacunque data quantitate, ſemper eandem inter ſe rationem ſeruantes.*

Sint quantitates AB, CD, quibus acceptæ ſint maiores AE, CF, in eadem ratione cum illis. Dico has per continuata decrementa ſemper ac ſemper minus illas, nempè AB, CD excedentes, tandem excedere exceſſu minori quacunque data quantitate rationem eandem inter ſe perpetuo ſeruantes.

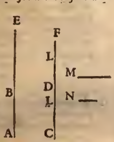


Si non ita, ſaltem reſpectu alicuius quantitatis, quæ minor ſit, vel maior alterutri ipſarum AB, CD; id fieri poterit. Sit primo reſpectu CD, nempè CL, ſiue minor, ſiue maior. Quoniam igitur AE, CF per continuata decrementa ſemper minus exeedendo ipſas AB, CL, tandem excedere poſſunt exceſſu minori quacunque data quantitate, eadem perpetuo ſeruata ratione, quæ eſt AE ad CF vel AB ad CD; ergo erit [a] vt AE ad CF atq; adeò vt AB ad CD, ita AB ad CL. Quod eſt inconueniens.

a ex antecedenti.

THEOREMA VI.

Si quotcunque fuerint quantitates, quarum ſingulis alia maiores accepta ſint, quà per μείωσιν, decrementum *ſemper, ac ſemper minus illas excedendo, tandem excedere poſſint exceſſu minori quacunque data quantitate, ſemper eandem inter ſe rationem ſeruantes. Dico quantitates illas in eadem eſſe ratione.*



Sint quantitates AB, CD, quibus aliæ maiores acceptæ ſint AE, CF, quæ per decrementum ſemper, ac ſemper minus excedendo ipſas AB, CD, rationem eandem inter ſe perpetuò ſeruent, quæ eſt M ad N. Dico AB ad CD eſſe vt M ad N. Si enim AB non eſt ad CD, vt M ad N, erit AB ad aliam CL, vel minorem, vel maiorem ipſa CD, in ratione M ad N. Quoniam igitur AB ad CL eſt, vt M ad N, ſed vt M ad N, ita eſt AE ad CF; ergo vt AE ad CF, ita AB ad CL; ergo AE, CF per continuata decrementa ſemper minus excedendo ipſas AB, CL, tandem excedere poterunt [a] exceſſu minori quacunque data quantitate, eâdem perpetuò ſeruatâ ratione M ad N; ſed ex hypotheſi AE, & CF, per continuata decrementa ſemper minus excedendo ipſas AB, CD, tandem excedere poſſunt exceſſu minori quacunque data quantitate, ſemper eâdem ſeruata ratione, quæ eſt M ad N; ergo eadem CF, per continuata decrementa excedere poterit duas CD, CL, inæquales perpetuo ſeruata eadem ratione, quæ eſt M, ad N. Quod eſt impoſſibile.

a ex tertia huius.

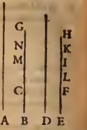
Hoc idem Theorema hunc etiam in modum enunciari potuiſſet.

Si quantitas prima ſemper minus excedendo ſecundam, excedere tandem poſſit exceſſu minori quacunque data quantitate, ſic tertia reſpectu quarta, eadem perpetuò ſeruata ratione inter primam, & tertiam. Dico ſecundam ad quartam in eadem eſſe ratione.

THEOREMA VII.

Si quatuor ſint quantitates proportionales, ex ſecunda, & quarta ſumi poterunt partes, quæ per continuata incrementa, ſemper minus deficiendo ab ipſis, tandem deficere poſſint defectu minori quacunque data quantitate, ita vt, quæ ratio ſit prima ad ſingulas partes ſecunda, eadem ſit tertia ad ſingulas partes quarta.

Sint



Sint quantitates A, BG, D, EH, proportionales, & ex BG, ſecunda, & EH quarta ſumptæ ſint partes BC, EF, ita vt quæ ratio eſt A ad BC, ea ſit D ad EF. Dico BC, & EF, ab ipſis BG, EH, ſemper minus in infinitum deficiendo, tandẽ per cõtinuata incremẽta deficere poſſe defectu minori quacunque data quantitate, ita vt quæ ratio eſt A ad ſingulas partes ipſius BG, eadem ſit quæ D ad ſingulas partes ipſius EH.

Si enim BC, & EF ab ipſis EG, EH, ſemper in infinitum deficiendo tandem deficere non poſſunt defectu minori quacunque data quantitate, ita tamen, vt quæ ratio eſt A, ad ſingulas partes ipſius BG, non eadem ſit D, ad ſingulas partes ipſius EH; ergo ſaltem quæ ratio eſt A, ad ſingulas partes ipſius BG, eadem erit D, ad ſingulas partes alterius, quæ minor ſit ipsâ EH (non enim maior, nam tunc, quæ ratio eſſet A ad partem ipſius BG eadem eſſe deberet D ad ipſam EH) ſit igitur illa EI, minor, quàm EH. Quoniam igitur, quæ ratio eſt A ad ſingulas partes ipſius BG, eadem eſt D ad ſingulas partes ipſius EI; ergo vt A ad BG, ita D ad EI, vt mox conſtabit;* ſed vt A ad BG, ex hypotheſi ita D ad EH; ergo D ad EI, eam habebit rationem, quam habet ad EH. Quod eſt inconueniens; nam EI foret æqualis ipſi EH.

* Lemmate ſequenti.

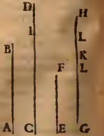
Lemma.

Secuturum autem eſſe, vt A ad BG, ita D ad aliã EI, &c. ſic oſtendo. *Si non ita eſt; erit vt A ad BG, ita D ad aliquam aliam maiorem, vel minorem ipſa EI. Sit primò maior, vt EK. Quoniam igitur inter K, I, infinita cadunt puncta, fieri poterit, A, ad partem ipſius BG, nempè BN, vt D ad aliam, qua maior ſit, quàm EI, minor tamen quàm Ek, ergo vt A ad aliquam partem ipſius BG, ita D ad aliquam partem alterius maioris, quàm EI, quod eſt contrà hypotheſin.*

Si verò ſit, vt A ad BG, ita D ad EL, minorem, quàm EI. Quoniam igitur, vt A ad ſingulas partes ipſius BG, ita D ad ſingulas partes ipſius EI, & inter L, I, infinita cadunt puncta, erit vt A ad aliquam partem ipſius BG, verbi gratia, BM, ita D ad aliquam partem ipſius EI, qua maior ſit, quàm EL, minor tamen quàm EI, quod eſt impoſſibile. Cùm enim ſit, vt A ad BG, ita D ad EL, fieri non poterit, vt A ad partem ipſius BG, ſit, quemadmodum D ad quantitatem maiorem ipſa EL.

THEOREMA VIII.

Si ſint quatuor quantitates proportionales, & per continuata quidem incrementa prima minus deficiendo à quapiam quinta, & tertia à quapiam ſexta, ſemper in infinitum, deficere tandem poſſint defectu minori quacunque data quantitate, perpetuo tamen eadem ſeruatâ ratione prima ad ſecundam, & tertia ad quartam. Dico quintam ad ſecundam in eadem eſſe ratione in qua eſt ſexta ad quartam.



Sint quantitates AB, CD, EF, GH, ſitque vt AB ad CD, ita EF ad GH, in ratione minoris inæqualitatis; at verò AB, EF, prima, & tertia per continuata quidem incrementa ſemper minus deficiendo abs CI, & GK, quinta, & ſexta deficere tandem poſſint defectu minori quacunque data quantitate eadem perpetuo tamen ſeruata ratione AB ad CD, & EF ad GH. Dico eſſe vt quinta CI, ad ſecundam CD, ita ſextam Gk ad quartam GH.

Si enim non eſt vt CI ad CD, ita GK ad GH; ergo vel minor, vel maior, quàm GK, erit ad GH, vt CI ad CD. Sit vtcunque vt GL. Quoniam igitur eſt vt CI ad CD. ita GL ad GH; ergo permutando erit vt CI ad GL, ita CD ad GH; ſed vt CD ad GH, ita ex hypotheſi permutando eſt AB ad EF; ergo, vt CI ad GL, ita AB ad EF; ergo [a] AB, & EF, per continuata incrementa augeri poterunt in infinitum, ita vt minus deficiendo ab ipſis CI, GL, tandem deficiant defectu minori quacunque datâ quantitate

[a] per primam huius.

ſitate eâdem perpetuò ſeruatâ ratione, ſcilicet AB ad EF, ſeu CI ad GL; ſed eædem AB, & EF, per continuata incrementa deficere poterant ab ipſis CI, GH, perpetuò ſeruatâ eadem ratione AB ad CD, ſeu EF ad GH, ſeu CI ad GL; ergo eadem EF deficere poterit ab ipſis GK, GL, defectu minori quacunque datâ quantitate, ſeruata eadem ratione CI, ad GL. Quod eſt impoſſibile.

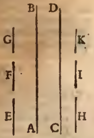
THEOREMA IX.

Si ſit, vt prima ad ſecundam, ita tertia ad quartam; at verò prima minus ſemper in infinitum excedendo quampiam quantitatem quintam, tandem excedere poſſit exceſſu minori quacunque data quantitate: item tertia reſpectu ſextæ, perpetuò tamen ſeruata eadem ratione, primæ ad ſecundam, & tertiæ ad quartam. Dico eſſe, vt quintam ad ſecundam, ita ſextam ad quartam.

Huius demonſtratio ex dictis facilè conſtat &c.

THEOREMA X.

Si ſint quantitates, & quot in vna ſumi poſſunt partes, totidem ſingulis ijs æquales in alia accipere liceat, & ſic in infinitum nouis partibus acceptis, ita vt aggregatum poſteriorum ſemper maius ſit aggregato priorum. Dico propoſitas initio quantitates eſſe inter ſe æquales.



Sint, exempli gratia, hæ duæ propoſitæ quantitates AB, CD, & in AB, ſumptæ ſint partes E,F,G, quibus totidem æquales in CD, acceptæ ſint H,I,K, & ſic in infinitum, ita vt aggregatum poſteriorum maius ſit aggregato priorum. Dico AB, CD, eſſe inter ſe æquales.

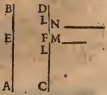
Quoniam enim ſupponuntur E,F,G, partes acceptæ ex AB, quibus in CD, ſint acceptæ partes æquales H,I,K, idque ſupponitur fieri poſſe in infinitum, ita vt aggregatum poſteriorum maius ſemper ſit aggregato priorum; ergo à duobus quantitatibus AB, CD, ſupponimus duas auferri quantitates, nempè partium aggregata, quæ per continuata incrementa, ſemper minùs, ac minùs deficiendo ab ipſis AB, CD, tandem deficere poſſint defectu minori quacunque datâ quantitate, ſemper eadem ſeruata æqualitatis ratione; ergo ex ijs, quæ ſupra demonſtrauimus, [a] quantitates AB, CD, initio propoſitæ erunt inter ſe æquales. Quod erat operæ pretium oſtendere.

Hoc etiam de alijs rationibus, præter eam, quæ eſt æqualitatis, oſtendi poteſt reducitur tamen ad ſecundum.

[a] *Theorema. 10 ſecundo.*

THEOREMA XI.

Si quantitas prima ſemper minus excedendo ſecundam, excedere tandem poſſit exceſſu minori quacunque datâ quantitate, ſic tertia reſpectu quartæ: ita tamen vt, cùm tertia ad primam ſit in ſubmultiplici ratione maiori, quàm quadam præfinita ratio ſubmultiplex, & per continuata decrementa ſemper ad illam magis accedat. Dico quartam ad ſecundam eſſe in huiuſmodi præfinita ratione ſubmultiplici.



Sint quantitates AB, AE, CD, CF, & prima quidem AB ſemper minus excedendo ſecundam AE, excedere tandem poſſit exceſſu minori quacunque datâ quantitate; ſic tertia CD reſpectu quartæ CF, ita tamen vt, cùm tertia CD ad primam AB, ſit in ſubmultiplici ratione maiori, quam quædam præfinita ratio ſubmultiplex M ad N, per continuata decrementa magis ad illam accedat. Dico, quartam CF ad ſecundam AE, in eadem eſſe ſubmultiplici præfinita ratione.

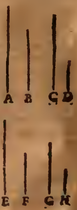
Niſi enim CF ad AE rationem haberet ſubmultiplicem M ad N, ſed potiùs CL ad AE, deberent CD, AB, minus, ac minus excedendo CL, AE, in infinitum excedere exceſſu minori quacunque data quantitate, ita vt cùm tertia CD ad primam AB, foret in ſubmultiplici ratione maiori, quàm M ad N, ratio ſemper CD ad AB minus excedendo CL, AE, magis accederet ad ſubmultiplicem rationem M ad N; ſed hoc ex hypotheſi cõtingit reſpectu AE, CF; ergo deberet contingere reſpectu AE, CF, & reſpectu AE, & CL; quare CL, & CF forent æquales, Quod eſt abſurdum.

Hæc attulimus Theoremata, non quaſi omnia, quæ excogitari poſſint, tanquàm generalia, quibus huius Methodi demonſtrationes innituntur, ſed tantum illa, quæ nobis inſeruire poſſunt pro exemplis afferendis, & quorum imitatione reliqua poſſunt excogitari, prout vſus requiret.

Sic duo ſequentia demonſtrari poſſent, quæ ſuam haberent vtilitatem.

THEOREMA XII.

Si ſint quatuor quantitates primi ordinis, totidemque aliæ ordinis ſecundi, ita vt binæ ſecundi ordinis à binis ordinis primi ſemper minus deficiendo, deficere tandem poſſint defectu minori quacunque data quantitate, ita vt ratio duarum ſecundi ordinis pars eadem perpetuò ſit rationis duarum aliarum. Dico rationem duarum primi ordinis, eandem eſſe partem aliarum duarum eiuſdem ordinis.



Sint quantitates A,B,C,D, totidemque ſint aliæ E,F,G,H, ita vt E,G, abs A,C, & F,H, abs B,D, ſemper minus deficiendo deficere tandem poſſint defectu minori quacunque data quantitate, autem ratio ipſius E ad G, perpetuò ſit eadem pars rationis ipſius F ad H. Dico rationem ipſius A ad C, eandem eſſe partem rationis B ad D.

THEOREMA XIII.

Si quotcunque ſint quantitates, ſic ſe habentes reſpectu alicuius vt hac, quantumuis augeatur, ſi vna illarum hanc excedat, cætera omnes excedere debeant, etſi vna illarum ab hac quantumuis diminuta deficiat, cætera omnes ab eadem deficere debeant. Dico quantitates illas eſſe inter ſe æquales.

Lemma.

Similia polygona circulis inſcripta ſunt inter ſe, vt à diametris quadrata.

Hoc elementare eſt, demonſtratumque ab Euclide in Libro duodecimo Prop. prima.

Exemplum LXXXIX.

THEOREMA.

Circuli inter ſe ſunt quemadmodum à diametris quadrata.

Quoniam ſunt duæ quantitates, nimirum circuli, à quibus partes, videlicet ſimilia polygona, ſunt acceptæ, quę per cõtinuata incrementa ſemper, ac ſemper minus ab ipſis deficiendo, tandem deficere poſſunt defectu minori quacunque data quantitate, perpetuò ſeruata eadem ratione, quæ eſt inter diametrorum quadrata (ex eo enim, quod præmiſſum eſt lemmate, hæc eſt ratio inter polygona ſimilia circulis inſcripta); ergo ex generali huius Methodi Theoremate ſecundo, circuli erunt inter ſe, vt à diametris quadrata.

Hoc idem verificatur de polygonis ſimilibus, quæ ſunt circulis circumſcripta.

Lemma.

Polygonorum ſimilium circulis inſcriptorum ambitus ſunt inter ſe, vt diametri.

ad

Ad eum modum, quo oſtenditur latus vnum polygoni, ad latus homologum alterius polygoni ſimilis eſſe, vt diameter ad diametrum, ita oſtenditur etiam ſingula ad ſingula eſſe, vt diameter ad diametrum; ergo omnia ad omnia erunt, vt diameter ad diametrum; vt enim vnum antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia ſed omnia latera ſunt ambitus polygoni; ergo ambitus polygonorum ſimilium circulis inſcriptorum, erunt inter ſe vt diametri.

Hoc idem verificatur de polygonis ſimilibus, quæ ſunt circulis circumſcripta.

THEOREMA.

Exemplum LXXXX.

Circulorum peripheriæ ſunt inter ſe vt diametri.

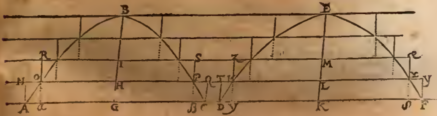
Quoniam ſunt quantitates nimirum circulorum peripheriæ, itemque aliæ ſcilicet ſimilium polygonorum circulis inſcriptorum ambitus, qui per continuata incrementa ſemper, ac ſemper minus deficiendo ab ipſis peripherijs, tandem deficere poſſunt defectu minori quacunque data quantitate, perpetuò ſeruata eadem ratione diametrorum (ex eo enim quod præmiſſum eſt lemmate polygonorum ſimilium circulis inſcriptorum ambitus, ſunt inter ſe vt diametri) ergo ex generali huius Methodi Theoremate ſecundo, circulorum peripheriæ erunt inter ſe vt diametri.

THEOREMA.

Exemplum LXXXXI.

Parabolæ æqualium altitudinum ſunt inter ſe, vt baſes.

Sint parabolæ ABC, DEF, æqualium altitudinum, ſeu quod idem eſt, inter eaſdem parallelas BE, AF, earumque baſes ſint AC, DF. Dico eſſe, vt AC ad DF, ita parabolen ABC, ad parabolen DEF.



Paraboles ABC diameter ſit BG, & paraboles DEF, diameter ſit EK, diuiſaque BG bifariam in I, & vtroque dimidio iterum bifariam, & ſic deinceps, vt exempli gratia IG in H, bifariam, & per puncta diuiſionum ductæ ſint æquidiſtantes alterutri ipſarum BE, AF, ductiſque rectis parallelis ipſis diametris, vt AN, OR &c; CQ, PS &c; inſuper DT, VZ &c; præterea FY, X&, &c; per puncta videlicet interſectionis perimetrorum ipſarum parabolarum, cum ijs, quæ fuerunt ductæ parallelæ alterutri ipſarum BE, AF, adeò vt conſtitutæ ſint figuræ circumſcriptæ, & introſcriptæ parabolis, conſtantes parallelogrammis æqualium altitudinum, & numero æqualibus, ſi circumſcriptæ circumſcriptis, & introſcriptæ introſcriptis, comparentur.

Quoniam igitur figuræ hoc modo circumſcriptæ parabolæ ABC, ad circumſcriptas parabolæ DEF, ſemper minus excedendo ipſas parabolas ABC, DEF, tandem excedere poſſunt exceſſu minori quacunque datâ quantitate, ſemper ſeruantes a eandem rationem, quæ eſt AC, ad DF; ergo parabole ABC ad parabolen DEF, rationem habebit, vt baſis AC, ad baſin DF. a Ex Lemmate ſequenti.

 Quod

Quod per circumſcriptas figuras concludimus minus, ac minus excedentes parabolas ABC, DEF, concludere quoque poſſumus per inſcriptas iiſdem parabolis, ſemper minus, ac minus deficiendo, vt infra dicam.

Lemma.

Quod autem figura circumſcripta parabolæ ABC ad figuram circumſcriptam parabolæ DEF, ſit, vt baſis AC ad baſim DF, ſic oſtendo. *Quoniam enim eſt ob naturam paraboles, vt GB ad BH, ita quadratum AG, ad quadratum OH, atque adeò, vt quadratum AC, ad quadratum OP; vt enim ſimplum ad ſimplum, ita quadruplum ad quadruplum: ſed vt BG ad BH, ita KE ad EL; ergo vt quadratum AC ad quadratum OP, ita KE, ad EL; ſed vt KE ad EL, ita quadratum DF ad quadratum VX, & permutando, vt quadratum AC ad quadratum DF, ita quadratum OP, ad quadratum VX; ergo vt AC, ad DF, ita OP, ad VX. Et ſic de reliquis omnibus alÿs lineis intra parabolas ratiocinandum eſt. Omnes itaque in vni proportionales ſunt omnibus in alia parabola; quare rectangula cùm ſint eiuſdem altitudinis, quibus componitur figura circumſcripta vni parabola ABC, proportionalia ſunt ÿs, quibus componitur figura circumſcripta alteri parabola DEF; Quare, vt vnum antecedens parallelogrammum AQ, ad vnum conſequens parallelogrammum DY, ita omnia antecedentia, nempè figura circumſcripta parabola ABC, ad omnia conſequentia, ſcilicet figuram circumſcriptam parabola DEF. Sed vt parallelogrammum AQ ad parallelogrammum DY, ita eſt baſis AC, ad baſin DF; ergo vt baſis AC, ad baſin DF, ita figura circumſcripta parabola ABC, ad figuram circumſcriptam parabolæ DEF.*

Per inſcriptas autem hunc in modum.

Quoniam inſcripta parabolæ ABC, & inſcripta parabolæ DEF, ſic ſe habent, vt per continuata incrementa ſemper minus deficiendo ab ipſis parabolis, deficere tandem poſſint defectu minori quacunque data quantitate, ſeruantes tamen inter ſe rationem, quæ eſt AC ad DF, vt mox demonſtrabo: propterea parabola ABC ad parabolen DEF, rationem habebit, vt AC ad DF.

Lemma.

Quod autem inſcripta figura parabolæ ABC ad inſcriptam parabolæ DEF, ſit, vt AC ad DF, ſic demonſtrabitur.

Quoniam, vt ſupra oſtenſum fuit, quemadmodum AC ad DF, ita eſt OP, ad VX, ſed OP, æqualis eſt $\alpha\beta$, & VX æqualis eſt $\gamma\delta$; ergo vt AC ad DF, ita erit $\alpha\beta$ ad $\gamma\delta$, ſed vt $\alpha\beta$ ad $\gamma\delta$, ita, vt ſupra oſtenſum eſt de circumſcriptis, demonſtrabitur inſcripta parabola ABC, ad inſcriptam parabola DEF; ergo inſcripta parabolæ ABC, ad inſcriptam parabola DEF, erit, vt AC ad DF. Omnes igitur inſcriptæ parabolæ ABC ad omnes inſcriptas parabolæ DEF, rationem ſeruant, quæ eſt AC, ad DF.

Exemplum LXXXXII.

THEOREMA.

Cylindri recti curua ſuperficies ad baſin, eſt vt latus ipſius cylindri ad quartam partem diametri eiuſdem baſeos.



Eſto cylindrus rectus, cui rectangulum per axem ſit ABCD, ſumptaque BΣ, quæ ſit quarta pars ipſius BC, diametri baſeos eiuſdem cylindri. Dico cylindri curuam ſuperficiem ad baſin, cuius diameter BC, rationem habere, vt AB ad BΣ.

Intelligatur polygonum circumſcriptum circulo, cuius diameter BC, quique cylindri recti baſis eſt, & ſuper hoc intelligatur erectum priſma, cuius altitudo AB, cylindri latus.

Quoniam itaque priſmatis ſuperficies (quo nomine facierum aggregatum intelligo, exceptis baſibus) ad baſin rationem habet, vt mox conſtabit, quam altitudo priſmatis ad quartam partem dia-

metri

metri circuli, cui priſmatis baſis circumſcripta eſt. Sunt igitur duæ quantitates, nempè ſuperficies priſmatis, eiuſque baſis, quæ minus ſemper excedendo duas alias quantitates, nempè cylindricam ſuperficiem, cui circumſcriptum eſt priſma, & circulum, nempè cylindri baſin, cui priſmatis baſis eſt circumſcripta, tandem excedere poſſunt exceſſu minori quacunque data quantitate, ſemper ſeruantes eandem rationem, quam habet altitudo priſmatis, ſeu cylindri ad quartam partem diametri baſeos ipſius cylindri. Propterea, ex generali huius Methodi Theoremate quarto Cylindri recti curua ſuperficies, ad baſin erit in ratione lateris cylindri ad quartem partem diametri eiuſdem baſeos.

Lemma.

Quod autem priſmatis recti ſuperficies ad baſin, ſit vt altitudo ipſius priſmatis ad quartam partem diametri circuli, cui priſmatis baſis eſt circumſcripta, ſic demonſtrabitur.

Intelligatur polygonum, quod eſt baſis priſmatis diuiſum in tot triangula, quot ſunt polygoni latera, & eorum vertices ſint in centro circuli, cui polygonum circumſcriptum eſt, baſes vero polygoni latera; Qualibet facies priſmatis ad ſibi reſpondens triangulum in polygono, rationem habet, vt dupla altitudo priſmatis ad eam, quæ ex centro ducitur perpendicularis, lateri ipſius polygoni, hoc eſt ad ſemidiametrum circuli, cui polygonum circumſcriptum eſt, hoc eſt vt altitudo priſmatis recti ad quartam partem diametri prædictæ; ergo aggregatum ex omnibus faciebus, nempè priſmatis recti ſuperficies ad aggregatum omnium triangulorum, hoc eſt ad polygonum circulo circumſcriptum, erit, vt altitudo priſmatis ad quartam partem diametri illius circuli, cui polygonum circumſcriptum eſt.

Hinc per modum Corollarij infertur.

THEOREMA.

Exemplum LXXXXIII.

Circulus, cuius radius eſt medius proportionalis inter cylindri recti latus, baſeoſque diametrum, æqualis eſt ſuperficiei cylindricæ.

Archimedes Prop. 13. de Sphær. & Cylindro.

Cùm enim circulus ſit, cuius radius eſt medio loco proportionalis inter diametrum baſeos cylindri, ac eiuſdem altitudinem; ergo circulus, qui baſis eſt cylindri, ad circulum, cuius diameter eſt media proportionalis &c. eſt in ratione diametri baſeos ad altitudinem cylindri; ergo idem circulus, qui eſt cylindri baſis, ad quadruplum circulum, cuius diameter erat media proportionalis &c. hoc eſt ad circulum, cuius radius eſt huiuſmodi media proportionalis, erit, vt quarta pars diametri baſeos ad altitudinem eiuſdem; ſed vt quarta pars diametri baſeos ad altitudinem cylindri, ita eadem cylindri baſis ad cylindricam ſuperficiem; ergo, &c.

Sed aliter.

THEOREMA.

Exemplum LXXXXIV.

Omnis Cylindri recti ſuperficies ſine baſibus æqualis eſt circulo, cuius ea, quæ ex centro media proportionalis eſt inter latus, & cylindri baſeos diametrum.

Intelligatur circulo, qui baſis eſt cylindri circumſcriptum polygonum ordinatum, cui ſimile factum ſit polygonum circumſcriptum circulo, cuius radius eſt medius proportionalis inter diametrum baſeos cylindri, atque eiuſdem altitudinem; & ſuper polygonum circumſcriptum baſi intelligatur erectum priſma eiuſdem altitudinis cum cylindro.

Quoniam polygonum circumſcriptum circulo cylindri baſi, ad polygonum circumſcriptum circulo, cuius radius eſt medius proportionalis &c. eſt in duplicata ratione rectarum, quarum vna perpendicularis eſt à centro polygoni circumſcripti baſi cylindri ad latus, altera à centro polygoni circumſcripti circulo, cuius radius eſt medius proportionalis &c. Sed perpendicularis à cẽtro polygoni circumſcripti baſi cylindri, hoc eſt ſemidiameter baſeos cylindri ad altitudinem duplã eiuſdem, hanc eandem habet duplicatam rationem, cùm radius ille ſit medio loco proportionalis, &c. ergo polygonum circumſcriptum baſi cylindri

ad po-

ad polygonum circumſcriptum circulo, cuius radius eſt medius &c. erit in ratione ſemidiametri baſeos cylindri ad eiuſdem altitudinem duplam, hoc eſt vt dimidia ſemidiameter, ſeu vt ſemi perpendicularis à centro polygoni ſuper latus, ad cylindri latus, hoc eſt vt polygonum circumſcriptum baſi cylindri, quodque baſis eſt priſmatis ad ſuperficiem priſmatis; ergo ſuperficies priſmatis, exceptis baſibus æquabitur polygono, quod eſt circumſcriptum circulo, cuius radius eſt medius proportionalis inter diametrum baſeos cylindri, & eiuſdem altitudinem.

Duæ igitur ſunt quantitates, nimirum ſuperficies priſmatis, & polygonum circumſcriptum circulo, cuius radius eſt medius proportionalis inter diametrum baſeos ipſius cylindri, & altitudinem eiuſdem, quarum vna cylindricam ſuperficiem, altera circulum, cuius radius eſt medius proportionalis &c. ſemper minus, ac minus excedendo, tandem excedere poſſunt exceſſu minori quacunque data quantitate; perpetuò ſeruata æqualitatis ratione, ergo ex generali huius noſtræ Methodi Theoremate quarto, cylindrica ſuperficies æquabitur circulo, cuius radius eſt medius proportionalis inter diametrum baſeos cylindri, ac eiuſdem altitudinem.

Sed hoc idem aliter adhibitâ reſolutiuâ Methodo, cui noſtram hanc inſeruire conſpiciemus.

THEOREMA.

Exemplum LXXXXV.

Omnis cylindri recti ſuperficies ſine baſibus æqualis eſt circulo, cuius ea, quæ ex centro media proportionalis eſt inter latus, & cylindri baſeos diametrum.

Reſolutio.

QVoniam igitur cylindri recti ſuperficies æqualis eſt circulo, cuius radius media proportionalis eſt inter latus, & ipſius baſeos diametrū; ergo cylindri recti ſuperficies ad baſin eſt, vt circulus, cuius radius eſt prædicta media proportionalis ad cylindri baſin; ſed vt quadratum illius mediæ proportionalis ad quadratum ſemidiametri baſeos, ita eſt [a] circulus, cuius radius eſt ipſa media proportionalis ad ipſam cylindri baſin; ergo cylindri recti ſuperficies eſt ad baſin, vt quadratum mediæ proportionalis inter latus cylindri, & diametrum baſeos, ad quadratum ſemidiametri ipſius baſeos. Sed quadratum mediæ proportionalis inter cylindri latus, & diametrum baſeos, æquale eſt [b] rectangulo per axem, ergo cylindri recti ſuperficies ad baſin eſt, vt rectangulum per axem ad quadratum ſemidiametri ipſius baſeos; ſed vt rectangulum ſub latere, & quarta parte diametri baſeos, ad quadratum eiuſdem quartæ partis, ita eſt [c] rectangulum per axem ad quadratum ſemidiametri ipſius baſeos; vt enim eſt ſimplum ad ſimplum, ita quadruplum ad quadruplum; ergo cylindri recti ſuperficies ad baſin erit, vt rectangulum ſub latere, & quarta parte prædicta ad quadratum eiuſdem quartæ partis; ſed vt cylindri latus ad quartam partem diametri baſeos, ita rectangulum ſub latere, & quarta parte prædicta ad quadratum eiuſdem partis; ergo cylindri recti ſuperficies eſt ad baſin, vt cylindri latus ad quartam partem diametri ipſius baſeos. Quod ita ſe habet, vt mox demonſtrabo. His præmiſſis.

Lemma I.

Si fuerint duo triangula ſuper eadem baſi conſtituta, erunt in ratione altitudinum. *Hoc conſtat ex Elementis.*

Lemma II.

Si fuerint duo triangula ſuper eadem baſi conſtituta, & altitudo vnius ſit dupla altitudinis alterius, rectangulum ſuper eadem baſi, altitudinem habens eam, quæ eſt minoris trianguli, æquabitur triangulo maiori.

Conſtat etiam ex Elementis; nam triangulum maius eſt duplum minoris, ex lemmate antecedenti. Sed trianguli minoris duplum eſt rectangulum prædictum; ergo triangulum maius æquabitur huiuſmodi rectangulo.

Lemma

Lemma III.

Si ſuper polygonum regulare erectum ſit priſma, cuius altitudo ſit quarta pars altitudinis ipſius polygoni, ſuperficies priſmatis æqualis erit huiuſmodi polygono.

Conſtat ex lemmate antecedenti; ſingula enim facies ipſius priſmatis æquales ſunt ſingulis triangulis, in quæ polygonum diuiditur. Altitudo enim vniuſcuiuſque faciei æqualis eſt dimidio altitudinis cuiuslibet trianguli; ergo integra ſuperficies æquabitur polygono.

Lemma IIII.

Cylindri recti ſuperficies, cuius altitudo eſt quarta pars diametri baſeos, æqualis eſt ipſi baſi.

Intelligatur cylindri prædicti baſi circumſcriptum polygonum, ſupra quod erectum ſit priſma eiuſdem altitudinis cum cylindro, ſitque diuiſum polygonum in tot triangula, quot ſunt numero latera ipſius, eorumque vertices ſint in centro. Manifeſtum eſt ex lemmate antecedente, ſuperficiem priſmatis prædicti æqualem eſſe polygono, quod eſt baſis eiuſdem. Sunt itaque duæ quantitates, nempè ſuperficies priſmatis circumſcripti, exceptis baſibus, & polygonum circumſcriptum baſi ipſius cylindri, quæ ſemper minus excedendo cylindri ſuperficiem, eiuſque baſin, tandem excedere poſſunt exceſſu minori, quacunque data quantitate, ſeruantes ſemper rationem æqualitatis; ergo ex generali Theoremate, quarto huius Methodi, ſuperficies cylindri, cuius altitudo quarta pars eſt diametri ipſius baſeos, æquabitur ipſi baſi.

Itaque Generali Methodo, peculiaris hæc inſeruit.

Lemma V.

Cuiuſcunque recti cylindri ſuperficies eſt ad baſin, vt cylindri latus ad quartam partem diametri ipſius baſeos. *Hoc etiam aliter ſupra demonſtratū eſt.*

Superficies enim cylindri ad cylindri ſuperficiem eiuſdem baſeos, eſt vt altitudo ad altitudinem; ergo ſuperficies cylindri cuiuslibet altitudinis, eiuſdem tamen baſeos, ad ſuperficiem cylindri, cuius altitudo eſt quarta pars diametri ipſius baſeos, eſt vt illius altitudo ad quartam partem diametri baſeos. Sed ſuperficies cylindri, cuius altitudo eſt quarta pars diametri baſeos, æqualis eſt [a] ipſi baſi; ergo ſuperficies cylindri cuiuslibet altitudinis ad baſin eſt, vt altitudo hoc eſt, vt latus eiuſdem cylindri ad quartam partem diametri baſeos.

Compoſitio.

Quoniam cylindri recti ſuperficies eſt ad baſin, vt cylindri latus ad quartam partem diametri baſeos, ſed vt cylindri latus ad quartam partem diametri baſeos, ita rectangulum ſub latere, & quarta parte prædicta ad quadratum eiuſdem partis; ergo cylindri recti ſuperficies ad baſin erit, vt rectangulum ſub latere, & quarta parte prædicta ad quadratum eiuſdem quartæ partis. Sed vt rectangulum ſub latere, & iam dicta quarta parte ad quadratum eiuſdem quartæ partis, ita eſt rectangulum per axem ad quadratum ſemidiametri ipſius baſeos; vt enim eſt ſimplum ad ſimplum, ita quadruplum ad quadruplum; ergo cylindri recti ſuperficies ad baſin eſt, vt rectangulum per axem, ad quadratum ſemidiametri ipſius baſeos. Sed quadratum mediæ proportionalis inter cylindri latus, & diametrum baſeos ipſius, æquale eſt rectangulo per axem; ergo cylindri recti ſuperficies eſt ad baſin, vt quadratum mediæ proportionalis inter latus cylindri, & diametrum baſeos, ad quadratum ſemidiametri ipſius baſeos. Sed vt quadratum illius mediæ proportionalis ad quadratum ſemidiametri baſeos, ita eſt circulus, cuius radius eſt ipſa media proportionalis ad ipſam cylindri baſin; ergo cylindri recti ſuperficies ad baſin eſt, vt circulus, cuius radius eſt prædicta media proportionalis, ad cylindri baſin; ergo cylindri recti ſuperficies æquabitur circulo, cuius radius media eſt proportionalis inter latus, & ipſius baſeos diametrum. Quod oportebat oſtendere.

THEO-

Exemplum LXXXXVI.

THEOREMA.

Archimedes prop. 15. de Sphæra, & Cylindro.

Coni recti ſuperficies ad baſin eſt, vt latus eiuſdem coni ad ſemidiametrum baſeos.

Intelligatur coni baſi circumſcriptum polygonum, ſupra quod intelligatur erecta pyramis: intelligatur polygonum prædictum diuiſum in triangula per rectas ductas à centro ad angulos ipſius, erunt autem hæc multitudine æqualia faciebus pyramidis. Manifeſtum eſt, quod quodlibet triangulum, quod eſt facies pyramidis, ad ſuum conterminum triangulum in polygono eam habere rationem, quam habet cathetus ad cathetum, ſed cathetus faciei pyramidis eſt latus coni, cathetus trianguli in polygono eſt ſemidiameter baſeos ipſius coni; ergo pyramidis facies ad triangulum in polygono rationem habet, quam latus coni ad ſemidiametrum baſeos, & ita omnes facies pyramidis, hoc eſt ſuperficies pyramidis ad omnia triangula in polygono, hoc eſt ad ipſum polygonum eſt, vt latus coni ad ſemidiametrum baſeos, & ſic in infinitum, multiplicatis lateribus polygoni, & faciebus pyramidis. Duæ igitur ſunt quantitates, nempè ſuperficies pyramidis, & polygonum, quod eſt baſis eiuſdem, quæ quidem per continuata decrementa ſemper minus excedendo conicam ſuperficiem, eiuſque baſin, tandem excedere poſſunt exceſſu minori quacunque data quantitate, perpetuò ſeruata ratione lateris coni ad ſemidiametrum baſeos ipſius; ergo ex generali huius noſtræ Methodi Theoremate quarto, conica ſuperficies ad baſin recti coni, eſt in ratione lateris eiuſdem coni ad ſemidiametrum baſeos. Hinc per modum Corollarij.

Exemplum LXXXXVII.

THEOREMA.

Superficies cylindri recti eiuſdem altitudinis, ac baſeos cum cono, exceptis baſibus ad conicam ſuperficiem eſt, vt latus cylindri ad ſemilatus coni.

Demonſtratum eſt enim, cylindricam ſuperficiem ad baſin rationem habere, quam cylindri latus ad quartam partem diametri, ſeu ad dimidium ſemidiametri, hoc eſt vt duplum latus cylindri ad integram ſemidiametrum, ſed ſuperficies conica ad baſin eſt, vt coni latus ad ſemidiametrum baſeos; ergo cylindrica ſuperficies ad ſuperficiem conicam erit, vt duplum latus cylindri ad latus coni, hoc eſt vt latus cylindri ad dimidium latus coni. Item.

22. quinti, & corol. 4. quinti.

Exemplum LXXXXVIII.

THEOREMA.

Circulus, cuius radius eſt medius proportionalis inter coni recti latus, & ſemidiametrum baſeos, æqualis eſt conicæ ſuperficiei.

Archimedes prop. 14. de Sphæra, & Cylindro.

Quoniam enim conica ſuperficies ad baſin eſt, vt coni recti latus ad ſemidiametrum baſeos, ſed vt coni latus ad ſemidiametrum baſeos, ita eſt circulus, cuius radius medius proportionalis eſt inter coni latus, & ſemidiametrũ baſeos ad ipſam coni baſin; ergo coni recti ſuperficies æquabitur circulo, cuius radius eſt medius proportionalis inter coni recti latus, & ſemidiametrum baſeos.

Ex his autem liquet, & illud.

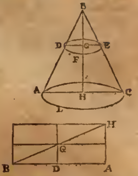
Exemplum LXXXXIX.

THEOREMA.

Archim. prop. 16. de Sphæra, & Cylindro.

Si conus rectus fuerit ſectus plano, quod ſit baſi parallelum. Dico circulum, cuius radius eſt medius proportionalis inter partem lateris coni, quæ intercipitur inter duos circulos parallelos, & aggregatum ex radys vtriuſque circuli, æqualem eſſe parti conicæ ſuperficiei inter prædictos circulos parallelos interceptæ.

Sit conus rectus, cuius triangulum per axem ABC, eius baſis ſit circulus ALCA, cuius diameter AC, ſecetur verò conus altero plano parallelo ipſi baſi, illudque erit circulus, cuius circumferentia DFED, diameter verò DE: ſitque coni axis BH ſecans diametrum DE in



DE in G, & AC in H. Dico circulum, cuius radius eſt medius proportionalis inter AD, & aggregatum ex AH, DG, æqualem eſſe parti conicæ ſuperficiei, comprehenſæ inter circulos parallelos DFE, ALC.

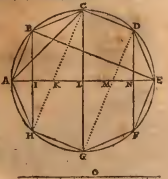
Quoniam igitur circulus, cuius radius eſt medius proportionalis inter AB, AH, æqualis eſt conicæ ſuperficiei coni recti, cuius latus AB, baſeos autem ſemidiameter AH; præterea circulus, cuius radius eſt medius proportionalis inter DB, DG æqualis eſt conicæ ſuperficiei coni recti, cuius latus DB, baſeos ſemidiameter DG; ergo prædictorum circulorum differentia æquabitur differentiæ conicarum ſuperficierum; ſed ipſorum circulorum differentia eſt circulus, cuius radius medius eſt proportionalis inter AD, & aggregatum ex AH, DG; conicarum verò ſuperficierum differentia eſt, quæ continetur inter circulos parallelos DFE, ALC; ergo conica ſuperficies comprehenſa inter prædictos circulos parallelos, æquabitur circulo, cuius radius eſt medius proportionalis, inter AD & aggregatum ex AH, & DG.

Lemma.

Quod autem circulus, cuius radius eſt medius proportionalis inter AD, & aggregatum ex DG, AH, æqualis ſit differentiæ circulorum, quorum vnus habet radium medium proportionalem inter AB, AH, alter inter DB, DG: ſic oſtendo.

Cùm enim ſit vt DB, ad DG, ita BA ad AH, ſi intelligantur ex his facta rectangula, cùm ſint ſimilia, circa eandem diametrum conſiſtent, ac propterea complementa erunt æqualia, quorum vnum ſub DG, & ſub AD, differentia inter AB, DB, aliud verò ſub DB, & ſub differentia inter AH, DG. Sumatur igitur bis illud ſub DG, & ſub AD; vnà enim cum contento ſub AD, & differentia inter AH, DG, æquabitur gnomoni, nempè differentia rectangulorum, quorum vnum continetur ſub AH, & AB, aliud verò ſub DG, & DB; Idem eſt autem rectangulum bis ſub AD, & DG, vnà cum rectangulo ſub eadem AD, & differentia inter AH, & DG, idem eſt, inquam, ac rectangulum ſub AD, & ſub aggregato ex AH, DG; ergo rectangulorum differentia, quorum vnum ſub AB, & AH, aliud ſub DG, & DB, continetur, æquatur rectangulo ſub AD, & aggregato ex AH, DG: loco rectangulorum intelligantur quadrata; ergo differentia quadratorum, quorum vnum habet latus medio loco proportionale inter AB, AH, aliud verò habet medium inter BD, DG, æquabitur quadrato, cuius latus medium eſt proportionale inter AD, & aggregatum ex AH, & DG; ſed vt quadrata, ita circuli, quorum radij ſunt latera quadratorum; ergo circulus, cuius radius medius proportionalis eſt inter AD, & aggregatum ex AH, DG, æqualis eſt differentia circulorum, quorum vnus habet radium medium proportionalem inter AH, AB, alter verò inter DG, DB.

Lemma primum ad ſequens Theorema.



Sit polygonum regulare parilaterum, & æquilaterum, ABCD &c., inſcriptum circulo ACEG, ductaque ſit EB ad terminum lateris diametro proximi; rectæ verò BH, CG, DF, iungant angulos æquidiſtantes ab A. Dico, rectangulum contentum ſub diametro AE, & ſubtenſa BE æquari rectangulo ſub quouis latere, AB, vel BC, vel &c. & ſub aggregato rectarum BH, CG, DF ductis CH, DG.

Quoniam igitur BH, CG, DF ob æquales interceptos

arcus BC, HG; CD, GF, ſunt inter ſe parallelæ, quemadmodum AB, HC, GD, FE; propterea omnia triangula ABI, IHK, KCL, LGM, MDN, & NFE, ſunt æquiangula; ergo vt BI, ad IA, ita HI ad Ik, & vt HI, ad IK, ita CL ad Lk, & ita GL ad LM, & vt GL ad LM, ita DN, ad NM, & vt DN ad NM, ita FN ad NE; quare vt vna antecedentium BI ad vnam conſequentium IA, ſic omnes antecedentes BI, IH, CL, LG, DN, NF, hoc eſt aggregatum ex BH, CG, DF, ad omnes conſequentes, AI, Ik, kL, LM, MN, NE, hoc eſt ad diametrum AE. Eſt autem, vt BI ad IA, ita BE ad BA; ergo aggregatum ex BH, CG, DF, ad diametrum AE erit, vt BE ad BA; quare rectangulum ſub aggregato trium BH, CG, DF, & ſub AB, æquaaitur rectangulo ſub AE, & BE.

Lemma ſecundum.

Iiſdem poſitis: intelligatur circa AE, veluti axem reuolui polygonum, & circulus, vt deſcribatur ſuperficies conſtans ex ſuperficiebus conicis ſphæræ inſcriptis. Dico huiuſmodi ſuperficiem æqualem eſſe circulo, cuius radius medius eſt proportionalis inter AE, EB.

Quoniam igitur BH, CG, DF, dupla ſunt ipſarum BI, CL, DN, ſingulæ ſingularum; erunt proptereà prædicta BH, CG, DF, æquales ipſi BI, CL, DN, bis ſumptis; ergo rectangulum ſub latere vno polygoni, puta AB, vel BC &c. & ſub BH, CG, DF, æquabitur rectangulis ſub AB, & BI; ſub BC, & compoſita ex BI, & CL; ſub CD, & compoſita ex CL, & DN; ſub DE, & DN; hunc enim in modum dimidia illa BI, CL, DN, bis fuerunt accepta, ſed rectangulum ſub AB, & aggregato ipſarum BH, CG, DF, æquatur rectangulo ſub AE, & BE, ſeu quadrato O, quæ media ſit proportionalis inter AE, BE; ergo quadratum ipſius O, æquabitur rectangulis ſub AB, BI; ſub BC, & ſub compoſita ex BI, & CL; ſub CD, & compoſita ex CL, DN; ſub DE, & DN; loco rectangulorum intelligantur quadrata, nempè inter AB, BI, media ſit proportionalis P; & inter BC, & compoſitam ex CL, & BI, media ſit proportionalis Q; inter CD, & compoſitam ex CL, DN, media ſit proportionalis R; & inter DN, DE, media ſit proportionalis S; ergo quadratum ipſius O, æquabitur quadratis ipſarum P, Q, R, S; ergo circulus, cuius radius O, æquabitur circulis, quorum radij ſunt P, Q, R, S; ſed circulus, cuius radius P, æqualis eſt ſuperficiei conicæ HAB; circulus, cuius radius Q, æqualis eſt ſegmento conicæ ſuperficiei BHCG; circulus, cuius radius R, æqualis eſt ſegmento conicæ ſuperficiei GCDF; circulus tandem, cuius radius S, æqualis eſt conicæ ſuperficiei DFE; ergo circulus, cuius radius O, æquabitur vniuerſæ ſuperficiei conſtanti ex conicis ſuperficiebus ſphæræ inſcriptis.

Nec diſſimiliter demonſtrabimus, ſuperficiem conſtantem ex ſuperficiebus conicis ſegmento ſphærico DAF, inſcriptas, æqualem eſſe circulo, cuius radius, medius eſt proportionalis inter
Exemplum C. *AE, AN. Idq; intellige, de quocunque ſphæræ ſegmento, cui figura inſcripta ſit æquilatera, & parilatera dempta baſi &c.*

THEOREMA.

Sphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli in eadem ſphæra deſcriptibilis.

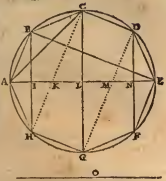
Quoniam igitur circulus, cuius radius eſt medius proportionalis inter circuli maximi diametrum, & ſubtenſam ductam ad extremum lateris polygoni æquilateri, & parilateri eidem circulo inſcripti, ad extremum, inquam lateris, quod eſt diametro proximum, æqualis eſt vniuerſæ ſuperficiei conſtanti ex pluribus ſuperficiebus conicis ſphæræ quidem inſcriptis, & ita ſemper in infinitum, multiplicatis lateribus polygonorum parilaterorum, æquilaterorum; proptereà duæ ſunt quantitates, nempè vniuerſa ſuperficies conſtans ex conicis ſuperficiebus iam dictis, & circulus, cuius radius eſt medius proportionalis inter diametrum, & ſubtenſam iam explicatam, quæ ſemper minus, ac minus per continuata incrementa deficiendo; illa quidem à ſuperficie ſphærica; hic autem à circulo, cuius radius eſt ſphæræ diameter AE, perpetuò ſeruata æqualitatis ratione; propterea ex generali huius noſtræ Methodi Theoremate ſecundo, ſphærica ſuperficies ad circulum, cuius radius eſt diameter ipſius ſphæræ, in eadem erit æqualitatis ratione; ſed circulus, cuius radius eſt diameter ſphæræ, eſt quadruplus circuli, cuius diameter eſt ipſa diameter ſphæræ, hoc eſt circuli maximi ipſius ſphæræ; ergo ſphærica ſuperficies quadrupla erit circuli maximi eiuſdem ſphæræ.

THEO-

THEOREMA.

Sphærica ſuperficies quadrupla eſt circuli maximi eiuſdem ſphæræ. Exemplum CI.

Hoc idem Theorema facillimè demonſtrabimus hunc in modum.



Quoniam ſuperiùs oſtendimus, circulum, cuius radius medius eſt proportionalis inter AE diametrum, & BE ſubtenſam, æqualem eſſe vniuerſæ ſuperficiei conſtanti ex pluribus conicis ſuperficiebus ſphæræ inſcriptis, ortis videlicet ex reuolutione laterum polygoni ABCD &c. ergo dimidium æquabitur dimidio; quare circulus, cuius radius medius eſt proportionalis inter AL ſemidiametrum, & BE ſubtenſam (eſt enim hic circulus dimidium illius; nam rectangulum ſub AL, & BE, dimidiũ eſt rectanguli ſub AE, & BE, cùm AL dimidia ſit ipſius AE quare quadratum æquale rectangulo ſub AL, & BE, dimidium erit quadrati æqualis rectangulo ſub AE, & BE. Sed vt quadrata, ita circuli ſunt inter ſe, quorum ſemidiametri ſunt latera quadratorum; ergo circulus, cuius radius eſt latus quadrati æqualis rectangulo ſub AL, & BE, hoc eſt, cuius radius eſt medius proportionalis inter AL, BE, erit dimidium circuli, cuius radius eſt latus quadrati æqualis rectangulo ſub AE, BE, hoc eſt, cuius radius eſt medius proportionalis inter AE, & BE) æquabitur ſuperficiei dimidiæ vniuerſæ iam dictæ conſtanti ex conicis ſuperficiebus ſphæræ inſcriptis; ergo duæ ſunt quantitates, nempè circulus, cuius radius eſt medius proportionalis inter AL, BE; altera autem dimidium ſuperficiei conſtantis ex conicis ſuperficiebus, quæ per continuata incrementa ſemper minus, ac minus deficiendo, illa quidem à circulo, cuius radius ſit medius proportionalis inter AL, & AE, & hęc quidem à dimidio ſphæricæ ſuperficiei; ergo ex generali huius noſtræ Methodi Theoremate ſecundo, circulus, cuius radius eſt medius proportionalis inter AL, & AE, hoc eſt, cuius radius eſt recta AC, æquabitur dimidio ſphæricæ ſuperficiei; ſed circulus, cuius radius eſt AC, media proportionalis inter AL, & AE eſt æqualis ſuperficiei curuæ cylindri, cuius altitudo eſt AL, baſeos autem diameter AE; ergo curua cylindri recti ſuperficies, cuius altitudo eſt AL, ſemidiameter ſphæræ, baſeos autem diameter eſt AE, diameter ſphæræ, æquabitur dimidio ſuperficiei ſphæricæ; ergo cylindri recti curua ſuperficies, cuius altitudo eſt diameter ſphæræ, & baſeos diameter eſt itidem diameter eiuſdem ſphæræ, æquabitur vniuerſæ ſuperficiei ſphæricæ; At verò cylindri recti curua ſuperficies ad baſin eſt, vt latus, ſeu altitudo ad quartam partem diametri baſeos; cylindri autem recti, cuius altitudo eſt diameter ſphæræ, baſeos verò diameter eſt diameter itidem ſphæræ, habet altitudinem æqualem baſeos diametro; ergo huiuſmodi cylindri curua ſuperficies erit ad baſin, vt baſeos diameter ad ſui quartam partem, hoc eſt in ratione quadrupla, ergo curua ſuperficies cylindri recti, cuius altitudo eſt diameter ſphæræ, baſeos autem diameter eſt diameter itidem ipſius ſphæræ, hoc eſt, cuius baſis eſt circulus maximus eiuſdem ſphæræ, eſt ad baſin, hoc eſt ad prædictum circulum maximum in ratione quadrupla, ſed ſphærica ſuperficies erat æqualis prædicti cylindri recti curuæ ſuperficiei; ergo ſphærica ſuperficies quadrupla erit circuli maximi eiuſdem ſphæræ. Quod oportebat oſtendere.

THEOREMA.

Circulus æqualis eſt triangulo rectangulo, cuius latus vnum circa rectum æquale eſt radio, latus verò alterum, itidem circa rectum æquale eſt peripheria eiuſdem circuli. Exemplum CII.

Quoniam enim polygonum circulo inſcriptum ad quodcunque triangulum rectangu-

 lum

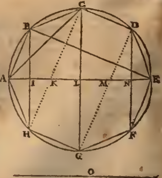
lum rationem habet compoſitam ex ratione rectæ à centro perpendicularis lateri polygoni ad trianguli latus vnum circa rectum, & ex ratione perimetri ipſius polygoni ad latus alterum eiuſdem trianguli circa rectum. At verò recta à centro perpendicularis lateri ipſius polygoni, & perimeter eiuſdem, per continuata incrementa ſemper minus deficiendo à radio, & peripheria circuli, tandem deficere poſſunt defectu minori quacunque data quantitate, ſemper eadem iam dicta rationis compoſitione ſeruata; propterea circulus ad idem triangulum rectangulum habebit rationem compoſitam ex ea, quæ eſt radij ad trianguli latus, ad quod recta à centro perpendicularis lateri polygoni referebatur, & ex ea, quæ eſt peripheriæ ad latus alterum; ergo ad triangulum rectangulum, cuius latus vnum circa rectum æquale eſt radio circuli, & latus alterum æquale eſt peripheriæ ipſius, circulus rationem habebit compoſitam ex ratione radij ad ſe ipſum, & ex ratione peripheriæ ad ſe ipſam; ſed hæc eſt ratio æqualitatis; ergo circulus æquabitur triangulo rectangulo, cuius latus vnum circa rectum eſt æquale circuli ſemidiametro, alterum verò itidem circa rectum æquale eſt circuli peripheriæ. Quod erat operæ pretium oſtendere.

Exemplum CIII.

THEOREMA.

Cuiuſcunque portionis ſphæricæ ſuperficies æqualis eſt circulo, cuius radius eſt recta à vertice portionis ducta ad circumferentiam circuli, qui baſis eſt ipſius portionis.

Intelligatur portioni ſphæricæ inſcripta figura æquilatera, & parilatera, excepta baſi, in orbem acta circa axem ipſius portionis; hunc enim in modum conicæ ſuperficies ipſimet portioni inſcriptæ erunt; intelligatur etiam ducta ab extremo diametri ad extremum lateris proximi ipſi diametro. Manifeſtum eſt ex hactenus demonſtratis, prædictas conicas ſuperficies ſphærico ſegmento inſcriptas æquari circulo, cuius radius eſt medius proportionalis inter ſubtenſam iam dictam, & ſphęricę portionis axem, & ſic ſemper in infinitum. Duę igitur ſunt quantitates, quarum vna eſt circulus, cuius radius eſt medius proportionalis inter ſubtenſam prędictam, & ſegmenti ſphęrici axem, alia eſt aggregatum ex ſuperficiebus conicis ſphęrico ſegmento inſcriptis, quę ſemper minus deficiendo, illa quidem à circulo, cuius radius eſt medius proportionalis inter diametrum, & prędictum axem, altera autem à ſuperficie ſphęrica, tandem per continuata incrementa deficere poſſunt defectu minori quacunque data quantitate, perpetuò ſeruata ęqualitatis ratione; ergo circulus, cuius radius eſt medius proportionalis inter diametrum, & axem prędictum ęquabitur ſphęrici ſegmenti ſuperficiei; ſed recta ducta à vertice ſphęrici ſegmenti ad circumferentiam circuli, qui baſis eſt ſegmenti, eſt media proportionalis inter diametrum, & prędictum axem ſegmenti ſphęrici, ergo circulus, cuius radius eſt recta ducta à vertice ſegmenti ſphęrici ad circumferentiam circuli, qui baſis eſt prędicti ſegmenti, ęquabitur ſuperficiei eiuſdem ſphęrici ſegmenti.



Aduertendum eſt autem, quòd, ſi polygonum foret ęquilaterum, & parilaterum, vt in adiuncto ſchemate, circulo quidem inſcriptum AC EG, atque ſegmentum eſſet DAF, cui inſcripta eſſet figura ęquilatera, & parilatera, vt vides, excepta baſi, ita vt rectę DE, EF forent ęquales vnicuique laterum prędictę figurę circuli ſegmento DAF inſcriptę; atque adeò inter ſe, demonſtratio inſtitui poſſet hunc in modum.

Intelligatur ducta BF, quę neceſſariò tranſibit per centrum L; ergo angulus BEF rectus erit; ergo vt BE ad EF, ita FN ad NE; ergo rectangulum BEN ęquabitur rectangulo EFN; ergo quadratum medię proportionalis inter BE, EN ęquabitur quadrato medię proportionalis inter EF, FN; ergo circulus, cuius radius eſt medius inter BE, EN ęquabitur circulo, cuius radius eſt medius inter EF, FN; ſed circulus, cuius radius eſt medius

dius inter EF, FN, æqualis eſt ſuperficiei conicæ DEF; ergo circulus, cuius radius eſt medius inter BE, EN, æquabitur ſuperficiei conicæ DEF. Sed circulus, cuius radius eſt medius inter BE, AE, æqualis eſt omnibus ſuperficiebus conicis circulo inſcriptis; ablatis æqualibus ab æqualibus; ergo circulus, cuius radius eſt medius inter BE, AE, minus circulo, cuius radius eſt medius inter BE, EN, æquabitur ſuperficiebus conicis inſcriptis conico ſegmento DAF. Sed circulus, cuius radius eſt medius inter BE, AE, minus circulo, cuius radius eſt medius inter BE, EN, æqualis eſt circulo, cuius radius eſt medius inter BE, AN, vt mox conſtabit; ergo circulus, cuius radius eſt medius inter BE, AN, æquabitur ſuperficiebus ſphęrico ſegmento DAF inſcriptis.

Sunt igitur duę quantitates, nempè circulus, cuius radius eſt medius inter BE, AN, & ſuperficies conſtans ex conicis ſuperficiebus inſcriptis ſphęrico ſegmento DAF, quę per continuata incrementa ſemper, ac ſemper minus deficiendo, illa quidem à circulo, cuius radius eſt medius inter AE diametrum, & ſegmentum AN; altera verò à ſuperficie ſphęrici ſegmenti DAF, tandem deficere poſſunt defectu minori quacunque datâ quantitate, perpetuò ſeruata ęqualitatis ratione; ergo circulus, cuius radius eſt medius inter AE, AN, cuiuſmodi eſt AD, ducta à vertice ſegmenti DAF, ad circumferentiam circuli, qui baſis eſt dicti ſegmenti, ęquabitur ſuperficiei ſphęrici ſegmenti DAF.

Lemma.

Quod autem circulus, cuius radius eſt medius proportionalis inter BE, AE, minus circulo, cuius radius eſt medius proportionalis inter BE, EN, ęqualis ſit circulo, cuius radius medius eſt proportionalis inter BE, AN, ſic oſtendo. *Circuli enim inter ſe ſunt, vt quadrata ſemidiametrorum: quadrata verò ipſa ſunt inter ſe, vt rectangula, quibus illa ſunt æqualia; at verò rectangulum BEA, minus rectangulo BEN, ęquale eſt rectangulo ſub BE, & AN. ergo circulus, cuius radius eſt medius proportionalis inter BE, AE, minus circulo, cuius radius medius eſt proportionalis inter BE, EN, ęquabitur circulo, cuius radius eſt medius proportionalis inter BE, AN.*

THEOREMA.

Exemplum CIV.

Cylindri recti ſphæræ circumſcripti ſuperficies æqualis eſt ſuperficiei ſphæræ.

Sed hoc etiam obiter ſuprà demonſtratum eſt.

Demonſtratur autem, quoniam huiuſmodi cylindri latus ęquale eſt diametro baſeos; ſed cylindrica ſuperficies ad baſin eſt, vt cylindri latus ad quartam partem diametri baſeos, hoc eſt in huiuſmodi cylindro, vt diameter baſeos ad ſui quartam partem; ergo cylindrica ſuperficies cylindri ſphęrę circumſcripti, ad baſin, hoc eſt ad circulum maximum ſphęrę, erit in ratione quadrupla, ſed in eadem ratione ad circulum maximum eſt ſphęrica ſuperficies; ergo ſuperficies cylindri ſphęrę circumſcripti ęqualis eſt ſuperficiei ſphęrę.

Aliter etiam hoc idem oſtenditur. Circulus, cuius radius eſt recta à vertice hemiſphęrij ad circumferentiam circuli, qui baſis eſt eiuſdem hemiſphęrij, ęqualis eſt ſuperficiei eiuſdem hemiſphęrij. Sed recta prędicta eſt media proportionalis inter diametrum baſeos cylindri circumſcripti hemiſphęrio, & altitudinem eiuſdem: atque adeò circulus, cuius radius eſt prędicta linea, ęqualis eſt eidem cylindricę ſuperficiei; ergo curua cylindri ſuperficies circumſcriptę hemiſphęrio ęquabitur ſuperficiei ipſius hemiſphęrij; ergo curua ſuperficies cylindri circumſcripti ſphęrę ęquabitur ſuperficiei ipſius ſphęrę.

THEOREMA.

Exemplum CV.

Si Cylindrus rectus ſphæræ circumſcriptus, ac ſphæra ſecentur planis ad axem rectis, erunt ſingula ſuperficiei cylindricæ ſegmenta ſegmentis ſingulis ſuperficiei ſphæricæ æqualia.

Demonſtratio facilis; nam recta ducta à vertice ſegmenti ad circuli circumferētiam, quę communis eſt ſectio plani cylindricam ſuperficiem ſecantis, & ſphęricam, eſt media proportio-

portionalis inter diametrum ſphęrę, hoc eſt diametrum baſeos ſegmenti cylindrici, & altitudinem portionis ſphęrę, atque adeò eiuſdem ſegmenti cylindrici; circulus igitur, cuius radius eſt prędicta linea ęquabitur, tùm ſuperficiei portionis ſphęricę, tùm ſuperficiei portionis cylindricę; ſuperficies igitur curua ſegmenti cylindri ęquabitur ſuperficiei portionis ſphęricę; quod, cùm de toto, & partibus verum ſit, ſi ab ęqualibus totis auferantur partes ęquales, propterea reſidua erunt ęqualia, ac ob id cylindrica ſuperficies inter parallela plana interiecta ęquabitur ſuperficiei ſphęricę inter eadem plana, etiam conſtitutę.

Exemplum CVI.

THEOREMA.

Segmenta ſuperficiei ſphæricæ parallelis circulis diſſecta, rationem habent inter ſe, quam ſegmenta diametri ad prædictos circulos perpendicularis.

Facilè conſtat; ſegmenta enim ſuperficiei ſphęricę ſunt inter ſe, vt ſegmenta ſuperficiei cylindri ſphęrę circumſcripti, ſed hęc ſunt, vt ſegmenta axeos; ergo etiam ſegmenta ſphęricę ſuperficiei erunt inter ſe, vt ſegmenta diametri ipſius ſphęrę, quę eſt axis cylindri.

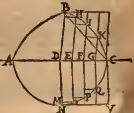
Exemplum CVII.

THEOREMA.

Parabole ſeſquitertia eſt trianguli eiuſdem baſeos, ac altitudinis.

Sit parabole ABC, cuius baſis AC, diameter BD, & quia idem ferendum iudicium de ſemiparabole; propterea ducta ſit BC.

Oſtendendum eſt ſemiparabolen DBHKC, ad triangulum DBC, eſſe in ratione ſeſquitertia.



Intelligatur DC diuiſa in partes æquales in infinitum, vt exempli gratia diuiſa ſit in quatuor æquales partes DE, EF, FG, GC, & à punctis E,F,G,C ductæ ſint parallelæ ipſi DB, quæ occurrant rectæ BL parallelæ ipſi DC; & ex punctis H,I,K, in quibus prædictæ parallelæ occurrunt perimetro ſemiparaboles, ductæ ſint eidem DC parallelæ, & ſic in infinitum per vlteriores diuiſiones ipſius DC in æquales partes, adeò vt ductis parallelis ipſis DB, vel LC, parallelogrammum DL, ſemper in æquales partes diuiſum ſit, à quibus acceptæ ſint partes, ductis rectis parallelis ipſi DC à punctis, in quibus parallelæ ipſi DB, occurrunt perimetro BHIkC; hoc idem fieri intelligatur deſcripto ſemicirculo ſuper AC, & ex D ducta perpendiculari DN, cui factæ ſint parallelæ ex punctis E,F,G,C, quæ occurrant NV ductæ parallelæ ipſi DC, & ex punctis quibus occurrunt periphæriæ circuli, prædictæ parallelæ, nempè O,P,Q, ductæ ſint parallelæ ipſi DC. Intelligatur modo circumductus ſemicirculus, & vnà cum eo rectangulum NDCV, omniaque rectangula quadranti inſcripta, ita vt ex reuolutione quadrantis, fiat hemiſphærium, & ex reuolutione rectanguli NDCV, fiat cylindrus: & ex reuolutione rectangulorum intra quadrantem fiant totidem cylindri in hemiſphærio.

Quoniam igitur eſt vt parallelogrammum BE ad parallelogrammum HD, ita recta BD ad rectam HE; ſed vt BD ad HE, ita eſt rectangulum ADC ad rectangulum AEC, vt Archimedes oſtendit, & nos etiam aliter ſuperius, de parabola tractantes demonſtrauimus, & vt rectangulum ADC, ad rectangulum AEC, ita eſt quadratum DN ad quadratum EO, ex natura circuli; ergo vt quadratum DN ad quadratum EO, ita erit parallelogrammum BE, ad parallelogrammum HD; ſed vt quadratum DN ad quadratum EO, ita eſt cylindrus NE ad cylindrum OD; ergo vt parallelogrammum BE, ad parallelogrammum HD, ita cylindrus NE ad cylindrum OD; & ſic de reliquis.

Sunt igitur quatuor quantitates proportionales, quarum prima eſt figura conſtans ex parallelogrammis ſemiparabolæ inſcriptis: ſecunda eſt parallelogrammum DBLC: tertia eſt figura conſtans ex cylindris hemiſphærio inſcriptis: quarta demum eſt cylindrus factus ex reuolutione rectanguli DV, circa axem DC: quinta eſt ſemiparabolę DBC: & ſexta eſt

hemiſphę-

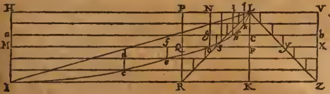
hemiſphærium. Quatuor autem proportionales prædictæ ſic ſe habent, vt per continuata incrementa, prima figura conſtans ex parallelogrammis ſemiparabolæ inſcriptis, ab ipſa ſemiparabole quinta; item & tertia figura conſtans ex cylindris hemiſphærio inſcriptis, ab ipſo hemiſphærio ſexta, ſemper in infinitum minus, ac minus deficiendo, deficere tandem poſſint defectu minori quacunque dati quantitate, perpetuò tamen eadem ſeruata ratione, primę ad ſecundam, & tertiæ ad quartam; propterea ex generali huius Methodi Theoremate octauo, nempè ſemiparabole DBC, ad ſecundam ſcilicet parallelogrammum DBLC, erit vt ſexta hęmiſphærium, ad quartam cylindrum. Sed hęmiſphærium ad cylindrum eſt in ratione ſub ſeſquialtera; ergo ſemiparabole ad parallelogrammum DBLC erit in ratione ſubſeſquialtera; ergo, parallelogrammū DBLC ad ſemiparabolen erit in ratione ſeſquialtera. Itaque ſi parallelogrammum DL valet 6, ſemiparabole DBHKC valebit 4; triangulum verò DBC dimidium parallelogrammi valebit 3; ergo ſemiparabole DBHKC ad triangulum DBC eſt in ratione ſeſquitertia; ergo integra parabole ABC ad inſcriptum ſibi triangulum eiuſdem baſeos, ac altitudinis erit in ratione ſeſquitertia.

THEOREMA.

Exemplum CVIII.

Parabole ſeſquitertia eſt trianguli eiuſdem baſeos, ac altitudinis.

Sit ſemiparabole IOLH, cui inſcriptum ſit triangulum ILH. Dico ſemiparabolen ad prædictum triangulum eſſe in ratione ſeſquitertia.



Compleatur rectangulum IHLk: mox protracta HL ad partes L in V, ita vt LV, ſit æqualis Lk. Compleatur quadratum KLVZ, & in LK ſumptis quotcunque punctis æquè inter ſe diſtantibus, per ea ducantur parallelæ alterutri ipſarum HV, IZ, ex quibus per F ducta ſit MX, & per C ducta ſit a b: agatur LZ occurrens FX in Y: fiat LP æqualis LV: agatur PR parallela ipſi Lk, factumque ſit quadratum RPLK: agatur LR occurrens MF in S: factumque ſit triangulum LRZ, tranſiens per coni axem. Intelligantur ductæ rectæ parallelæ LK, per puncta, in quibus ſecantur rectæ RL, LZ, ab ijs quæ fuerunt ductæ parallelæ alterutri ipſarum HV, IZ, ita vt triangulo RLZ, ſit circumſcripta figura conſtans ex tot rectangulis æqualis altitudinis, in quot diuiſum eſt rectangulum RPVZ; atque adeo cono RLZ, circumſcripta ſit figura ſolida conſtans ex tot cylindris æqualis altitudinis FC, in quot eiuſdem altitudinis diuiſus eſt cylindrus RPVZ: & per punctum O, interſectionis perimetri paraboles cum MX, ducta ſit ON, parallela ipſi HI, interſecans a b in g, & ita fiat in reliquis punctis interſectionis perimetri paraboles cum rectis, quæ fuerunt ductæ parallelæ alterutri ipſarum HL, IK: vt hi, kl, &c. vnde trilineo ILK circumſcripta ſit figura, ductis dc, fe, &c. conſtans ex tot rectangulis eiuſdem altitudinis, in quot diuiſum erat rectangulum HK, ſeu quadratum KV.

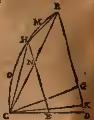
Quoniam igitur, vt eſt, ex natura paraboles, quadratum HI, ad quadratum NO, hoc eſt quadratum KL, ad quadratum LF, hoc eſt quadratum XF, ad quadratum FY, ita HL, ad LN, hoc eſt IK, ad OF, hoc eſt MF, ad FO; vt autem quadratum FX, ad quadratum FY, ſeu quadratum QX ad quadratum SY, hoc eſt circulus, cuius diameter QX, ad circulum, cuius diameter SY, ita cylindrus baſin habens circulum, cuius diameter QX, altitudinem FC, ad cylindrum baſin habentem circulum, cuius diameter SY, eiuſdem altitudinis FC; & vt MF ad FO, ita rectangulū ſub MF, & FC, ad rectangulū ſub OF, & FC; ergo vt rectangulū ſub MF, & FC, ad rectangulum ſub OF, & FC, ita cylindrus baſin habens circulū, cuius diameter QX, altitudinem FC, ad cylindrum habentem baſin circulum, cuius diameter

meter SY, altitudinem FC, & ita ſemper; quare vt rectangulum HIkL, ad figuram circumſcriptam trilineo ILK conſtantem ex rectangulis &c. ita cylindrus RV, ad figuram ex cylindris circumſcriptam cono RLZ; contra, & conuertendo &c. Sunt igitur quatuor quantitates proportionales, nempè vt prima circumſcripta trilineo ILK, ad ſecundam rectangulum HIkL, ita tertia circumſcripta cono RLZ, ad quartam cylindrum PRZV; & quidem prima ſemper minus excedendo quintam, puta trilineum ILk, excedere tandem poteſt exceſſu minori quacunque data quantitate, ita etiam tertia, nempè circumſcripta cono, reſpectu ſextæ ſcilicet coni, perpetuò tamen eadem ſeruata ratione primæ circumſcriptæ trilineo ILK, ad rectangulum HIkL ſecundam; quæ eſt tertiæ circumſcriptę cono RLZ; ad quartam cylindrum RPVZ, propterea erit ex generali Theoremate nono huius Methodi, vt quinta trilineum IOLK, ad ſecundam rectangulum HIkL, ita ſexta conus RLZ ad quartam cylindrum RPVZ, & conuertendo &c. Sed cylindrus RPVZ, triplus eſt coni RLZ; ergo rectangulum HIkL, triplum erit trilinei IOLk. Si igitur rectangulum HIKL, valet 6, trilineum IOLK valebit 2; triangulum autem ILK, ſeu IHL, valebit 3, & ſpatium parabolicum IOLI, valebit vnum; quare ſemiparabole HIOL, valebit 4; ſed triangulum IHL, valebat 3; ergo ſemiparabole HIOL, ſeſquitertia erit trianguli HIL; ergo integra parabole, ſeſquitertia erit trianguli eiuſdem baſeos, ac altitudinis.

Exemplum CIX.

THEOREMA.

Parabolæ ſeſquitertia eſt trianguli eiuſdem baſeos, ac altitudinis.



Quoniam quod de parabole, & de integro circulo dicitur, illud itidem de ſemiparabola, & de ſemicirculo dicendum; propterea eſto ſemiparabole DBC: agatur BC. Dico ſemiparabolen DBHC ad triangulum DBC eſſe in ratione ſeſquitertia. Diuidatur DC bifariam in E: ducatur EH parallela diametro DB: agantur BH, HC. Manifeſtum eſt, ex Archimede de Quadratura Paraboles, triangulum DBC, quadruplum eſſe trianguli BCH; diuidatur DB, in G, ita vt BG tripla ſit ipſius GD: agaturque GC; manifeſtum eſt ex Prima Sexti, triangulum DGC ſubtriplum eſſe trianguli CGB, cuius ſubtriplum quoque remanet triangulum CBH. Diuidatur GD in K, ita vt GD, ad DK ſit in ratione quadrupla; ergo Gk ad kD, erit in ratione tripla; ergo triangulum GCk, ad triangulum CKD, erit in ratione tripla. Inſcribantur portiunculis parabolicis BMH, HOC triangula: manifeſtum eſt, ex Archimede triangulum CBH, ad aggregatum triangulorum BMH, HOC, eſſe in ratione quadrupla; ergo ſi triangulum BCH, valet 4, aggregatum triangulorum BMH, HOC, valebit vnum; ſed ſi triangulum CBH valet 4, triangulum CGB, valebit 12, & triangulum CGK valebit 3; nam CGD ſubtriplum eſt ipſius CGB; vnde valet 4. At CDK valet 1, ob id CKG valet 3 proportionalibus autem proportionalia ſi addantur, proportionalia emergunt; proportionalibus igitur in ratione tripla, triangulis CGB, & CBH additis proportionalibus in eadem ratione, triangulo CkG, & aggregato triangulorum BMH, HOC, fient proportionalia in eadem ratione, nempè triangulum CKB, & triangulum CBH, vnà cum aggregato triangulorum BMH, HOC, & ſic ſemper in infinitum. Duæ igitur ſunt quantitates, nempè triangula CGB, & CBH, quæ ſemper minus deficiendo à duabus alijs quantitatibus, nempè triangulo CDB, & ſegmento parabolico CBHO, perpetuò ſeruata ratione tripla; propterea ex generali huius Methodi Theoremate ſecundo, triangulum CDB ad prædictum ſegmentum parabolicum CBHO, erit in ratione tripla; ergo componendo ſemiparabole CDBHO, ad idem erit in ratione quadrupla; ergo eadem ſemiparabole CDBHO, ad triangulum CDB, erit in ratione ſeſquitertia.

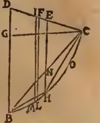
Exemplum CX.

THEOREMA.

Omnis ſemiparaboles centrum grauitatis eſt in ea recta linea quæ diametro æquidiſtans, ita diuidit baſim, vt pars, quæ eſt ad curuam ſit ad reliquam, vt 5 ad 3.

Iiſdem

Iiſdem poſitis, & eodem ſchemmate repetito; taxetur DC, 24, & tam EC, quàm DE, valebit 12: diuidatur DC in F, vt CF ad FD ſit, vt 15, ad 9; diuidatur eadem DC in I, vt CI, ad ID ſit, vt 16, ad 8, hoc eſt in ratione dupla; cùm igitur DF valeat 9, DI, valeat 8, IF valebit 1; cùmque FC valeat 15, FE, valebit 3; ergo FE ad FI, eſt in ratione tripla, hoc eſt in ratione trianguli CGB, ad triangulum CBH, & ſumpta quarta parte trianguli DGC, quadrifariã diuiſa baſi DG, ac īſcriptis triãgulis ī ſegmẽtis DMH, HOC, & ſic in infinitum, atque adeò in ratione trianguli CDB, ad ſegmentum parabolicum CBHO. Quoniam autem ſi diameter DB fuerit perpendicularis horizonti, etiam ei parallela ducta IM, erit horizonti perpendicularis, quæ per centrum grauitatis trianguli CGB tranſibit, cùm CI, ad ID, ſit in ratione dupla, eaque parallela ſit baſi GB. Item EH, cùm biſſecet BC baſin trianguli BCH in N, & tendat ad H verticem ipſius trianguli, tranſibit per centrum grauitatis ipſius, itaque triangulum CGB pendebit ex I, & triangulum CBH pendebit ex E; cùmque reciprocè ſit, vt FE ad FI, propterea æquiponderabunt ex puncto F, non diſſimiliter in infinitum; itaque triangulum CDB pendens ex puncto I, & ſegmentum parabolicum CBH pendens ex puncto E, æquiponderabunt ex puncto F; ergo commune centrum grauitatis erit in recta FL ducta parallela diametro DB, atque adeo perpendicularis horizonti; ergo ſemiparabole æquiponderat ex F, atque adeo eius centrum grauitatis erit in recta FL, alioquin ex F, non æquiponderaret; ſed CF, ad FD, eſt vt 15, ad 9, ſeu vt 5, ad 3; ergo &c.



Ad hanc etiam Methodum ex alijs aliquam reduci, ne dum ex hactenus dictis intelligi poterit, ſed etiam ex infra dicendis, & primò ex ijs, quæ modo ſubijciemus, vbi apertè conſtabit, Theorema demonſtratum à Pappo Alexandrino Libro quarto Collect. Math. Prop. 21, eodem etiam adhibito ſchemate, hac noſtra Methodo oſtendi poſſe, ac eius demonſtrandi rationem ad hanc reduci; immò ſimpliciori modo illud idem abſolui, vbi facilè conſtabit difficultatem eſſe poſitam in indaganda preparatione idonea, quæ huic Methodo inſeruiat, ea ſiquidem comparata ſtatim patet aditus ad ipſam demonſtrationem contexendam. Sit igitur,

THEOREMA.

Exemplum CXI.

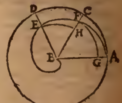
Spatium lineâ ſpirali in prima circulatione deſcripta, & recta linea prima in principio circulationis, contentum, tertia pars eſt circuli primi.

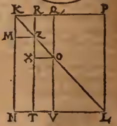
Sit circulus ADC, cuius centrum B, & ſpiralis BE FA, initium; rectaque BA ſemidiameter, & reuolutionis principium.

Exponatur rectangulum KL, & LP, accepta AC, circumferentiæ circuli parte quadam, ſumptaque linea recta KR, quæ ad KP, eam habeat rationem, quam AC circumferentiæ pars ad integram circumferentiam: agatur BC ex puncto R agatur RT parallela ipſi KN, & ipſi kR, parallela MZ, & centro B, interuallo BF, arcus deſcribatur FG. Quoniam itaque eſt vt BA, ad AG, ſeu BC ad CF, ita integra circumferentia ad circumferentiam AC, hoc eſt PK ad KR, & vt PK ad kR, ita LK ad KZ, ſeu TR, ad RZ; ergo vt BC ad CF, ita TR ad RZ, & per conuerſionem rationis, vt CB ad BF, ita TR ad TZ; quare vt quadratum CB ad quadratum BF, ita quadratum TR ad quadratum TZ, ſed vt quadratum CB ad quadratum BF, ita ſector ABC, ad ſectorem FBG, & vt quadratum RT, ad quadratum TZ, ita cylindrus à parallelogrammo KT, circa axem NT factus ad cylindrum à parallelogrammo MT circa eundem axem; ergo vt ſector ABC, ad ſectorem FBG, ita cylindrus à parallelogrammo kT, circa axem NT, ad cylindrum à parallelogrammo MT, circa eundem axem.

Non diſſimiliter ſi circumferentiæ AC fiat æqualis CD circumferentia, & rectæ KR fiet æqualis RQ; erit enim vt ſector DBC ad ſectorem EBH, ita cylindrus à parallelogrammo RV circa axem TV ad cylindrum à parallelogrammo VX, circa eundem axem. Nec diſſimiliter de reliquis: vnde erit vt totus circulus ad omnes figuras ex ſectoribus inſcriptas lineæ ſpirali, ita cylindrus à parallelogrammo NP, circa axem MN ad omnes figuras ex

cylindris ipſi cono, qui fit à triangulo kNL, circa axem NL inſcriptas; Sunt igitur quatuor quantitates proportionales, quarum prima eſt figura conſtans ex ſectoribus ſpatio ſpirali inſcriptis, ſecunda eſt circulus, tertia eſt figura conſtans ex cylindris inſcriptis cono, quarta eſt cylindrus ex rectangulo NkPL reuoluto circa NL; quinta eſt ſpatium ſpirale: ſexta eſt conus; Et quidem prima minus deficiendo à quinta, nempè ſpatio ſpirali, & tertia à ſexta ſcilicet à cono, ſemper in infinitum per continuata incrementa minus deficiendo deficere tandem poſſunt defectu minori quacunque data quantitate, perpetuò ſeruata eadem ratione primæ ad ſecundam, quæ tertiæ ad quartam; propterea ex generali huius Methodi Theoremate 8. quinta ad ſecundam in eadem erit ratione, in qua ſexta ad quartam, ſed ſexta ad quartam, nempè conus ad cylindrum eſt in ratione ſubtripla; ergo quinta ad ſecundam, nempè ſpatium ſpirale ad circulum erit in ratione ſubtripla; ergo circulus ad ſpatium ſpirale erit in ratione tripla.





Hoc idem perfici poteſt per circumſcriptionem figuræ conſtantis ex ſectoribus reſpectu ſpatij ſpiralis, & ex cylindris reſpectu coni.

Exemplum CXII.

THEOREMA.

Spatium linea ſpirali in prima circulatione deſcripta, & recta linea prima in principio circulationis contentum, tertia pars eſt circuli primi.

Sit circulus, cuius centrum A, ſemidiameter AB, & in eo linea ſpiralis AKDFB, atque adeo ſpirale ſpatium comprehenſum hac linea prædicta, & recta AB. Dico huiuſmodi ſpatium ſubtriplum eſſe circuli, cuius centrum A, ſemidiameter AB. Intelligatur diuiſa ſemidiameter AB, vel IA bifariam in N, vel D. Centro A, interuallo AD, vel AN, deſcriptus ſit ſemicirculus DLN.

Quoniam igitur AD eſt ad AI, vt 1, ad 2, erit ſemicirculus DLN, ad ſemicirculum ICB, vt 1, ad 4. Intelligatur autem deſcriptus circulus PQRS, centro quidem A, quem circumſcriptum appello, ita vt excedat circulum ICBH, exceſſu, qui ſit æqualis ſemicirculo ICB. Manifeſtũ eſt, ſi ſemicirculus DLN, valet 1, ſemicirculum ICB, valere 4. Deinde dum ſemicirculus ICB, valet 4, etiam & IHB, valebit 4, quemadmodum exceſſus circuli PQRS, ſupra circulum ICBH, valebit 4; at verò aggregatum ex ſemicirculis DLN, & ICB valebit 5: vnde ad circulum PQRS, 12. aggregatum ex tribus terminis æqualibus, nempè ſemicirculo ICB, IHB, & exceſſu circuli PQRS ſupra circulum ICBH, habebit maiorem rationem, quàm ſubtriplam, Intelligatur iam ducta CH cum IB ad rectos angulos in A, factique ſint ſectores ABC, AFO, ADL, & AkT; ſitque deſcriptus centro A, circulus alter, qui excedat circulum IBCH exceſſu, qui ſit æqualis quadranti ABC. Manifeſtum eſt, ſi AT, vel AK, valet vnum, AL, ſeu AD, valere 2, AO,



ſeu AF, valere 3; quare ſector AKT valebit vnum, ſector ADL valebit 4, & AFO, valebit 9, & AIC valebit 16, quantum etiam valebit quadrans ABC, & quiſque trium reliquorum, itemque exceſſus circuli prædicti ſupra circulum ICBH. Aggregatum autem ex ſectoribus ſe habet, vt 30, & aggregatum ex quatuor quadrantibus vnà cum prædicto exceſſu ſe habent, vt 80; ratio autem 30, ad 80; hoc eſt 3, ad 8 magis accedit ad rationem ſubtriplam, quàm ratio 5, ad 12; decreſcit igitur exceſſus ſupra rationem ſubtriplam. Deinde, cùm facti fuerint quatuor ſectores, fiant octo, & fiat circulus ſuperans circulum ICBH, exceſſu, qui ſit æqualis octauæ parti circuli ICBH. Deinde ſectores fiant ſexdecim, factuſque ſit circulus ſuperans circulum ICBH, exceſſu, qui ſit æqualis decimæ ſextæ parti ipſius circuli ICBH; atque hunc in modum intelligatur procedi in infinitum; ſemper enim illa proportio magis accedet ad ſubtriplam. Quatuor igitur ſunt quantitates, quarum duæ exceduntur, nempè circulus ICBH, & ſpatium ſpirale AKDFBA; duæ autem ſunt excedentes, nempè circulus PQRS reſpectu circuli ICBH, & figura conſtans ex ſectoribus circumſcripta ſpatio ſpirali reſpectu ipſius ſpatij ſpiralis, quæ quidem per continuata decrementa ſemper minus excedendo ſibi reſpondentes quantitates, excedere tandem poſſunt exceſſu minori quacunque data quantitate, ita tamen vt tertia, nempè figura ſectoribus conſtans ſpirali ſpatio circumſcripta ad primam, videlicet ad circulum circumſcriptum ſit in maiori ratione, quàm ſubtripla, ad hanc ſemper magis accedens; ergo quarta, nempè ſpatium ſpirale ADFBA, ad ſecundam, videlicet ad circulum ICBH, erit in hac ipſa ratione ſubtripla.

THEOREMA. Exemplum CXIII.

Linea ſpiralis æqualis eſt ſemicircumferentiæ ſui circuli.

Si namque deſcribatur circulus, cuius radius ſit recta, quæ eſt principium reuolutionis, atque peripheria ipſius diuiſa ſit in partes æquales; à diuiſionum autem punctis, ductis rectis ad centrum occurrentibus perimetro ſpiralis ſpatij, eodem autem centro deſcriptis arcubus reſpondentibus ſingulis radijs ipſius ſpiralis, itaut ſingulis arcubus æqualibus peripheriæ reſpondeant ſinguli arcus circumſtantes lineam ſpiralem, atque vnus æqualium ſit maximus circunſtantium perpetuò decreſcentium, atq; adeò deſinentium in punctum, erunt quidem æquales multitudine vno plures; at verò alij ſpiralem circumſtantes, erunt in ratione radiorum decreſcentium æqualibus defectibus, ergo aggregatum arcuum æqualium, ad aggregatum arcuum circumſtantium ſpiralem, erit in ratione dupla; quod reiteratis diuiſionibus in infinitum cum perpetuò contingat; & circuli circumferentia ad ipſam lineam ſpiralem erit in ratione dupla.

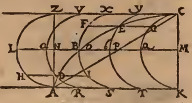
Quod cum aliqui, minus benè intellexerit, crediderunt, non hanc eſſe rationem inter circuli peripheriam, & ſpiralem lineam; verum ſi res attentè perpendatur, Methodo hac noſtra vtentes, comperiemus rem ſic ſe ſe habere.

At verò alia lineæ ſpiralis ſymptomata, alibi noſtra contemplatione perſequemur.

THEOREMA. Exemplum CXIV.

Spatium cycloidale ad circulum ſui genitorem eſt in ratione tripla.

Sit ſemicycloidale ſpatium ABCK, ſitque ſemicirculus genitor CGK, cuius centrum M; compleatur rectangulum AZCK; & ſuper AZ deſcripto ſemicirculo ALZ, per M, ducta ſit ML, parallela alterutri ipſarum Ak, ZC; diuiſaque alterutra earundem AK, ZC, in quotlibuerit partes æquales AR, RS, ST, TK; vel ZV, VX, XY, YC: At verò in recta LM acceptis punctis Q, P, O, ita vt his, tanquàm centris, deſcribantur circuli tangentes rectas AK, ZC, in punctis TY, SX, RV: mox autem per puncta D, & E, accepta in linea cycloidali ABC, æquè remo-



ta à rectis ZC, AK, ducantur rectæ FG, HI, æquè diſtantes ipſis Ak, ZC, agatur AC.

Quoniam igitur figura HZVD, æqualis eſt ipſi ETKG, altera verò aVXB, æqualis ipſi bSTb, & figura FXYE æqualis eſt ipſi DRSI, & ſic in infinitum per vlteriores deſcriptiones circulorum. Sunt igitur duæ quantitates ALZCBA, & ABCGK, à quarum vna tot accipiuntur partes, quot in alia illis æquales ſumuntur, & quidem in infinitum, ita vt aggregatum poſteriorum ſemper aggregato priorum in vtraque ſit maius; atque adeò minus deficiendo per continuata incrementa, tandem deficere poſſint ab ipſis ALZCBA, & ABCGK, defectu minori quacunque data quantitate, perpetuò ſeruatâ æqualitatis ratione; ergo ex generali huius noſtræ Methodi Theoremate 10. figura ALZCBA, æquabitur ipſi ABCGk; quare figura ALZCGK, nempè quadrilaterum mixtilineum, dupla erit figuræ ABCGK. Sed prædictum quadrilaterum mixtilineum æquale eſt rectangulo AZCK; ergo rectangulum AZCK, duplum erit ipſius ABCGK; ſed rectangulum AZCK, duplum eſt trianguli ACK; ergo figura ABCGK æquabitur triangulo ACK. Sed triangulum ACK duplum eſt ſemicirculi CGk; ergo figura ABCGK, dupla erit ſemicirculi CGK; ergo ſpatium ſemicycloidale ABCGK, triplum erit ſemicirculi CGK; ergo integrum ſpatium cycloidale, cuius ſemi baſis AK, altitudo CK, triplum erit circuli ſui genitoris, cuius nimirùm diameter eſt Ck; Omne igitur ſpatium cycloidale triplum erit circuli ſui genitoris. Quod oportebat oſtendere. Oſtendi etiam poteſt virtute Theorematis ſecundi immediatè.

Exemplum CXV.

THEOREMA.

Si ſit portio hyperboles, ellipſeos, vel circuli dimidiâ figurâ non maior, ad diametrum verò conſtituatur triangulum verticem habens in centro figuræ, baſin verò baſi portionis æqualem, & parallelam; at quæ deinceps à vertice ad mediam baſin pertingit, poſſit rectangulum comprehenſum lineis, quæ inter portiones, baſin, & terminos diametri figuræ interjciuntur.

Dico trianguli verticem, atque adeò centrum figuræ eſſe centrum grauitatis magnitudinis compoſitæ ex portione, & prædicto triangulo.

Circumſcribantur parallelogramma portioni, & triangulo, quorum omniū ſit eadem latitudo, & per centrum figuræ, ac trianguli verticē intelligatur ducta recta parallela trianguli, vel portionis baſi (huiuſmodi enim baſes ex hypotheſi ſunt parallelæ) demonſtrabitur enim duorum quorumlibet oppoſitorum parallelogrammorum eſſe in huiuſmodi linea, atque adeò totius magnitudinis, ex duabus figuris vtrinque ordinatè circumſcriptis compoſitæ in prædicta eſſe linea; at verò cùm in diametro ſint centra grauitatis vtriuſque figuræ circumſcriptæ, in eadem quoque erit eiuſdem compoſitæ magnitudinis centrum grauitatis; ergo centrum grauitatis magnitudinis compoſitæ debebit eſſe in puncto, vbi linea prædicta cum diametro ſe interſecat; ſed huiſmodi punctum eſt trianguli vertex, figuræque centrum; ergo centrum grauitatis magnitudinis compoſitæ erit, vbi trianguli vertex, centrumque figuræ.

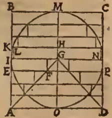
Quoniam autem quantumcunque diminuantur latitudines parallelogrammorum, atque adeò figura circumſcripta ſemper minus, ac minus excedendo portionem, & triangulum, cuius vertex eſt figuræ centrum, excedere poſſunt exceſſu minori quacunque datâ quantitate, eodem perpetuò grauitatis centro retento, hoc eſt perpetuò ſeruatâ eadem ratione circumſcriptæ ad circumſcriptam, quæ eſt reciprocè diſtantiæ centri grauitatis vnius à centro figuræ, ad diſtantiam alterius centri grauitatis ab eodem centro figuræ; ergo ex generali huius Methodi Theoremate 2., triangulum ad portionem erit reciprocè, vt diſtantia centri grauitatis portionis à centro figuræ, ad diſtantiam centri grauitatis trianguli ab eodem centro figuræ; ergo ex ipſo centro figuræ triangulum, & portio æquiponderabunt; ergo figuræ centrum, vbi vertex trianguli, erit centrum grauitatis magnitudinis compoſitæ ex portione, & prædicto triangulo.

Exemplum CXVI.

THEOREMA.

Sphæra ad conum, cuius altitudo eſt ſemidiameter, baſis verò circulus maximus eiuſdem ſphæræ, eſt in ratione quadrupla.

Sit



Sit circulus, cuius centrum G, cui circumſcriptum ſit quadratum ABCD: actiſque rectis AG, DG, reuoluatur figura circa axem MO, vt à quadrato procreetur cylindrus, à circulo, ſphæra, à triangulo AGD, conus. Dico ſphæram quadruplam eſſe coni prædicti.

Inſcribatur hemiſphærio figura conſtans cylindris æquè altis, diuiſaque OG in tot partes, in quot GM, & per puncta ſectionum tranſeant plana ad axem erecta, ita vt in ſolido à triangulo AIG, reuoluto, ſit inſcripta figura conſtans tubis cylindricis æquè altis, quorum vnus eſto, cuius ſectio ſit rectangulum IF.

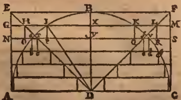
Quoniam igitur cylindrus LN æqualis eſt tubo cylindrico IF, & ita deinceps de alijs hemiſphærij cylindris relatis ad cylindros, quibus conſtat ſolidum à triangulo AGI reuoluto, atque figura hemiſphærio inſcripta vlteriori diuiſione per continuata incrementa, & figura cylindris conſtans inſcripta ſolido à triangulo AIG reuoluto, per continuata itidem incrementa, ab hemiſphærio, & à ſolido ex reuolutione trianguli AIG, tandem deficere poſſunt defectu minori quacunque datâ quantitate, ſemper eandem æqualitatis rationem ſeruantes; propterea ex generali Theoremate noſtræ Methodi ſecundo, hemiſphærium erit æquale ſolido à triangulo AIG reuoluto; ſed huiuſmodi ſolidum duplum eſt coni, cuius triangulum per axem eſt AGD; ergo hemiſphærium duplum erit prædicti coni; ergo ſphæra erit quadrupla eiuſdem coni.

Lemma.

Quod autem cylindrus LN ſit æqualis tubo cylindrico IF, ſic oſtendo. *Eſt enim cylindrus LN, ad tubum IF, vt quadratum LH, ad rectangulum EFP; namque cylindrus, & tubus cylindricus ſunt eiuſdẽ altitudinis; ſed quadratum LH, eſt æquale rectãgulo MHO, & huic eſt æquale rectangulum EFP, cum EF, ſit æqualis AE, ſeu BK, ſeu HM, & reliqua HO, æqualis FP, ob æqualitatem inter EP, & MO; ergo & cylindrus LN, æquabitur tubo IF.* Superius tamen Theorema aliter demonſtrabitur, ſi primùm eadem Methodo oſtenderimus illud, nimirùm.

THEOREMA. Exemplum CXVII.

Si ſuper hemiſphærij baſi conſtitutus fuerit cylindrus eiuſdem cum hemiſphærio altitudinis. Dico exceſſum huius cylindri ſupra hemiſphærium æqualem eſſe cono eiuſdem baſeos, ac altitudinis cum ipſo hemiſphærio.



Eſto hemiſphærium ABC, cuius centrum D: cylindrus autem ſit huiuſmodi hemiſphærio circumſcriptus, cuius rectangulum per axem ſit AEFC. Dico exceſſum huius cylindri ſupra hemiſphærium æqualem eſſe cono eiuſdem baſeos, ac altitudinis cum ipſo hemiſphærio.

Ex centro D, ductis DE, DF, fiat triangulum EDF, repræſentans illud, quod eſt communis ſectio plani ſecantis conum per axem; ductaque ſit DB perpendicularis ipſi EF, quæ intelligatur diuiſa in partes æquales BX, Xy, &c. & per puncta diuiſionum intelligantur ductæ GM, NS &c. æquidiſtantes ipſi EF, vel AC, occurrentes rectis DE, DF, in punctis H, T, &c., & L, f, &c., & occurrentes peripheriæ ABC in punctis I, a, &c. inſuper KV &c. Et ex hiſce punctis HO, Tc, &c. Item LR, fe, &c. parallelæ ipſi BD, quemadmodum etiam ex punctis I, a, &c, ductæ ſint IP, a b &c. Inſuper ex punctis K, V &c. ductæ ſint kQ, Vd &c. Manifeſtum eſt figuris AEB, BFC, futuras eſſe circumſcriptas figuras ex rectangulis, quemadmodum triangulo EDF, circumſcriptam eſſe figuram conſtantem ex rectangulis. Si igitur concipiatur reuolui circa axem BD rectangu-

ctangulum AEFC; manifeſtum eſt, ex reuolutione huiuſmodi rectanguli fieri cylindrum; ex reuolutione ſemicirculi ABC, fieri hemiſphærium; & ex reuolutione omnium illorum rectangulorum, fieri cylindros.

Quoniam igitur circulus, cuius radius IX, vnà cum circulo, cuius radius HX, æqualis eſt circulo, cuius radius GX, vt mox demonſtrabo; ergo cylindrus habens baſin circulum, cuius radius IX, vnà cum cylindro habente baſin circulum, cuius radius HX, æquabitur cylindro habente baſin circulum, cuius radius GX; ergo cylindrus habens baſin circulum, cuius radius HX, æquabitur cylindro habente baſin circulum, cuius radius GX, minus cylindro habente baſin circulum, cuius radius IX. Sed cylindrus habens baſin circulum, cuius radius GX, minus cylindro habente baſin circulum, cuius radius IX, æqualis eſt annulo, cuius communis ſectio, à plano per centrum normaliter cadente, ſunt rectangula NGIP, QKMS; ergo cylindrus habens baſin circulum, cuius radius HX, æquabitur prædicto annulo, & ſic de omnibus alijs. Vnde cylindrus HORL, æquabitur annulo GP, KS &c. Itaque ſolida figura circumſcripta cylindro-cauo-ſphærico, conſtans ex cylindris æquè altis cum ijs, quibus conſtat figura circumſcripta cono, huic æquabitur figuræ. Sunt igitur duæ quantitates, quarum vna eſt figura ſolida circumſcripta cylindro-cauo-ſphærico, altera circumſcripta cono, quæ per continuata decrementa ſemper minus excedendo, excedere poſſunt exceſſu minori quacunque data quantitate, perpetuò ſeruatá æqualitatis ratione. Ergo ex generali huius noſtræ Methodi Theoremate 4., cylindro-cauo-ſphæricus, hoc eſt exceſſus cylindri eiuſdem baſeos, & altitudinis cum hemiſphærio ſupra ipſum hemiſphærium, æquabitur cono, cuius triangulum per axem eſt EDF: ſed huiuſmodi conus eiuſdem eſt altitudinis, & baſeos cum hemiſphærio; ergo exceſſus prædicti cylindri ſupra hemiſphærium æquabitur prædicto cono.

Lemma.

Quod autem circulus, cuius radius IX, vnà cum circulo, cuius radius HX, æqualis ſit circulo, cuius radius GX, ſic oſtendo. Intelligatur ducta DI.

Quoniam igitur EB, HX, ſunt parallelæ; ergo vt EB ad BD, ita HX, ad XD: ſed EB æqualis eſt BD; ergo HX æquabitur XD; ergo quadratum HX, æquabitur quadrato XD. Sed quadratum ID, æquale eſt quadratis IX, XD; ergo quadratum ID æquabitur quadratis HX, IX; ſed ID æqualis eſt AD, ſeu GX, atque adeò quadratum ID æquale erit quadrato GX; ergo quadratum GX æquabitur quadratis HX, IX. Sunt autem circuli, vt quadrata diametrorum, ſiue ſemidiametrorum; ergo circulus, cuius radius GX, æquabitur circulis, quorum vnus ſit radio HX, alter autem IX; & ſic de alijs omnibus &c. Hinc per modum Corollarij infertur.

Exemplum CXVIII.

THEOREMA.

Sphæra ad conum, cuius altitudo eſt ſemidiameter, baſis verò circulus maximus eiuſdem ſphæræ eſt in ratione quadrupla.

Ex demonſtratis conſtat, quod ſuperiùs oſtendendum ſuſcepimus, nempè ſphæram quadruplam eſſe coni, cuius altitudo eſt ſemidiameter ſphæræ, baſis autem circulus maximus eiuſdem; ſiquidem ſi cylindrus valet tria, conus valet vnum, ergo exceſſus cylindri ſupra hemiſphærium eiuſdem baſeos, ac altitudinis, ſeu ſupra hemiſphærium, cui cylindrus eſt circumſcriptus, valebit vnum, quare hemiſphærium valebit duo; ergo hemiſphærium erit duplum prædicti coni eiuſdem baſeos, ac altitudinis cum hemiſphærio; quare integra ſphæra, erit eiuſdem coni quadrupla. Item.

Exemplum CXIX.

THEOREMA.

Sphæra æqualis eſt cono, cuius baſis eſt æqualis ſuperficiei ſphæræ, altitudo autem radius eiuſdem.

Conus

Coni enim eiuſdem altitudinis ſunt inter ſe, vt baſes, ergoconus cuius baſis eſt æqualis ſuperficiei ſphæricæ, altitudo radius eiuſdem, ad conum cuius baſis eſt circulus maximus ſphæræ; altitudo radius eiuſdem, erit quadruplus, ſed ſphæra eſt etiam quadrupla ad huiuſmodi conum, cuius baſis eſt circulus maximus altitudo radius ſphæræ, ergo &c. Ex dictis etiam, & illud,

THEOREMA.

Exemplum CXX.

Omnis ſector ſphæræ æqualis eſt cono, cuius altitudo eſt radius ſphæræ: baſis autem æqualis ſectoris ſphericæ ſuperficiei.

Conus enim, cuius altitudo eſt ſemidiameter ſphæræ ad ipſam ſphæram, eſt vt baſis, ad ſphæræ ſuperficiem, ſed baſis coni, eadem eſt, ac ſphærica ſuperficies ipſius ſectoris; ergo conus, cuius altitudo eſt radius ſphæræ ad ipſam ſphæram eſt, vt ſphærica ſuperficies ſectoris ad ſphæræ ſuperficiem; ſed vt ſphærica ſuperficies ſectoris ad ſphæræ ſuperficiem, ita ſector ad ſphæram, ergo conus, cuius altitudo eſt radius ſphæræ, ad ipſam ſphæram eſt, vt ſector ad eandem ſphæram; ergo conus, cuius altitudo eſt radius ſphæræ, baſis autem ſphærica ſuperficies ſectoris, æqualis eſt ſectori eiuſdem ſphæræ &c.

Ex hactenus quoque demonſtratis conſtabit facilè, propoſitio quæcunque alia de ſphæra, & Cylindro; de quibus ſumma cum Laude Archimedes diſſeruit.

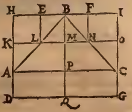
THEOREMA.

Exemplum CXXI.

Cylindrus triplus eſt coni, eiuſdem altitudinis, ac baſeos.

Si quis aſſumat, quod iam demonſtratum eſt, nimirum priſma, triplum eſſe pyramidis eiuſdem baſeos, ac altitudinis; ſtatim hoc noſtra methodo conſtabit propoſitum; ſi namque nos intelligimus circulo, qui eſt coni baſis circumſcriptum polygonum, regulare, ac ordinatum, & ſuper illum erectam priſma, eiuſdem altitudinis cum cono, atq; cylindro itemque pyramis circumſcripta cono; priſma, & pyramis per continuata quidem decrementa, ſemper minus excedendo, illam quidem cylindrum, hæc autem conum, tandem excedere poterunt exceſſu minori quacunque data quantitate, ſemper ſeruata eadem ratione tripla: ergo ex generali huius noſtræ Methodi Theoremate quarto; cylindrus ad conum erit in ratione tripla.

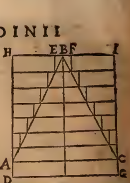
Quod ſi quis velit non vti eo Theoremate tanquam demonſtrato, ſed potius generali ratione Theorema contexere complectens, ne dum cylindrum, & conum, ſed etiam priſma, & pyramidem &c. procedet ad eum, qui ſequitur modum.



Præmittendum eſt, quod ſi fuerit parallelogrammum atque triangulum eiuſdem altitudinis, ac baſeos, vt parallelogrammum AHIC, triangulum verò ABC; fueritque parallelogrammum ipſum diuiſum in quotcunque parallelogramma æquè alta lineis parallelis alterutri ipſarum AI, AC: parallelogrammo autem prædicto AHIC, ſit alterum additum DACG, vni ipſorum æqualium, æquale, nimirum diuiſa BP bifariam in K, & per M ducta KO parallela alterutri AC, HI, & protracta ad Q vt PQ ſit æqualis MP, & per Q ducta DG parallela ipſi AC &c.

At verò ipſi triangulo ABC circumſcripta ſit figura conſtans ex parallelogrammis, cuiuſmodi eſt AE, FC, partibus iam dictis æqualibus rurſus biſſectis, ſemper ſic procedendo in infinitum, augebitur multitudo parallelogrammorum, in quæ diuiſum erat parallelogrammum AHIC, item & eorum quibus conſtat figura circumſcripta triangulo; interim tamen hæc minuetur, quemadmodum parallelogrammum DI in omni biſſectione, abiecto dimidio ipſius parallelogrammi DAGC, ita vt parallelogrammum DHIG, & circumſcripta AEFC triangulo ABC per continuata decrementa ſemper minus excedendo parallelogrammum AHIC, & triangulum ABC, tandem excedere poſſint exceſſu minori

quacun-



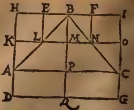
quacunque datâ quantitate, perpetuò tamen ſeruatâ eadem ratione, quæ eſt parallelogrammi DHIG, nempè dupla ad circumſcriptam AEFC: vnde tandem concluditur parallelogrammum AHIC duplũ eſſe trianguli ABC. Vbi obſerua ſeriem parallelogrammorum æqualium, vno excedere, ſeriem eorum, quæ æqualibus exceſſibus augentur; illud autem reſpondet O, vel indiuiſibili, vnde ſeries creſcentium æqualibus exceſſibus initium ducit.

Quæ vt melius intelligantur ſit parallelogrammum AHIC in hoc tertio ſchemate, itemque triangulum ABC; diuiſaque BO biſariam in Q per Q ducta ſit ſi, parallela ipſi AC, protracta BO ad M, vt OM ſit æqualis OQ: per M ducta ſit DG parallela ipſi AC; protractiſque HA, IC, factumque erit parallelogrammũ DC, additum parallelogrammo AI: per T, & Y, verſus rectam HI ductæ ſint rectæ Tk, yl, parallelæ ipſi BO, & ſic circumſcripta erit triangulo ABC, figura conſtans ex parallelogrammis, vt ſuprà. Deinde diuiſa BQ biſariam in R, & QO biſariam in P, & per R, ducta ſit gh, occurrens BA in V, & BC in X; ductis iam dictis ex T, & Y in b, c; mox verò diuiſa QO in P biſariam, & per P ducta eK quæ occurrat AB in S, CB in Z: ex S & Z ductæ ſint S&, Zd parallelæ ipſi BO, & ſic triangulo ABC erit circumſcripta figura AEFC ex parallelogrammis conſtans, vtque OQ diuiſa fuit biſariam in P, & QB, in R, ita MO diuidatur biſariam in N, & per N agatur kL parallela ipſi AC, eritque diuiſum parallelogrammum DC, vtque parallelogrammum DI, erat duplum prioris figuræ circumſcriptæ, ita nunc parallelogrammum KI duplum eſt figuræ circumſcriptæ AEFC.



Contingit autem hoc, vt ſuperius quoque innuimus, quando fuerit ſeries quantitatum iuxtà naturalem numerorum conſecutionem continuè creſcentium à puncto. vel o, inchoatarum, ſiue horum multitudo finita, vel infinita fuerit, hoc eſt ſiue abitura ſit, ſiue abierit in infinitum, At ſi fuerit ſeries quantitatum in duplicata ratione terminorum iuxtà naturalem numerorum conſecutionem, continuè quidem creſcentium, à puncto ſeu o, inchoatorum, infinita tamen, ſeu pro vt abijt in infinitum erit ad ſeriem totidem maximo æqualium in ratione ſubtripla, non tamen ſi multitudo quantitatum finita fuerit.

Vnde ſeries circulorum, quorum diametri ſunt VX, TY, SZ, AC, Arithmeticè proportionales, initio ducto à puncto, ſeu o, non eſt ſubtripla ad totidem circulos maximo, cuius diameter AC, æquales, nempè circuli, quorum diametri ſunt gh, fi, eK, AG, kL, neque ſeries cylindrorum, e quibus figura circumſcripta cono ABC conſtat, eſt in ſubtripla ratione ad cylindrum DI; nam primo ſchemate repetito ſit parallelogrammũ AHIC eiuſdem altitudinis ac baſeos cum illo iiſdéque peractis. Manifeſtũ eſt, ſeriem quadratorũ acerſito puncto B; ipſarũ LN, AC non propterea ſubtriplam eſſe quadratorum ipſarum AC, kO, HI, & quidem quadratorum illorum ſeries ad ſeriem ipſorum maximo æqualium eſt in maiori ratione, quàm ſubtripla, hinc & ſeries cylindrorum æqualibus exceſſibus ſe excedentium ad ſeriem cylindrorũ maximo æqualium eſt in maiori ratione quàm ſubtripla. Sit igitur prima quantitas cylindrus DI: ſecũda cylindrus AI: tertia figura cylindris conſtans, cono ABC circumſcripta quarta idem conus. Cùm itaque prima, cylindrus DI per cõtinuata decremẽta ſemper minus excedendo ſecundam cylindrũ AI; tertia figura cylindris conſtans circumſcripta cono ABC minus excedendo conum ABC quartam, excedere tandem poſſint exceſſu minori quacunque data quantitate, ita tamen, vt figura cylindris conſtans circumſcripta cono ad primam, ſcilicet



ad cy-

ad cylindrum DI, ſit in ratione maiori, quàm ſubtripla, per continuata decrementa ſemper magis ad illam accedens; propterea ex generali Theoremate huius Methodi XI, conus ABC, ad cylindrum AI, erit in ratione ſubtripla.

Quæ autem de cono, & cylindro, eadem de pyramide, & priſmate intelligenda ſunt.

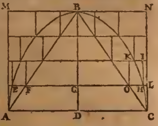
THEOREMA.

Exemplum CXXII.

Omne conoides parabolicum dimidium eſt cylindri eiuſdem baſeos, ac altitudinis.

Sit conoides parabolicum ABC, cylindrus verò AMNC. Dico conoides parabolicum dimidium eſſe ipſius cylindri.

Secetur BD, axis in quotcunque partes æquales, quarum infima ſit ad baſin, GD; factaque ſit figura ex cylindris æqualium altitudinum circumſcripta prædicto conoidi; cum autem ijs planis parallelis tranſeuntibus per prædictas ſectiones axeos BD, ſecetur conoides ABC, quibus ſecatur triangulum per axem ABC; ſectiones erunt quidem parallelæ; ſit autem circumſcripta figura triangulo ABC, conſtans ex parallelogrammis æqualium altitudinum. At verò cylindrorum, qui ſunt circa conoides, & parallelogrammorum, multitudine æqualium circa triangulũ ABC, cylindri quidem duo proximi baſi AC, ſint AL, EI; at verò parallelogramma totidem illis reſpondentia inter eadem parallela plana, ſint AL, FK. Quoniam itaque ex natura paraboles, vt BG, ad BD, ita quadratum EG, ad quadratum AD, & ita quadratum EH ad quadratum AC, ſeu circulus, cuius diameter EH, ad circulum, cuius diameter AC, ſeu cylindrus EI, ad



cylindrum AL, ob æquales altitudines; ſed vt BG ad BD, ita FG ad AD, ſeu FO, ad AC, ſeu parallelogrammum FK, ad parallelogrammum AL; ergo, vt parallelogrammum FK, ad parallelogrammum AL, ita cylindrus EI, ad cylindrum AL. Non diſſimiliter de reliquis parallelogrammis, quæ ſunt circa triangulum ABC, oſtendemus, quod proportionalia ſint cylindris reliquis, qui ſunt circa conoides ABC, bina ſumpta; ac propterea componendo erit, vt figura circumſcripta triangulo conſtans ex parallelogrammis, ad parallelogrammum AL, ita figura circumſcripta conoidi, ad cylindrum AL; ſed vt parallelogrammum AL, ad parallelogrammum AN, ita cylindrus AL, ad cylindrum AN; ergo ex æquali vt figura conſtans ex parallelogrammis circumſcripta triangulo ABC, ad parallelogrammum AN, ita figura conſtans ex cylindris, ad cylindrum AN, & ſic ſemper in infinitum. Quatuor igitur ſunt quantitates, quarum prima eſt figura circumſcripta triangulo ABC; ſecunda, eſt parallelogrammum AN; tertia eſt figura circumſcripta conoidi ABC; quarta verò cylindrus AN, quæ ſic ſe habent, vt per continuata decrementa, prima minus excedendo quintam, triangulum ſcilicet ABC, & tertia, figura circumſcripta conoidi, per continuata decrementa ſemper minus excedendo ſextam, conoidem ABC, tandem excedere poſſunt exceſſu minori quacunque datâ quantitate, perpetuò ſeruata ratione primæ ad ſecundam, nempè circumſcriptæ triangulo ABC, ad parallelogrammũ AN, & tertiæ ad quartam, nẽpè circumſcriptæ conoidi ABC, ad cylindrum AN; propterea ex generali Theoremate nono huius Methodi, vt eſt quinta ad ſecundam, nempè triangulum ABC, ad parallelogrammũ AN, ita erit ſexta ad quartam, ſcilicet conoides ABC, ad cylindrum AN; ſed triangulum ABC, dimidium eſt parallelogrammi AN; ergo conoides ABC, dimidium erit cylindri AN.

Sed hoc idem oſtendi poſſet alia ratione. Rectarum enim AC, EH &c. ordinatim applicatarum in parabola quadrata ſe æqualibus exceſſibus ſuperant; atque adeò circuli, quorum diametri ſunt rectæ prædictæ; at verò circuli, quorum diametri ſunt rectæ æquales maximæ omnium ordinatim applicatarum, qui quidem ſunt communes ſectiones planorum cum ſuperficie cylindri AN, ſunt inter ſe æquales, horumque multitudo vno maior eſt multitudine illorum; propterea aggregatum omnium illorum circulorum ſubduplum erit aggregati omnium iſtorum, ſed aggregatum omnium illorum eſt conoides parabolicum ABC, aggregatum omnium iſtorum eſt cylindrus AN; ergo conoides parabolicum ABC, ſubduplum erit cylindri AN.

Hinc autem infertur per modum Corollarij,

Exemplum CXXIII.

THEOREMA.

Conoides parabolicum ad conum eiuſdem baſeos, ac altitudinis eſt in ratione ſeſquialtera.

Cylindrus enim triplus eſt coni, itaque ſi cylindrus valet 3. conoides parabolicum valebit $1\frac{1}{2}$; at verò conus valebit 1; eſt autem $1\frac{1}{2}$, ad 1. in ratione ſeſquialtera,

Methodus per Indiuiſibilia procedens iterum perpenditur.

Plerũq; expedit Methodũ Indiuiſibiliũ accerſire.

QVoniam autem haud rarò contingit, vt, vel circumſcriptioni, inſcriptioniue, quibus in ea, de qua loquimur, Methodo indigemus, nullus ferè ſit locus, vel quia non expediat huiuſmodi viam calcare; neceſſè propterea eſt, tanquàm ἐπίταγμα, alteram nimirùm per Indiuiſibilia procedentem accerſire, paulò tamen diuerſis principijs, quàm à Caualerio ſtabilitam,

Vſui Indiuiſibiliũ non expoſcit continui compoſitionem ex Indiuiſibilibus, tãquàm ex partibus.

Non eſt autem, cur hic Indiuiſibilium oſoribus difficultates diluendo, ſatisfacere ſtudeamus, cum illæ non multum negotij faceſſant, præſertim ijs, quos opportunus Indiuiſibilium vſus non præterit; hic enim haud continui ex Indiuiſibilibus, velut ex partibus, compoſitionem expoſcit. Maximè quidem in philoſophico puluere exercitati, hanc continui ſtructuram deteſtantur, exiſtimantes illud diuiſibile eſſe in ſemper diuiſibilia, Geometricè tamen; nam Phyſicè loquendo, non inconſultò ad minima quædam deueniendum arbitrantur, quibus minora non admittit Natura, vtpotè quæ rebus magnitudinis limites præfiniuit; tamen non propterea tamen Indiuiſibilia, quibus, vel continui partes copulentur, vel continuum ipſum finiatur, inficiari licet,

Phyſicè in continuo ad minima quædã deueniẽdũ eſt.

Nihil refert ad cõcludẽda figurarum æqualitatem, quòd lineæ actu ſint diſtinctæ in conti nuo &c.

Hæc tamen haud multum habent momenti, cùm adhuc in Geometricis Indiuiſibilium vſus locum obtineat, Nihil enim refert, exempli gratia, ad planarum figurarum concludendam æqualitatem, quòd lineæ actu ſint realiter diſtinctæ in ipſis, dummodò nobis imaginari datum ſit, omnes extenſiones vnius omnibus extenſionibus alterius æquales eſſe, extenſionis nomine intelligendo longitudinem abſque latitudine,

THEOREMA I.

Figurarum omnia Indiuiſibilia accepta, vt ſupra, ſunt magnitudines inter ſe rationem habentes.

Vel enim omnia Indiuiſibilia vnius figuræ ſunt æqualia omnibus Indiuiſibilibus alteriùs, vel partim æqualia, partim maiora, partim minora. Vtcunque res ſe habeat, manifeſtum eſt, vnius figuræ Indiuiſibilia ad alterius Indiuiſibilia rationem habere; nam λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν; *rationem habere inter ſe magnitudines dicuntur, quæ poſſunt multiplicata ſe ſe mutuò ſuperare.*

Continuũ ex ſemper diuiſibilibus, tãquã ex partibus, cõponitur: ex Indiuiſibilibus, tanquàm ex earundẽ nexibus.

At ſic ſe habent Indiuiſibilia vnius figuræ comparata cum homogeneis Indiuiſibilibus alterius; quamobrem neceſsè eſt, figurarum omnia quidem Indiuiſibilia rationem habere inter ſe, diſtributiuè accepta, vnde & collectiuè. Vtcunque igitur accipiantur figurarum Indiuiſibilia, ſunt magnitudines inter ſe rationem habentes,

At in dicendorum gratiam.

Partes dãtur actu in continuo realiter inter ſe diſtinctæ.

Supponendum primò, quod ſuperiùs etiam tetigimus, quodq; apud Philoſophos melioris notæ in confeſſo eſt, continuum nimirùm ex ſemper diuiſibilibus, tanquàm ex partibus, componi; at ex Indiuiſibilibus, veluti ex earundem nexibus, ac etiam terminis, conſurgit.

Multitudo ipſarum dicẽda eſt infinita in potentia, nõ in actu.

Supponendum ſecundò, in ipſo continuo dari actu partes realiter inter ſe diſtinctas, earundemque multitudinem eſſe dicendam infinitam in potentia, non in actu; propterea quòd dicere de illa tantummodò licet, quod non ſit tanta, quin maior eſſe poſſit, neque tot ſint partes, quin plures; & quidem ex ipſarum partium natura, veluti continui rationem obtinentium, quæ propterea ſemper diuiſibiles exiſtunt, ac ob id earum multitudo per vlteriorem diuiſionem capax eſt incrementi; maxima tamen dici nequit; quoniam hoc ipſo, quòd mul-

Multitudo partiũ in continuo nequit dici maxima.

multitudinem partium continui dico, multitudinem dico, cui per vlteriorem diuiſionem partium ſemper diuiſibilium incrementum fieri poteſt.

Supponendum tertiò, multitudinem Indiuiſibilium, ſcilicet punctorum in linea, linearum in ſuperficie, ſuperficierum in corpore, conditionem eandem cum eius partibus ſortiri, quæ, ſi fuerint potentia infinitæ, ſic etiam & Indiuiſibilia infinita dicenda ſunt.

Multitudo Indiuiſibilium in cõtinuo eãdem ſortitur conditionem cum eius partibus.

Supponendum quartò, non repugnare dari maius infinito in potentia, quod infinito in actu repugnat; quamobrem, exempli gratia, in linea palmari eſt multitudo infinita punctorum in potentia, quemadmodum in linea tripalmari, ſed in hac, infinita multitudo maior eſt infinita multitudine, quæ in illa.

Non repugnat dari infinitũ in potentia maius, & minus, quod tamen repugnat infinito in actu.

Supponendum quintò, eandem eſſe rationem totius quantitatis ad totam, quæ eſt multitudinis partium proportionalium ad multitudinem partium proportionalium, & quæ eſt multitudinis Indiuiſibilium ad multitudinem Indiuiſibilium.

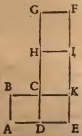
Quæ eſt ratio totius quantitatis ad totã, ea eſt multitudinis partiũ proportionaliũ ad multitudinem partium proportionaliũ &c.

Supponendum tandem, mobile moueri motu æquabili ſuper magnitudines ea lege, vt tempus ad tempus ſit, quemadmodum ſpatium ad ſpatium; & partes proportionales, ac Indiuiſibilia temporis, ad proportionales partes, ac Indiuiſibilia temporis; & demùm partes proportionales, ac Indiuiſibilia ſpatij, ad partes proportionales, ac Indiuiſibilia ſpatij. His præhabitis, eſto.

Mobile, dum mouetur motu æquabili, vt eſt tempus ad tempus, ita ſpatiũ ad ſpatiũ, &c.

THEOREMA II.

Figuræ habent inter ſe rationem eandem, quam earum omnia Indiuiſibilia iuxtà quamuis Regulam aſſumpta.



Sit rectangulum vnum ABCD, aliud autem DGFE, quorum baſes AD, DE ſint æquales, & vtrunque ſit poſitum ad rectos angulos ſuper planum, cui intelligendum eſt congruere planum mobile, quod perpetuò ſeruato paralleliſmo moueatur motu æquabili, ſemper faciens angulos rectos cum planis BD, DF. Manifeſtum eſt in ſingulis temporis inſtantibus, quibus reſpondent motus mutata eſſe, contingere plani mobilis communes ſectiones cum planis BD, DF, quæ lineæ ſunt rectæ, vt oſtenditur 11. Elementorum Propoſitione 3.

Quoniam autem eſt, vt tempus ad tempus in motu æquabili, ita ſpatium peractum ad ſpatium peractum; ſed vt tempus ad tempus, ita multitudo partium proportionalium ad multitudinem partium proportionalium, & ita multitudo inſtantium ad multitudinem inſtantium temporis; ergo ſpatium peractum ad ſpatium peractum à mobili motu æquabili erit, vt multitudo inſtantium ad multitudinem inſtantium; ſed vt multitudo inſtantium ad multitudinem inſtantium, ita multitudo linearum poſſibilium in ſpatio, ad multitudinem linearum poſſibilium in alio ſpatio, ſumptis æqualibus baſibus pro Regulis; ergo ſpatium DK, ad ſpatium AC, erit, vt multitudo linearum poſſibilium in ſpatio AC, iuxtà Regulas DE, & AD; ſed multitudo linearum poſſibilium in ſpatio DK, dicitur à nobis omnes lineæ ipſius Dk, & multitudo linearum poſſibilium in ſpatio AC, dicitur à nobis omnes lineæ ipſius AC; ergo vt ſunt omnes lineæ ipſius DK, ad omnes lineas ipſius AC, ita eſt ſpatium DK, ad ſpatium AC.

Si igitur tempus, quo mobile percurrit Dk, æquale fuerit tempori, quo mobile percurrit AC, & omnes lineæ ipſius Dk, æquales erunt omnibus lineis ipſius AC, in ratione diſcreti,

At etiam in ratione continui, quoniam quælibet ipſarum in DK, æqualis eſt ipſi DE, & quælibet in AC, æqualis eſt ipſi AD; atque adeò DE; ſupponuntur enim AD, DE baſes æquales.

Quòd ſi planum mobile proſequitur motum, atque adeò in maiori tempore conficiat ſpatium maius, vt exempli gratia DHIE, vel DGFE, erit quoque, vt tempus ad tempus, atque adeò vt partes proportionales temporis, ad partes proportionales temporis, & vt multitudo inſtantium ad multitudinem inſtantium, atque demum vt multitudo linearum poſſibilium in DHIE, ſeu DGFE, ad multitudinem linearum poſſibilium in ABCD, iuxtà Regulas DE, AD, ſeu vt omnes lineæ in DI, vel DF, ad omnes lineas in AC, ita ſpatium

DI, vel DF ad ſpatium AC, cùm ſingulæ lineæ, quæ in DF, æquales ſint ipſi DE, ſeu AD, cui ſingulæ, quæ in AC ſunt æquales.

Quòd ſi ſpatia non fuerint rectangula, nihil refert; nam ad rectangula reducuntur per applicationem ad latus; ſi namque fuerit ſpatium æquale rectangulo DK, ipſum tamen rectangulum non extiterit, intelligatur facta applicatio ad latus DE, ortiua magnitudo proueniet DC, tuncque diſcurrendum eſt, vt ſupra. Quæ verò diximus de planis, quibus deſeruiunt lineæ, intelligenda volumus de ſolidis, quibus deſeruiunt ſuperficies. Atq; in gratiam eorum, quibus demonſtratio ſuperior, vtpotè Phyſico-Geometrica minus probari poſſet, non pigebit Theorema idem aliter oſtendere.

Aliter idem Theorema demonſtratur.

Aduerte ſecundum, & quartum terminū eiuſdē eſſe natura cū primo, & tertio.

Si figuræ conſtituant primum, & tertium terminum, & omnia Indiuiſibilia primi conſtituant ſecundum, omnia Indiuiſibilia tertij conſtituant quartum; ſumptis æquè multiplicibus primi, & tertij termini, item ſecundi, & quarti, comperiemus, ſi multiplex primi ſuperauerit multiplicem ſecundi, etiam multiplicem tertij debere ſuperare multiplicem quarti, & ſi multiplex primi fuerit æqualis multiplici ſecundi, etiam multiplex tertij debebit eſſe æqualis multiplici quarti, & ſi multiplex primi fuerit minor multiplici ſecundi, etiam multiplex tertij debebit eſſe minor multiplici quarti; vnà igitur excedunt, vel vnà æqualia ſunt, vel vnà deficiunt; quamobrem erit, vt primus ad ſecundum, ita tertius ad quartum.

Per Methodos Indiuiſibiliū multa, præclaraq; Theoremata demonſtrantur.

Hac autem Methodo multa, præclaraq; demonſtrantur Theoremata, & quidem, ſiue primâ, ſiue ſecundâ, ſiue vtraq; coniuncta; Iam autem ſuperiùs vtramque nos explicuimus. Reliquum foret hic exempla quædam afferre, in vtriuſque Methodi illuſtrationem; quia tamen videri poſſunt apud Caualerium Auctorem ipſius, prætermittimus.

Prior Methodus vtitur Indiuiſibilibus collectiuè ſumptis.

Solum id breuiter repetam, quod ſuperiùs tetigeram, nempè priorem Methodum vti Indiuiſibilibus collectiuè ſumptis, ita vt loquendo de figuris planis, quam rationem habuerint omnes lineæ vnius figuræ ad lineas omnes alterius, eandem quoque habeant, & ipſæ figuræ, lineis acceptis iuxta Regulas quaſcunque. Similiter de ſolidis; figuræ ſiquidem ſolidæ eam inter ſe rationem habent, quàm omnia plana collectiuè ſumpta vnius ad omnia plana alterius collectiuè pariter ſumpta, acceptis planis iuxtà Regulas quaſcunque &c.

Nihil autem refert, quòd figuræ ſint eiuſdem altitudinis.

Poſterior vtitur iiſdem Indiuiſibilibus diſtributiuè acceptis.

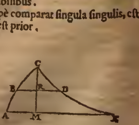
Poſterior autem Methodus iiſdem Indiuiſibilibus diſtributiuè ſumptis vtitur, quando figuræ fuerint in iiſdem parallelis: & ſi fuerint figuræ planæ in iiſdem parallelis conſtitutæ, quarum altera ſit Regula, ſingulæ lineæ cum ſingulis lineis in directum exiſtentibus, communique Regulæ parallelis collatæ, rationem aliquam habuerint, & ipſæ quoque figuræ eandem rationem habebunt. Sic de figuris ſolidis in iiſdem oppoſitis tangentibus planis, quorum alterum ſit eorum communis Regula. Iuxtà priorem igitur Methodum oportet perpendere aggregata omnium Indiuiſibilium, ſi iuxtà datam Regulam, aliquam habuerint rationem; nam hanc eandem, & figuræ ipſæ habebunt. Iuxtà poſteriorem autem aduertendum eſt, an in ſingulis Indiuiſibilibus reperiatur quædam communis ratio; etenim eandem habebunt, & ipſæ met figuræ.

Aliquando vtraq; Methodus coniungitur.

Itaque horum Methodorum Regulæ ſigillatim ſic ſe habent. Aliquando verò vtraque coniungitur, vt ſi ſingula Indiuiſibilia vnius figuræ collata cum ſingulis Indiuiſibilibus alterius, eiſdem in directum poſitis, reperiantur eandem habere rationem; deinde concludantur omnia Indiuiſibilia ad omnia Indiuiſibilia eſſe, vt vnum ad vnum; vnde inferatur, figuras ipſas eſſe pariter, vt vnum ad vnum ex ipſis Indiuiſibilibus.

Sic enim vtraque Methodus coniungitur; quatenus nempè comparat ſingula ſingulis, eſt ſecunda Methodus, quatenus comparat eadem collectiuè, eſt prior.

Exemplum aptiſſimum eſt deſumptum ex Prop. 4. Exerc. Caualerij; nam ſi ſint duæ figuræ CAM, CME, in quibus vtcunque ductæ ſint AE, BD parallelæ, reſpectu quarum communis ſit accepta altitudo, & figuris interceptæ portiones ſint AM, BR, in figura CAM, & ME, RD, in figura CME, repertumque ſit, vt AM, ad ME, ita eſſe BR, ad RD, & ſic ſemper, vbicunque in CM fuerit acceptum punctum R, concludere licebit figuram CAM, ad figuram CME eſſe, vt AM, ad ME, vel BR ad



RD &c.

RD &c. Hoc autem bifariam intelligi poteſt; ſi enim nos ita ratiocinemur, vt eſt AM, ad ME, ita BR ad RD, & ſic de reliquis omnibus; ergo ſunt omnes lineæ collectiuè acceptæ in figura CAM, ad omnes lineas collectiuè ſumptas in figura CME, vt vna AM, ad vnam ME; ſed omnes lineæ in figura CAM, eſt ipſa figura, & omnes lineæ in figura CME, eſt ipſa figura; ergo figura CAM, ad figuram CME, erit vt AM, ad ME: & ſic adhibetur prior Indiuiſibilium Methodus.

At ſi dicamus, vtcunque fuerit acceptum punctum R, in recta CM, figurarum altitudine, ac per illud agatur recta parallela ipſi AE, vt eſt BD, parteſque interceptæ parallelarum figuris, partes, inquam, in directum, conſtitutæ ſint in eadem ratione, in qua AM ad ME, erit ſecunda Indiuiſibilium Methodus, quia comparat ſingula Indiuiſibilia figuræ CAM cum ſingulis Indiuiſibilibus figuræ CME, eiſdem in directum poſitis, quorum communis ratio eſt AM ad ME.

Non diſſimiliter demonſtrare licet, parallelogramma in eadem altitudine exiſtentia inter ſe eſſe, vt baſes; & quæ in eadem baſi, vt altitudines, vel vt latera æqualiter baſibus inclinata.

At iuxtà priorem Methodum nullo modo intercedente ſecunda, demonſtratur.

Si in parallelogrammo diameter ducta fuerit, parallelogrammum duplum eſſe cuiuſuis triangulorum per ipſam diametrum conſtitutorum; ibi enim non conſiderantur ſingula Indiuiſibilia vnius trianguli collata cum ſingulis alterius, eiſdem in directum poſitis, quorum communis quædam ſit ratio, quod eſt proprium ſecundæ Methodi; ſed conſiderantur collectiuè, nempè demonſtrantur omnia Indiuiſibilia collectiuè vnius trianguli æqualia eſſe omnibus collectiuè ſumptis Indiuiſibilibus alterius trianguli: vnde infertur æqualitatis proportio inter ipſa triangula. Sic etiam de figuris ſolidis &c.

Cæterùm, quod ſupra demonſtrauimus de parabolis inter eaſdem parallelas, quòd ſcilicet ſint in ratione baſium, Indiuiſibilium Methodo, & quidem vtraque, facilè demonſtrari poteſt.

THEOREMA.

Exemplum CXXIV.

Parabolæ inter eaſdem parallelas ſunt inter ſe, vt baſes.

Quodcunque enim punctum fuerit acceptum in diametro vnius, & per illud acta fuerit recta parallela alterutri ipſarum parallelarum, inter quas ſunt parabolæ, hæc ſecabit diametrum alteram; reperiemus autem ſingulas lineas in vna ad ſingulas ſibi in directum conſtitutas in alia, eſſe in communi quadam ratione, nimirùm baſium; ſi itaque vti volumus priori Methodo, dicemus omnes lineas in vna parabola ad omnes lineas in alia, collectiuè loquendo, eſſe, vt vna ad vnam; nempè vt baſis ad baſin; ſed omnes lineæ in vna parabola, eſt ipſa parabole, & omnes lineæ in alia parabola, eſt ipſa parabole; ergo parabole ad parabolen eſt, vt baſis ad baſin.

Si verò vti velimus ſecundâ Methodô, dicemus, vbicunque in diametro fuerit acceptum punctum, & per illud agatur recta parallela alterutri ipſarum parallelarum, quarum vna eſt Regula, lineæ omnes in vna parabola diſtributiuè acceptæ, collatæ cum alijs in alia parabola, diſtributiuè pariter ſumptis, ſunt in communi quadam ratione, nimirùm baſium; ergo parabolæ erunt in ratione baſium.

Sic etiam demonſtrabuntur, & alia innumera.

Obſeruandum eſt autem. *Obſeruanda quadam.*

Si ſint figuræ planæ quæcũque in ijſdem parallelis cõſtitutæ, in quibus ductis quibuſcunque eiſdem parallelis æquidiſtantibus rectis lineis, conceptæ cuiuſcunque rectæ lineæ portiones fuerint æquales, & figuræ ipſę inter ſe æquales erunt. Sic de figuris ſolidis ſuo modo &c. Obſeruandum eſt, inquam, huiuſmodi figuras dici æqualiter analogas, tùm planas, tùm ſolidas inter ſe comparatas, ac etiam iuxtà Regulas, lineas, ſeu plana parallela, in quibus eſſe ſupponuntur. Sic etiam. *Figuræ æqualiter analogæ quæ dicantur.*

Si ſint figuræ planæ quæcũque in ijſdem parallelis cõſtitutæ, in quibus ductis quibuſcunque eiſdem parallelis æquidiſtantibus rectis lineis, conceptæ cuiuſcunque rectæ lineæ portiones, ſint inter ſe, vt cuiuslibet alterius in eiſdem figuris conceptæ portiones (homologis

Quænam dicantur figuræ proportionaliter analogæ.

tamen in eadem figura ſemper exiſtentibus), eandem inter ſe rationem habebunt; quàm dictæ portiones. Sic etiam ſuo modo de figuris ſolidis &c. Dicentur autem huiuſmodi figuræ proportionaliter analogæ, ac etiam iuxtà Regulas ipſas parallelas, in quibus exiſtunt, ſi planæ figuræ fuerint; vel iuxtà Regulas, ipſa plana parallela, in quibus exiſtunt; ſi ſolidæ figuræ extiterint.

De Maximis, & Minimis.

Contemplatio de Maximis, & Minimis, apud Veteres non habebat ſpecialem reſolutionis formã ſicut apud Recentiores.

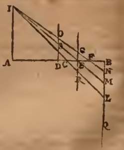
Auctor duo reſoluit ſibi propoſita Theoremata de Maximis, & Minimis.

HOc argumentum egregiè admodum ab Apollonio tractatum fuiſſe, ex eius monumentis, quę recèns iuſſu a Sereniſſimi Principis Leopoldi Florentiæ Typis commiſſa fuerunt, perſpicuum eſt. Hoc autem ſpecialem non habet demonſtrandi rationem; modo ſiquidem in eo deducitur ad inconueniens, plerunque oſtenſiua demonſtratione concluditur apud Veteres; ſecus autem apud Recentiores, qui beneficio ſpecioſæ Logiſtices ſpeciali quadam ratione Theoremara de Maximis, & Minimis oſtendunt; qua de re nobis in ſequenti ſecundo libro futurus eſt ſermo, Antiqua tamen Methodo procedentes, vnum, vel alterum exemplum rei, de qua agitur, illuſtrandæ gratia, breuiter hic afferemus in medium, eo vel maximè, quòd hæc Theoremata quædam ſunt, quæ nobis olim quidam Geometriæ ſtudioſi reſoluenda propoſuerunt.

THEOREMA.

Exemplum CXXV.

Sit recta AB, ad cuius extrema A, B, rectæ ſint conſtitutæ AI, BQ, cum ea facientes angulos rectos; ſectaque ſit biſariam in D; & inter AD, AB, media ſit proportionalis AE; & ex quouis puncto I, in recta AI, ducta ſit per E, IM, ita vt fiant triangula duo AEI, BEM. Dico iſtorum triangulorum aggregatum eſſe omnium minimum.



Si non ita eſt, ſit, ſi fieri poteſt ſumma triangulorum AIF, FBN; & ex puncto E, erigatur perpendicularis EG, quæ deorſum protrahatur, cùm opus fuerit, & ex D excitetur perpendicularis DO. Quoniam igitur DO, ſecat biſariam AB in D, ita ſecat biſariam IN, in O, quemadmodum IM in S; & vt AE media proportionalis eſt inter AB, AD, ita IG, inter IN, IO, ſicut IE, inter IM, IS; itaque DO, EG, quæ ſunt parallelæ, tàm inter ſe, quàm rectis ad extremitates A, B, conſtitutis, ſecabunt latera trianguli INM, vt dictum eſt. Cùmque EG, parallela ſit rectæ BQ, triangulum IEG, æquiangulum erit triangulo IMN; atque adeò triangulum IMN, ad triangulum IEG, in duplicata erit ratione lateris homologi IN, ad latus homologum IG; ſed duplicata ratio IN ad IG, eſt eadem, quę IN ad IO; ergo triangulum INM, ad triangulum IEG, erit vt IN ad IO; ſed IN ad IO, eſt in ratione dupla; ergo triangulum INM, ad triangulum IEG, in dupla ratione erit; quamobrem trapetium EMNG, æquabitur triangulo IEG. At verò ſimul accipiendo triangulum AIF, BFN, plus addimus triangulo AIE, quàm ſubtrahamus ex triangulo EBM; illi enim addimus IEF triangulum, quod maius eſt, quàm triangulum IEG, atque adeò, quàm EMNG trapetium, ac proinde multò maius, quàm trapetium EMNF, quod ex triangulo EBM, ſubducimus; ergo triangulorum AIF, FBN aggregatum maius erit aggregato triangulorum AIE, EBM. Idem autem oſtendetur euenire in quolibet alio puncto rectæ AB; V.G. C, per quod ducta ſit IL, &c; ergo triangulorum AIE, EBM, ſumma eſt omnium minima &c. Quod oportebat &c.

Si quis velit idem oſtendere de aliquo alio puncto ipſius AB, nempè C, ducat IL, per C, & demonſtrationem conficiat, oſtendendo plus addi triangulo EMB, addendo trapetium ECLM, quàm ſubtrahatur ex triangulo AIE, ſubducendo triangulum ICE. Ad hoc autem oportet protrahere GE, infra AB, vt ſecet IL, nempè in R.

Lemma

Lemma ad ſequens Theorema.

Si quotcunque fuerint triangula vnius ordinis, totidem autem alia alterius ordinis, vtriuſque verò ordinis triangulorum omnium baſes ſint inter ſe æquales, ſed altitudines primi ordinis ſint itidem inter ſe æquales, ſecundi tamen ordinis vtcumq; at aggregatum triangulorum primi ordinis æquale ſit aggregato triangulorum ſecundi ordinis.

Dico aggregatum altitudinum triangulorum primi ordinis, æquale eſſe aggregato altitudinum triangulorum ſecundi ordinis.

Super ſingulis baſibus triangulorum primi ordinis intelligantur conſtituta rectangula eiuſdem altitudinis cum ipſis triangulis, atque adeò erunt aqualium baſium, & altitudinum: intelligantur etiam rectangula conſtituta ſuper ſingulis triangulorum baſibus ſecundi ordinis, eiuſdem altitudinis cum illis, qua propterea erunt aqualium baſium, tùm inter ſe, tùm cum ijs, qua ſunt primi ordinis, inaqualium tamen altitudinum. At ex rectangulis primi ordinis fit rectangulum vnum, cuius baſis eſt vna ex baſibus aqualibus triangulorum, altitudo verò eſt aggregatum eorundem rectangulorum, ſeu triangulorum; inſuper ex rectangulis triangulorum ſecundi ordinis fit rectangulum vnum aquale rectangulo iam dicto conſtanti ex rectangulis triangulorum primi ordinis. Quoniam horum rectangulorum dimidia, nempè aggregatum triangulorum primi ordinis, & ſecundi ordinis ſupponuntur aqualia, & huius rectanguli conflati ex rectangulis triangulorum ſecundi ordinis, baſis, quippe qua eſt vna ex baſibus triangulorum eiuſdem ordinis, qua tùm inter ſe, tùm baſibus triangulorum primi ordinis ſupponuntur aquales, aqualis eſt baſi rectanguli conflati ex rectangulis triangulorum primi ordinis, cùm ſit ex baſibus triangulorum eiuſdem ordinis, qua ſupponuntur aquales, tùm inter ſe, tùm baſibus triangulorum ſecundi ordinis, ergo altitudo rectanguli conflati ex rectangulis triangulorum ſecundi ordinis aquabitur [a] altitudini rectanguli conflati ex rectangulis triangulorum primi ordinis; ſed altitudo huius rectanguli aqualis eſt aggregato altitudinum triangulorum primi ordinis; altitudo verò illius aqualis eſt aggregato altitudinum triangulorum ſecundi ordinis; ergo aggregatum altitudinum triangulorum primi ordinis aquale eſt aggregato altitudinum triangulorum ſecundi ordinis &c. Quod oportebat oſtendere.

[a] Ex Elementis.

Corollarium.

Hinc colligitur, quòd:

In omni polygono regulari aggregatum rectarum æqualium, quæ ducuntur ex puncto intus accepto perpendiculares ad ſingula eiuſdem latera, æquale eſt aggregato, ex lineis ductis à centro perpendicularibus ad eadem polygoni latera.

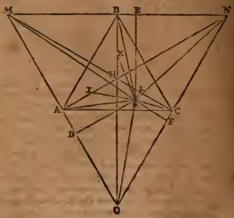
Perſpicuè conſtat ex ſuprapoſito Lemmate; latera enim polygoni regularis erunt baſes triangulorum, tàm primi, quàm ſecundi ordinis; triangula primi ordinis vertices habebunt in centro polygoni, eorundemque altitudines æquales, erunt rectæ æquales, quæ cadunt perpendiculariter à centro ad ſingula polygoni latera; triangula verò ſecundi ordinis vertices habebunt in alio quouis puncto accepto intra ambitum polygoni, & eorum altitudines erunt rectæ inæquales cadentes ab huiuſmodi puncto perpendiculariter ad latera ipſius polygoni.

THEOREMA. Theorema CXXVI.

Si à pluribus, quàm duobus punctis, recta coëuntes angulos aquales efficiant. Dico pradictarum linearum aggregatum, minimum eſſe.

Aut

Aut prædictæ lineæ ſunt inter ſe æquales, aut inæquales. Sint primùm æquales, & puncta ſunto, A,B,C, à quibus egrediantur rectæ AH, BH, CH, inter ſe æquales, ita & tres anguli AHB, BHC, AHC, complentes quatuor rectos, ſint inter ſe æquales. Dico aggregatum ex AH, BH, CH, minimum eſſe omnium ex ijs lineis, quæ duci poſſunt à punctis A,B,C, terminatæ ad aliquod aliud punctum præter H, vt exempli gratia ad punctum G.



Ducantur rectæ AB, BC, AC, erit autem triangulum ABC, æquilaterum, & ex puncto G, ductæ ſint GD, GE, GF, perpendiculares ad rectas, MO, MN, ON, quæ perpendiculares ductæ intelligi debent ad AH, BH, CH, ita ut fiat triangulum OMN æquilaterum. Intelligantur autem ductæ GA, GB, GC. Dico aggregatum rectarum AH, BH, CH, minus eſſe aggregato rectarum AG, BG, CG, & ſic de quocunque alio aggregato. Ductis enim HM, HO, HN, item GM, GO, GN; manifeſtum eſt ex Corollario eius, quod præmiſimus, Lemmatis, aggregatum altitudinum triangulorum MHO, MHN, OHN, nempè aggregatum rectarum AH, BH, CH æquale eſſe aggregato altitudinum triangulorum MGO, MGN, OGN, videlicet aggregato rectarum GD, GE, GF; ſed aggregatum rectarum GA, GB, GC, maius eſt aggregato rectarum GD, GE, GF; ergo aggregatum rectarum GA, GB, GC, maius eſt aggregato rectarum HA, HB, HC. Quoniam verò idem contingit in quolibet alio puncto præter H, dum rectæ ſcilicet ad illud ductæ ſunt ex punctis A, B, C; ob id aggregatum rectarum HA, HB, HC, eſt omnium minimum &c. Quod erat operæ pretium oſtendere.

At verò ſi rectæ tres illos angulos ad H, conſtituentes fuerint inter ſe inæquales, vt HI, Hk, HL. Dico aggregatum ipſarum minimum eſſe, ex ijs lineis videlicet, quæ à prædictis punctis I, k, L, duci poſſunt coëuntes ad aliquod aliud punctum præter H, cuiuſmodi eſt, exempli gratia, punctum G. Ductæ ſint GI, Gk, GL. Quoniam itaque oſtenſum eſt, aggregatum rectarum HA, HB, HC, minus eſſe aggregato rectarum GA, GB, GC, eſt autem aggregatum rectarum AI, IG; BK, kG; CL, LG, maius aggregato rectarum GA, GB, GC; ergo eò magis aggregatum rectarum HA, HB, HC, minus erit, quàm aggregatum rectarum AI, IG; BK, KG; CL, LG; demptis communibus AI, BK, CL, remanebit aggregatum rectarum HI, HK, HL, minus aggregato rectarum GI, GK, GL. Quoniam verò idem contingit in quocunque alio puncto præter H; propterea aggregatum rectarum HI, HK, HL, erit omnium minimum. Quod oportebat oſtendere.

DE PROBLEMATVM RESOLVTIONE IVXTA VETERES, SEV De Antiqua Methodo per explicitum Datorum vſum ad Problemata reſoluenda.

CAPVT XI.

Antiquiores Geometræ in Problematum reſolutionibus plurimum inſudarunt.

ANtiquiores Geometræ in Problematibus reſoluendis laboris plurimum experti ſunt, Phyſicorum veſtigia ſecuti, à principiatis ad principia procedentes; propoſitum igitur Problema, factum ſupponentes, quid inde ſequeretur, ſedulò meditari conſueuerunt, vt inde tantum deducerent, quantum ad faciendum ſatis oblato Problemati requiritur; omneque ſtudium eorum huc ſanè ſpectabat, vt in Geometricis ſibi compararent

ſent vim, ac facultatem inueniendi Problemata, quæ ipſis proponebantur; immò, teſte Pappo, huius tantummodò vtilitatis gratia, reſolutionis ratio inuenta eſt. De reſolutione autem generatim ſuperiùs egimus, partitionem eiuſdem explicantes. Duplex autem erat genus, quorum vnum contemplatiuum, in quo videlicet, quod quæritur, vt iam exiſtens; & vt verum ponentes, per ea, quæ deinceps conſequuntur, tanquàm vera, & ex poſitione ſunt, procedimus ad aliquod conceſſum, quod ſi verum extiterit, verum itidem, & quæſitum erit, ac demonſtratio, quæ reſolutioni ex contraria parte reſpondet. Quòd ſi falſo euidenti occurramus, falſum etiam, & quæſitum eſſe, neceſſe eſt.

Reſolutionis Problematum gratia Ars Analytica ab Antiquis inſtituta fuit. Reſolutionis duplex genus Theorematicum, ſeu contemplatiuum, Problematicū aliud.

At problematicum genus, quod propoſitum eſt, vt cognitum ponentes per ea, quæ deinceps conſequuntur, tanquàm vera, ad aliquod conceſſum procedimus, quod ſi fieri, compararique poterit, quod à Mathematicis *Datum* nuncupatur, etiam & illud, quod propoſitum eſt, fieri poterit, ac demonſtratio ipſa reſolutioni ex contraria parte reſpondens. Verùm ſi impoſſibili cuidam euidenti occurramus, quod nimirum fieri non poteſt, & Problema ipſum erit Impoſſibile, fieriq; non poterit.

Ad Problema verò Determinatio pertinet. Eſt porrò Determinatio, quæ declarat quando, & qua ratione Problema fieri poſſit. Iam autem ſuperiùs commemorauimus, quæ nam faciant ad Locum Reſolutum, inter quæ principem tenet locum Datorum doctrina, explicata ſingulari Libro ab Euclide, quem ſuperiùs interpretati ſumus. Veteres igitur per hanc viam procedentes Datorum præſidio, vt videre licet, tùm apud Apollonium, tùm præſertim apud Pappum Alexandrinum, & etiam apud alios Problemata reſoluebant.

Problematis determinatio quid.

Datorum doctrina apud Veteres ad Problemata reſoluenda conducebat.

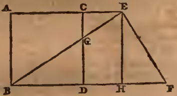
Vtcunque autem Problema fuerit; (communi ſiquidem Mathematicorum conſenſu, tripartitum illud eſt, videlicet, Planum, Solidum, & Lineare, ſiue Locale, ſiue non, extiterit) pro ſui ſolutione artificioſam Analyſin expoſcit; nunc illam, qua Veteres vtebantur, explicabimus: in ſequenti Capite in medium allaturi illam, quam nos paſſim adhibere conſueuimus, quæ tametſi non multùm differat ab antiqua, tamen eo ſaltem nomine videtur ab illa, ſecreta, quatenus minus implicatá viá procedit, Datis non accerſitis explicitè, quorum vſus plerunque haud parùm negotij faceſſit.

Tripartitum genus Problematum, Planum, Solidū, & Lineare.

Vt autem in arenam deſcendamus, pauca quædam exempla ab Antiquis accipere iuuabit, eorum ſiquidem imitatione, operoſum non erit oblati Problematis reſolutionem Datorum beneficio inſtituere. Primò occurrit illud apud Pappum Libro ſeptimo Prop. 72; in cuius gratiam, ex eodem, præmittendum eſt illud,

Lemma.

Sit quadratum AD, & ducatur BGE, atque ipſi ad rectos angulos EF; intelligatur recta linea BGE, ſecare CD, in puncto G, & AC productam in E: recta verò linea EF ſecare BD productam in F. Dico quadrata ex CD, GE, quadrato ex DF æqualia eſſe.



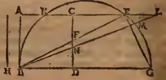
Ducatur per E, ipſi CD, parallela EH; rectus igitur eſt angulus CEH; eſt autem & rectus FEG; ergo & angulus CEG, angulo FEH eſt æqualis, dempto nimirùm communi angulo GEH; reliquus enim CEG, reliquo FEH æqualis eſt; ſed & rectus angulus FHE æqualis erit recto BDG, atque eſt EH æqualis BD; eſt enim EH æqualis CD, atque adeo ipſi DB, quod eſt etiam quadrati latus; æqualis igitur eſt EF, ipſi BG; cùm enim angulus CEG, ſit æqualis angulo FEH, vt oſtenſum eſt, ſitque ipſi CEG æqualis GBD, erit & GBD, ipſi FEH æqualis; eſt autem rectus BDG æqualis recto FHE; ergo & reliquus reliquo, & triangulum BDG, triangulo EHF ſimile; quamobrem vt HE ad EF, ita DB, ad BG, & permutando, vt HE ad BD, ita EF ad BG; eſt autem HE æqualis BD; ergo & EF ipſi BG æqualis erit. Quoniam autem quadratum ex BF æquale eſt quadratis ex BE, EF, quorum rectangulum ex BF, BD, æquale eſt rectangulo EBG; in circulo enim ſunt, D, F, E, G, puncta: anguli enim oppoſiti GDF, FEG, recti ſunt; quare & reliqui DGE, EFD, duobus rectis ſunt æquales; erit propterea rectangu-

ctangulum BFD, æquale rectangulo BEG, & quadrato ex EF; cùm enim quadratum ex BF æquale ſit duobus quadratis ex BE, EF; quadrato autem ex BF æqualia ſint vtraque rectangula FBD, BFD, & eadem ratione quadrato ex BE, æqualia ſint vtraque rectangula EBG, BEG, erunt rectangula FBD, BFD, æqualia rectangulis EBG, BEG, & quadrato ex EF, quorum rectangulum FBD æquale eſt rectangulo EBG; reliquum igitur BFD, reliquis BEG, & quadrato ex EF, hoc eſt quadrato ex BG eſt æquale. Sed rectangulum BEG, vnà cum quadrato ex BG, eſt rectangulum EBG, vna cum quadrato ex EG, hoc eſt rectangulum ipſum BEG, vnà cum quadrato ex BG, eſt æquale rectangulo EBG, vna cum quadrato ex EG; ſiquidem rectangulum BEG æquale eſt rectangulo BGE, vnà cum quadrato ex EG; propterea rectangulum BEG, vnà cum quadrato ex BG, æquale eſt rectangulo BGE, vnà cum duobus quadratis ex BG, GE; & ſimiliter rectangulum EBG, vnà cum quadrato ex EG æquale eſt rectangulo BGE, vnà cum quadratis ex BG, GE; cùm igitur eiſdem ſint æqualia, & inter ſe æqualia erunt; rectangulum propterea BFD æquale eſt rectangulo EBG, hoc eſt FBD, & quadrato ex GE: commune auferatur rectangulum BDF, ergo reliquum quadratum ex FB, quadratis ex BD, GE, hoc eſt quadratis ex CD, GE, eſt æquale.

Problema.

Quadrato exiſtente AD producere AC in E, & facere EF datam, quæ ad punctum B pertineat.

Reſolutio.



FActum iam illud ſit, & a puncto E ipſi BE ad rectos angulos ducatur EG, quoniam igitur quadrata ex CD, FE æqualia ſunt quadrato ex DG, & data ſunt quę ex CD, FE quadrata; etenim vtraque ipſarum magnitudine datur; datum igitur eſt quadratum ex DG, quare & ipſa DG, & tota BG magnitudine data eſt; ſed & poſitione, ergo ſemicirculus in
a 31. tertij. recta linea BG deſcriptus poſitione datur; & a tranſit per punctum E, ergo punctum E poſi-
b 25. Dat. tione circumferentiam contingit; ſed & poſitione rectam lineam AE, datum igitur b eſt;
c 26. Dat. ſed & B datum, quare recta linea BE poſitione dabitur c.

Compoſitio.

Componetur autem ſic.

SIt quadratum quidem AD, data autem recta linea H, & quadratis ex CD, & H æquale ſit quadratum ex DG, maior igitur eſt GD, quam DC, quare & rectangulum GDB maius eſt quadrato ex DC, & ideò ſemicirculus in recta linea BG deſcriptus tranſibit ſupra punctum C, deſcribatur, & ſit BKEG, producaturque AC ad E, & BE, EG iungantur,
d Ex antecedenti Lemmat. ergo quadrata ex CD, EF æqualia ſunt d quadrato ex DG, ſed quadrato ex DG ponebantur æqualia quadrata ex CD, H, quadrata igitur ex CD, H quadratis ex CD, EF ſunt æqualia, & ob id quadratum ex H æquale eſt quadrato ex EF, & recta linea H rectę EF æqualis, eſt autem EF data, ergo EF Problema efficit; itaque dico eam ſolam hoc efficere. Ducatur enim altera quædam linea BL, quæ ſi Problema efficit erit NL æqualis EF, maior autem eſt FB, quàm NB, tota igitur BL minor eſt, quàm BE, quod fieri non poteſt; eſt enim BL etiam maior; ſecet enim BL circuli circumferentiam in puncto M, erit BM maior, quàm BE, ex alibi demonſtratis, ergo BL, quàm BE multò maior erit; non igitur BL Problema efficit, ſed ſola BE.

Vt autem cognoſcamus vtra ipſarum maior ſit, demonſtrabimus hoc pacto.

Quoniam maior eſt BL quàm BE, & BF maior quàm BN, erit reliqua NL maior quàm FE, eſt enim quadratum ex BL æquale duobus quadratis ex BA, AL, quadratum autem ex BE æquale quadratis ex BA, AE, & cum quadratum ex AL ſit maius quadrato ex AE,

quòd

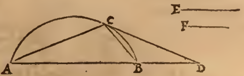
quòd AL maior ſit quàm AE, erit quadratum ex BL maius quadrato ex BE, & ideò BL quàm BE maior. Rurſus quadratum ex BF æquale eſt duobus quadratis ex BD, DF, & quadratum ex BN itidem æquale quadratis ex BD, DN, quòd cùm DF ſit maior quàm DN, erit quadratum ex BF maius quadrato ex BN, & ipſa BF quàm BN maior; ſimiliter & in alijs idem contingere demonſtrabitur. Cùm itaque BL ſit maior, quàm BE, & BF, maior, quàm BN, ſequitur NL multo maiorem eſſe, quàm FE; & manifeſtum eſt eam, quę puncto C propinquior eſt, remotiore ſemper minorem eſſe.

Sit exemplum alterum ex eodem.

Problema.

Circuli portione data in recta linea AB inflectere ACB in data proportione.

Reſolutio.



FActum iam ſit, & a puncto C ducatur recta linea contingens, quæ ſit CD, a centro enim circuli, cuius portio eſt ACB ducatur recta linea in C, atque ipſi ad rectos angulos agatur CD, erit CD circulum contingens, vt igitur quadratum ex AC ad quadratum ex CB, ita eſt AD ad DB; cùm enim CD circulum contingat, & CB ſecet, erit angulus DCB æqualis angulo CAB, ſed angulus CDB eſt communis vtrique triangulo ACD, CBD, ergo & reliquus reliquo æqualis, & triangulum triangulo ſimile; vt igitur AD ad DC, ita CD ad DB, & vt AD ad CD, ita AC ad BC, vt enim AD ad AC, ita DC ad BC, ergo permutando vt AD ad DC, ita AC ad BC, ob id ex coroll. 20. Sexti; prima AD ad tertiam DB (erant enim AD, CD, BD proportionales) erit vt, quadratum primæ AD ad quadratum ſecundæ DC, hoc eſt vt quadratum ipſius AC ad quadratum CB, proportio autem quadrati AC ad quadratum CB eſt data, ergo & proportio AD ad DB data erit; cùm enim detur proportio AC ad CB, dabitur etiam proportio quadrati ex AC ad quadratum ex CB, atque eſt datum punctum B, ergo & D, & linea DB, quare & ipſa AD data erit.

Compoſitio.

Componetur autem ſic:

SIt portio quidem circuli ACB, data autem proportio, quam habet E ad F; fiat vt quadratum ex E ad quadratum ex F, ita AD ad DB;

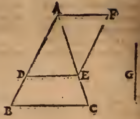
Si enim fiat vt exceſſus, quo quadratum ex E excedit quadratum ex F, ad quadratum ex F, ita AB ad BD; erit componendo vt exceſſus, quo quadratum ex E excedit quadratum ex F vnà cum quadrato ex F, hoc eſt vt quadratum ex E ad quadratum ex F, ità AD ad DB, ducaturque contingens DC, & AC, CB iungantur. Dico rectas lineas AC, CB Problema efficere. Quoniam enim vt quadratum ex E ad quadratum ex F ità eſt AD ad DB, vt autem AD ad DB, ità quadratum ex AC, ad quadratum ex CB, vt ſupra oſtenſum eſt, proptereà quod CD circulum contingit, erit vt quadratum ex E ad quadratum ex F, ita quadratum ex AC ad id, quod ſit ex CB quadratum; quare & vt E ad F, ità AC ad CB, ergo ACB Problema efficit.

Aliud ex eodem ſit exemplum.

Problema.

Rectis lineis AB, AC poſitione datis; ducere DE parallelam recta linea poſitione data, & facere ipſam DE datam, hoc eſt recta linea magnitudine data æqualem.

Reſolutio.



FActum iam ſit, & per A ipſi DE parallela ducatur
AF, ergo AF parallela eſt actæ lineæ poſitione
datæ, atque eſt datum punctum A, poſitione igitur
a 28.Dat. eſt [a] AF. Ducatur per E linea EF parallela ipſi AB,
ergo AF eſt æqualis DE; data autem eſt DE, quare
b 28.Dat. & AF, data eſt [b] magnitudine, ſed & poſitione; & datũ
c 27.Dat. eſt punctum A, datum igitur eſt [c] & F; itaque per da-
tum punctum F ducta eſt FE parallela ipſi AB poſitio-
ne datæ; poſitione igitur eſt FE, ſed & poſitione AC,
d 25.Dat. ergo & punctum E eſt [d] datum, & per ipſum ducta eſt
DE lineæ poſitione datæ parallela, quare & DE poſi-
tione datur.

Compoſitio.

Componetur autem ſic.

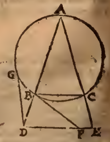
SInt duæ rectæ lineæ AB, AC poſitione datæ; data autem magnitudine ſit recta linea in qua G cui autem parallelæ ducantur, ſit AF, & ponatur AF ipſi G æqualis, & per F quidem ducatur FE parallela AB, per E verò ducatur ED parallela EF. Dico ipſam DE Problema efficere. Quoniam enim DE æqualis eſt ipſi AF, & AF æqualis ipſi G, videlicet lineæ datæ; erit & DE datæ lineæ G æqualis; ergo DE Problema efficit; manifeſtum autem eſt ipſam ſolam hoc efficere, namque propinquior ipſi A ſemper remotiore eſt minor.

Exemplum alterum ex eodem.

Problema.

Circulo poſitione dato ABC, & datis duobus punctis D, E inflectere DAE, & facere BC ipſi DE parallelam.

Reſolutio.



FActum iam ſit, & a puncto B ducatur contingens BF, itaq;
quoniam contingit quidem BF, ſecat autem BC erit an-
gulus FBC, hoc eſt DFB æqualis angulo A, in circulo igitur
ſunt A, B, E, F, puncta; quoniam enim angulus DFB eſt æqua-
lis angulo A, & ſunt anguli DFB, BFE æquales duobus rectis,
erunt & quadrilateri ABFE anguli BAE, BFE oppoſiti æquales
a conuerſa 22. tertij. duobus rectis, puncta igitur A, B, F, E in circulo [a] erunt; & ideò
rectangulum ADB rectangulo EDF eſt æquale; datum autem
eſt ADB rectangulum, quòd æquale ſit quadrato contingen-
tis, nempè ductæ ex puncto D, quæ circulum poſitione datum
ABC contingit in G, vti eſt recta DG, quare & rectangulum
EDF eſt datum, & data DE, ergo & DF, ſed & poſitione, &
datum punctum D, datum igitur & F, a dato igitur puncto F
b 53.Dat. ad circulum poſitione datum contingens ducta eſt FB, ergo FB poſitione eſt [b] data, & da-
c 26.Dat. tum punctum B, ſed & D datum, poſitione igitur [c] eſt BD, quod cum circulus ABC poſi-
d 25.Dat. tione ſit, datum erit [d] & punctum A, eſt autem & C datum, vtraque igitur iſtarum DA,
e 26.Dat. AE poſitione data erit [e].

Compoſitio.

Componetur autem ſic.

SIt circulus ABC, data verò puncta D, E, & quadrato contingentis nempè DG, æquale ponatur rectangulum EDF, atque a puncto F ducatur recta linea FB, quæ circulum ABC contingat: iunctaque DB ad A producatur, & iungantur AE, BC. Dico BC ipſi DE paralle-

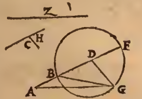
parallelam eſſe. Quoniam enim rectangulum EDF æquale eſt quadrato contingentis, & eidem æquale eſt rectangulum ADB, erit rectangulum ADB rectangulo EDF æquale, in circulo igitur ſunt puncta A,B,F,E; ideoque angulus A, hoc eſt CBF eſt æqualis angulo BFD, etenim BF circulum contingit, & BC ſecat, & ſunt anguli alterni, ergo BC ipſi DE eſt parallela, ex 27. lib. primi Elem.

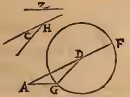
Sed ne dum experiri placet noſtram reſoluendi rationem in ijs, quæ fuerunt ab Antiquis, Problematibus, reſoluta, ſed etiam in alijs, quæ Recentiores reſoluenda ſumpſerunt, huiuſmodi ſunt ſequentia, quibus Marinus Ghetaldus antiqua methodo ſatisfacere ſibi propoſuit, *Problemata quæ Ghetaldus reſoluenda ſibi propoſuit.*

Problema.

Data baſe trianguli, differentia laterum, & angulo verticis inuenire triangulum.

Reſolutio.





Data ſit trianguli baſis Z, differentia laterum AB, angulus ad verticem æqualis angulo C, ſitque reperiendum triangulum.

Supponamus illud factum, eſſeque triangulum DAG, cuius baſis AG ſit æqualis Z, angulus ADG ad verticem æqualis angulo C dato; tandem differentia laterum DA, DG ſit AB, quæ poſitione, & magnitudine data ſit.

Quoniam igitur AB eſt differentia laterum AD, DG; ergo BD, DG erunt æquales; propterea centro D, interuallo DB, vel DG, deſcribatur circulus ſecans AD protractam in F; ducaturque BG. Quoniam igitur datus eſt angulus ADG; ergo dabitur angulus FDG, tanquàm reliquus ad duos rectos, ergo dabitur etiam angulus FBG, dimidius ipſius FDG; ille enim eſt ad circumferentiam, hic autem ad centrum; eſt autem poſitione data BD, quemadmodum & poſitione punctum B; ergo [a] poſitione dabitur quoque recta BG; quoniam autem in ipſam BG à dato puncto A ducta eſt AG magnitudine data: propterea & ipſa AG dabitur [b] poſitione; quare & punctum G poſitione datum erit [c]. Sed datur etiam angulus DGB, cum ſit æqualis angulo DBG, ob æquales rectas DB, DG; ergo poſitione dabitur [d] recta GD; quamobrem dabitur [e] poſitione quoque punctum D; quoniam itaque poſitione ſunt datæ extremitates A,D,G, poſitione datarum AD, DG, ipſæ quoque magnitudine erunt [f] datæ.

a 29.Dat.
b 31.Dat.
c 25.Dat.
d 29 Dat.
e 25 Dat.
f 26.Dat.

Compoſitio.

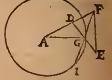
Componetur autem hoc modo.

Producatur AB in F, & fiat angulus FBG æqualis dimidio anguli H, reliqui ad duos rectos, & in BG ponatur AG æqualis Z: angulo vero GBD conſtituatur angulus æqualis BGD: erunt igitur æquales BD, DG; quamobrem differentia laterum DA, DG, trianguli DAG erit ipſa AB data.

Centro autem D ad interuallum DG, vel DB, deſcribatur circulus, quem ſecet AF, in F. ergo angulus FDG ad centrum duplus erit anguli FBG ad circumferentiam; ſed eiuſdem anguli FBG duplus eſt quoque & angulus H; ex conſtructione; ergo angulus FDG angulo H æqualis erit: vnde & angulus ADG ad verticem trianguli æqualis erit angulo C; eſt autem & baſis AG æqualis datæ Z ex conſtructione, Ergo conſtructum eſt triangulum DAG, quale oportebat.

Lemma ad ſequens Problema.

Si angulus trianguli fuerit centrum circuli, baſis verò ſemidiameter, & ducatur linea recta, non ex centro circuli, ſed ab altera extremitate aggregati laterum, conſtituens cum eo angulum æqualem dimidio, qui eſt ad verticem trianguli, angulo, illa recta linea in circulum incidet.

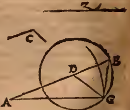


Sit triangulum DAG, cuius baſis AG, & centro A, interuallo AG, deſcribatur circulus, & producatur AD in F; vt DF ſit æqualis DG; aggregatum igitur laterum AD, DG; erit AF; à puncto F, ducatur FI; faciens angulum AFI, æqualem dimidio anguli ADG; Dico ipſam FI; in circulum incidere. Si non incidit, cadat extra, vt FE; Continuetur igitur DG, donec ſecet ipſam FE, in E; Quoniam itaq; externus angulus ADE, trianguli DFE, æqualis eſt duobus internis DFE, DEF; quorum vnus nempè DFE, ponitur dimidius ipſius ADE; erit & reliquus DEF, ipſius ADE, dimidius; ergo æquales erunt anguli DFE, DEF; atque adeo æquales erunt rectæ DF, DE; quod eſt abſurdum; nam DF, ponitur æqualis DG; Recta igitur FI, in circulum incidet. Quod &c.

Problema.

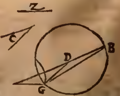
Data baſe trianguli, aggregato laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.

Reſolutio.



Sit data trianguli baſis Z; laterum aggregatum AB; angulus ad verticem, æqualis angulo C, oporteat reperire triangulum.

Ponatur iam factum; ſitque triangulum DAG, cuius baſis AG, ſit æqualis datæ Z; aggregatum verò laterum AD, DG ſit æquale ipſi AB, magnitudine, ac poſitione datæ; angulus autem, ADG ad verticem, æqualis ſit angulo C, iungatur BG.



Quoniam igitur compoſita ex AD, DG, æqualis eſt ipſi AB, ablata communi AD, reliqua DG, reliquæ DB æqualis erit; quare circulus centro D ad interuallum DG deſcriptus tranſibit per B; deſcribatur; ergo angulus ADG ad centrum, & duplus erit anguli B ad circumferentiã, ſed datur angulus ADG; ergo dabitur & angulus B; eſt au-
a 29. Datorũ. tem poſitione data AB; ergo [a] & BG poſitione data erit, ſed in ipſam BG à dato puncto A ducta eſt AG magnitu-
b 31. Dat. dine data; ergo [b] & ipſa AG poſitione quoque dabitur,
c 25. Dat.
d 28. Dat. datumque [c] erit punctum G, & data [d] quoque erit GD poſitione; datur enim angulus DGB, quoniam æqualis eſt dato DBG, ob æquales rectas DB, DG, quamobrem & punctum D dabitur. Cùm itaque datæ ſint A, D, G extremitates datarum poſitione AD, DG, ipſæ quoque magnitudine datæ erunt.

Compoſitio.

Componetur autem ſic.

CEntro A ad interuallum datæ Z, æquale, deſcribatur circulus, & fiat angulus ABG æqualis dimidio anguli C; ergo ex eo, quod præmiſſum eſt Lemmate recta BG incidet in circulum ſub A centro deſcriptum; incidat in G, & iungatur AG: fiat verò angulo B æqualis angulus BGD; erit propterea DG æqualis DB: addita communi AD; compoſita

ex AD,

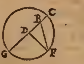
ex AD, DG, erit æqualis AB. Centro autem D interuallo DB, vel DG, deſcribatur circulus BG; ergo angulus ADG ad centrum duplus erit anguli B ad circumferentiam; eſt autem C duplus anguli B, ex conſtructione; ergo angulus ADG, angulo C æqualis erit, eſt autem baſis AG, æqualis datæ Z, ex conſtructione. Conſtructum igitur triangulum erit DAG, quale conſtruendùm proponebatur.

Lemma ad ſequens Problema.

Si duo anguli in ratione dupla eidem circumferentiæ circuli inſiſterint, duplus autem fuerit ad centrum, alter ad circumferentiam erit.

Duo anguli GDF, GBF, eidem circuli circumferentia GF inſiſtant; ſitque angulus GDF ad centrum circuli, atque duplus anguli GBF. Dico angulum GBF ad circumferentiam eſſe. Si enim non eſt ad circumferentiam erit intra vel extra circulum. Sit ſi fieri poteſt primùm intra circulum, & producatur GB ad circumferentiam vſque in C, iungatur FC; erit igitur angulus GDF ad centrum duplus anguli GCF ad circumferentiam, ſed duplus eſt etiam anguli GBF ex hypotheſi; ergo angulus GBF, angulo GCF æqualis erit, externus interno quod eſt abſurdum; angulus igitur GBF non cadit intra circulum.

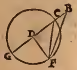
Deinde ſit angulus GBF extra circulum; ergo vel vtraque rectarum GB, FB, vel ſaltem vna circulum ipſum ſecabit. Secet illum GB recta in puncto C, & iungatur FC; erit igitur angulus GDF ad centrum duplus anguli GCF ad circumferentiam ſed eſt duplus anguli B ex hypotheſi; ergo angulus GCF, angulo B æqualis erit, externus interno quod eſt abſurdum. Non eſt igitur angulus GBF extra circulum; non intra, vt ſuprà demonſtratum eſt; ergo erit ad circumferentiam.

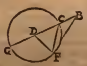








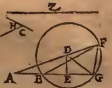




Problema.

Data differentia ſegmentorum baſeos trianguli, aggregato laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.

Reſolutio.



Data ſit differentia ſegmentorum baſeos trianguli AB, laterum aggregatum ſit Z, angulus ad verticem ſit æqualis angulo C: oportet reperire triangulum.

Sit iam factum, & triangulum ipſum eſto DAG, in quo quidem perpendicularis DE; centro autem D, interuallo DG, quod ſit minus latus, deſcribatur circulus ſecans latus AD productum in F, baſin autem AG, in B. Erunt [a] igitur BE, EG æquales, quamobrem differentia ſegmentorum AE, EG, erit AB. Sit igitur AB, poſitione, ac magnitudine data, compoſita autem ex lateribus AD, DG, hoc eſt ipſa AF, ſit æqualis Z. At angulus ADG ad verticem ſit æqualis angulo C: iungantur BF, FG.

[a] 3. tertij.

Quoniam itaque datur angulus ADG, dabitur etiam & angulus FDG, vtpotè reliquus ad duos

ad duos rectos, dabitur quoque angulus FBG, vtpotè dimidius anguli FDG; ſiquidem
b 29.Dat. angulus FDG ad centrum duplus eſt anguli FBG ad circumferentiam; poſitione igitur b
data erit BF, quoniam poſitione datur & AB, & quia datum eſt punctum A, a quo in BF
c 31.Dat. ducta eſt AF; magnitudine data; propterea dabitur c ipſa AF poſitione quoque: vnde &
d 25.Dat. poſitione dabitur d punctum F; quoniam verò datus eſt angulus ADG ad centrum, datus
e 29.Dat. erit & angulus AFG ad circumferentiam, vt eius dimidius, atque data erit e poſitione FG;
f 25.Dat. quare datum erit f & punctum G; eritque g data quoque poſitione GD, quoniam datus eſt
g 29.Dat. angulus DGF, cùm hic ob æqualia latera DG, DF ſit æqualis angulo DFG; quamobrem
h 25.Dat. datum erit h & punctum D. Cùm itaque datæ ſint extremitates A,D,G datarum poſitione AD, DG, AG, ipſæ quoque & magnitudine datæ erunt,

Compoſitio.

Componetur autem ſic.

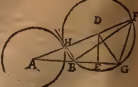
Producatur AB in G, & fiat angulus GBF æqualis dimidio anguli H, quem relinquit è duobus rectis angulus C: & in BF ponatur AF æqualis Z: fiat autem angulus AFG æqualis dimidio anguli C: angulus verò FGD æqualis angulo AFG; erunt igitur æquales DG, DF; communi addita AD, compoſita quidem ex lateribus AD, DG trianguli DAG æqualis erit ipſi AE, hoc eſt Z datæ.

Mox verò centro D, interuallo DG, vel DF deſcribatur circulus BGF. Quoniam igitur angulus C duplus eſt anguli AFG ex constructione, ſimiliter & angulus ADG ad centrum duplus eſt anguli AFG ad circumferentiam; erit propterea angulus ADG ad verticem, dato angulo C æqualis; quamobrem & angulus FDG angulo H; eſt autem angulus H duplus anguli FBG, ex constructione; proinde & angulus FDG eiuſdem anguli FBG duplus erit; eſt autem angulus FDG ad centrum inſiſtens circumferentiæ FG, cui pariter angulus FBG inſiſtit; ergo ex eo, quod præmiſſum eſt Lemmate, angulus FBG ad circumferentiam erit;
a 3 ſcrij. agatur ipſi AG perpendicularis DE: propterea æquales erunt a BE, EG; quamobrem differentia ſegmentorum AE, EG erit ipſa AB data. Constructum eſt ergo triangulum DAG quale oportebat.

Lemma primum ad ſequens Problema.

Si angulus trianguli fuerit centrum circuli, differentia verò laterum ſemidiameter, & ducatur linea recta non ex centro circuli, ſed ab altera extremitate differentiæ ſegmentorum baſeos conſtituens cum ea angulum æqualem dimidio, qui eſt ad verticem trianguli, angulo, illa recta linea circulum ſecabit.

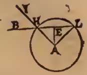
Sit triangulum DAG, in quo perpendicularis DE, ſecet baſin AC in E: centro autem D, interuallo minoris lateris DG, deſcribatur circulus ſecans latus AD productum in punctis H, F, baſin verò AG in B; laterum igitur DA, DG differentia erit AH, differentia verò ſegmentorum AE, EG, erit EB, iungantur autem BH, FG.



Quoniam igitur quadrilaterum FGBH eſt in circulo, anguli HBG, HFG ſunt ex aduerſo duobus rectis æquales; ſed & anguli HBG, HBA ſunt æquales duobus rectis, ergo anguli HBG, HFG angulis HBG, HBA æquales erunt; dempto igitur communi angulo HBG, reliquus HFG, reliquo HBA æqualis erit; ſed angulus HFG ad circumferentiam dimidius eſt anguli HDG ad centrum; ergo & angulus HBA eiuſdem anguli ADG dimidius erit. Dico igitur circulum ſub A centro, interuallo AH deſcriptum, ſecari ab ipſa BH. Manifeſtum eſt autem ipſam BH, in eum incidere, quoniam punctum H eſt in circumferentia, ſi igitur eum non ſecat, tangit. Tangat ſi fieri poteſt, & contactus erit in H: iungatur autem BF; ergo
a 18. tertij. *rectus erit a angulus AHB, & ideo æqualis recto HBF, qui eſt in ſemicirculo: quare pa-*
b 27 primi. *rallela erunt b AF, BF, quod eſt abſurdum: conueniunt enim in F. Non igitur BH tangit circulum, cuius centrum A ſed ſecat. Quod erat demonſtrandum.*

Lemma

Lemma ſecundum ad idem.



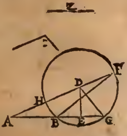
Secet circulum ſub A centro recta linea BHL in punctis H, L & per punctum H, quod ſit propius ad B, ducatur altera recta AHI. Dico angulum IHB, minorem eſſe recto.

Diuidatur enim HL bifariam in E, & iungatur AE; rectus igitur erit angulus AEH; ac proinde angulus EHA recto minor, cùm tres anguli cuiuslibet trianguli, atque adeo trianguli AEH, ſint æquales duobus rectis; ſed angulus EHA æqualis eſt angulo IHB, cùm ſint ad verticem; ergo & angulus IHB recto minor erit.

Problema.

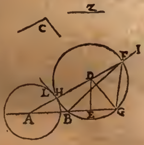
Data differentia ſegmentorum baſeos trianguli, differentia laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.

Reſolutio.



Data ſit differentia ſegmentorum baſeos trianguli AB, differentia laterum Z, angulus ad verticem æqualis angulo C, oporteat reperire triangulum.

Factum iam ſit, atque triangulum illud eſto triangulum DAG, in quo perpendicularis DE; centro autem D, interuallo minoris lateris DG, deſcribatur circulus ſecans latus DA, in H, & baſin AG in B; baſeos igitur ſegmentorum AE, EG, differentia erit AB, laterum autem DA, DG erit AH. Sit igitur AB poſitione atque magnitudine data, at ipſa AH eſto æqualis datæ Z, angulus autem ADG ad verticem æqualis angulo C: protrahatur AD vſque ad circumferentiam in F, & iungantur HB, BF, FG.



Quoniam igitur quadrilaterum FGBH eſt in circulo, anguli HBG, HFG ex aduerſo duobus rectis æquales erunt; ſed & anguli HBG, HBA duobus rectis ſunt æquales; ergo anguli HBG, HFG, angulis HBG, HBA æquales erunt; auferatur vtrinque angulus HBG; reliquus igitur HFG, reliquo HBA æqualis erit; ſed angulus ADG ad centrum duplus eſt anguli AFG ad circumferentiam; ergo & anguli HBA duplus erit angulus ADG, ſed datur angulus ADG; dabitur etiam & angulus HBA; quare dabitur [a] BH poſitione. Quoniam autem à dato puncto A in ipſam BH ducta eſt AH magnitudine data, dabitur [b] AH quoque poſitione, & ob angulum datum HBF (eſt enim rectus in ſemicirculo) data [c] erit BF poſitione, & datum [d] quoque erit punctum F, quamobrem, & data [e] magnitudine quoque erit HF; Quoniam autem æquales ſunt HD, DF dabitur punctum D, ſed datur, & punctum G; ergo dabitur [f] DG poſitione, & magnitudine, ſed datur, & punctum A; ergo & AD, AE poſitione [g] & magnitudine datæ erunt.

a 29. Dat.
b 31. Dat.
c 29. Dat.
d 25. Dat.
e 26. Dat.
f 26. Dat.
g 26. Dat.

Compoſitio.

Componetur autem ſic. Centro A interuallo rectæ Z æquali, deſcribatur circulus, & fiat angulus ABH æqualis dimidio anguli C: ex eo autem quod primo loco præmiſſum eſt lemmate recta BH circulum ipſum ſecabit; ſecet autem in punctis H, L: per punctum

verò H, quod propius ſit ad B: recta ducatur linea AHI ipſi vero BH ducatur perpendicularis BF.

Quoniam igitur ex eo, quod ſecundo loco præmiſſum eſt Lemmate angulus IHB minor eſt recto, & angulus FBH rectus, erunt ambo ſimul duobus rectis minores, ac proinde coibunt rectæ lineæ AI, BF, coeant in F: ſecetur autem HF bifariam in D: & centro D, interuallo DH, vel DF, circulus deſcribatur, cuius circumferentia tranſibit neceſſariò per B, ob rectum angulum HBF: mox autem protrahatur AB donec circulum ſecet FBH in G, & iungantur DG, FG: ipſi autem AG ducatur perpendicularis DE, erunt igitur æquales BE, EG, & ideo differentia ſegmentorum AE, EG erit ipſa AB data. Non diſſimiliter quoniam æquales ſunt DH, DG, vt ſemidiametri: differentia quidem laterum AD, DG erit AH, cui æqualis eſt Z data ex conſtructione. Supereſt oſtendendum, quòd angulus ADG ad verticem trianguli DAG, æquetur angulo C, idque ſic demonſtrabitur. Quoniam etenim quadrilaterum FG BH eſt in circulo, anguli HBG, HFG ex aduerſo duobus rectis erunt æquales; ſed & anguli HBG, HBA ſunt æquales duobus rectis: ergo anguli HBG, HFG, angulis HBG, HBA æquales erunt; dempto communi quidem angulo HBG reliquus HFG reliquo HBA æqualis erit, ſed anguli HFG ad circumferentiam duplus eſt angulus HDG ad centrum: ergo & anguli HBA duplus erit angulus ADG: ſed & angulus C duplus eſt anguli HBA ex conſtructione: ergo angulus ADG, angulo C æqualis erit. Quod erat operæ prætium oſtendere. Conſtructum eſt igitur triangulum DAG quale oportebat.

DE METHODO, PER IMPLICITVM DATORVM VSVM, QVAM Auctor in locum Antiquæ iam explicatæ ſubrogauit, & in Problematum Reſolutionibus adhibere conſueuit.

CAPVT XII.

Datorũ vſus in Problematum reſolutionibus inſtituendis pleriſque non creditur.

QVamuis Antiqua Methodus beneficio Datorum ad Problemata reſoluenda commendabilis ſit, magnique facienda, tamen non defuerunt, nec deſunt, quibus illa minus probetur, cùm arbitrentur inde potius mentem confundi, & expeditius Problematibus ſatisfieri neglecto Datorum vſu. Cùm hac de re iampridem Ioannes Antonius Roccha Regienſis felicis memoriæ, & ego diſſereremus Ferrariæ commorantes, vbi is pro Sereniſſimo Franciſco Mutinæ Duce, Mathematici, & Ioannes Fontana Architecti partes ſuſtinerent; ego autem pro Innocentio X. P. M. in negotijs Vallium Comacli; Mathematici perſonam gererem, & Ioannes Azzonius Architecti munere fungeretur aduerti plurimum eum eſſe propenſum in deteſtationem vſus ipſorum Datorum, dicentem, nihil inde vtilitatis auriri; tunc autem cæpi (eius enim auctoritas apud me non parum habebat momenti, cum eũ ingenij alacritate ſumma, in his diſciplinis pollere cognouiſſem) cæpi inquam perpendere num loco illius Reſolutionis ab Antiquis vſurpatæ, quæ nimirum Datorum vſu perficitur, alia quædam ſubſtitui poſſet non inferioris vtilitatis; atque tandem mihi licuit hanc ipſam excogitare, per implicitum Datorum vſum, quam hic paucis ſubijciam. In eo porrò conſiſtit, vt,

Præceptum.

Conſideremus ex hypotheſi quòd Problema ipſum ſit factum, quid inde conſequatur; nam hunc in modum ratiocinando peruenimus ad ea, quæ data ſunt, ac nota: vnde quod quæritur, datum redditur, & ex datis licet perficere.

Sed vt rectiùs, atque clariùs hoc explicemus, non nulla in medium afferemus exempla, & primo illa, quorum Antiqui beneficio Datorum reſolutiones inſtituerunt; deinde verò alia, quæ nobis propoſita reſoluenda fuerunt.

Hæc autem reſoluendi ratio definit, vbi Theorema, ſed Theorema in verum, quatenus huiuſmodi atq; in θεωρητὸν Problema in verum prout aliquod factibile atq; in πρακτὸν.

Illud porrò commemorandum videtur, nimirum ad quamlibet Analyſin inſtituendam, opus quadam eſſe præparatione, ad ſuppoſitum accerſita quod cuique perſpectum fiet, ſi Problematum antiquas reſolutiones aduerterit, in quibus præmittitur conſtructionis quoddam rudimentum; mox ex Analyſi ritè celebrata, numeris omnibus abſoluta conſtructio

deduci-

deducitur; quod plus, minuſue faciendum, prout oblati Problematis expoſcit natura; quamobrem non mirandum, ſi nos itidem ante ipſius Analyſeos inſtitutionem, aliqua prælibemus ad Geometricam effectionem ſpectantia; Nam id quoque Veteres facere conſueuerunt, quodque in præhabita decenti præparatione, neceſſitate coacti adhibuerunt in effectione ex inſtituta Analyſi, deprompta, poſtmodum inculcarunt. Sic apud harum Diſciplinarum Proceres Pappum Alexandrinum, Archimedem, Apollonium, obſeruare licet; cum non ſemel primo Analyſeos veſtibulo præcipiatur, vt recta ducatur circulum contingens; quædam agantur lineæ; circulus ex dato puncto, tanquam centro dato quidem interuallo deſcribatur, & id genus alia, quæ deinceps Analyſi inſtituta in effectione inde deducta, repetuntur; propterea quamſæpiſſimè quædam effectionis adumbratio, vel ſi mauis rudimentum, non præmittendum ex arte ſed ingenij potius, qua quis pollet alacritate ſolertiaque, nemini profecto licet inficias ire.

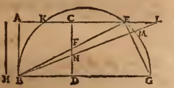
Methodum autem hanc, vt ſanè decet, prius in Problematibus ab alijs antiqua Methodo ſcilicet Datorum vſu reſolutis; poſtmodum in alijs, quæ nobis huius æui præclariſſimi Geometræ reſoluenda propoſuerunt experiri iuuabit.

Problema. Exemplum. I.

Quadrato exiſtente AD, producere AC in E, & facere F datam, quæ ad punctum B pertineat.

Reſolutio.

Sit iam factum, ſitque recta H, cui EF æqualis eſſe debeat. Quoniam igitur H recta linea data æqualis eſt rectæ EF, erit etiam quadratum ex H æquale quadrato EF; vtrinque addito communi quadrato CD; ergo quadrata CD, & H æqualia erunt quadratis CD, & EF, ſed ex Lemmate quadrata CD, & EF, æqualia ſunt quadrato DG; ergo quadrata CD, & H æqualia erunt quadrato DG, hinc.



Compoſitio.

Protrahatur BD in G, ita vt quadrato ex DG æqualia ſint quadrata ex DC & H, & ſuper BG deſcripto ſemicirculo BEG, qui, vt ſupra oſtenſum eſt tranſibit ſuper punctum C: protrahatur AC donec occurrat eius peripheria in E, & agatur EB. Erit enim EF æqualis H. Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.

Fiat vt dictum eſt.

Quoniam igitur quadrata ex CD, & H, per conſtructionem æqualia ſunt quadrato DG, ſed quadratum DG ex antecedenti Lemmate æquale eſt quadratis CD, & EF; ergo quadrata CD, & H æqualia erunt quadratis CD, & EF; vtrinque ſublato quadrato CD; ergo quadratum H æquabitur quadrato EF; ergo & H æquabitur EF; quod facere oportebat.

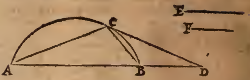
Cætera verò patent ex ſupradictis.

Problema. Exemplum. II.

Circuli portione data in recta linea AB, inflectere ACB, in data proportione E ad F.

Reſolutio.

Sit iam factum, & à puncto C ducta intelligatur recta contingens CD.



Quoniam igitur eſt vt E ad F, ita AC ad BC; ergo vt quadratum E ad quadratum F, ita quadratum AC ad quadratum BC, ſed vt quadratum AC ad quadratum BC, ita quadratum AD ad quadratum DC, cùm ſit vt AC ad BC, ita AD ad DC; ergo vt quadratum E ad quadratum F, ita quadratum AD ad quadratum DC, ſed vt quadratum AD, ad quadratum DC, ita eſt AD ad DB, cùm AD, DC, DB, ſint proportionales; ergo vt AD ad DB, ita quadratum E ad quadratum F.

Compoſitio.

Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.

Recta AB data addatur BD, ita vt data AB cum adiuncta BD, ad eandem adiunctam BD, rationem habeat, quam quadratum E ad quadratum F; ductaque tangente DC, agantur CA, CB; erit enim vt E ad F, ita AC ad BC.

Quoniam igitur eſt vt AD ad DB, ita quadratum E ad quadratum F; ſed vt AD ad DB, ita quadratum AD ad quadratum DC, cùm AD, DC, DB ſint proportionales: ergo vt quadratum E ad quadratum F, ita quadratum AD ad quadratum DC: ſed vt quadratum AC ad quadratum BC, ita quadratum AD ad quadratum DC, cùm ſit vt AC ad BC, ita AD ad DC: ergo vt quadratum E ad quadratum F, ita quadratum AC ad quadratum BC; ergo vt E ad F, ita AC ad BC.

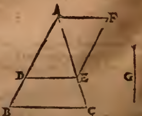
Problema.

Exemplum III.

Rectis lineis AB, AC poſitione datis, ducere DE parallelam rectæ lineæ poſitione datæ, & facere ipſam DE datam, hoc eſt rectæ lineæ magnitudine datæ æqualem.

Reſolutio.

Sit iam factum, & recta G ſit data, cui æqualis ducta ſit DE parallela rectæ AF. Conſiderandum eſt quid inde ſequatur.



Quoniam igitur DE, eſt æqualis G, & parallela ipſi AF, ergo ducta EF parallela ipſi AB erit AD EF parallelogrammum: ergo AF cui parallela eſt DE, erit æqualis G.

Compoſitio.

Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.

Ducatur AF faciens angulum quemcunque cum ipſa BA, & fiat æqualis G: mox agatur FE parallela ipſi BA; ducaturque ED parallela ipſi AF: nam DE problemati ſatisfaciet.

Quoniam igitur AF, cui parallela ducta eſt DE, eſt æqualis G: ergo ducta EF parallela ipſi AB, erit AD EF parallelogrammum, atque adeò DE æqualis AF: ergo DE eſt æqualis G, & parallela AF.

Problema.

Exemplum IV.

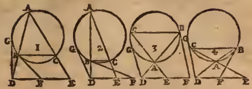
Circulo poſitione dato ABC, & datis duobus punctis D, E, inflectere DAE, & facere BC ipſi DE parallelam.

Reſolutio.

Reſolutio.

Pro prima, & ſecunda figura.

SVpponatur iam factum, ita vt ductis DA, EA occurrentibus peripheriæ circuli in pūctis B, C, ducta BC ſit parallela DE; ex D agatur circulum contingens DG, & ex B contingens BF. Quoniam igitur BC eſt parallela rectæ DE; ergo BF circulum tangens in puncto B, cadit



ſuper BC, DE, faciēs āgulos alternos DFB, FBC æquales; ſed BF tāgit, & BC ſecat circulū, ergo in prima, & ſecunda figura angulus FBC æquabitur angulo DAE, ſed angulus DFB erat æqualis angulo FBC; ergo angulus DFB æquabitur eidem angulo DAE; ſed angulus ad D communis eſt vtrique triangulo BDF, & ADE; ergo & hæc ipſa triangula erunt æquiangula, & inter ſe ſimilia; ergo vt AD ad DE, ita DF ad DB; ergo rectangulum ADB æquabitur rectangulo EDF; ſed rectangulum ADB æquale eſt quadrato DG; ergo rectangulum EDF æquabitur quadrato DG, ergo erit vt ED ad DG, ita DG ad DF.

Compoſitio.

Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.

Ducta DG tangente fiat vt DE ad DG, ita DG ad DF, & ex F ducatur recta FB, tangens circulum, & per B agatur DA: mox verò ducatur EA; agaturque BC; hæc enim erit parallela ipſi DE.

Quoniam igitur eſt vt ED ad DG, ita DG ad DF; ergo rectangulum EDF æquabitur quadrato DG; ſed rectangulum ADB æquale eſt quadrato DG; ergo rectangulum ADB æquabitur rectangulo EDF; ergo vt AD ad DE, ita DF ad DB; ergo hæc ipſa triangula erunt æquiangula, & inter ſe ſimilia, ſed angulus ad D communis eſt vtrique triangulo BDF, & ADE; ergo angulus DFB æquabitur angulo DAE, & angulus DEA, æquabitur angulo DBF; ſed BF tangit, BC verò ſecat circulum; ergo in prima, & ſecunda figura angulus FBC æqualis erit angulo DAE; ergo angulus DFB æquabitur angulo FBC, ergo BF circulum tangens in puncto B, cadit ſuper BC, DE faciens angulos alternos æquales; ergo recta BC erit parallela rectæ DE.

Reſolutio.

Pro tertia, & quarta figura.

QVoniam igitur BC eſt parallela rectæ DE, ergo CE cadit ſuper BC, DE, angulos BCE, DEC, alternos æquales faciens; ſed in tertia, & quarta figura angulus DBF, æquatur angulo BCE, cum BF tangat, & BD ſecet circulum; ergo angulus DBF, æquabitur angulo DEC, ſed angulus ad D, communis eſt vtrique triangulo DBF, DAE; ergo hæc ipſa triangula erunt æquiangula, & inter ſe ſimilia, ergo vt AD ad DE, ita DF, ad DB; ergo rectangulum ADB, æquabitur rectangulo EDF; ſed rectangulum ADB, æquale eſt quadrato DG, ergo rectangulum EDF, æquabitur quadrato DG; ergo vt ED ad DG, ita DG ad DF.

Compoſitio.

QVoniam igitur eſt, vt ED, ad DG, ita DG ad DF, ergo rectangulum EDF, æquabitur quadrato DG; ſed rectangulum ADB, æquale eſt quadrato DG; ergo rectangulum ADB,

ADB, æquabitur rectangulo EDF; ergo vt AD ad DE, ita DF, ad DB, ergo hæc ipſa triangula erunt æquiangula, & inter ſe ſimilia; ſed angulus ad D communis eſt vtriq; triangulo DBF,& DAE ergo angulus DFB, æquabitur angulo DAE,& angulus DEC, æquabitur angulo DBF; ſed angulus DBF eſt æqualis angulo BCE; cùm BF, tangat, BD, ſecet circulum: ergo in tertia, & quarta figura CE, cadit ſuper BC, DE, angulos BCE, DEC, alternos æquales faciens: ergo BC, eſt parallela rectæ DE. Quod &c.

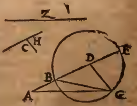
Exemplum V.

Problema.

Data baſe trianguli, differentia laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.

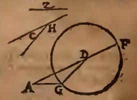
Reſolutio.

Data ſit trianguli baſis Z, differentia laterum AB, angulus ad verticem æqualis angulo C, ſitque reperiendum triangulum.



Sit iam factum, illudque ſit triangulum ADG, ita vt differentia laterum AD, DG ſit AB: baſis autem AG ſit æqualis Z, datæ, & angulus ADG ad verticem ſit æqualis angulo C. Intelligatur ex B extremo defferentiæ datę AB, ducta quidem BG.

Quoniam igitur angulus ADG æqualis eſt angulo C; ergo reliquus angulus FDG æquabitur reliquo angulo H; ſed angulus FDG, eſt æqualis eſt duobus angulis DBG, DGB: ergo angulus H æqualis erit aggregato è duobus angulis DBG, DGB; ſed AB exiſtente differentia laterum AD, DG, ſunt quidem æquales DB, DG, atque adeò anguli DBG, DGB ſunt inter ſe æquales, propereaque angulus DBG dimidius eſt aggregati angulorum DBG, DGB; ergo angulus DBG eſt dimidius anguli H.



Compoſitio.

Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.

Recta AB differentia laterum protrahatur ad alterutram partem verbi gratia B, & ad punctum B, fiat angulus GBD æqualis dimidio anguli H; mox verò in BG aptetur AG æqualis Z. Deinde ad punctum G fiat angulus BGD æqualis angulo GBD; triangulum enim ADG, erit, quod quaeritur.

Quoniam igitur angulus DBG, dimidius eſt anguli H, ſed AB exiſtente differentia laterum AD, DG, ſunt quidem DB, DG æquales, atque adeò anguli DBG, DGB ſunt inter ſe æquales, propereaque angulus vnus DBG dimidius eſt aggregati angulorum DBG, DGB; ergo angulus H æqualis erit aggregato è duobus angulis DBG, DGB, ſed angulus FDG æqualis eſt duobus angulis DBG, DGB; ergo angulus FDG æquabitur angulo H; ergo reliquus angulus ADG æquabitur reliquo angulo C.

Exemplum VI.

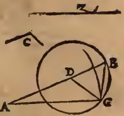
Problema.

Data baſe trianguli, aggregato laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.

Reſolutio.

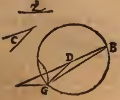
Sit data trianguli baſis Z, laterum aggregatum AB, angulus ad verticem æqualis angulo C, oporteat reperire triangulum.

Ponatur iam factum, ſitque triangulum DAG, cuius baſis AG ſit æqualis datæ Z, aggregatum verò laterum AD, DG, ſit æquale ipſi AB. Manifeſtum eſt ducta BG, quod angulus ADG æqualis erit duobus angulis DBG, & DGB.



Quoniam angulus ADG æqualis eſt angulo C, ſed angulus ADG æqualis eſt aggregato angulorum DBG, & DGB; ergo angulus C æquabitur aggregato angulorum DGB, & DBG, ſed angulorum DBG, DGB aggregatum duplum eſt vnius anguli DBG; ergo angulus C duplus erit anguli DBG, ſeu ABG.

Compoſitio.



Ad B extremum aggregati laterum fiat angulus ABG æqualis dimidio anguli C, & centro A interuallo data recta Z deſcribatur circulus, in cuius circumferentiam neceſſariò incidet BG, vt oſtenſum eſt ſupra: mox ad punctum G conſtituatur angulus DGB, æqualis angulo DBG; triangulum enim ADG erit, quod quæritur.

Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.

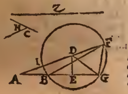
Quoniam igitur angulus C duplus eſt anguli ABG, ſeu DBG, ſed ipſius anguli DBG duplum eſt aggregatum angulorum DBG, & DGB; ergo angulus C æquabitur prædicto aggregato angulorum DBG, & DGB, ſed angulus ADG æqualis eſt aggregato angulorum DBG, & DGB; ergo angulus ADG æqualis erit angulo C.

Problema [illegible]

Exemplum VII.

Data differentia ſegmentorum baſeos trianguli, aggregato laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.

Factum iam ſit, atq; triangulum illud eſto DAG, in quo perpendicularis DE; & centro D, interuallo minoris lateris DG, deſcribatur circulus, ſecans latus AD, protractum in F, & baſin AG, in B: erunt BE, EG æquales; vnde AB, erit differentia ſegmentorum baſeos AG: ducantur BF, FG; itaq; nedum habetur factum triangulum, ſed triangulum vnà cum circulo prædicto. Quid inde ſequatur videndum.



Intelligatur erecta perpendicularis BI & ducta BD.

Reſolutio.

Quoniam igitur in triangulo ADG, aggregatum laterum AD, DG, æquale eſt rectæ Z; ſed AF æqualis eſt aggregato laterum AD, DG, cùm DG, DF, ſint æquales; vnde additâ communi AD, fit AF, æqualis aggregato ipſarum AD, DG; ergo AF, æquabitur Z.

Et quoniam angulus ADG, æqualis eſt angulo C; ſed angulus ADG ad centrum, duplus eſt anguli AFG, ad circumferentiam; ergo angulus C, duplus erit anguli AFG.

Et quoniam angulus FBG, eſt ad circumferentiam, inſiſtens circumferentiæ FG, cui inſiſtit angulus FDG, ad centrum; ſed angulus FDG, duplus eſt anguli FBG; ergo angulus H, duplus erit anguli FBG, cùm angulus FDG, ſupponatur æqualis angulo H,

Compoſitio.

Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.

Sit AB, differentia ſegmentorum baſeos trianguli; protrahatur ad partes B; & fiat angulus FBG, æqualis dimidio anguli H; mox verò ex A, in BF, aptetur AF, æqualis Z; deinde ad punctum F, fiat angulus AFG, æqualis dimidio anguli C; & ad punctum G, fiat angulus FGD, æqualis angulo DFG: erit enim triangulum ADG, quod quæritur.

Centro D, ad interuallum DG, vel DF, ſunt enim æquales deſcribatur circulus; ducaturq; BF.

Quoniam AF, eſt æqualis Z; ſed AF, eſt æqualis aggregato laterum AD, DG, cùm DG, DF, ſint æquales; vnde additâ communi AD, aggregatum ipſarum AD, DG, æquabitur ipſi AF; ergo aggregatum ipſarum AD, DG, æquabitur ipſi Z.

Et quoniam ex conſtructione angulus C, duplus eſt anguli AFG; ſed angulus ADG ad centrum, duplus eſt anguli AFG, ad circumferentiam; ergo angulus ADG, æquabitur angulo C;

Et quoniam angulus H, per conſtructionem duplus eſt anguli FBG; ergo angulus FDG, cum angulus C ſit oſtenſus æqualis angulo ADG, atq; adeo FDG æqualis angulo H, duplus erit anguli FBG; ſed angulus FDG, eſt ad centrum, inſiſtens circumferentiæ FG, cui etiam inſiſtit angulus FBG; ergo angulus FBG, ad circumferentiam erit.

Ductâ igitur DE, quæ ſit perpendicularis ipſi BG, erunt BE, EG, inter ſe æquales; ergo differentia ſegmentorum AE, EG, erit ipſa AB, data.

Conſtructum eſt igitur triangulum ADG, habens angulum ADG ad verticem, æqualem dato angulo C; & aggregatum laterum AD, DG, æquale datæ rectæ Z, atq; tandem AB datam, differentiam ſegmentorum AE, EG.

Aliter.

Reſolutio.

Ex B, erigatur recta perpendicularis BI, & agatur FG: ducatur BD.

QVoniam igitur angulus ADG; æqualis eſt angulo C; ſed angulus AFG: dimidius eſt anguli ADG, ſunt enim DF, DG æquales; ergo angulus AFG dimidius erit anguli C: Cumq; AB, ſit differentia ſegmentorum baſeos, ſi DE perpendicularis cadat ſuper EG, bifariam diuidet BG in E; ergo BD, DG, DF erunt æquales; quare puncta B, G, F, pertinebunt ad circulum; ergo angulus FBG ad circumferentiam dimidius erit anguli FDG ad centrum: ſed angulus H eſt æqualis angulo FDG, ergo angulus FBG dimidius erit anguli H, ſed angulus IBF, eſt rectus; ergo anguli IBG, IFG, erunt æquales duobus H, & C. Sed anguli H, & C ſunt æquales duobus rectis, ergo anguli IBG, IFG, erunt æquales duobus rectis, ergo quadrilaterum IBGF; erit in circulo.

Compoſitio.

Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.

Differentia data AB, protrahatur ad partes B; & fiat angulus FBG, æqualis dimidio anguli H. ex A, in BF, aptetur AF, æqualis Z; mox verò ex B, erigatur perpendicularis BI; diuiſaq; IF, bifariam in D, centro D, interuallo DI, vel DF, deſcribatur circulus, qui neceſſariò tranſibit per punctum B, ſecans AB protractam in G; agatur FG; ducaturq; DG: erit triangulum ADG, quod quæritur.

Quoniam DG, eſt æqualis DF, ergo additâ communi AD, aggregatum laterum AD, DG, æquabitur ipſi AF; ſed AF, facta eſt æqualis Z; ergo aggregatum laterum AD, DG, æquabitur Z.

Ducta autem perpendiculari DE.

Quoniam circulus, centro D, deſcriptus tranſit per puncta B, G, erit BE, æqualis EG; quare differentia ſegmentorum AE, EG, erit data AB.

Supereſt oſtendendum angulum ADG, æqualem eſſe angulo C.

Quoniam enim quadrilaterum IBGF, eſt in circulo; ergo anguli IBG, IFG, erunt æquales duobus rectis; ſed anguli quoq; H, & C, ſunt æquales duobus rectis; ergo anguli IBG, IFG,

erunt

erunt æquales duobus angulis H, & C; ſed angulus IBF, eſt rectus, & angulus FBG, per conſtructionem, dimidius eſt anguli H; ergo angulus AFG, dimidius erit angulo C; ſed angulus AFG, dimidius eſt etiam anguli ADG, ergo angulus ADG, æquabitur angulo C. Quod oportebat oſtendere.

Conſtructum eſt igitur triangulum, &c.

Problema.

Exemplum VIII.

Data differentia ſegmentorum baſeos trianguli, differentia laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.

Reſolutio.

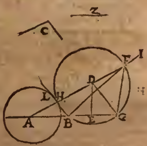
Data ſit differentia ſegmentorum baſeos trianguli AB; differentia laterum Z angulus ad verticem æqualis angulo C, oporteat reperire triangulum.



Sit iam factum, illudq; ſit triangulum ADG, in quo perpendicularis DE, & centro D, interuallo minoris lateris DG, deſcribatur circulus ſecans latus DA in H, baſin AG in B. Itaq; diff. ſegmentorum baſeos AE, EG, erit AB, defferentia verò laterum DA, DG, erit AH. Intelligantur ductæ BH, BF, FG.

In ſchemate intelligantur ductæ rectæ GF, BH.

Quoniam igitur angulus ADG æqualis eſt angulo C; ergo dimidius anguli ADG æquabitur dimidio anguli C. ſed angulus AFG dimidius eſt anguli ADG; hic enim ad circumferentiam, ille autem ad centrum; ergo angulus AFG æquabitur dimidio anguli C; ſed angulus ABH æqualis eſt angulo AFG, vt mox conſtabit; ergo angulus ABH æquabitur dimidio anguli C. Quod facere datum eſt.



Lemma.

Quod autem angulus ABH ſit æqualis angulo AFG, ſic oſtendo. *Quadrilaterum enim HGBF eſt in circulo; quare anguli HBG, HFG ex aduerſo duobus rectis ſunt æquales; ſed etiam anguli HBG, HBA ſunt æquales duobus rectis, ergo anguli HBG, HFG, erunt æquales duobus angulis HBG, HBA: dempto communi angulo HBG, remanebit angulus HFG, ſeu AFG æqualis angulo ABH.*

Compoſitio.

Differentia ſegmentorum baſeos AB, protrahatur ad partes B; fiat autem angulus ABH æqualis dimidio anguli C; mox verò ex A in angulo ABH, aptetur AH, æqualis Z, & protrahatur ad partes H, deinde ipſi HB, fiat perpendicularis BF, quæ neceſſariò cohibit cum AH producta; deinde diuiſa HF bifariam in D; centro D, interuallo DF, vel DH; deſcribatur circulus, cuius circumferentia omninò tranſibit per B ſecans AB protractam ad partes B in G; agatur DG; cadat autem perpendicularis DE; erit enim triangulum ADG, quod quæritur.

Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.

Differentia enim ſegmentorum baſeos erit data AB, & differentia laterum erit AH, protracta enim AD ad F circumferentiæ punctum, erit AF, æqualis aggregato laterum AD, DG, ſed DF, eſt æqualis minori lateri DG, differentia verò inter DF, AD eſt AH Supereſt oſtendendum angulum ADG æqualem eſſe angulo C, quod ita manifeſtũ fiet. Ducatur FG.

Quoniam igitur angulus ABH æqualis eſt dimidio anguli C, ex conſtructione; ſed angulus ABH æqualis eſt angulo AFG, vt oſtenſum eſt; ergo angulus AFG æquabitur dimidio anguli C; ſed angulus AFG dimidius eſt anguli ADG; ille enim ad circumferentiam, hic autem ad centrum; ergo angulus dimidius anguli ADG, æquabitur dimidio anguli C; ergo angulus integer ADG, æquabitur integro angulo C. Quod erat operæ pretium oſtendere. Conſtructum eſt ergo &c.

SCHOLION.

Vt ad Analyſeos calcem, ſi Theorema fuerit, ſolemne illud adiungitur. Quod ita ſe habet; *propterea quòd Theorematis reſolutio deſinit in verum vt* θεωρητὸν ſpeculabile; *Ita Problematis Analyſis abſoluitur dicendo*, Quod fieri poteſt, *vel* Quod datum eſt, *vel* Quod fieri nihil prohibet, *aut conſimili, æquipollentiq; formula; ſiquidem hæc de qua loquimur Reſolutio deſinit in verum vt* πρακτὸν operabile. *Noſtra igitur hæc Methodus, prout in Problematibus eſt occupata, ita perficitur, vt ſiſtere tunc debeat Analyſta, cùm primùm inciderit in aliquod verum, quod ipſe poteſt operari. Ita quidem in primo Exemplo cùm in reſoluendo peruenerit ad illud*, ergo quadrata CD, & H æqualia erunt quadrato DG. *Siſtere debet poteſt enim tunc operari; ſiquidem nihil prohibet BD produci ad partes D vſque ad G, ita vt quadratum DG æquale ſit quadratis rectarum H, & CD. Elementare enim eſt duarum rectarum quadratis æquale quadratum exhibere. Sic etiam in ſecundo Exemplo cùm ad illud peruenerit*, ergo vt AD ad DB, ita quadratum E ad quadratum F, *ſiſtat; id enim fieri poteſt, nam conceditur rectæ AB adiungere BD, itaut data cum adiuncta ad adiunctam rationem habeat datam, quæ eſt quadrati E ad quadratum F; vt ſiquidem data eſt ratio E ad F, ita data eſt ratio quadrati E ad quadratum F; ſed ordinatum eſt iam, quo pacto propoſito lateri, latus ſit adiungendum, ita vt aggregatum ex dato, & adiuncto, ad adiunctum rationem habeat datam. Sic in tertio Exemplo, quod facilè cernitur. Sic & in quarto, cùm peruenerit ad illud*; ergo vt ED ad DG, ita DG ad DF, *ſiſtat Analyſta, nam cùm punctum ſit datum D, datuſque poſitione circulus ABC, recta contingens DG, ignorari nequit, dataque erit; eſtque etiam data DE, cùm eius extrema D, & E data ſint; ergo etiam & DF dabitur. Ordinatum eſt enim in Elementis quo pacto datis duabus rectis lineis, tertia proportionalis reperiatur. Et in Exemplo quinto cùm ad illud peruenerit*, ergo angulus DBG eſt dimidius anguli H; *ſiſtendum eſt; angulum enim H bifariam diuidere Elementare eſt; ſic de alijs exemplis.*

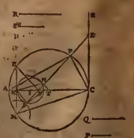
Hæc autem Problemata ſunt ex ijs, quæ Lugduni Batauorum ad nos Florentiam non Ignobilis Geometra reſoluenda tranſmiſit.

Problema.

Exemplum IX.

Dato in ſemicirculo ABC, puncto quidem B, quæritur in diametro punctum reflexionis, puta D, ita vt ducta incidente BD reflectatur in E punctum in linea tangente CE; at intercepta FE ad tangentem EC rationem habeat, vt S ad R.

Reſolutio.



SIt iam factum, ita vt angulus ADB ſit æqualis angulo CDE, & ſegmentum FE ad EC, ſit vt S ad R: intelligatur protracta ED ad M, & ducta BM, intelligatur eſſe ML ad Mk, vt S ad R; & kH parallela MC; & per puncta K, H, L deſcriptus circulus. Item intelligantur ductæ KL, LT, AF, CF.

Quoniam igitur angulus KDB æqualis eſt angulo CDE, ſed angulus KDM æqualis eſt angulo CDE; ſunt enim ad verticem; ergo angulus KDB æquabitur angulo KDM; in triangulis igitur BKD, MKD, latus BK æquabitur lateri kM, vt conſtat ex Elementis; ergo BM diuiſa eſt bifariam in K; ergo BM ad rectos angulos in k à diametro AC ſecatur.

Rur-

Rurſus. Quoniam igitur eſt vt S ad R, ita FE ad EC, eſtque etiam vt S ad R, ita LM ad MK, & eſt angulus kMD æqualis angulo CED; ergo triangula MKL, ECF erunt æquiangula, atque adeò angulus MLK æquabitur angulo CFE; ergo angulus KLD æquabitur angulo CFD; ſunt enim reliqui ad duos rectos; ſed anguli ad verticem D ſunt æquales; ergo triangula LKD, FCD, ſunt æquiangula; ergo angulus LKD æqualis eſt angulo FCD; ergo angulus LkT in triangulo KLT æquabitur angulo FCA in triangulo CFA, ſed angulus AFC æqualis eſt angulo kLT; vterque enim eſt rectus; circuli ſiquidem kLT, centrum I in diametro AC facilè demoſtrabitur, atq; adeò angulus KLT eſt in ſemicirculo, vt angulus AFC, ergo ductis FA, LT, angulus KTL æquabitur angulo CAF; ergo circuli ſegmentum kHL ſimile erit ſegmento CMF; ergo angulus KHM æquabitur angulo CME, & angulus MKH æquabitur angulo ECM; Quod fieri poteſt.

Compoſitio.

Ducatur Bk perpendicularis ipſi AC, & protrahatur vſque ad M: deinde fiat vt R ad S, ita KM ad aliam P: mox fiat vt P ad MK, ita MK ad aliam Q: ducaturque MC, & ad punctum K fiat kH parallela ipſi MC; centro autem M, interuallo æquali rectæ iam inuentæ Q, nempè MH, deſcribatur arcus ſecans kH, in H; ex puncto M per punctum H ducatur ME ſecans CG in E, & AC in D: ducatur BD. *Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.*

Dico BD reflecti in DE, ita vt angulus ADB ſit æqualis angulo CDE, & FE ad EC rationem habeat, quam S ad R.

Agatur CF, & ſecetur ML æqualis P, ducatur LK, per puncta verò L, k, H, deſcribatur circulus LKH; & agatur LT: itemque FA.

Quoniam igitur BM ad rectos angulos ſecatur in K à diametro quidem AC; ergo BM diuiſa erit bifariam in k; ergo latus BK æquale erit lateri kM; ergo in triangulis BkD, MKD, latera BK, KD æqualia ſunt lateribus KM, KD vtrunque vtrique; ſed angulus BKD æqualis eſt angulo MkD, vterque ſiquidem eſt rectus; ergo angulus KDB æquabitur angulo KDM; ſed angulus kDM æqualis eſt angulo EDC; ſunt enim ad verticem; ergo angulus KDB æquabitur angulo CDE.

Supereſt igitur oſtendendum FE ad EC rationem habere, vt S ad R.

Quoniam itaq; in triangulis MkH, ECM anguli ſunt æquales (angulus enim KMD æqualis eſt angulo CED, eo quòd KM, EC ſint parallelæ) & angulus MKH æqualis eſt angulo ECM per conſtructionem (anguli enim ECA, & MkT ſunt æquales, vtpotè recti: his porrò additi ſunt æquales ACM, & HKT) ergo reliquus KHM æquabitur reliquo CME; ergo circuli ſegmentum kHL ſimile erit ſegmento CMF; ergo ductis FA, LT, erit angulus kTL æqualis angulo CAF: ſed angulus AFC eſt æqualis angulo kLT, vterque enim eſt rectus: vt dictum eſt; ergo reliquus LKT æquabitur reliquo FCA: ergo in triangulis LKD, & FCD, angulus LkD æqualis eſt angulo FCD, ſed anguli ad verticem D ſunt æquales: ergo angulus kLD æquabitur angulo CFD, atque adeò kLM reliquus ad duos rectos æquabitur reliquo CFE: ſed angulus KML æqualis eſt angulo CEF, vt vidimus ob parallelas BM, CE: ergo reliquus angulus MKL æquabitur reliquo ECF: ergo triangula MKL, ECF ſunt æquiangula, atque ſimilia: ergo vt LM ad MK, ita FE ad EC, ſed LM ad MK, eſt vt S ad R per conſtructionem: ergo vt S ad R, ita FE ad EC. Quod facere oportebat.

Problema. *Exemplum X.*

Data trianguli baſe, & aggregato laterum vnà cum ratione ſegmentorum baſeos reperire triangulum.

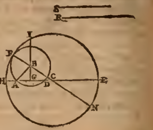
Data ſit baſis AC, laterum autem aggregatum CE: at verò ratio, quam habent ad inuicem ſegmenta baſeos ſit, vt S ad R. Oporteat reperire triangulum.

Reſolutio.

SIt iam factum, illudque triangulum eſto AEC: ex puncto autem B cadat perpendicularis BG, ita vt ſegmentum baſeos AG ad ſegmentum GC, ſit in ratione S ad R, &

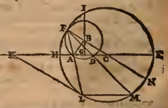
 aggre-

aggregatum laterum AB, BC, æquale ſit rectæ CE datæ. Manifeſtum, ſi centro C, & interuallo CE deſcribatur circulus EFH, & puncto B, trianguli ABC vertice, interuallo BA minoris lateris deſcribatur circulus AFD, quod hic priorem tanget in puncto quo latus CB protractum ad partes B, perueniet; eſt enim punctum illud, puta F, extremum ſemidiametri circuli maioris, cuius centrum C, & extremum ſemidiametri circuli minoris, cuius centrum B, ad quod indagandum præhabendum eſt punctum F: ſic enim comparabitur punctum B, circuli centrum, & quæſiti trianguli vertex; ſed ad inquirendum punctum F deſcribendus eſt circulus tranſiens per A, D, tangens alterum in F &c. vt conſtituta ſint triangula ſimilia FAD, FLM.



Sit iam factum &c. & ducatur Lk tangens circulum in L, occurrens in K diametro EH protractæ ad partes H.

Quoniam igitur circulus tranſiens per puncta F, A, D, tangit circulum HFIE intus in puncto F: ſed ſi fuerint duo circuli, quorum vnus tangat intus alium, triangula, quorum vertex eſt in illo puncto, circulis prædictis inſcripta, ſunt inter ſe ſimilia ergo triangulum FAD, ſimile eſt triangulo FLM: ergo angulus FAD æquabitur angulo FLM: angulo ad F communi exiſtente vtrique triangulo ADF, MLF: ergo angulus ADF æquabitur angulo LMF: ſed ductâ tangente KL, angulus ALk comprehenſus à ſecante, & tangente æqualis eſt [a] angulo LMF: ergo angulus ALk æquabitur angulo ADF: ergo triangula KAL, FAD ſimilia erunt: ergo circa æquales angulos KAL, FAD latera erunt proportionalia: ergo vt kA ad AL, ita FA ad AD: ergo vt KA ad FA, ita AL ad AD: ergo rectangulum KAD æquabitur rectangulo FAL, hoc eſt HAE: ergo vt AD ad AE, ita AH ad AK. Quod fieri poteſt.



[a] 32. tertij.

Compoſitio.

Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.

Protrahatur igitur AC ad partes C in E, ad partes A in infinitum; fiat autem vt AD ad AE, ita AH ad AK: at verò ex puncto k ducatur KL tangens circulum HFE, in puncto L, à puncto autem L, per A ducatur LF, & à puncto F per D, agatur FM, ducaturque LM; mox autem per centrum C ab eodem F agatur FN ſecans perpendicularem GI in B.

Quoniam igitur facimus hunc in modum triangula illa ſimilia, habito puncto F, ex hoc ducta per C centrum, quæ rectam excitatam GI perpendicularem ſecet in B, comparabitur trianguli vertex circuli centrum, cuius circumferentia tangit circumferentiam circuli FHE tranſiens per punctum A.

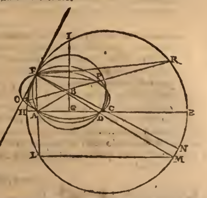
Centro C, interuallo CE deſcribatur circulus EFH: deinde ſecetur AC in G, ita vt AG ſit ad GC in ratione vt S ad R: ex puncto G excitetur GI ad rectos angulos, & ex maiori ſegmento GC abſcindatur GD æquale minori AG: Deinde in recta GI reperiatur punctum B, quo tanquam centro, ſi circulus deſcribatur tranſiens per puncta A, D, ſimul tangat circulum FIEH, verbi gratia in F, agaturque AB: erit enim triangulum ABC, quod quæritur: nam baſis eius eſt data AC, inſuper laterum AB, BC aggregatum æquale eſt ipſi FC; ſiquidem AB, FB ſunt æquales, BC verò communis, atque adeò æquale illud erit ipſi CF, ſeu CE laterum aggregato. Inſuper ſegmenta AG, GC, ſeruant inter ſe rationem ex conſtructione vt S ad R. Supereſt oſtendendum, quo nam pacto punctum B ſit centrũ &c.

Quoniam igitur fecimus vt AD ad AE, ita AH ad AK, erit rectangulum KAD æquale rectangulo HAE, hoc eſt FAL. Cùm igitur rectangulum KAD æquale ſit rectangulo FAL, erit vt KA ad FA, ita AL ad AD, & permutando vt KA ad AL, ita FA ad AD: quamobrem circa æquales angulos KAL, FAD, latera ſunt proportionalia, proinde triangula

kAL,

KAL, FAD erunt ſimilia, ob id angulus ALk æquabitur angulo ADF: ſed angulus ALK comprehenſus à ſecante, & tangente æqualis eſt angulo LMF in alterno ſegmento: ergo angulus ADF æquabitur angulo LMF: angulus verò ad F communis eſt vtrique triangulo ADF, LMF: ob id reliquus FAD, reliquo FLM æqualis erit: propterea triangulum FAD ſimile erit triangulo FLM: ſed ſi fuerint duo triangula ſimilia, quorum vertex ſit communis, circulus circumſcriptus triangulo minori tangit in puncto verticis, circulum circumſcriptum triangulo maiori vt infra conſtabit ergo circulus tranſiens per puncta F,A,D, neceſſariò tanget circulum HFIE, intus quidem in puncto F, Dico autem huiuſmodi circuli centrum neceſſariò eſſe punctum B; ita vt punctum iſtud interſectionis diametri FN, cum perpendiculari GI centrum ſit illius circuli, qui tranſiens per puncta A, D, tangit interius circulum HFIE in puncto F. Quoniam enim circulus tranſiens per puncta F,A,D, neceſſariò intus tangit maiorem circulum in F, recta quæ ducitur à contactus puncto F per C, circuli maioris centrum, neceſſariò tranſibit etiam per centrum circuli minoris FAD. Et quoniam GI ſecat biſariam, & ad rectos angulos rectam AD, neceſsè eſt, vt centrum circuli tranſeuntis per puncta A, D, cuius recta AD eſt chorda, neceſsè eſt inquam, vt centrum ipſius circuli ſit in recta GI: debebat autem eſſe in diametro FN: ergo in puncto B, in quo ſe mutuò ſecant GI, FN centrum ſupradictum erit &c.

Quòd autem circulus AFD, tangat interius in puncto F, circulum HFIE, hunc qui ſequitur in modum oſtendemus.



Intelligatur recta OF tangens circulum LFM in puncto F, hæc autem cùm tangat circulum ſectum ab FL conſtituet cum ipſa FL angulum æqualem angulo FML, atque adeo æqualem angulo FDA demõſtratum eſt enim triangulum FAD, ſimile eſſe triangulo FLM; ſed OF tangens circulum LFM in puncto F, ducta eſt ad extremitatem lineæ AF, circulum AFD ſecans in F, facitque angulum OFA æqualem angulo ADF in alterno circuli ſegmento AFD; ergo tangit circulum AFD in puncto F; ſed tangebat etiam circulum LMF in eodem puncto F; ergo circulus AFD, tangetin F, circulum LFM.

Quòd autem ſi recta OF tangit circulum LFM in puncto F, & in eodem etiam circulum AFD, neceſſariò circulus vnus in eodem puncto F ab alio tangi debeat. Sic oſtenditur.

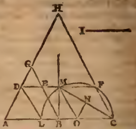
Si circulus circulum non tangit, aut circulus AFD ſecat circulum LFM, in F, ita vt vltra tangentem OF excurrat eam ſecando, vt in O, & tunc OF non tanget circulum AFD: quod eſt falſum; oſtendimus enim tangere. Si verò peripheria circuli AFD non excurrit vltra tangentem, ſed inter rectam OF, & curuam LF contineatur, ita vt ſecet circulum LMF in F, tunc neceſſariò, cùm in eodem ſint plano circuli, debebit ipſe circulus AFD ſecare etiam in alio puncto, vt in Z, circulum LMF: ducatur ZF: agaturque ZP: eſt autem P punctum peripheriæ circuli, qui ſupponitur ſecare circumſerentiam circuli LFM in punctis F, Z, tranſiens per puncta A,D, & protrahatur ad R, agaturque FR, ergo angulus OFZ factus à tangente, & ſecante æquabitur angulo ZPF in alterno circuli ſegmento ZPF; ſed etiam angulus ZRF eſt in alterno circuli ZRF ſegmento; propterea angulus OFZ æquabitur angulo ZRF; erat autem æqualis angulo ZPF, ergo angulus ZPF æquabitur angulo ZRF, externus interno & oppoſito trianguli FPR. Quod fieri non poteſt,

Problema.

Exemplum XI.

Datum ſit triangulum AHC, cuius baſis AC diuiſa ſit biſariam in B; ex B verò acta ſit BG; Oportet ducere DF parallelam ipſi AC, quæ abs BG ſecetur in E, ita vt rectangulum DEF æquale ſit quadrato datæ rectæ I.

Hoc Problema tres habet caſus, aut enim BG parallela eſt ipſi CH, vel non eſt parallela; ſi hoc ſecundum, vel BG protracta ad partes G coit cum CH protracta ad eaſdem par-



tes, vt in K, vel ipſa GB protracta ad partes B, coit cum ipſa HC ad eaſdem partes protracta, vt in K,

Determinatum autem eſt; non enim recta I debet eſſe maior eá quæ poſſit rectangulum ABC,

Reſolutio primi caſus.

Sit iam factum, & ducta linea ſit DF, parallela ipſi AC occurrens BG in E; ductaque ſit DL parallela ipſi BG, & erecta intelligatur BM perpendicularis ad AC æqualis I,

Quoniam igitur rectangulum DEF æquale eſt quadrato I, ſed quadratum BM æquale eſt quadrato rectæ I, cùm BM ſit æqualis ipſi I; ergo rectangulum DEF æquale eſt quadrato BM; ſed rectangulum LBC æquale eſt rectangulo DEF, vt mox conſtabit; ergo rectangulum LBC æquabitur quadrato BM. Quod facere datum eſt,

Lemma.

Quod autem rectangulum LBC æquale ſit rectangulo DEF, ſic oſtendo,

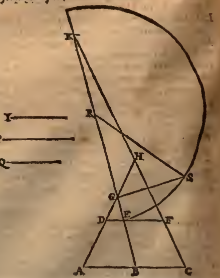
Sunt enim DB, BC parallelogramma, atque adeo oppoſita latera erunt parallela: vnde DE æquabitur LB, & EF æquabitur BC; ergo rectangulum LBC æquabitur rectangulo DEF.

Compoſitio.

Effectio Geometrica ex Analyſi deducta. *Componetur autem ſic; ex puncto B perpendicularis excitetur BM æqualis datæ rectæ I: agaturque MC, quæ bifariam ſecetur in N, ipſi MC agatur perpendicularis NO, occurrens ipſi AC in O. Cum itaque ſint duo triangula ONM, ONC, in quibus duo latera ON, NM æqualia ſunt duobus lateribus ON, NC, vtrunque vtrique, angulus verò ONM æqualis eſt angulo ONC, vterque enim eſt rectus, quare baſis OC æquabitur baſi OM, atque adeo circulus centro O, & interuallo OC deſcriptus tranſibit per punctum M: deſcribatur igitur huiuſmodi circulus, qui ſecet AC in L, & ex L agatur LD parallela ipſi BG, ducaturq; DF parallela ipſi AC occurrens BG in E. Erit enim rectangulum DEF æquale quadrato rectæ I.*

Quoniam igitur rectangulum LBC æquale eſt quadrato BM; ſed rectangulum LBC æquale eſt rectangulo DEF vt ſuperius oſtenſum eſt; ergo rectangulum DEF æquabitur quadrato BM; ſed quadratum BM æquale eſt quadrato I; ergo rectangulum LEF æquabitur quadrato I,

Reſolutio ſecundi caſus.



Sit iam factum: ductaque ſit DF parallela AC, occurrens BG in E, & rectangulum DEF æquale ſit quadrato I; intelligatur BG protracta ad partes G, vt coeat cum CH productâ, in puncto k, Quoniam autem rectangulum DEF ſupponitur æquale quadrato I; ergo rectangulum ABC, hoc eſt quadratum AB ad rectangulum DEF, erit vt ad quadratum I; ratio igitur quadrati AB ad vtrunque ex iiſdem rationibus componitur BC, ad EF, & AB ad DE, hoc eſt KB ad kE, & GB ad GE, hoc eſt rectanguli KBG ad rectangulum kEG; igitur quadratum AB ad rectangulum DEF, ſeu quadratum I, eſt vt rectangulum kBG ad rectangulum KEG, eaque ſit ratio kG ad P, Sed ſi ſit vt rectangulum kBG ad rectangulum kEG, nempè vt quadratũ AB ad quadratum I, ita kG ad P, & ita quadratũ GB ad quadratũ Q, rectangulum PGB, plus quadrato

Q æqui-

Qæquabitur rectangulo KEG, hoc eſt quadrato GS, quæ poſſit huiuſmodi rectangulum; perinde igitur eſt quadratum GS, ac rectangulum PGB, plus quadrato Q; ex quadrato igitur GS, innoteſcit rectangulum KEG.

Quoniam igitur rectangulum DEF, æquale eſt quadrato I; ergo quadratum AB ad quadratum I, eandem habet rationem, quam habet ad rectangulum DEF; ſed quadratum AB, hoc eſt rectangulum ABC, cùm AB, BC, ſint æquales, ad rectangulum DEF, rationem habet compoſitam ex BC, ad EF, & AB, ad DE; ergo quadratum AB ad quadratum I, rationem habet compoſitam ex ratione BC, ad EF, & AB, ad DE; ſed rectangulum KEG, ad rectangulum KEG, rationem habet compoſitam ex ratione BC, ad EF, hoc eſt ex KB, ad KE, & ex ratione AB, ad DE, hoc eſt GB ad EG; ergo rectangulum KBG, ad rectangulum KEG, rationem habebit, vt quadratum AB, ad quadratum I; ſed vt KG ad P, ita quadratum AB, ad quadratum I; ergo rectangulum KBG ad rectangulum KEG, rationem habebit, vt KG ad P; ergo conuertendo, rectangulum KEG, hoc eſt quadratum GS, hoc eſt rectangulum PGB, plus quadrato Q, ad rectangulum KBG, hoc eſt ad rectangulum KGB, plus quadrato GB, erit, vt P, ad KG, hoc eſt vt rectangulum PGB ad rectangulum KGB; ergo vt rectangulum PGB, ad rectangulum KGB, ita quadratum Q, ad quadratum GB. Hoc eſt vt P ad KG ſeu vt quadratum I ad quadratum AB, ita quadratum Q ad quadratum GB, & conuertendo &c. Quod fieri nihil prohibet.

Compoſitio.

Secetur kB in E, inter GB, ita vt rectangulum ABG ad rectangulum KEG, in ea ſit ratione, quam habet quadratum AB ad quadratum data recta I: nempè fiat vt quadratum AB ad quadratum I, ita kG ad aliam vocatam P: mox verò fiat itidem, vt KG, ad P, hoc eſt vt quadratum AB ad quadratum I, ita quadratum GB, ad quadratum Q; deinde rectangulo ſub GB, & P, addatur quadratum inuentum Q, biſſecetur autem KG in R, & ad quadratum RG addatur aggregatum ex rectangulo ſub P in GB, & quadrato Q, videlicet ex puncto G excitetur perpendicularis GS, quæ poſſit aggregatum prædictum; & ex R agatur RS, centro verò R, interuallo RS, deſcribatur circulus ſecans KB, in E, & per E agatur DF parallela ipſi AC. Dico punctum E Problemati ſatisfacere, ita vt rectangulum kBG ad rectangulum kEG in ea ſit ratione, quam habet kG ad P, atque adeò quadratum AB ad quadratum I vnde rectangulum DEF; æquale ſit quadrato I. *Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.*

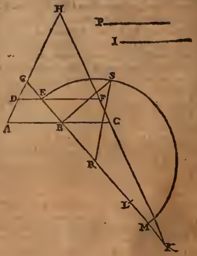
Quoniam igitur eſt vt quadratum I ad quadratum AB, ſeu vt P ad KG, ita quadratum Q ad quadratum GB, hoc eſt, vt rectangulum PGB ad rectangulum KGB, ita quadratum Q ad quadratum GB; ergo per 12. quinti, vt rectangulum PGB plus quadrato Q, hoc eſt quadratum GS, hoc eſt rectangulum KEG, ad rectangulum KGB, plus quadrato GB, hoc eſt rectangulum KBG, erit vt rectangulum PGB ad rectangulum KGB, hoc eſt vt P ad KG; ergo conuertendo rectangulum KBG ad rectangulum kEG erit, vt KG ad P; ſed vt KG ad P ita quadratum AB ad quadratum I; ergo rectangulum kBG ad rectangulum KEG, rationem habebit vt quadratum AB ad quadratum I; ſed rectangulum KBG ad rectangulum KEG rationem habet compoſitam ex ratione KB ad KE, hoc eſt BC ad EF & ex ratione GB ad EG, hoc eſt AB ad DE; ergo quadratum AB ad quadratum I rationem habebit compoſitam ex ratione BC ad EF, & AB ad DE; ſed ex iiſdem rationibus BC ad EF, & AB ad DE componitur ratio rectanguli ABC, hoc eſt quadrati AB, cum AB, & BC ſint æquales ad rectangulum DEF; ergo quadratum AB ad quadratum I, eandem habet rationem quam habet ad rectangulum DEF; ergo rectangulum DEF æquabitur quadrato I.

Reſolutio tertij caſus.

SIt iam factum, ductaque ſit DF parallela AC, rectangulum DEF æquale ſit quadrato I, coeunte GB protracta ad partes B, cum HC protracta ad partes C, in puncto K; perpendendum autem quid inde ſequatur, vt prodeat præparatio, ac inſinuatio ad Analyſin quod ex dictis in ſecundo caſu facilè conſtat. Interim,

Quoniam igitur rectangulum DEF æquale eſt quadrato I; ergo quadratum AB ad rectangu-

ctangulum DEF eandem habet rationem, quam habet ad quadratum I; ſed ratio rectanguli GBK ad rectangulum GEK componitur ex ratione BC ad EF, hoc eſt BK ad EK, & ex ratione AB ad DE, ſeu BG ad EG, ex quibus componitur ratio rectanguli ABC, ſeu quadrati AB; eſt enim AB æqualis BC, ad rectangulum DEF; ergo rectangulum GBK ad rectangulū GEK, erit vt quadratū AB ad quadratū I,eaq; ſit ratio BK,ad P;ſed rectāgulū GEK. æquale eſt rectāgulo PGB vt facilè oſtendi poteſt ergo vt BK ad P,ita rectāgulū GBK ad rectāgulum PGB;ergo per conuerſionem rationis erit, vt BK ad BK minus P, ita rectangulum GBK ad rectangulum GBK minus rectangulo PGB; ergo rectangulum GBK minus rectangulo EBK, plus rectangulo EBG minus quadrato EB, æquabitur rectangulo PGB; ergo rectangulum EBK minus rectangulo EBG plus quadrato EB, plus rectangulo PGB æquabitur rectangulo GBK; ergo vtrinque ſubtracto rectangulo PGB, rectangulum EBK, minus rectangulo EBG plus quadrato BE, æquabitur rectangulo GBK, minus rectangulo PGB; nempè differentiæ rectangulorum quorum vnum GBK, alterum PGB; ſed rectangulum EBK, minus rectangulo EBG, plus quadrato EB,idem eſt quod rectangulum EBL, plus quadrato EB, ergo differentia rectangulorum, quorum vnum GBK, aliud PGB æqualis eſt rectangulo EBL, plus quadrato EB, ſed rectangulum EBL plus quadrato EB, idem eſt quod rectangulum BEL; ergo rectangulum BEL æquabitur rectangulorum prædictorum differentiæ; ſed rectangulum EBM æquale eſt quadrato BS differentiæ rectangulorum quorum vnum GBK, aliud verò PGB; ergo rectangulum EBM æquabitur rectangulo BEL;ergo &c.Quod fieri poteſt.



Compoſitio.

Effectio Geometrica, ex Analyſi deducta.

Secetur KG in E inter B, G ea lege vt rectangulum kBG ad rectangulum kEG, rationem habeat, quam quadratum AB ad datum quadratum I, nempè fiat vt Bk ad P,ita quadratum AB ad quadratum I, proindè ſecetur LK æqualis BG, atque differentia BL diuidatur biſariam in R, & ex B excitetur BS, quæ poſſit differentiam rectangulorum ſub BK, & BG, & ſub P, & BG; agatur RS; centro autem R, interuallo RS deſcribatur circulus ſecans GK in E; punctum enim E Problemati ſatisfaciet; nam rectangulum kBG ad rectangulum KEG rationem habebit vt Bk ad P, ſiue vt quadratum AB ad quadratum I, atque adeo rectangulum DEF æquabitur quadrato I.

Quoniam igitur ER eſt æqualis RM, & BR æqualis eſt RL; ergo reliqua EB æquabitur reliquę LM; ergo EL æquabitur BM; ergo rectangulum EBM æquabitur rectangulo BEL; ſed rectangulum EBM æquale eſt quadrato BS, hoc eſt differentiæ rectangulorum, quorum vnum ſub BK, & BG, aliud ſub P, & BG continetur; ergo rectangulum BEL æquabitur rectangulorum prædictorum differentiæ; ſed rectangulum BEL, idem eſt quod rectangulum EBL plus quadrato EB; ergo rectangulum EBL, plus quadrato EB æquabitur differentiæ rectangulorum, quorum vnum ſub BG, & BK, aliud verò ſub P, & BG continetur, ſed rectangulum EBL, plus quadrato EB, idem eſt quod rectangulum ſub BK, & EB, minus rectangulo

ctangulo ſub EB, & GB plus quadrato BE; hæc igitur æqualia erunt prædictorum rectangulorum differentiæ, hoc eſt rectangulo ſub GB, & BK minus rectangulo ex P in GB: vtrinque addatur rectangulum ex P in GB, fiet rectangulum, ex BK in EB, minus rectangulo ex BG in EB, plus quadrato EB plus rectangulo ex P in GB æquale rectangulo ex BG in BK; ergo rectangulum ex BG in BK minus rectangulo ex BK in EB, plus rectangulo ex EB in GB minus quadrato EB æquabitur rectangulo ex P in GB.

Quoniam verò eſt vt BK ad BK minus P, ita rectangulum GBK ad rectangulum GBK minus rectangulo ex P in GB; ergo per conuerſionem rationis eſt, [a] vt BK ad P, ita rectangulum GBK ad rectangulum ex P in GB; ſed rectangulum GEK æquale eſt rectangulo PGB; ergo rectangulum GBK ad rectangulum GEK erit, vt BK ad P, hoc eſt vt quadratum AB ad quadratum I. Proportio autem rectanguli GBK ad rectangulum GEK componitur ex ratione BK ad EK, ſeu BC ad EF, & BG ad EG, hoc eſt AB ad DE, ex quibus rationibus, nempè BC ad EF & AB ad DE, componitur ratio rectanguli ABC, ſeu quadrati AB, eſt enim AB æqualis BC, ad rectangulum DEF; ergo quadratum AB ad rectangulum DEF, eam habet rationem, quam habet ad quadratum I; ergo rectangulum DEF æquabitur quadrato I.

a Corol. 19. quinti.

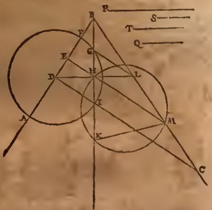
Problema.

Exemplum XII.

Dato vno è lateribus trianguli, angulum verticis ambientibus, dato verticis angulo, dataque demùm ratione, quam habet rectangulum ſub lateribus ad rectangulum ſub baſeos ſegmentis factis à recta diuidente verticis angulum bifariam, reperire triangulum.

Hoc autem perinde eſt ac ſi dicamus; eſto datus angulus ABC bifariã ſectus à recta BK, iniunctum verò ſit inter rectas AB, BC, aptare rectam quandam, verbi gratia, DC, ex dato puncto D, quæ ita diuidatur ab illa recta BK in puncto I, ita vt rectangulum ſub DB, BC ad rectangulum DIC datam habeat rationem, vt R ad S.

Reſolutio.



SIt iam factum; ſitque recta aptata DC, ſic diuiſa ab ipſa BK in puncto I, ita vt rectangulum ſub DB, BC, ad rectangulum DIC rationem habeat, datam vt R ad S; ſecetur BL æqualis BD, ducaturque DL, occurrens BK in H. Centro D, interuallo DI, circulus intelligatur deſcriptus ſecans AB, in F, & A; & BK, in I, & G: ductaque intelligatur GL.

Primò autem præhabendum, quod rectangulum DBC æquale eſt quadrato BI, plus rectangulo DIC; in cuius gratiam hæc inſtituitur *Reſolutio lemmatica.*

Quoniam igitur rectangulum DBC æquale eſt quadrato BI, plus rectangulo DIC; ergo quadratum DB ad quadratum BI, plus rectangulo DIC eſt [a] in eadem ratione, in qua eſt ad rectangulum DBC; ſed vt DB ad BC, ita [b] quadratum DB ad rectangulum DBC; ergo & quadratũ DB ad quadratum BI, plus rectangulo DIC, erit [c] vt DB, ad BC; ſed vt DB ad BC, ita [d] DI ad IC, & vt DI ad IC, ita [e] quadratum DI ad rectangulum DIC; ergo, vt quadratum DB, ſeu quod idem eſt, vt [f] rectangulum ABF, plus quadrato DI, ſeu quadrato DF, ad quadratum BI plus rectangulo DIC, ita [g] quadratum DI, ad rectangulum DIC; ergo vt rectangulum ABF ad quadratum BI, ita [h] quadratum DI ad rectangulum DIC; ſed vt DI ad IC, ita, ſumpta communi altitudine DI, eſt [i] quadratum DI ad rectãgulum DIC, & vt Bo ad BI, ſumpta

a 7. quinti.
b 1. ſexti.
c 11. quinti.
d 3. ſexti.
e 1. ſexti.
f 6 ſecundi.
g 11. quinti.
h 19. quinti.
i 1. ſexti.

i 30. tertij; 1. communi altitudine BI, ita K rectangulum ABF, hoc eſt rectangulũ L GBI ad quadratum
ax. pri; 1. ſexti; & 7. quinti. BI; ergo vt BG ad BI, ita M DI ad IC; ergo permutãdo vt BG ad DI, ita N BI ad IC; ſed BG
L 30. tertij, et ad GL, eſt O vt BI ad IC; ergo BG ad GL, eſt P vt BG ad DI; ergo baſis GL eſt Q ęqualis baſi
1. ax. pri. DI; ſed angulus DHI æqualis eſt R angulo LHG; ergo latera DH, HI æqualia ſunt S late-
M 11 quinti. N 16. quinti. ribus LH, HG. Quod ita ſe habet.

O ex lemmate ſequenti. P 11. quinti. Q 9. quinti. R 15. primi. S 29 pri. & 26. eiuſdem.

Lemma.

Quod autem BG ad GL ſit vt BI ad IC, ſic oſtendo. *Quoniam GH eſt* a *æqualis HI, & DH æqualis* b *HL, & anguli ad verticem H ſunt æquales, vtpote recti; ergo angulus IGL æquabitur* c *angulo GID; ergo GL erit* d *parallela DC, ergo vt BG ad GL, ita* e *BI ad IC.*

Compoſitio.



a 3 tertij. b 4 primi. c 4 primi. d 27. primi. e 29. primi. & 4. ſexti. α 3. tertij, & 4. primi. β 15. primi. γ 4. primi. δ 7 quinti. ε 11. quinti. ζ 16 quinti. η 1. ſexti. θ 30 tertij, et 1. ax. pri. ι 1. ſexti. κ 11. quinti.

Quoniam ergo latera DH, HI, æqualia ſunt α lateribus LH, HG, ſed angulus DHI æqualis eſt β angulo LHG; ergo baſis GL ęquabitur γ baſi DI; ergo vt BG ad GL, ita δ BG ad DI, ſed vt BG ad GL, ita BI ad IC; ergo vt BG ad DI, ita ε BI ad IC; & permutando erit ζ vt BG ad BI, ita DI ad IC; ſed vt BG ad BI, ſumptâ communi altitudine BI, ita η rectangulum GBI, hoc eſt θ rectangulũ ABF, ad quadratum BI; eſtque etiam vt DI ad IC, ita, ſumpta communi altitudine DI, ι quadratum DI ad rectangulum DIC; ergo erit, κ vt rectangulum ABF ad quadratum BI, ita quadratum DI ad rectangulum DIC.
λ 12. quinti. Cùmque ſint λ omnia antecedẽtia ad omnia conſequentia, vt eſt vnum antecedentium ad vnum conſequentium; er-
μ 6. ſecundi. go vt rectangulum ABF plus quadrato DI, ſeu quadrato DF, vel quod idem eſt, μ quadra-
tum DB ad quadratum BI plus rectangulo DIC, ita quadratum DI, ad rectangulum DIC;
ν 1. ſexti. ξ 3. ſexti. ſed vt quadratum DI, ad rectangulum DIC, ita ν DI ad IC; & vt DI ad IC, ita ξ DB ad BC;
ο 11. quinti. ergo vt quadratum DB ad quadratum BI, plus rectangulo DIC, ο ita DB ad BC: ſed vt DB
π 1 ſexti. ad BC, ſumptá DB communi altitudine, ita π quadratum DB ad rectangulum DBC; ergo vt
ρ 11. quinti. quadratum DB ad quadratum BI plus rectangulo DIC, ita ρ quadratum DB ad rectangu-
σ 9. quinti. lum DBC; ergo rectangulum DBC æquabitur σ quadrato BI, plus rectangulo DIC. Quod oſtendendum erat.

Reſolutio.

DEinde demonſtrandum principale intentum, quod nempè rectangulum DBC ad rectangulum DIC, rationem habeat, quam R ad S, & quidem præmiſsa decenti præparatione; ſcilicet inter R minus S, & S, media reperiatur T, & vt R minus S ad T, ita fiat BH ad Q, & vt BH ad Q, ita Q ad Hk.

Quoniam igitur rectangulum DBC ad rectangulum DIC rationem habet, vt R ad S, ſed quadratum BI, vna cum rectangulo DIC æquale eſt rectangulo DBC, vt oſtenſum eſt; ergo
a 7. quinti. quadratum BI vna cum rectangulo DIC ad rectangulum DIC rationem habebit, a vt R ad
b 17. quinti. S; ergo diuidendo b quadratum BI ad rectangulum DIC, atque adeo quadratum BH ad rectangulum EHM (ex iiſdem enim rationibus componuntur) habebit eandem proportionem, quam habet R minus S ad S; factum eſt autem vt R minus S ad T, ita T ad S; & vt R
c coral. 20. ſexti; 22. eiuſdem, et 11. quinti. minus S ad T, ita BH ad Q: vnde quadratum BH ad quadratum Q rationem habet, c vt R minus S ad S; ergo quadratum BH ad quadratum Q eandem habebit d rationem, quam
d 11. quinti. habet ad rectangulum EHM; ſed rectangulum BHK æquale eſt e quadrato Q, (cum factum
e 17. ſexti. f 7. quinti, et 1. ax. pri. ſit, vt BH ad Q, ita Q ad HK) ergo rectangulum EHM æquabitur f rectangulo BHK; ergo vt EH ad Hk, ita g BH ad HM; & permutando vt EH ad HB, ita h KH ad HM, ergo æquiangula
g 16. ſexti. h 16. quinti. i 5. ſexti. ſunt triãgula EHB, kHM, atque adeo ãgulus EBH æqualis erit angulo HMK, æqualibus exiſtentibus ad verticem BHE, MHK; vnde reliquus i æqualis reliquo. Quod fieri poteſt.

In hoc igitur verum, veluti in ἄρπακτον, incidimus, & hinc effectionem addiſcimus.

Compo-

Compoſitio.

Secentur æquales BD, BL, ductaque DL, quæ erit perpendicularis ad BK. Inter R minus S, & S, media reperiatur T, & vt R minus S ad T, ita fiat BH ad Q: fiat verò vt BH ad Q, ita Q ad HK; & ſuper HK deſcripto circuli ſegmento HMK, quod capiat angulum æqualem angulo ABK. Ducta MH, & protracta ad E: ductaque MK, & recta EM ex puncto D parallela ducatur DC, occurrens rectæ BK in I. Dico rectangulum ſub DB, BC, ad rectangulum DIC, rationem habere datam, vt R ad S. *Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.*

Centro D ad interuallum DI deſcribatur circulus ſecans AB in F, ſecans BK in G, agatur GL.

Et quoniam angulus EBH æqualis eſt angulo HMK ex conſtructione; anguli autem ad H ſunt æquales, vtpotè ad verticem, & reliquus æqualis α reliquo; ergo triangula EHB, KHM, ſunt æquiangula; ergo vt EH ad HB, ita β KH ad HM, & permutando γ vt EH ad HK, ita BH ad HM: ergo rectangulum EHM æquabitur δ rectangulo BHK; ſed rectangulum BHK æquale eſt ε quadrato Q (factũ eſt enim vt BH ad Q, ita Q ad HK); ergo eadẽ eſt ζ ratio quadrati BH ad quadratum Q, quæ eſt ad rectangulum EHM; ſed quadratum BH ad quadratum Q, rationem habet η vt R minus S, ad S (factum eſt enim vt R minus S ad T, ita T ad S; & vt R minus S ad T, ita BH ad Q) ergo quadratum BH ad rectangulum EHM, atque adeò quadratum BI ad rectangulum DIC (ex ijſdem enim rationibus componuntur) eandem habebit θ rationem, quam habet R minus S ad S; ergo componendo ι quadratum BI plus rectangulo DIC, ad rectangulum DIC, erit vt R ad S; ſed quadratum BI, plus rectangulo DIC, vt oſtendimus, æquatur rectangulo DBC; ergo rectangulum DBC ad rectangulum DIC erit, κ vt R ad S. Quod facere oportebat.

α 32. primi.
β 4. ſexti.
γ 16. quinti.
δ 16. ſexti.
ε 17. ſexti.
ζ 1. quinti.
η cor. 20. ſexti, 22. eiuſdẽ, & 11. quinti.
θ 11. quinti.
ι 18. quinti.
κ 7. quinti.

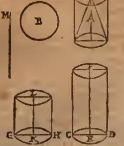
AD AVCTORIS METHODVM, EAM, QVA ARCHIMEDES IN PROblematum reſolutionibus vtebatur, reuocari oſtenditur.

SI quis autem noſtram hanc Methodum pro reſoluendis Problematibus cum ea, qua vſus eſt Archimedes, contulerit, facilè deprehendet tantam inter ipſas eſſe affinitatem, vt illam ad noſtram reduci facilè dixerit. Quod vt probè intelligas, iuuabit vnum, vel alterum Problema noſtra hac Methodo reſoluendum aſſumere, quibus ſuâ iampridem Archimedes ſatisfecit. *Auctoris Methodo Archimedis Problemata demonſtrantur.*

Problema.

Dato cono, vel cylindro, ſphæram inuenire cono, vel cylindro æqualem. Exemplum XIII.

Reſolutio.



SVpponatur iàm factum itaut ſphæra B, ſit æqualis cono, vel cylindro A. Fiat cylindrus CFD coni vel cylindri A ſeſquialter, atque adeo ipſius ſphæræ B; fiat etiam eidem ſphæræ B ſeſquialter cylindrus GLH, nempè cylindrus, cuius baſis eſt circulus ſphæræ maximus, & altitudo æqualis diametro eiuſdem & vt CD ad GH, ſic GH ad M.

Quoniam igitur ſphæra B eſt æqualis cono, vel cylindro A: ſed cylindrus CFD eſt ſeſquialter coni vel cylindri A atque adeo ſphęrę B & cylindrus GLH ſeſquialter eſt ipſius ſphærę B; ergo cylindri CFD, GLH, erunt inter ſe æquales; ergo vt baſis CD ad baſin GH, hoc eſt vt quadratum CD ad quadratum GH, ſic a altitudo KL, vel eius æqualis GH ad altitudinem EF; ſed vt prima CD, ad tertiam M, ita quadratum primæ CD a 15. duodecimi.

 ad qua-

ad quadratum ſecundæ GH; ergo vt CD ad M, ita GH ad EF; ergo permutando vt CD ad GH, ita M ad EF; ſed vt CD ad GH, ita ex conſtructione eſt GH ad M; ergo vt CD ad GH, ſic GH ad M, & ſic M ad EF. Quod fieri poteſt.

Et hoc eſt verum πρακτὸν, quo tendit Analyſis, nempè vt inter CD, & EF duæ repe- riantur mediæ proportionales GH, & M in continua ratione, quod fieri poteſt.

Compoſitio.

Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.

Fiat cylindrus CFD ſeſquialter, coni vel cylindri A, & inter CD, FE duæ mediæ reperiantur proportionales GH, & M: mox verò diametro GH deſcribatur circulus pro baſi cylindri GLH, cuius altitudo KL ſit æqualis eidem GH: ſitque demum ſphæra B, cuius diameter ſit itidem æqualis ipſi GH.

Quoniam igitur eſt vt CD ad GH, ita GH ad M, & ita M ad EF, nempè vt GH ad M, ita M ad EF, & vt CD ad GH, ita GH ad M ex conſtructione; ergo vt CD ad GH, ita M ad EF; ergo permutando vt CD ad M, ita GH ad EF; ſed vt [a] prima CD ad tertiam M, ita quadratum primæ CD, ad quadratum ſecundæ GH; ergo vt quadratum CD ad quadratum GH, hoc eſt vt baſis CD ad baſin GH, ita GH vel ei æqualis KL altitudo, ad altitudinem EF; ergo cylindri CFD, GLH erunt [a] inter ſe æquales; ſed cylindrus CFD eſt ſeſquialter coni, vel cylindri A; & cylindrus GLH ſeſquialter eſt [β] eiuſdem ſphæræ B; ergo ſphæra B eſt æqualis cono, vel cylindro A. Quod faciendum erat &c.

[a] 16. quinti.
[a] 15. duodecimi.
[β] Mau. 9. 1. de ſphæra. & cylind. Archimedis.

Problema.

Datam ſphæram plano ſecare, ita vt ſuperficies ſegmentorum rationem inter ſe inuicem habeant eandem, quæ ſit alia data.

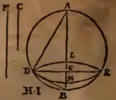
Exemplum XIV.

Sit ſphæra ADBE ſecanda plano DLEM, perpendiculari ad axem ita vt ſuperficies ſegmenti DAE ad ſuperficiem ſegmenti DBE, ſit vt F ad C; huic autem Problemati vt ſatisfiat, ſupponitur iam factũ; nempè ſuperficiem ſegmenti DAE ad ſuperficiem ſegmenti DBE, eſſe in ratione F ad C: præcipitur autem obſeruandum eſſe quid inde ſequatur, & ex hypotheſi quod planum DLEM, ſecet ſphæram modo iam dicto, obſeruandum ſequuturum, axeos ſegmentum AG ad ſegmentum GB, eſſe vt F ad C, idque, tanquàm Theorema, demonſtrat Archimedes.

Nos autem ſupponentes illud iam eſſe factum, hunc in modum ratiocinamur Methodo, qua paſſim vti conſueuimus.

Reſolutio.

Ducantur AD, DB, & radio DA deſcribatur circulus H, & radio DB, circulus I, & hæc ad præparationem pertinent.



Quoniam igitur ſphæra ADBE ſecta eſt plano DLEM, prout Problema iubet, videlicet vt ſuperficies ſegmenti DAE ad ſuperficiem ſegmenti DBE ſit vt F ad C, ſed ſuperficies ſegmenti DAE ad ſuperficiem ſegmenti DBE, eſt [a] vt circulus H ad circulum I, hoc eſt vt circulus, cuius radius DA ad circulũ, cuius radius DB, cùm circulus, cuius radius DA æqualis ſit ſuperficiei ſegmenti DAE, & circulus cuius radius DB æqualis ſit ſuperficiei ſegmenti DBE; ergo circulus, cuius radius DA ad circulũ, cuius radius DB, erit vt F ad C; ſed circulus, cuius radius DA ad circulum, cuius radius DB, eſt vt quadratum DA ad quadratum DB; ergo vt F ad C, ita quadratum DA ad quadratum DB; ſed quadratum DA ad quadratum DB, eſt vt AG ad GB; ergo vt F ad C, ita AG ad GB.

[a] Archimed. lib. 1. de ſphær. & cylĩd. prop. 37. & 38.

Et hoc eſt illud verum πρακτὸν faciendum, quod ex Analyſi præhabita deducitur, cuius præſidio Geometrica effectio comparatur.

Compoſitio.

Compoſitio.

Diuidatur AB ſphæra axis in puncto G, ita vt ſegmentum AG ad ſegmentum GB, ſit vt F ad C, per punctum autem G ducta intelligatur DE ad rectos angulos cum AB: & per rectam DE planum intelligatur tranſiens perpendiculare ad axem, faciens cum ſuperficie ſpharica circuli circumferentiam DLEM. Erit enim ſuperficies ſegmenti DAE ad ſuperficiem ſegmenti DBE, vt F ad C. *Effectio Geometrica.*

Intelligantur ducta AD, DB, & radio AD deſcriptus circulus H, & radio DB, circulus I.

Quoniam igitur eſt vt F ad C, ita AG ad GB, ſed vt quadratum DA ad quadratum DB, ita eſt AG ad GB; ergo vt F ad C, ita quadratum DA ad quadratum DB; ſed circulus, cuius radius DA ad circulum, cuius radius DB, eſt vt quadratum DA ad quadratum DB; ergo circulus, cuius radius DA ad circulum, cuius radius DB, erit vt F ad C; ſed ſuperficies ſegmenti DAE, ad ſuperficiem ſegmenti DBE [a] eſt vt circulus, cuius radius DA ad circulum, cuius radius DB, cùm circulus, cuius radius DA æqualis ſit ſuperficiei ſegmenti DAE, & circulus, cuius radius DB, æqualis ſit ſuperficiei ſegmenti DBE, vt ſuperiùs oſtendimus; ergo ſuperficies ſegmenti DAE ad ſuperficiem ſegmenti DBE, erit vt F ad C.

[a] Archimedes lib. 1. de ſphæra, & cylind. pro. 37. & 38.

De Deductione.

DEductio communis quidem eſt, tàm Theoremati, quàm Problemati, quamobrem de ipſa nobis agendum ſupra fuiſſet, cum de Theorematum reſolutione tractaremus; quia tamen frequentior eſt in Problematibus; propterea de ipſa diſſerere huc transferendum duximus. *Deductio communis eſt Theorematis atq; Problemati.*

Iuuat quammaxime Analyſtam ſedulò perpendere, num oblato Problemati per Deductionem ad aliud ſatisfieri poſſit.

Deductio quid ſit, & in quo conſiſtat iam ſuperiùs fuit à nobis explicatum. Tunc autem Problema aliquod nos ad aliud deducere dicimur, quando ratiocinando ad id peruenimus, quo facto propoſitum ipſum Problema ſolutum redditur, eſt enim Deductio tranſitus ab vno Problemate, vel Theoremate ad aliud; vtriq; ſiquidem communis eſt, vt dicebamus; Ita quidem olim quærentes Cubi duplicationem, Problema ad aliud deduxerunt, quod hoc conſequitur, nempè in duarum mediarum, inuentionem, quæ ſint in continua ratione; ſic intueri licet apud Pappum Alexandrinum Libro ſeptimo Prop. 89; ipſe ſiquidem inſtituta quidem Analyſi, vt oblato Problemati ſatisfaceret ratiocinando Datorum præſidio, deuenit tandem ad tres datas rectas lineas, ita vt Problema deductum ſit ad determinatam ſectionem, Datis tribus rectis lineis, earum vnam ſecare in puncto, & facere proportionem rectanguli ad rectangulum, æqualis ad æquale, quæ quidem apud ipſum videri poſſunt. *Deductio quid.* *Problema de cubi duplicatione, Veteres ad illud quod eſt de duabus medijs continuè proportionalibus deduxerunt.*

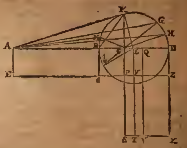
Non diſſimiliter ſequens Problema deduci poteſt ad determinatam additionem, vt mox videbimus. Quod autem Problema ſequitur celebre eſt, non tantum eo nomine quòd ab Apollonio Magno Geometra propoſitum fuerit, ſed etiam quoniam diuerſorum Geometrarum exercuit ingenia, quorum imitatione noſtras quoque vires, etſi tenuiſſimas experiri voluimus. Si quis igitur Analyſin inſtituat noſtra qua vtimur Methodo, videlicet explicito Datorum vſu neglecto, eo Problema deducet, vt punctis connexis recta linea, huic fiat additio, ita vt data cum adiuncta ad adiunctam propoſitam rationem obtineat; quod vt planum fiat ſit. *Problema alterũ quod ad aliud deduci poteſt.*

Problema.

Datis duabus rectis lineis in plano, punctiſque datis, & data proportione inæqualium linearum, poteſt in plano circulus deſcribi, ita vt lineæ à datis punctis ad circumferentiam circuli inclinatæ proportionem habeant eandem datæ proportioni. Exemplum XV.

Data

Data ſint duo puncta A,C, & oporteat facere quod imperatum eſt. Fiat vt AB ad BC, ita AD ad CD, hoc eſt ducatur AC, eique addatur CD cá lege, vt data AC cum adiuncta CD, nempè AD ad CD, ſit vt AB ad BC, hoc eſt AC diuidatur in duas partes, AB, BC ita vt vna ſit ad alteram, quemadmodum R ad S; mox vt AB minus BC ad BC, ita fiat AC ad CD; erit enim vt AB ad BC, ita AD ad DC: quo facto BD biſſecetur in L, & centro L, interuallo alterutro, deſcribatur circulus BMKGHD. Dico ſi à punctis A,C agantur rectæ ad peripheriam vt ſunt AM, MC; AK, KC; AG, GC; AH, HC &c, habere inter ſe eandem rationem, quam habent AB, BC.



Primò autem id oſtendam de duabus AK, kC, quarum vna KC perpendicularis eſt ad BD. Ducantur LK, KB.

Quoniam ex conſtructione vt eſt AB ad BC, ita AD ad CD, erit rectangulum ſub AB, & CD æquale rectangulo ſub BC, & AD. Protrahatur KC vſque ad S, vt CS ſit æqualis AB, eiq; ducatur parallela, & æqualis DX: agatur SX, erit quidem rectangulum CX comprehenſum ſub rectis AB, CD; fiat autem rectangulum ED, vt latus AE, ſit æquale BC, ſiue, quod idem eſt, ad rectam AD rectangulum applicetur, cuius latus alterum æquale ſit BC; ducaturque Ba parallela ipſi AE, vel DZ; fiat LQ æqualis CL: & agatur QV parallela alterutri ipſarum CS, DX: ducatur etiam LT his parallela. Quoniam autem CL, LQ ſunt æquales; item BL, & LD, reliqua BC, reliquæ QD æqualis erit; atque adeo rectangulum QX comprehenditur ſub AB, & BC. Cùm igitur rectangulum ED, æquale ſit rectangulo CX, & EB æquale ſit rectangulo QX, remanebit CV æquale reliquo BZ; cùmque LZ ſit dimidiũ ipſius BZ; eſt enim baſis LD, ſubdupla baſços BD & CT, dimidiũ ipſius CV cùm baſis CL; ſubdupla ſit baſeos CQ proinde CT ęquabitur LZ. At verò CS ęquatur AB, ob id CT rectangulum comprehenſum erit ſub AB, & CL, inſuper LY eſt æqualis CP, ſiue BC, ob id LZ erit comprehenſum ſub LD, & BC, quare rectangulum ſub AB & CL, æquabitur rectangulo ſub BC, & LD, ſeu rectangulo CBL; quapropter erit vt AB ad BC, ita DL ad
a 18. quinti. LC; & cõponẽdo erit a vt AB, plus BC, hoc eſt vt AC ad BC, ita DL plus LC, hoc eſt DC ad
b 16. ſexti. CL. Ergo rectangulum ACL æquale erit b rectangulo BCD; ſed rectangulo BCD æquale
c 17. quinti. eſt quadratum ex CK; ergo eidem quadrato æquabitur rectangulum ACL; proinde c vt AC ad CK, ita CK ad CL; ergo tria puncta A,K,L ſunt in circumferentia, adeò vt ſi ſupra AL deſcribatur ſemicirculus, neceſſariò tranſeat per K, quo fit, vt duæ rectæ Ak, KL angulum efficiant AKL rectum. At quia anguli CBK, BKC ſunt æquales recto (eſt enim BCK rectus, & tres anguli cuiuſcunque trianguli ſunt æquales duobus rectis) ſi BkC ſubtrahatur ab AKL recto, remanebit ipſe CBK: at ſi auferatur ab eodem AKL, angulus idem BKC, remanebunt anguli AKB, CKL, qui ſimul ſumpti æquales erunt angulo KBC, qui æqualis eſt angulo BKL; ſiquidem latera LB, Lk ſunt æqualia; ergo AkB, CKL ſimul ſunt æquales duobus BKC, CkL: communi ſublato CKL remanebit AKB æqualis angulo BKC; ergo per tertiam ſexti ratio AK ad KC eadem erit, quæ AB ad BC, Quod primo loco demonſtrandum erat.

Sumatur deinde quodlibet aliud in peripheria punctum, ſitque illud G, ad quod duæ rectæ AG, GC ducantur: protrahatur GC vſque ad punctum b in peripheria. Quoniam igitur vt AC ad CB, ita dicebamus eſſe DC ad CL; erit permutando, vt AC ad CD, ita BC ad CL, ob id erit rectangulum ACL, æquale rectangulo BCD, ideſt bCG; vt ergo AC ad CG, ita bc ad CL. At verò angulus bcL eſt æqualis angulo ACG ergo triangula erunt ſimilia, & proportionalia erunt latera; proinde erit vt AG ad GC, ita bL ad LC, hoc eſt KL ad LC, nimirum AK ad KC, nimirum AB, ad BC, & ita de alijs etiam lineis ad alia peripheriæ puncta.

Quòd ſi præter hæc, data ſit quoque recta biſſecans angulum ad verticem, & perueniens ad ba-

ſed baſin, oporteat autem triangulum conſtituere ſuper datam baſin AC, agendum eſt vt ſupra, & ex puncto B aptanda eſt in circulo recta quæpiam biſſecanti æqualis, vt, exempli gratia, BK, & ex k ductis kC, kA, factum erit triangulum KAC, Problemati ſatisfaciens.

DE INEVNDA RESOLVTIONE COMPOSITIONEQVE in ijs Magnitudinibus quæ commenſurabiles, & incommenſurabiles dicuntur.

SIue Theorema, ſiue Problema fuerit propoſitum de magnitudinibus commenſurabilibus, & incommenſurabilibus, de quibus acutè, atque ſubtiliter diſputat Euclides Lib. 10. Elementorum, non dubium quin eodem artificio tractari poſſit, quo in quacunque alia magnitudine, quantitateque, imò alia quacunque re, de qua ratiocinatio inſtituta fuerit fieri debere, nos hactenus explicuimus. Cùm igitur Theorema fuerit propoſitum id tanquam verum ſupponentes ratiocinando procedere debemus donec in aliquod verum, vt contemplabile; ſi Problema in verum aliquod, vt operabile incurramus; nam inde regredientes, quod verum aſſumpſimus in Theoremate oſtendimus, & quod tanquam factum in Problemate ſuppoſuimus, veluti conſtructum demonſtramus. Non abſimilis igitur in his eſt, ac in alijs procedendi ratio.

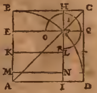
Sed cum in re quacunque reſolutio inſtituenda eſt, & inde compoſitio deducenda magnoperè curandum, ne nos in reſoluendo, componendoue propoſitiones adhibeamus, non conuertibiles, tanquam conuertibiles; quod paſſim vſu venire ſolet; in quo Tyrones frequenter decipiuntur, vtpotè minus aſſueti, non enim omnis propoſitio conuertitur: hoc igitur præ oculis habendum; quod hic animaduertiſſe iuuat. *Notanda quædam.*

Sed propoſitum illud ſit. *Exemplum.*

THEOREMA.

Eſt quadratum ABCD, in quo diameter AC, arcus quadrantis AFC ſecans diametrum in F & per quadrantis punctum F, acta ſint EG, HI, parallela ſibi reſpondentibus lateribus; nempè EG ipſi BC, & HI ipſi CD fient autem quadrata AEFI, & FHCG. Dico quadrata hæc eſſe inter ſe incommenſurabilia.

Reſolutio.



SEcetur Ek, æqualis ipſi EB, item & KM eidem æqualis & agantur parallelæ KL, MN alterutri laterum EF, AI. Et quoniam quadratum AC, duplum eſt quadrati AF, ergo quadratum AF, æquabitur gnomoni OPR ſed rectangulum EL, eſt æquale ipſi BF, quemadmodum KN, vnde EN æquale eſt duobus BF, FD. propterea MI æquabitur quadrato HG.

Quoniam igitur quadratum AEFI eſt incommenſurabile quadrato FHCG, ſed quadratum FHCG eſt æquale rectangulo MI, ergo quadratum AEFI erit incommenſurabile rectangulo MI, ergo AE, erit incommenſueabilis ipſi MA baſes enim ſunt vt rectangula eiuſdem altitudinis ergo EM erit [a] incommenſurabilis ipſi MA, ergo AE erit [b] incommenſurabilis reliquæ EM; atque adeo eius dimidio EK; ſeu BE, ergo tota AB hoc eſt illi æqualis AF erit [c] incommenſurabilis ipſi AE. Quod ita ſe habet ex Vltima Decimi Elementorum.

[a] 17. decimi.
[b] 17. decimi.
[c] 17. decimi.

Compoſitio.

Compoſitio.

α 17. Decimi. β 17. Decimi. γ 17. decimi.

QVoniam AF, hoc eſt illi æqualis AB eſt incommenſurabilis ipſi AE; ergo eadem AE erit α incommenſurabilis reliquæ BE, ſeu EK atque adeò eius duplæ EM ergo EM erit β incommenſurabilis ipſi MA, ergo AE, erit γ incommenſurabilis ipſi MA, ergo quadratum AF erit incommenſurabile rectangulo MI; rectangula enim eiuſdem altitudinis ſunt inter ſe, vt baſes; ſed quadratum FC, eſt æquale rectangulo MI ergo quadratum AEFI erit incommenſurabile quadrato FHCG. Quod oportebat &c.

Aliter etiam hoc idem Theorema oſtendi poſſet; ſed breuitati ſtudentes cætera prætermittimus.

Non diſſimiliter in Problematum reſolutionibus procedendum; noſtra ſiquidem Methodo, quatenus Analyſis ad ἄρρητον tendit, ad Problemata quoque ſoluenda in huiuſmodi quantitatibus, non ſecus ac in re alia quacunque, conducit &c.

FINIS LIBRI PRIMI.

CAROLI RENALDINII

Sereniſsimi Magni Principis Etruriæ

PHILOSOPHI, AC MATHEMATICI,

Et

In Patauino Lyceo Philoſophi primæ Sedis.

DE RESOLVTIONE, ET COMPOSITIONE MATHEMATICA.

LIBER SECVNDVS.

PRÆFATIO.

ET ſi Veteres magnò ſtudio, ſingularique diligentia Mathematicas Diſciplinas proſequuti, magna cum laude reſoluendi rationem excoluerint; vnde huiuſmodi Diſciplinarum cardines figiſſe videantur; Recentiores tamen non minori quidem induſtria, hoc idem argumentum tractantes, ÿſdem Diſciplinis maximum attulerunt incrementum. Cum autem ſuperiori Libro antiquam reſoluendi rationem explicauerimus, ſupereſt, vt hìc illam, quam Recentiorum adinuenit ſolertia, breuiter enucleemus.

Hæc autem ſpecioſâ vtitur Logiſticâ, Numeroſâ tamen non neglectâ, velut illâ, quæ, etiam præter multorum opinionem, ad Reſolutionem Geometricam artificioſè conducit. Vtrâque nos vti conſueuimus; vnde vigeſimus quintus ferè agitur annus, poſt quam quàmplurima Diophanti Alexandrini Problemata Arithmeticè tractata in Geometriam tranſtulimus, quæ nimirùm vtrique Diſciplinæ communia erant; vidimus tamen paucos ab hinc annos, id Parisÿs à quodam inſignis eruditionis Viro præſtitum fuiße non ſine laude. Ex ÿs tamen, quibus

iamdudum ſatisfecimus, quædam in tertia parte huius Operis afferemus, vt cuique intelligere liceat, qua via nos incedentes, eadem, ac ille, Problemata tractauerimus. Recens hæc reſoluendi Methodus, eo nomine ſaltem antiquæ præferenda videtur, quòd illa in Problematum reſolutionibus, vt plurimum præparationem adhibeat, inueſtigatu quidem ijs, quos latet, perdifficilis. Hæc autem non ita, cùm magis ſit obuium id, quod ad effectionem conducit.

Quoniam autem Reſolutio omnis, hac nouâ Arte inſtituta, vel æquatione, vel analogiſmo vtitur, & aliquando elegantiùs præſtat, æquatione ad proportionem reuocata, quod implicatiori modo æquationis vſu perficeret; propterea, & de æquationis tranſmutatione in proportionem, & de explicatione æquationum agendum foret, quia tamen de primo verba fecimus, Capite 14. pag. 121, vbi de Algebra ſpecioſa diſſeruimus; propterea de eo tantùm pauca quædam afferemus, intenti prorſus ad ſecundum explicandum, in quo laboris plurimum requiritur.

Et quoniam ex æquationibus, quædam ſimplices ſunt, quædam autem compoſitæ, ſiue affectæ: primùm propterea tractandum de æquationibus puris, ſiue ſimplicibus; ideò ſit.

De

De Explicandis Æquationibus Puris, ſiue ſimplicibus.
Caput I.

AD ſimplicem explicandam æquationem ferè nullum artificium requiritur, ſiquidem illicò radicis pretium ſe ſe offert. Vt ſi foret æquatio $b - d = 2a$, manifeſtum eſt ſubduplatis partibus æquationis illico Radicis pretium innoteſcere. Vt ſi proponatur. Exemplum I.

Datum latus ita diuidere, vt partes dato differant interuallo. Oportet autem interuallum datum minus eſſe dato latere diuidendo.

Datum ſit latus diuidendum b in duas partes, quæ dato differant interuallo d: eſto pars minor a, maior igitur erit $a + d$, itaque totum latus erit $2a + d$; ſed idem ſupponitur b; ergo erit æquatio $b = 2a + d$, vtrinque ablato interuallo d, fiet $b - d = 2a$, ſeu quod idem eſt $2a = b - d$. Non diſſimili modo procedendum erit in huiuſmodi æquationibus in quarum explicatione ferè nullus eſt labor.

Quando autem æquatio reſolubilis eſt in terminos proportionales, reſolutio fiat, vt ſuperius docuimus, vt ſi proponatur æquatio $r + s)a = s - r)b$: fiant extremi termini $r + s$, & a, medij verò $r - s$, & b, & innoteſcet a; datis enim tribus magnitudinibus nequit ignorari quarta. Eodem pacto procedendum erit in conſimilibus æquationibus, quemadmodum etiam quando æquatio in tres terminos reſolubilis eſt.

Aliquando ad Reſolutionem Problematis, nec æqualitate, nec inquiſitione longa quidem eſt opus, ſed apparet ſtatim ipſorum terminorum ratio quæſita, vel ſaltem opus eſt tantummodo argumentari atque ratiocinari, vt quæſita nimirum & ignota magnitudo à notis magnitudinibus diſtinguatur. Propoſitum igitur ſit. Vt b ad d, ita a, ad $2a - 2g - b$, duplatis antecedentibus proportionales erunt $2b$; d; $2a$; $-2g - b$; & per conuerſionem rationis erunt [a] proportionales $2b$; $2b - d$; $2a$; $2g + b$, & ſubduplatis antecedentibus vt b ad $2b - d$, ita a ad $2g + b$; & conuertendo [b] proportionales erunt $2b - d$; b; $2g + b$; a; atque demum permutando [c] proportionales erunt $2b - d$; $2g + b$; b; a. a Coroll. 19. quinti. b Coroll. 4. quinti. c 16. quinti.

In hac autem Analyſi nulla quidem occurrit æquatio; ſed tantum proportione vtens Analyſta deuenit in notitiam incognitæ ſiue quæſitæ magnitudinis. At verò ſi contingat fractionem æquari integræ magnitudini; reſoluatur fractio in ſua membra, dummodo tamen ea reſolubilis ſit, atque adeo æqualitas in proportionem transmutetur vt ſuperius documus; quod ſi fractio non ſit hunc in modum reſolubilis procedendum eſt, vt ſuperius explicuimus.

Æquationes autem affectæ, quemadmodum ſuperius dicebamus in triplici diſcrimine ſunt, alia quandoquidem eſt Cataphatica, alia Apophatica, alia demum Amphibola, nempè Affirmatiua, Negatiua, & Ambigua. Primùm autem ſe offert conſideranda æquatio depreſſioris poteſtatis, in qua ſcilicet quadratum eſt Poteſtas. Hæc autem tripartito contingit. Prima eſt in qua quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere, & data coefficiente longitudine. Secunda, in qua quadratum afficitur multa plani ſublatere, dataque coefficiente longitudine. Tertia, in qua planum ſub latere dataque coefficiente longitudine afficitur multa quadrati. Quod ſi fuerit æquatio ſolida ſimpla, ac pura. Vt $a^3 = b^2 d$. Intelligere oportet b, & d, extremos in ſerie quatuor continuè proportionalium, in qua quidem a: erit ſecunda. De inuentione autem duarum mediarum in ſerie quatuor continuè proportionalium; dicemus infra.

De explicandis æquationibus compoſitis, e primò de Quadraticis
Caput II.

Varia ac diuerſa Methodi explicandi Æquationem in qua Quadratum afficitur affirmate, ſeu in qua Quadratum afficitur adiunctione plani ſublatere, & data coefficiente magnitudine.

Methodus Diophanti.

Datum homogeneum comparationis ducatur in comitem quadrati, productoque dimidij coefficientis quadratum addatur, & à radice quadrata aggregati dimidium coefficientis auferatur: reſiduum autem applicetur ad quadrati comitem; ſic enim quæſita Radix emerget. Enarratio Methodi Diophanti.

Exemplo illuſtratur.

Proponatur $a^2d + bda = z^2d$. Ducatur z^2d homogeneum comparationis in d, comitem quadrati fitque z^2d^2: huic addatur $\frac{1}{4}b^2d^2$, quadratum ſcilicet dimidij coefficientis $\frac{1}{2}bd$, fitque $z^2d^2 + \frac{1}{4}b^2d^2$, huius autem latus quadratum erit $\text{℞}Q(z^2d^2 + \frac{1}{4}b^2d^2)$ ab hoc auferatur $\frac{1}{2}bd$ dimidium coefficientis, fitque reſiduum $\text{℞}Q(z^2d^2 + \frac{1}{4}b^2d^2) - \frac{1}{2}bd$; omnibus autem applicatis ad d comitem quadrati, fit $\text{℞}Q\left(\frac{z^2d^2 + \frac{1}{4}b^2d^2}{d}\right) - \frac{\frac{1}{2}bd}{d}$; hic autem eſt Radicis valor.

Methodus autem iſta facile ad ſequentem reducetur. Hæc tamen Diophantæa longa quidem eſt, & Geometricis compoſitionibus inutilis. Sequens tamen Antiquorum communis perbreuis, & commodiſſima eſt, & maximè quidem ad Geometricas reſolutiones, atque compoſitiones perficiendas.

Methodus Communis Antiquorum.

Enarratio Methodi communis Antiquorum.

Lateri, quadratum cuius æquale eſt quadrato dimidij coefficientis datæ, datoque comparationis homogeneo, auferatur dimidia coefficiens, reſiduum enim quæſitam Radicem repræſentabit.

EXEMPLVM.

Exemplo illuſtratur.

$a^2 + ba = z^2$

$\frac{1}{4}b^2$ — *Quadratum dimidiæ coefficientis* } Adde

z^2 — *Comparationis homogeneum* }

$\frac{1}{4}b^2 + z$ — *Aggregatum*

$\text{℞}Q(\frac{1}{4}b^2 + z^2)$ — *Aggregati latus* } *Subtrahe.*

$\frac{1}{2}b$ — *Dimidium coefficientis* }

$\text{℞}Q(\frac{1}{4}b^2 + z^2) - \frac{1}{2}b$ *Reſiduum, & latus quæſitum.*

Superior autem Methodus Geometricè paulo infra demonſtrabatur; interim oportet illud idẽ, quod hactenus concluſimus ſequenti paradigmate cõprobare; ſi namq; reperiemus, quod $\text{℞}Q(\frac{1}{4}b^2 + z^2) - \frac{1}{2}b$. ducto in ſe, productum autem $\frac{1}{2}b^2 + z^2 - \text{℞}(\frac{1}{4}b^4 + b^2z^2)$ adſcito $\text{℞}(\frac{1}{4}b^4 + b^2z^2) - \frac{1}{2}b^2$, facto ſcilicet ex b in $\text{℞}(\frac{1}{4}b^2 + z^2) - \frac{1}{2}b$ faciat z^2 comparationis homogeneum; rectè dicemus, $\text{℞}(\frac{1}{4}b^2 + z^2) - \frac{1}{2}b$. radicis quæſitæ pretiũ eſſe. Pragmatia vero ſe habet, vt ſequitur.

$$\text{℞}(\tfrac{1}{4}b^2 + z^2) - \tfrac{1}{2}b = a$$
$$\text{℞}(\tfrac{1}{4}b^2 + z^2) - \tfrac{1}{2}b$$

$$- \text{℞}(\tfrac{1}{16}b^4 + \tfrac{1}{4}b^2z^2) + \tfrac{1}{4}b^2$$
$$\tfrac{1}{4}b^2 + z^2 - \text{℞}(\tfrac{1}{16}b^4 + \tfrac{1}{4}b^2z^2)$$

$$\tfrac{1}{2}b^2 + z^2 - \text{℞}(\tfrac{1}{4}b^4 + b^2z^2) = a^2$$
$$\text{℞}(\tfrac{1}{4}b^2 + z^2) - \tfrac{1}{2}b$$
$$b$$

Addendum $\text{℞}(\frac{1}{4}b^4 + b^2z^2) - \frac{1}{2}b^2 = ba$

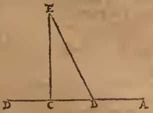
$\frac{1}{2}b^2 + z^2 - \text{℞}(\frac{1}{4}b^4 + b^2z^2) = a^2$

z^2 Productum, quod eſt comparationis homogeneum.

DEMONSTRATIO.

Demonſtratio Geometrica huius Methodi.

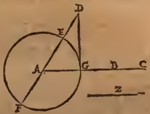
Data ſit coefficiens longitudo recta D B, quæ diuidatur biſariam in C, & erigatur perpendicularis C E æqualis lateri illius quadrati, quod eſt æquale comparationis homogeneo; ducatur B E, cui fiat æqualis C A. Quoniam quadratum ex B E, æquale eſt [a] quadratis B C, C E; & eſt quadratum B E, quadrato C A æquale; ergo quadratum C A æquale erit quadratis C E, C B; at verò quadrato C A eſt [b] æquale rectangulum D A B, vnà cum quadrato C B; ergo rectangulum D A B, vnà cum ipſo quadrato C B, erit æquale quadratis rectarum C E, C B; commune auferatur quadratum C B, remanebit rectangulum D A B æquale quadrato C E; ſed rectangulum D A B æquale eſt [c] quadrato B A, vnà cum rectangulo D B A; ergo quadratum B A, vnà cum rectangulo D B A, erit æquale quadrato rectæ CE, nempe comparationis homogeneo. Cum autem ſit æquatio $a^2 + b a = z^2$, & B A ſit latus illud, cuius quadratum vnà cum rectangulo ſub ſe comprehenſo & D B data coefficiente æquale eſt quadrato ex C E comparationis homogeneo; erit propterea B A Radix quæſita, & D B A planum ſub latere, & data coefficiente longitudine. Si quadrato dimidiæ coefficientis, nempè C B, addatur comparationis homogeneum, nimirum quadratum C E, fit notum quadratum ex B E, hoc eſt C A; ſi autem ex C A auferatur C B, remanet nota B A Radix quæſita; rectè ergo Regula iubet, vt quadrato dimidiæ coefficientis &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] 47. primi.
[b] 6. ſecundi.
[c] 3. tertij.

Idem aliter demoſtratur.

Aliter. Data ſit coefficiens lõgitudo A B, & B C ſit quæſitum latus, quadratum autem Z ſit comparationis homogeneum, ex A B, & BC fiat tota recta A C, & recta A B biſariam diuidatur in G: erigatur perpendicularis G D æqualis ipſi Z: connectatur D A, à qua abſcindatur A E æqualis ipſi A G. Dico E D eſſe latus quæſitum, nempè æquale lateri BC, & optimam eſſe Regulam &c. Deſcribatur circulus centro A, interuallo A G, vel A E; & D A producatur ad F; circulus G E F tanget rectam G D; quia verò quadratum ex B C, vnà cum rectangulo A B C æquale ponitur quadrato Z, & idem quadratum B C vnà cum illo rectangulo A B C æquale eſt [a] rectangulo AC B; ergo A CB rectangulum æquale erit quadrato Z, hoc eſt quadrato G D; ſed rectangulum EDF eſt [b] æquale eidem quadrato G D; ergo rectangulum A C B erit æquale rectangulo E D F: ſed F E, & A B ſunt æquales, quod A G, A E ſint æquales, atque adeo & duplæ A B, F E erunt æquales; quare ſi ab æqualibus F D, A C (ſunt autem F D, A C æquales; cùm enim rectangulum F D E ſit æquale rectangulo A C B, erit vt F D ad A C, ita B C ad E D, permutando [c] verò vt F D ad E D, ita A C ad B C, & per conuerſionem rationis [d], vt D F ad F E, ita C A ad A B, rurſus permutando F D ad A C, vt F E ad A B, ſed F E eſt æqualis A B; ergo F D erit æqualis A C, quemadmodum ſupra dicebamus) auferantur F E, A B remanebunt æquales E D, B C; ergo E D erit Radix quæſita, & rectangulum F E D, erit idem quod A B C planum ſub latere, & data coefficiente longitudine; ſed quadrato A G dimidiæ coefficientis ſi addatur quadratum G D comparationis homogeneum, fit notum quadratum cuius latus eſt A D; ab hoc autem ſi auferatur A E dimidium coefficientis, habetur nota E D Radix quæſita; ergo rectè Regula iubet &c.



[a] 1. ſecundi.
[b] 36. tertij.
[c] 16. quinti.
[d] corol. 19. quinti.

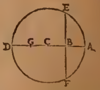
Me-

Methodus peculiaris Vietæ.

Proponatur æquatio $a^2 + ba = z^2$. Intelligatur z media inter extremas: b verò differentia earundem, ex media verò, & differentia extremarum, quærantur extremæ; minor namque erit radix, de qua quæritur.

DEMONSTRATIO.

DAta ſit coefficiens longitudo G B, & radix quæſita B A, producatur A G ad D, vt D G, & B A ſint æquales, & deſcripto circulo, cuius diameter ſit D A, agatur perpendicularis B E, ſeu F E.



Quoniam B A eſt radix quæſita, & G B data coefficiens longitudo, erit G B A planum ſub latere, & data coefficiente, quia verò eſt æquatio $a^2 + ba = z^2$, & D G, hoc eſt radix B A eſt quæſita, erit quadratum D G plus rectangulo D G B, ſeu G B A, hoc eſt rectangulum B D G, ſeu D B A, æquale comparationis homogeneo; at verò rectangulum D B A, eſt æquale quadrato E B; ergo E B erit latus illud, cuius quadratum æquatur comparationis homogeneo, ſed D B, B E, B A, ſunt continuè proportionales, quarum eſt minor B A, media B E, & maior D B, differens à minori D G, hoc eſt B A per G B; ergo in æquatione, quando quadratum afficitur affirmatè &c. Radix eſt minor extrema in ſerie trium proportionalium, & latus, cuius quadratum eſt æquale comparationis homogeneo, eſt media inter extremas, & data coefficiens, eſt differentia extremarum. Quod erat oſtendendum.

Variæ, ac diverſæ Methodi explicandi æquationem, in qua Quadratum afficitur negatè, ſeu in qua Quadratum afficitur, multa plani ſub latere, dataque coefficiente magnitudine.

Methodus Diophanti.

DAtum comparationis homogeneum ducatur in comitem quadrati, & producto, dimidij coefficientis quadratum addatur, & aggregati quadrata radici adyciatur dimidium coefficientis, compoſitum autem ad quadrati comitem applicetur, & proueniet quæſita radix.

Propoſita ſit æquatio $a^2d - bda = z^2d$. Ducatur z^2d, comparationis homogeneum in d comitem quadrati; & fiet z^2d^2, & huic addatur $\frac{1}{4}b^2d^2$ quadratum dimidiæ coefficientis, & fiet $z^2d^2 + \frac{1}{4}b^2d^2$, cuius latus quadratum eſt ℞ Q$(z^2d^2 + \frac{1}{4}b^2d^2)$ huic addatur dimidium coefficientis, nimirum $\frac{1}{2}bd$; & fiet ſumma ℞ Q$(z^2d^2 + \frac{1}{4}b^2d^2) + \frac{1}{2}bd$, & hæc applicetur ad d comitem quadrati, & fiet radix quæſita, ℞ Q$(z^2d^2 + \frac{1}{4}b^2d^2) + \frac{1}{2}bd$.
a d

Methodus communis Antiquorum.

Lateri, cuius quadratum æquale eſt quadrato dimidiæ coefficientis datæ, datoque comparationis homogeneo, addatur dimidia coefficiens; compoſitum ex his, latus, ſeu radicem quæſitam repræſentabit.

EXEMPLUM.

$a^2 - ba = z^2$

$\frac{1}{4}b^2$	*Quadratum dimidiæ coefficientis*	Adde
z^2	*Comparationis homogeneum*	
$\frac{1}{4}b^2 + z^2$	*Aggregatum*	
℞ Q$(\frac{1}{4}b^2 + z^2)$	*Aggregati latus*	Adde
$\frac{1}{2}b$	*Dimidia coefficiens*	
℞ Q$(\frac{1}{4}b^2 + z^2) + \frac{1}{2}b$	*Summa, & radix quæſita.*	

Si

Si deprehenderimus $\text{℞}(\frac{1}{4}b^2 + z^2) + \frac{1}{2}b$. ductum in ſe facere $\frac{1}{2}b^2 + z^2 + \text{℞}(\frac{1}{4}b^4 + b^2z^2)$ ex quo ſi detrahatur $\text{℞}(\frac{1}{4}b^4 + b^2z^2) - \frac{1}{2}b^2$. factum ex $\text{℞}(\frac{1}{4}b^2 + z^2) + \frac{1}{2}b$ in b. fiat z^2 cõparationis homogeneum; rectè dicemus, $\text{℞}(\frac{1}{4}b^2 + z^2) + \frac{1}{2}b$. eſſe radicis quæſitæ pretiũ, & ſupra concluſum fuit, ſequentem in modum demonſtratum fuiſſe.

$$\text{℞}(\tfrac{1}{4}b^2 + z^2) + \tfrac{1}{2}b = a$$
$$\text{℞}(\tfrac{1}{4}b^2 + z^2) + \tfrac{1}{2}b$$

$$+ \text{℞}(\tfrac{1}{16}b^4 + \tfrac{1}{4}b^2z^2) + \tfrac{1}{4}b^2$$
$$\tfrac{1}{4}b^2 + z^2 + \text{℞}(\tfrac{1}{16}b^4 + \tfrac{1}{4}b^2z^2)$$

$$\tfrac{1}{2}b^2 + z^2 + \text{℞}(\tfrac{1}{4}b^4 + b^2z^2) = a^2$$
$$\text{℞}(\tfrac{1}{4}b^2 + z^2) + \tfrac{1}{2}b$$
$$b$$

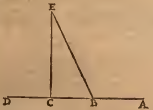
Auferendum $\text{℞}(\frac{1}{4}b^4 + b^2z^2) + \frac{1}{2}b^2 = ba$

$$\tfrac{1}{2}b^2 + z^2 + \text{℞}(\tfrac{1}{4}b^4 + b^2z^2) = a^2$$

z^2 Productum, quod eſt comparationis homogeneum.

DEMONSTRATIO.

Data ſit coefficiens longitudo recta D B, quæ biſariam intelligatur ſecta in C, & ſit C E latus quadrati illius, quod eſt æquale comparationis homogeneo, & rectæ B E ducta intelligatur æqualis C A. Quoniam quadratum B E, & conſequenter quadratum rectę C A, illi æqualis, eſt [a] æquale quadratis rectarum C E, C B, & quadrato C A eſt æquale [b] quadratum C B, vna cum rectangulo D A B; erit ob id quadratum C B, vnà cum rectangulo D A B æquale quadratis rectarum CE, CB; auferatur commune quadratum C B, remanebit rectangulum D A B æquale quadrato C E,

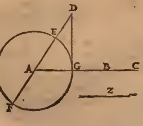


a 47. primi.

b 6. ſecundi.

hoc eſt comparationis homogeneo. Cum autem ſit æquatio $a^2 - ba = z^2$, & D A ſit latus, cuius quadratum minus rectangulo ſub ſe comprehenſo, & data coefficiente longitudine D B, æquale eſt rectangulo D A B (eſt [c] enim quadratum D A æquale duobus rectangulis ſimul ſumptis D A B, A D B) hoc eſt quadrato C E comparationis homogeneo; erit ob id D A, radix quæſita, & A D, B planum ſublatere, & data coefficiente longitudine; at verò ſi ad quadratum ex C B dimidia coefficiente, addatur quadratum C E, comparationis homogeneum, fiet [d] nota recta BE, hoc eſt C A radix quæſita. Rectè ergo Regula iubet, vt quadrato dimidiæ coefficientis, &c. c 2. ſecundi. d 47 primi.

Aliter. Quadratum Z ſit cõparationis homogeneum, & A C latus quæſitum; cum autem ſit æquatio $a^2 - ba = z^2$, erit data coefficiens longitudo minor latere, ſitque A B data coefficiens longitudo, quæ ſecetur biſariam in G, & ex G perpendicularis erigatur G D æqualis ipſi Z, connectaturque D A, quæ producatur vſque ad F, ita vt F A, A G ſint æquales. Dico FD æqualem eſſe ipſi A C, lateri quæſito, & rectè Regulam iubere vt &c. Centro A, interuallo A G, vel A F deſcribatur circulus FGE, qui GD perpendicularem tanget [e] in G; Quoniã autem quadratũ AC, minus rectangulo CAB æquale po-



e coroll. 16. tertij.

nitur

nitur quadrato Z (eſt enim $a^2 - b a = z^2$) & quadratum A C, minus C A B rectangulo
f 2. ſecundi. æquale eſt rectangulo A C B; erit rectangulum A C B æquale quadrato Z, hoc eſt quadrato G D; at verò rectangulum F D E eſt g æquale quadrato GD; ergo rectangulum F D
g 37. tertij. E æquale erit rectangulo A C B; ſed FE, A B ſunt æquales, ergo eodem modo, quo ſupra, tota F D æqualis erit toti A C, atque adeò radix quæſita, & D F E, erit idem, quod C A B planum ſub latere, & data coefficiente longitudine; at vero ſi ad quadratum ex A G dimidia coefficiente addatur A F dimidio coefficiens; fit nota F D radix quæſita. Rectè ergo regula iubet &c. Quod erat oſtendendum.

Methodus peculiaris Vietæ.

Proponatur æquatio $a^2 - b a = z^2$. Intelligatur z media inter extremas: & b differentia earundem; ex media autem, & differentia extremarum, quærantur extrema; ipſarum enim maior erit a, ſeu radix, de qua quæritur.

DEMONSTRATIO.



SIt BD radix quæſita, & G B data coefficiens; ponaturque B A æqualis ipſi D G, & conſtituatur figura, vt vides. Quoniam D B eſt radix quæſita, & G B data coefficiens, erit D B G planum ſub latere, & data coefficiente longitudine; & quia eſt $a^2 - b a = z^2$, erit propterea quadratum D B, minus plano D B G, æquale comparationis homogeneo; ſed quadratum D B, minus plano D B G, eſt æquale rectangulo B D G; ergo & B D G erit æquale comparationis homogeneo; at verò rectangulum B D G eſt æquale rectangulo D B A; ſiquidem B A, D G ſunt æquales; ergo rectangulum B D G, æquale erit quadrato B E, cui nimirum eſt [b] æquale rectangulum D B A; ergo B E erit latus, cuius quadratum eſt æquale comparationis homogeneo. At verò D B, B E, B A, ſunt continuè proportionales, quarum maior D B, media B E, & minor B A differens à maiori D B, per G B coefficientem; ergo in æquatione, in qua quadratum afficitur negatiuè, radix quæſita eſt maior, nempè D B in ſerie trium proportionalium. Latus verò, cuius quadratum eſt æquale comparationis homogeneo, & media in eadem ſerie, & maior differt à minori extrema, nimirum D B, à D G, hoc eſt B A interuallo æquali datæ coefficienti, nempè GB. Quod oportebat oſtendere.

Variæ, ac diuerſæ Methodi explicandi æquationem, in qua Quadratum negatur de afficiente homogeneo, ſeu in qua planum ſub latere, & data coefficiente longitudine afficitur multa Quadrati.

Methodus Diophanti.

Methodi Diophanti. Enarratio. *DAtum comparationis homogeneum ducatur in quadrati comitem, & productum à quadrato coefficientis dimidy auferatur; reſidui verò quadrata radix addatur, vel auferatur dimidio coefficientis, ſumma, vel reſiduum ad quadrati comitem applicetur; nam ità proueniet quæſitum latus.*

Exempla illuſtratur. Proponatur æquatio $b d a - a^2 d = z^2 d$. Datum comparationis homogeneum, puta $z^2 d$, ducatur in comitem quadrati, nimirũ in d, & fiet $z^2 d^2$; & hoc auferatur ex $\frac{1}{4} b^2 d^2$, quadrato ſcilicet dimidiæ coefficientis, & remanebit $\frac{1}{4} b^2 d^2 - z^2 d^2$, cuius radix quadrata eſt ℞ Q $(\frac{1}{4} b^2 d^2 - z^2 d^2)$ hæc autem ſi addatur ad $\frac{1}{2} b d$, dimidium coefficientis, fit $\frac{1}{2} b d +$ ℞ Q $(\frac{1}{4} b^2 d^2 - z^2 d^2)$ & ſi ſubtrahatur fiet $\frac{1}{2} b d -$ ℞ Q $(\frac{1}{4} b^2 d^2 - z^2 d^2)$ aggregatum, vel reſiduum applicetur ad d, comitem quadrati, & fiet $\frac{\frac{1}{2} b d + ℞ Q(\frac{1}{4} b^2 d^2 - z^2 d^2)}{d}$ rurſus fiet $\frac{\frac{1}{2} b d - ℞ Q(\frac{1}{4} b^2 d^2 - z^2 d^2)}{d}$

Æquatio enim hæc duplicem habet radicem, vt alibi diximus.

Me-

Methodus Communis Antiquorum.

Latus, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum dimiæ coefficientis data præſtat dato comparationis homogeneo; ablatum vel additum dimidiæ coefficienti, reſiduum, vel aggregatum, quæſitum latus exhibebit. Enarratio Methodi communis Antiquorum.

E X E M P L V M.

$ba - a^2 = z^2$

$\frac{1}{4}b^2$ *Quadratum dimidiæ coefficientis* } *Subtrahe*
z^2 *Comparationis homogeneum*

$\frac{1}{4}b^2 - z^2$ *Differentia, ſiue reſiduum*
$\mathrm{R}Q(\frac{1}{4}b - z^2)$ *Reſidui latus* } Adde
$\frac{1}{2}b$ *Dimidiũ coefficientis*

$\frac{1}{2}b \maltese \mathrm{R}Q(\frac{1}{4}b^2 - z^2)$ *Aggregatum & latus maius*
$\frac{1}{2}b$ *Dimidia coefficiens* } *Subtrahe*
$\mathrm{R}Q(\frac{1}{4}b^2 - z^2)$ *Reſidui latus*

$\frac{1}{2}b - \mathrm{R}Q(\frac{1}{4}b^2 - z^2)$ *Reſiduum, & latus minus.*

Neć diſſimiliter ſuperiorem pragmatiam Analytiſco more comprobabimus.

$$\frac{1}{2}b \maltese \mathrm{R}(\frac{1}{4}b^2 - z^2) = a$$
$$\frac{1}{2}b \maltese \mathrm{R}(\frac{1}{4}b^2 - z^2)$$

$$\mathrm{R}(\frac{1}{16}b^4 - \frac{1}{4}b^2z^2) \dagger \frac{1}{4}b^2 - z^2$$
$$\frac{1}{4}b^2 \maltese \mathrm{R}(\frac{1}{16}b^4 - \frac{1}{4}b^2z^2)$$

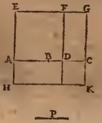
$$\frac{1}{2}b - z^2 \maltese \mathrm{R}(\frac{1}{4}b^4 - b^2z^2) = a^2$$
$$\frac{1}{2}b \maltese \mathrm{R}(\frac{1}{4}b^2 - z^2) = b$$
$$b$$

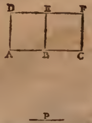
$$\frac{1}{2}b \maltese \mathrm{R}(\frac{1}{4}b^4 - b^2z^2) = ba$$
Subtrahendum $\frac{1}{2}b^2 - z^2 \maltese \mathrm{R}(\frac{1}{4}b^4 - b^2z^2) = a^2$

z^2 Productum, quod eſt comparationis homogeneum.

Sic ſuo modo prō Radice minori.

D E M O N S T R A T I O.





Data ſit coefficiens longitudo AC, quæ bifariam ſecetur in B, ſitque P latus, cuius quadratum æquale ſit comparationis homogeneo; & primò ſit recta P, vt in prima figura minor dimidia coefficiente AB, vel BC; ſecetur AC in D, ſic vt inter ſegmenta AD, DC, ſit P media proportionalis; quamobrem rectangulum ADC erit æquale quadrato P, atque adeò comparationis

homogeneo. Dico tam A D, quam D C, fore latera, & rectè Regulam iubere &c. ſuper A D, D C deſcribantur quadrata A F, D K, & perficiatur figura vt vides. Quoniam A D, D F ſunt æquales & rectangulum ADC eſt æquale quadrato P, hoc eſt comparationis homogeneo; tam H D rectangulum, quàm D G erit comparationis homogeneo æquale. Et quoniam A C eſt data coefficiens, & rectangulum C A D, minus quadrato A D eſt æquale rectangulo A D C, comparationis homogeneo; & eſt æquatio $ba - a^2 = z^2$; erit proinde recta A D radix quæſita, & CAD planum ſub latere, & data coefficiente; hoc idem oſtendetur de D C. At verò quia rectangulum A D C vnà cum quadrato B D æquale eſt quadrato rectæ A B dimidiæ coefficientis; ſi à quadrato eiuſdem A B dimidij coefficientis auferatur rectangulum A D C, nimirum comparationis homogeneum, remanebit quadratum, cuius latus eſt B D; ſi hoc addatur dimidio coefficientis A B fit notum latus A D, nimirum latus maius; & ſi idem latus B D auferatur à dimidia B C remanebit notum latus B C, nempè latus minus; rectè ergo Regula iubet &c.

Quod autem idem oſtendi poſſit de D C patet. Quoniam enim A C eſt coefficiens, & rectangulum A C D, minus quadrato D C eſt æquale rectangulo A D C comparationis homogeneo; & eſt æquatio $ba - a^2 = z^2$. Erit D C latus quæſitum, & A C D planum ſub latere, & data coefficiente longitudine.

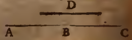
Sit recta P æqualis dimidiæ coefficienti A B, vel B C, vt in ſecunda figura. Dico eodem pacto Regulam rectè iubere &c. ex A B fiat quadratum A E, & compleatur rectangulum A F. Quoniam igitur AB, BC ſunt ſegmenta æqualia, erit tam AE, quàm BF quadratum; & quia tam AB, quàm BC ponitur æqualis ipſi P; erit proinde quadratum *BF*, *vel* A F (ipſorum alterutrum accipiatur nihil refert) æquale comparationis homogeneo; & quia AC eſt data coefficiens, & rectangulum CAB, minus quadrato AB æquatur quadrato BC comparationis homogeneo, & eſt æquatio $ba - a^2 = z^2$, erit proinde AB radix quæſita, & CAB, hoc eſt AF planum ſub latere, & data coefficiente. At verò ſi à quadrato ex AB dimidia coefficiente auferatur BF comparationis homogeneum, nihil remanebit; ſi vero nihil addatur, vel nihil ſubtrahatur dimidiæ coefficienti AB, remanet ipſa coefficiens A B dimidia, & ſimul radix quæſita; rectè itaque Regula iubet &c.

Alia Demonſtratio 4. Aliter. Hoc idem oſtendemus hunc in modum. Data ſit coefficiens DA; ſitque diuiſa bifariam in B, & ex hoc puncto tanquam ex centro deſcribatur circulus D E A, datum ſit latus D F, quod primo ſit minus dimidia coefficiente, cuius quadratum ſit æquale comparationis homogeneo, & ducatur F E parallela ipſi DA, adeo vt ſecet peripheriam in E puncto, a quo cadat perpendicularis EC. Quoniam DA eſt data coefficiens, & rectangulo D A C æquale eſt quadratum C A, vnà cum rectangula D C A, ſeu rectangulum D A C, minus quadrato C A eſt æquale rectangulo D C A comparationis homogeneo, cùm hoc ſit æquale quadrato CE; æquatio autem eſt $ba - a^2 = z^2$, ob id CA erit radix quæſita, & DAC planum ſub latere, dataque coefficiente longitudine; cùm autem DCA rectangulum vna cum quadrato CB ſit æquale quadrato BA, vel DB, fit, vt ſi à quadrato DB, vel ex BA dimidia coefficiente, auferatur rectangulum D CA, nimirum comparationis homogeneum remaneat notum quadratum, cuius latus eſt C B; hoc autem ſi addatur ipſi BA dimidio coefficientis, fit nota CA radix quæſita, & ſi idem latus CB auferatur à D B dimidia coefficiente remanebit D C ſegmentum, quod etiam eſſe quæſitam radicem, nempè minorem, eodem pacto facile demonſtrabimus.



At verò ſi latus, cuius quadratum æquale eſt comparationis homogeneo, fuerit æquale dimidio coefficientis; non enim poteſt eſſe maius, facile omnia demonſtrari poterunt.

Sit D latus, cuius quadratum eſt æquale comparationis homogeneo, & AC data coefficiens ſecta bifariam in B, vt D ſit æqualis vel A B, vel B C; cùm itaque rectangulum A B C ſit æquale quadrato D, erit æquale comparationis homogeneo; ſed quia rectangulum ſub A C data coefficiente, & BC, vel AB, minus quadrato AB, vel BC, eſt æquale rectangulo ABC comparationis homogeneo, & eſt æquatio $ba - a^2 = z^2$; proinde BC, vel AB erit radix quæſita. At verò ſi à quadrato ex AB, vel B C dimidia coefficiente auferatur rectangulum ABC, hoc eſt quadratum A B, vel BC comparationis



ho-

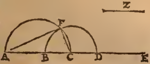
homogeneum, remanebit nihil, quo addito ad dimidium coefficientis, habebitur idem dimidium, vt patet.

Quod autem latus cuius quadratum, &c. non poſſit eſſe maius dimidio coefficientis patet, ex eo quia non poteſt fieri ſubtractio ipſius comparationis homogenei, atque adeo æquatio eſſet falſa.

Corollarium.

Ex dictis collige quando latus comparationis homogenei fuerit minus dimidio coefficientis, tunc duplicem fore radicem; cum autem eſt æquale, vnicam fore radicem nimirum ipſum dimidium.

Aliter. Quadratum Z, ſit comparationis homogeneum, & AE data coefficiens longitudo, quæ ſecetur bifariam in C, & Z erit non maior dimidia A C, vel C E, vt ſupra dicebamus. In AC deſcribatur ſemicirculus A F C, & in eo accommodetur A F, quæ ſit æqualis ipſi Z, agaturque F C; erit [a] autem angulus AFC rectus; ergo quadratum A C erit [b] æquale quadratis laterum AF, FC; quare quadratum CF erit interuallum, ſeu exceſſus, quo quadratum ex AC dimidia coefficiente, ſuperat quadratum AF comparationis homogeneum: modò centro C, interuallo CF, deſcribatur periphæria B F D ſecans A E in B, & D. Dico minus latus ex quæſitis eſſe A B, maius autem AD, & rectè regulam iubere &c. a 31. tertij. b 47. primi.



Quoniam igitur AF, tangit circulum BFD in D, ſiquidem angulus [c] A F C, eſt rectus; quamobrem rectangulū DAB, hoc eſt EBA, cui eſt æquale rectangulum EAB, minus quadrato A B, æquabitur [d] quadrato AF; proinde rectangulū EAB, minus quadrato AB, erit æquale quadrato AF, ſeu rectæ Z comparationis homogeneo; Cum autem ſit æquatio $ba - a^2 = z^2$, & AE ſit data coefficiens longitudo, erit ob id quæſitum latus AB, & EAB erit planum ſub latere, dataque coefficiente; at verò ſi quadrato rectæ C A dimidio coefficientis auferatur quadratum AF nempè comparationis homogeneum, fiet notum quadratum cuius latus eſt CF, quæ ſi auferatur ab AC, nota remanebit AB radix quæſita. c corol. 16. tertij. d 36. tertij.

Secundò quoniam rectangulum BAD eſt æquale quadrato AF, hoc eſt rectæ Z comparationis homogeneo; idem verò rectangulum BAD, hoc eſt EDA æquale eſt rectangulo E AD, minus quadrato AD erit æquale quadrato rectæ Z comparationis homogeneo. Sed æquatio eſt $ba - a^2 = z^2$, & AE eſt data coefficiens; erit AD radix quæſita, & EAD planum ſub latere, & data coefficiente; Si autem à quadrato rectæ A C dimidiæ coefficientis auferatur quadratum AF comparationis homogeneum, remanebit quadratum, cuius latus eſt CF. quod ſi addatur ad A C dimidium coefficientem innoteſcet A D maior radix quæſita; rectè ergo Regula iubet &c.

Methodus peculiaris Vietæ.

Proponatur æquatio $ba - a^2 = z^2$. Intelligatur z media inter extremas, & b aggregatum earundem; & ex media, atque aggregato extremarum quærantur extremæ, nam alterutra erit a, de qua quæritur. *Enarratio peculiaris Methodi Vietæ.*

DEMONSTRATIO.

Data ſit coefficiens longitudo DA, & ſit DC radix quæſita; ſit verò deſcriptus circulus DEA, & à puncto C erigatur CE perpendicularis. Quoniam autem A D eſt data coefficiens, & DC radix quæſita, erit A D C planum ſub latere, & data coefficiente; quia autem D C eſt radix, & eſt æquatio $ba - a^2 = z^2$; erit proindè ADC minus quadrato D C æquale comparationis homogeneo; ſed idem eſt A D C, minus quadrato D C, ac eſt rectangulum D C A; ergo rectangulum DC *Eiuſdem Methodi demonſtratio.*



A erit æquale comparationis homogeneo; ſed rectangulum D C A eſt æquale quadrato C E; ergo quadratum C E, erit comparationis homogeneum. At verò DC, CE, CA, ſunt continuè proportionales, extremarum aggregatum eſt data coefficiens longitudo, & minor extrema DC, radix nimirum quæſita; rectè ergo Regula iubet &c.

Non diſſimili modo nos eandem operationem oſtendemus, radice quidem ſuppoſita, altera extrema, puta C A.

De Explicandis Æquationibus Solidis compoſitis, & primo de Cubicis. Caput III.

Methodi ad explicandam æquationem in qua Cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano, vt $a^3 + b^2 a = z^3$ ſeu z ſolido.

EGimus hactenus de æquationibus affectis,& quidem quadraticis explicandis,quæ nullam Analyſtæ ferè difficultatem afferunt, ac nullam ingerunt curam. Nunc proximum eſt vt ad illas gradum faciamus, quæ altioris ſunt ordinis, proximè ſuccedentes quadraticis, quarum contemplatio Veterum, vt haud parum vexauit ingenia, ita earum explicatio non mediocriter Italiam illuſtrauit, præclarum ſiquidem hoc inuentum Italis acceptum referri debet. Nam Scipio Ferreus Bononienſis, & Nicolaus Tartalea Brixienſis, arduum hoc opus aggreſſi, ſingulari cum laude perfecerunt, ita vt difficillimarum æquationum, de quibus loquimur explicationes tradendo, ſibi gloriam immortalem peperiſſe videantur. Diſſimulandum tamen non eſt, quòd hæc ipſi magis Arithmeticè quam Geometricè præſtiterint, fortaſſis id Poſteritati relinquentes ne nobis locus deeſſet ad ſuppeditandam materiam pro excelſa Mercurij Statua fabricanda.

Italorum laus

Verùm cùm agendum ſit primùm de æquationibus Cubicis,in quibus affectio eſt ſub latere, iuuabit hìc in memoriam redigere, quæ ſcripſimus in primo Tomo, breuiter tamen, quatenus facit ad inſtitutum. Erat autem Canon huiuſmodi.

Cubus tertiæ partis numeri radicum addatur quadrato dimidij numeri abſoluti; aggregati autem ſumatur latus, cui additum, vel ſubtractum dimidium numeri abſoluti, gignit Binomium, & Apotomen. Si itaque latus cubicum ipſius Apotomes ſubtrahatur à latere cubico binomij, reſiduum erit quæſitæ radicis pretium.

Erat autem æquatio huiuſmodi 1 c + 72 R = 1720. cuius æquationis adinuenimus radicem eſſe 10. nam quadratum dimidij numeri abſoluti erat 739600, cubus verò tertiæ partis numeri radicum 13824. Aggregatum ex his 753424, cuius radix quadrata eſt 868, cui addito 860, fit 1728; cuius latus cubicum eſt 12; at radix quadrata primi aggregati erat 868, dimidium numeri abſoluti eſt 860, horum differentia eſt 8, cuius radix cubica eſt 2; radix autem cubica primi aggregati erat 12; differentia autem inter 2, & 12, eſt 10.

Hæc ſuperior Methodus non inſeruit Geometriæ.

Hæc autem Methodus Geometriæ non inſeruit, ſicut nec etiam altera, cuius Canon erat. Sumatur quarta pars quadrati ex numero abſoluto, & huic addatur vigeſima ſeptima pars cubi ex numero radicum, huius autem aggregati lateri quadrato addatur dimidium numeri radicum, & ab eodem ſubducatur, ex aggregati verò latere cubico ſubtrahatur latus cubicum reſidui; horum namque differentia erit radix quæſita.

Et quidem in eodem exemplo perſiſtendo. Quarta pars quadrati numeri abſoluti eſt 739600, cui ſi addatur 13824, vigeſima ſeptima pars cubi, e numero radicũ, fiet 753424, huius latus quadratum eſt 868, cui ſi addatur &c. Reliqua vide ibi. Nec etiam hæc vti dicebam idonea eſt ad Geometricas effectiones, propterea quod fit aſcenſus ad imaginarias quantitates, à quibus in Geometricis cauendum. Vnde reductio ad quadraticam æquationem per duplicatam hypoſtaſin, eodem laborat vitio.

Superiori numeroſæ æquationi ſpeciebus exhibita reſpondet æquatio $a^3 + 3$ b plano a = 2 z ſolido, de qua in Algebra ſpecioſa pag. 214, diſſeruimus vbi reductionem illam tractauimus, quam hic breuiter ſubijciam numeris enucleatam, a quo ibi breuitati ſtudentes abſtinuimus. Si $e^2 +$ a e æquetur b plano; igitur b pl. ex huiuſmodi conſtitutione intelligendum eſt rectangulum ſub duobus lateribus, quorum minus eſt e, maius autem differt per a.

Quoniam vero $e^2 +$ a e, ſupponitur æquari b pl. propterea a e æquabitur b pl. $- e^2$, atque

que adeò $\frac{b\ pl. - e^2}{e}$ æquabitur a; propterea $\frac{b\ pl.pl.pl. - 3\ e^2\ b\ pl.pl. + 3\ e^4\ b\ pl. - e^6}{e^3}$ $+ \frac{3\ b\ pl.pl. - 3\ b\ pl.\ e^2}{e}$, æquabitur 2 z ſol. Omnibus verò ductis per e^3, & ſecundum Artem diſpoſitis e cubi quadratum + 2 z ſol. e^3 æquabitur b planicubo. Sic autem hæc demonſtrabimus. Supponamus $a^3 + 3$ b pl. a, æquari 2 z ſol., & $e^2 + a\ e$, æquare b pl. Si autem iniunctum oſtendere $e^6 + 2$ z ſol. e^3 æquari b pl.³. Quoniam igitur $e^2 + a\ e$ æquatur b pl., propterea a e æquabitur b pl $- e^2$; atque adeo a æquabitur $\frac{b\ pl. - e^2}{e}$; ergo & eorum cubi æquales erunt; quare a^3 æquabitur $\frac{b\ pl.^3 - 3\ b\ pl.^2\ e^2 + 3\ b\ pl.\ e^4 - e^6}{e^3}$; ac proinde $a^3 + 3$ b plan. a, æquabitur $\frac{b\ pl.^3 - 3\ b\ pl.^2\ e^2 + 3\ b\ pl.\ e^4 - e^6}{e^3} + \frac{3\ b\ plan.^2 - 3\ b\ plan.\ e^2}{e}$. Nam $\frac{3\ b\ pl.^2 - 3\ b\ pl.\ e^2}{e}$ æquiualet 3 b plan. a, æqualia verò ſi æqualibus addantur, orta ſunt æqualia. Atque adeo 2 z ſol. æquabitur $\frac{b\ pl.^3 - 3\ b\ pl.^2\ e^2 + 3\ b\ pl.\ e^4 - e^6}{e^3} + \frac{3\ b\ plan.^2 - 3\ b\ pl.\ e^2}{e}$. Nam $a^3 + 3$ b pl. a æquabatur 2 z ſol. Omnibus ductis in e^3, & 2 z ſol. e^3 æquabitur b pl.³ $- 3$ b pl.² $e^2 + 3$ b pl. $e^4 - e^6 + 3$ b pl.² $e^2 - 3$ b pl. e^4; ac proinde $e^6 +$ 2 z ſol. e^3 æquabitur b pl.³; eadem enim homogenea affecta ſignis + & −, ſe mutuo interimunt.

Vnde conſectarium. Si $a^3 + 3$ b pl. a æquetur 2 z ſol., & ℞ b pl.pl.pl. + z ſol.ſol. − z ſol. æquetur d^3; ergo $\frac{b\ pl. - d^2}{d}$ fit a, de qua quæritur.

Vt autem numeris hæc explicemus, ſuperiorem æquationem ſumamus, nempe 1 c + 72 R = 1720, cui reſpondeat illa $a^3 + 3$ b pl. a = 2 z ſol. Supponamus $e^2 + a\ e$ æquari b pl., & deueniemus vt ſupra ad æquationem illam e cubi quadratum + 2 z ſol. e^3 = planicubo, nempè 1 Q + 1720 R = 13824, cuius radix eſt 8 Verùm quia 1 Q idem eſt quod e cubi quadratum radix eſt ſolida; eſt enim quadratum cubi, atque adeo ad habendam e oportet extrahere radicem cubicam ex octo, eaque eſt 2. Cùm igitur 2 q + a e æquaretur b pl. propterea $\frac{b\ pl. - e^2}{e}$ æquatur a; igitur ſi ex b pl. hoc eſt ex 24 auferatur 4 quadratum ex e, remanebit 20, quo diuiſo per e, proſilit 10, pro valore ipſius a, quæ erat radix ſpecioſæ æquationis $a^3 + 3$ b pl. a = 2 z ſol.; ac ob id numeroſæ æquationis 1 c + 72 R = 1720.

Sed hæc Methodus non conducit ad opus Geometricum, vt vides, ſed Arithmeticæ eſt addicta.

Plerumque æquatio cubica de qua loquimur reducitur ad quadraticam; vnde ipſa deducta eſt, tuncque ſubit eandem explicationem cum ipſa quadratica: vnde maiori non eſt opus artificio ad eius radicis valorem exprimendum, ſed tunc affectio eſt ſub quadrato, atque contingit, quod diximus, quando coefficiens longitudo duobus nominibus conſtat, quorum vnum ductum in quadratum alterius, comparationis homogeneum procreat, de quibus in Algebra ſpecioſa diſſeruimus.

Ad explicandas igitur æquationes, in quibus cubi ſolidis, vel quadrato − quadrata plano-planis ſine affectione, vel cum affectione æquantur alterutro opere indiget Analyſta, vel ſcilicet conſtructionis duarum mediarum inter duas datas continuè proportionalium, vel tris-ſectionis anguli; propterea quod æquationes quadrato-quadratorum ad æquationes cuborum reducuntur; cubi verò affecti ſubquadrato ad cubos affectos ſub latere, quæ quidem æquationes duarum mediarum inuentione, vt dicebamus, vel anguli triſectione perfici poſſunt.

Methodus Communis Recentiorum.

Ex triente coefficientis plani ſub lateralis, tanquam rectangulo ſub lateribus, & ex comparationis homogeneo tanquam differentia cuborum ipſorum laterum, reperiatur aggregatum cuborum

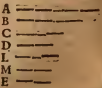
borum ex iiſdem lateribus, & ex hoc aggregato cuborum inuento, & ex eorundem cuborum differentia data, reperiantur latera; horum ſiquidem differentia, quæſitam æquationis radicem exhibebit.

EXEMPLVM.

$a^3 + 3 b^2 a = z^3$ ſeu z ſolido.

- b^2 *Triens plani coefficientis ſublateralis, & rectangulum ſub lateribus datum.*
- z^3 *Comparationis homogeneum, & differentia cuborum prædictorum laterum data. Hinc*
- d^3 *Aggregatum cuborum eorundem laterum inuentum. Hinc*
- f g *Latera inuenta ſupradicti rectanguli. Hinc*
- f-g *Differentia laterum, & latus quæſitum.*

DEMONSTRATIO.

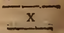


SIt recta A data, quæ poſſit coefficiens planum ſublaterale, ſitque data recta B, cuius cubus ſit comparationis homogeneũ, at verò C poſſit trientem plani ſublateralis; ex cubo autem B, tanquam differentia cuborum data, & ex quadrato ipſius C tanquam dato rectangulo ſub lateribus comprehenſo, reperiatur cubus D aggregatum cuborum ex iiſdem lateribus; ex cubo autem B, tanquam ex differentia cuborum data, & ex cubo ipſius D aggregato cuborum inuento, reperiantur latera L & M, quibus comprehenditur rectangulum iam dictum æquale ſcilicet quadrato ipſius C; horum autem laterum differentia ſit E. Dico E eſſe propoſitæ æquationis quæſitam radicem, ita vt cubus ex E plus triplo ſolido à quadrato ipſius C, ducto in E, æquetur cubo ipſius B.

Quoniam enim cubus differentiæ laterum plus triplo ſolido ſub differentia laterum in rectangulum ſub lateribus æqualis eſt differentiæ cuborum à lateribus; ſed E per conſtructionem eſt differentia laterum L, & M, & cubus ex B eſt differentia cuborum eorundem laterum; ergo cubus ex E plus triplo ſolido à rectangulo ſub L, & M, in E differentiam laterum, æquabitur cubo ipſius B; ſed rectangulum ex L, & M, per conſtructionem æquale eſt quadrato ipſius C; ergo cubus ex E, plus triplo ſolido à quadrato ipſius C, in E differentiam laterum, æquabitur cubo ipſius B; Erat autem æquatio, in qua cubus lateris, plus triplo ſolido ſub quadrato C, in idem latus, æqualis eſt cubo ipſius B; ergo E erit radix propoſitæ æquationis quæſita.

LEMMA.

Datis differentia cuborum, & rectangulo ſub lateribus, cuborum aggregatum ſic reperiunt.



DAta ſit differentia cuborum r^3, at verò rectangulum ſub lateribus ſit s^2, & oporteat reperire aggregatum cuborum à lateribus, quibus rectangulum comprehenditur, quæque ſunt latera cuborum, quorum data eſt differentia. Itaque ſi a, & e ſint lineæ; dataque ſit differentia cuborum ex ipſis nempe $a^3 - e^3$, datumque itidem ſit ſub ipſis rectangulum ae. Oportet aggregatum cuborum puta $a^3 + e^3$ exhibere æquale cubo nempe x^3.

Sumpta ſit arbitraria quædam recta b; reperiantur autem ſeptem continuè proportionales b, r, f, g, h, i, l, item totidem alia b, s, m, n, o, p, q; fiat autem t æqualis quadruplo q, item u æqualis l + t; ſintque inuenta b, x, z, m, f, g, u, nempè inter b, m, duæ mediæ reperiantur x, z, & inter m, u, duæ mediæ reperiantur f, g continuè proportionales; reperiendus eſt autem cubus ex x: reperiantur b, n, p, h, o, o, t, ſeptem continuè proportionales.

Quoniam igitur n^6 æqualis eſt $t b^5$; at vero $t b^5$ æqualis eſt $4 q b^5$, & $4 q b^5$ æquatur $4 s^6$; ergo x^6 æquabitur $4 s^6$; ſed x^6 æquatur $r^6 + n^6$, ſiue $4 s^6$, eſtque $r^6 + s^6 =$ quadrato ex $a^3 + e^3$; ergo x^6 æquabitur quadrato ex $a^3 + e^3$; ergo x^3 æquabitur $a^3 + e^3$.

SCHO.

SCHOLION.

HÆc demonſtratio per imaginarias quantitates procedit, à quibus Geometra cauendum non ſemel monuimus; niſi tamen alia ſuppetet via, ea calcanda eſt, qua quidem obuta dummodo ſcilicet ad veritatem conducat; dum autem per commemoratas quantitates procedit demonſtratio, non eo nomine reycienda, quod aliquid falſi contineat, vel male deducet, ſed quoniam ſubobſcurior cùm ſit intellectui quodammodo tenebras offundit, neque quiſpiam illam redarguat, quòd cauſam non adhibeat tanquam medium ad inferendum; quod enim concomitans eſt, ad cauſa genus reduci ſuperiùs notauimus.

Lemma II.

Datis aggregato; & differentia duorum cuborum, eorum latera ſic reperiunt.

Sint a, & e lineæ rectæ, & $a^3 + e^3$ æquetur 2 b^3, dato cuborum aggregato; præterea $a^3 - e^3$ æquetur 2 d^3 cuborũ differentia data; requiruntur autem a, & e. fiat f^3 æqualis $b^3 + d^3$ & g^3 æqualis $b^3 - d^3$.

Quoniam igitur 2 a^3 æquatur 2 $b^3 + 2 d^3$; ergo a^3 æquabitur $b^3 + d^3$; ſed ex conſtructione f^3 æquatur $b^3 + d^3$; ergo a^3 æquabitur f^3; ergo a, æquabitur f; quamobrem a data erit. Et quoniam 2 e^3 æquatur 2 $b^3 - 2 d^3$; ergo e^3 æquabitur $b^3 - d^3$; ſed g^3 æquatur $b^3 - d^3$ ex conſtructione; ergo e^3 æquabitur g^3; ergo e, æquabitur g.

Lemma III.

Quòd autem cùbus differentię laterum plus triplo ſolido ſub differentia laterum in rectangulum ſub lateribus, ſit æqualis differentiæ cuborum à lateribus, ſic oſtendunt.

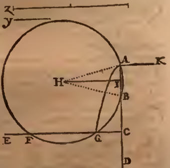
Si enim fuerint a, & b, quantitates datæ; demonſtrabitur cubum ex $a - b$, + triplo ſolido abs rectangulo a b in $a - b$, æquari $a^3 - b^3$; nam cubus ex $a - b$ eſt $a^3 - 3 b a^2 + 3 b^2 a - b^3$; ſed triplum ſolidum prædictum nempè abs 3 b a, in $a - b$ eſt $3 b a^2 - 3 b^2 a$, & ex horum additione fit $a^3 - b^3$; ergo &c.

Modus quo Auctor eſt uſus ad duas medias continuè proportionales inueniendas inter duas datas.

Conſtructio eſt Carteſij. Demonſtratio autem Auctoris.

QVoniam ad huius Problematis effectionem duas medias continuè proportionales inter duas datas opus eſt reperire; ob id non grauabimur hîc in medium afferre modum, quo nos vſi ſumus.

Datæ ſint duæ rectæ Y, Z, inter quas opus ſit reperire duas medias continuè proportionales. Exponatur A D, ex qua abſcindatur A B æqualis Y; mox diuiſa A B bifariam in I fiat I H æqualis dimidio Z, & ad rectos angulos cũ A B; Deinde centro H, interuallo H B, vel H A, deſcribatur circulus; deinde autem ad punctũ A, ducta ſit A K æqualis Y, & ad angulos rectos; hac verò tanquam latere recto, vertice A, circa axem A D deſcribatur parabole A G ſecans circulum prædictum in puncto G: agatur per G, recta EG, occurrens circulo in F, & G, ad rectos angulos cum ipſa A D in C, & fiat E C æqualis Z. Dico inter E C, & A B, hoc eſt inter Z, & Y, duas eſſe medias continuè proportionales A C, G C.



Quoniam enim rectangulum F C G æquale eſt rectangulo A C B, vtrinque addito quadrato G C; ergo rectangulum F G C, plus quadrato G C, hoc eſt rectangulum E C G æquabitur rectangulo A C B, plus quadrato G C; ſed quadrato G C æquale eſt rectangulum C A B, ob parabolen (eſt enim A B æqualis A K lateri recto) ergo rectangulum E C G æquabitur rectangulo A C B, plus rectangulo C A B, eſt æquale qua-

Recta enim E C dupla eſt ex conſtructione ipſius H I. vnde E F, G C erunt æquales

quadrato A C; ergo rectangulum E C G æquabitur quadrato A C; ergo vt E C, ad A C ita A C ad G C; ſed vt A C ad G C, ita G C ad A B, ob parabolen, cùm rectangulum B A C; hoc eſt ſub A K latere recto, & axe A C æquale ſit quadrato G C; ergo vt E C ad A C, ita A C ad G C; & vt A C ad G C, ita G C ad A B; ergo inter duas E C, A B duæ G C, & A B, ſunt mediæ continuè proportionales. At verò E C eſt ex conſtructione æqualis Z, & A B æqualis Y; ergo inter duas datas Y, Z, duas adinuenimus medias proportionales A C, G C, in continua ratione. Quod facere propoſitum erat.

Auctoris Methodo abſoluitur, quod Clariſſimus Geometra præſtitit beneficio Specioſæ Logiſtices ad eandem Cubicam Æquationem affirmatiuè affectam ſub latere, explicandam.

ALia itidem vla non minus eleganti poterit explicari; dummodo tamen illa, nimirum $a^3 + 3b^2a = z^3$, ſeu z ſol. nouam hanc induat formam, videlicet

$$a^3 + b^2a = b^2d$$

Quod facilè fieri poteſt, ſi namque nota quantitas puta coefficiens planum ſublaterale appellatum 3 b² nuncupetur b² hoc enim ad libitum eſt, vbi b² aſſumitur tanquam æquipollens ipſi 3b² ſi quidem accipitur ad idem planum deſignandum; & quidem appellari potuiſſet d², vel alio quouis charactere deſignari, placet nihilominus retinere b. z ſol. data

*Quod ſcilicet aſſumitur ad ſignificandam magnitudinem, quæ priùs erat, ſignificata per 3b². magnitudo applicetur ad b², * magnitudinem itidem datam; magnitudo quidem ortiua, quæ appelletur d, non ignorabitur; perinde igitur erit dicere b² d ac z³ vel z ſol. Conſiderandus igitur æquationis ortus qui quidem ex Zetetico deprehenditur, qua de re ſuo loco multa ſcripſimus; Sunt autem quatuor termini proportionales, & in ſuperiori quidem æquatione hunc in modum, vt b² ad a², ita a, ad d-a; hic igitur analogiſmus in quem ſuperior æquatio tranſmutata eſt. Ad comparandam itaque propoſitæ æquationis radicem, ſoluendum Problema illud

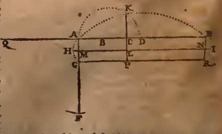
Propoſitam rectam Q D, vtcunque diuiſam in A, iterum oportet diuidere in C, ita vt quadratum Q A ad quadratum A C ſit in ratione, quam habet A C ad C D.

Intelligatur autem Q A æquari b, & A D dicatur d; at verò A C eſto a: vnde C D erit d — a. De hoc tamen infra.

Hæc acutè admodum, atque ſubtiliter D. Sluſius eſt proſequutus, in ſuo Meſolabo, beneficio Specioſæ Logiſtices, de quo infra.

Auctoris methodo idem Problema reſoluitur. Nunc eidem peculiari noſtra, quam ſuperiori Libro tradidimus Methodo Problemati ſatisfacere tentabimus, eodem prorſus adhibito, quo ille vſus eſt diagrammate.

RESOLVTIO.



SIt iam factum, ita vt quadratum Q A, ad quadratum A C ſit in ratione A C ad C D; ad punctum A facta ſit A F ad rectos angulos & æqualis ipſi Q A, & in A D quouis accepto pũcto G protrahatur A D ad partes D vſq; ad E, ita vt A D ſit ad A E in ratione G F ad A F, & ex E ducta ſit E R parallela & æqualis ipſi A G: ductaque ſit G R, quæ parallela erit ipſi A E, atque adeo completum ſit rectangulum A G R E, mox autem per punctum C, in quo ſupponimus rectam eſſe diuiſam Q D, vt Problema iubet, intelligatur ducta P K ad rectos angulos cum ipſa Q D; hoc enim nihil prohibet, eaque ſecet circumferentiam circuli deſcripti ſuper A D in puncto K, & rectam G R in puncto P; ſecetque etiam in puncto L rectam M N connectentem puncta M, & N, in quibus A G, & E R per æqualia ſupponimus fuiſſe diuiſas. Factum verò ſit vt A E ad A D, ita A C ad A B.

Quoniam igitur eſt, vt quadratum Q A ad quadratum A C, ita A C ad C D, hoc eſt ob cir-

circulum ita [a] quadratum AC ad quadratum CK; ſunt [b] igitur tres proportionales magnitudines, nempè prima QA: ſiue FA, ſecunda AC; tertia CK, atque adeo vt FA ad AC, ita AC ad CK; ſed vt FA ad AC, ita PC ad BC, vt mox conſtabit; ergo vt PC ad CB, ita [c] AC ad CK; ergo rectangulum ACB æquabitur [d] rectangulo PCK; ſed rectangulum ACD æquale eſt [e] quadrato CK ob circulum; ergo æqualibus vtrinque additis; rectangulum ACB, vnà cum rectangulo ACD æquabitur [f] rectangulo PCK, vnà cum quadrato CK; ſed rectangulum ex AC in BD æquale eſt [g] duobus rectangulis ACB, ACD, & rectangulum PKC æquale eſt [h] rectangulo PCK plus quadrato CK; ergo rectangulum ex AC in BD æquabitur rectangulo PKC; ſed vt AE ad AD, ita rectangulum ACE ad rectangulum ex AC in BD, vt mox oſtendam; ergo rectangulum ACE ad rectangulum PKC, erit, [i] vt AE ad AD; & conuertendo, vt AD ad AE, ita [k] rectangulum PKC ad rectangulum ACE; ſed ex conſtructione habita in præparatione, vt AD ad AE, ita GF ad FA; ergo rectangulum PKC ad rectangulum ACE, erit [l] vt GF ad FA; ſed vt rectangulum PKC ad rectangulum ACE, deſcripta ellipſi tranſeunte per puncta A, K, E, cuius axis HI, & ſemiordinatim applicata AM, ita eſt quadratum AM, ad rectangulum HMI, ſeu MHN, vt infra conſtabit; ergo quadratum AM ad rectangulum MHN, erit [m] vt GF ad FA; ſed quadratum AM ad rectangulum MHN eſt [n], vt latus rectum ad latus tranſuerſum, ſiue axim HI, ergo vt GF ad FA, ita [o] latus rectum ad latus tranſuerſum ellipſeos tranſeuntis per puncta A, K, E. Quod fieri poteſt &c.

a Ex ſchol. 13 ſexti. & corol. 20. einſdem. b 22. ſexti. c 11. quinti. d 16. ſexti. e Ex ſchol. 18 ſexti, & 17. einſdem. f 2. axio pri. g 1. ſecundi. h 3 ſecundi. i 7. quinti. k corol. 4. ſex. l 11. quinti. m 11. quinti. n 13. pri. Lib. Conic. Apollonij. o 11. quinti.

Lemma I.

Quòd autem ſit, vt AF ad AC, ita PC ad BC, ſic oſtendo.

Quoniam igitur eſt vt AF ad FG, ita AE ad AD ex conſtructione, atque adeò, ita AC ad AB; ergo per conuerſionem rationis erit [a] vt AF ad AG, ſeu PC, ita AC ad BC; & permutando vt AF ad AC, ita [b] PC ad BC.

a corol. 19 qui. b 16. quinti.

Lemma II.

Quod autem in recta AE, ſi fuerit vt AE ad AD, ita AC ad AB, ſit etiam vt AE ad AD, ita rectangulum ACE ad rectangulum ex AC in BD, ſic oſtendo.

Quoniam enim eſt vt AE ad AD, ita AC ad AB; ergo permutando vt AE ad AC, ita [a] AD ad AB, & diuidendo, vt CE ad AC, ita [b] BD ad AB; ergo rectangulum ex BD in AC æquabitur [c] rectangulo ex CE in AB; At verò vt AB ad AC, ita [d] ſumpta communi altitudine CE, rectangulum ex AB in CE ad rectangulum ACE; ergo vt AB ad AC; ita [e] rectangulum ex BD in AC ad rectangulum ACE, vel vt rectangulum ACE ad rectangulum ex BD in AC, ita [f] AC ad AB, ſeu AE ad AD.

a 16 quinti. b 17. quinti. c 16. ſexti. d 1. ſexti. e 7. quinti. f corol. 4 qu.

Lemma III.

Quod autem ad quadratum AM, rectangulum HMI ſit vt rectangulum PKC ad rectangulum ACE, ſic oſtendo.

Quoniam enim ex natura ellipſeos, vt rectangulum ILH ad rectangulum IMH, ita [a] eſt quadratum LK ad quadratum AM, ſiue CL; ergo diuidendo erit [b] vt quadratum LK, minus quadrato CL, hoc eſt [c] rectangulum PKC; (eſt enim PC bifariam diuiſa in L) ad quadratum CL, ſiue AM, vt rectangulum ILH, minus rectangulo IMH, hoc eſt [d] rectangulum NLM, ad rectangulum HMI; ergo permutando [e] rectangulum PKC ad rectangulum NLM, ſeu ACE, erit vt quadratum AM ad rectangulum HMI;

a Ex Elem. Conicis. b 17. quinti. c 6. ſecundi. d Ex Elemen. e 16. quinti.

COMPOSITIO.

Super AD deſcriptus ſit ſemicirculus AKD, & ad punctum A facta ſit FA ad rectos angulos, & æqualis ipſi QA, in qua ſumpto quouis puncto G protrahatur AD ad E, ita vt AD ad AE ſit, vt GF ad FA; ducta autem ER, quæ ſit æqualis & parallela ipſi AG, agatur GR, quæ parallela erit ipſi AE, atque adeò completum erit rectangulum AGRE: diuiſis autem AG, ER bifariam in punctis M, & N, acta NM protrahatur ad H, ità vt quadratum AM ad rectangulum

Geometrica effectio ex Analyſi deducta.

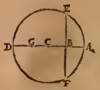
nitur quadrato Z (eſt enim $a^2 - ba = z^2$) & quadratum A C, minus C A B rectangulo ſæquale eſt rectangulo A C B ; erit rectangulum A C B æquale quadrato Z, hoc eſt quadrato G D; at verò rectangulum F D E eſt g æquale quadrato GD; ergo rectangulum F D E æquale erit rectangulo A C B; ſed FE, A B ſunt æquales, ergo eodem modo, quo ſupra, tota F D æqualis erit toti A C, atque adeò radix quæſita, & D F E, erit idem, quod C A B planum ſub latere, & data coefficiente longitudine; at vero ſi ad quadratum ex A G dimidia coefficiente addatur A F dimidio coefficiens : fit nota F D radix quæſita. Rectè ergo regula iubet &c. Quod erat oſtendendum.

f 2. ſecundi.
g 37. tertij.

Methodus peculiaris Vietæ.

Proponatur æquatio $a^2 - ba = z^2$. Intelligatur z media inter extremas: & b differentia earundem; ex media autem, & differentia extremarum, quærantur extrema; ipſarum enim maior erit a, ſeu radix, de qua quæritur.

DEMONSTRATIO.



SIt BD radix quæſita, & G B data coefficiens; ponaturque B A æqualis ipſi D G, & conſtituatur figura, vt vides. Quoniam D B eſt radix quæſita, & G B data coefficiens, erit D B G planum ſub latere, & data coefficiente longitudine; & quia eſt $a^2 - ba = z^2$, erit propterea quadratum D B, minus plano D B G, æquale comparationis homogeneo; ſed quadratum D B, minus plano D B G, eſt æquale rectangulo B D G; ergo & B D G erit æquale comparationis homogeneo; at verò rectangulum B D G eſt æquale rectangulo D B A; ſiquidem B A, D G ſunt æquales; ergo rectangulum B D G, æquale erit quadrato B E, cui nimirum eſt [b] æquale rectangulum D B A; ergo B E erit latus, cuius quadratum eſt æquale comparationis homogeneo. At verò D B, B E, B A, ſunt continuè proportionales, quarum maior D B, media B E, & minor B A differens à maiori D B, per G B coefficientem; ergo in æquatione, in qua quadratum afficitur negatiuè, radix quæſita eſt maior, nempè D B in ſerie trium proportionalium. Latus verò, cuius quadratum eſt æquale comparationis homogeneo, & media in eadem ſerie, & maior differt à minori extrema, nimirum D B, à D G, hoc eſt B A interuallo æquali datæ coefficienti, nempè GB. Quod oportebat oſtendere.

Variæ, ac diuerſæ Methodi explicandi æquationem, in qua Quadratum negatur de afficiente homogeneo, ſeu in qua planum ſub latere, & data coefficiente longitudine afficitur multa Quadrati.

Methodus Diophanti.

Methodi Diophanti. Enarratio.

DAtum comparationis homogeneum ducatur in quadrati comitem, & productum à quadrato coefficientis dimidij auferatur; reſidui verò quadrata radix addatur, vel auferatur dimidio coefficientis, ſumma, vel reſiduum ad quadrati comitem applicetur; nam ità proueniet quæſitum latus.

Exemplo illuſtratur.

Proponatur æquatio $bda - a^2d = z^2d$. Datum comparationis homogeneum, puta z^2d, ducatur in comitem quadrati, nimirū in d, & fiet z^2d^2; & hoc auferatur ex $\frac{1}{4}b^2d^2$, quadrato ſcilicet dimidiæ coefficientis, & remanebit $\frac{1}{4}b^2d^2 - z^2d^2$, cuius radix quadrata eſt ℞Q$(\frac{1}{4}b^2d^2 - z^2d^2)$ hæc autem ſi addatur ad $\frac{1}{2}bd$, dimidium coefficientis, fit $\frac{1}{2}bd +$ ℞Q$(\frac{1}{4}b^2d^2 - z^2d^2)$ & ſi ſubtrahatur fiet $\frac{1}{2}bd -$ ℞Q$(\frac{1}{4}b^2d^2 - z^2d^2)$ aggregatum, vel reſiduum applicetur ad d, comitem quadrati, & fiet $\frac{\frac{1}{2}bd + \text{℞Q}(\frac{1}{4}b^2d^2 - z^2d^2)}{d}$ rurſus fiet $\frac{\frac{1}{2}bd - \text{℞Q}(\frac{1}{4}b^2d^2 - z^2d^2)}{d}$

Æquatio enim hæc duplicem habet radicem, vt alibi diximus.

Me-

Methodus Communis Antiquorum.

Latus, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum dimiæ coefficientis data præſtat dato comparationis homogeneo; ablatum vel additum dimidiæ coefficienti, reſiduum, vel aggregatum, quæſitum latus exhibebit. *Enarratio Methodi communis Antiquorum.*

EXEMPLVM.

$ba - a^2 = z^2$

$\frac{1}{4}b^2$ *Quadratum dimidiæ coefficientis* } *Subtrahe*
z^2 *Comparationis homogeneum*

$\frac{1}{4}b^2 - z^2$ *Differentia, ſiue reſiduum*
$℞Q(\frac{1}{4}b - z^2)$ *Reſidui latus* } Adde
$\frac{1}{2}b$ *Dimidiũ coefficientis*

$\frac{1}{2}b \ast RQ(\frac{1}{4}b^2 - z^2)$ *Aggregatum & latus maius*
$\frac{1}{2}b$ *Dimidia coefficiens* } *Subtrahe*
$RQ(\frac{1}{4}b^2 - z^2)$ *Reſidui latus*

$\frac{1}{2}b - ℞Q(\frac{1}{4}b^2 - z^2)$ *Reſiduum, & latus minus.*

Nec diſſimiliter ſuperiorem pragmatiam Analytiſco more comprobabimus.

$$\frac{1}{2}b \ast ℞(\frac{1}{4}b^2 - z^2) = a$$
$$\frac{1}{2}b \ast ℞(\frac{1}{4}b^2 - z^2)$$

$$℞(\frac{1}{16}b^4 - \frac{1}{4}b^2z^2) + \frac{1}{4}b^2 - z^2$$
$$\frac{1}{4}b^2 \ast ℞(\frac{1}{16}b^4 - \frac{1}{4}b^2z^2)$$

$$\frac{1}{2}b - z^2 \ast ℞(\frac{1}{4}b^4 - b^2z^2) = a^2$$
$$\frac{1}{2}b \ast ℞(\frac{1}{4}b^2 - z^2) = b$$
$$b$$

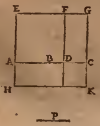
$$\frac{1}{2}b \ast ℞(\frac{1}{4}b^4 - b^2z^2) = ba$$
Subtrahendum $\frac{1}{2}b^2 - z^2 \ast ℞(\frac{1}{4}b^4 - b^2z^2) = a^2$

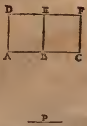
z^2 Productum, quod eſt comparationis homogeneum.

Sic ſuo modo pro Radice minori.

DEMONSTRATIO.

Data ſit coefficiens longitudo AC, quæ bifariam ſecetur in B, ſitque P latus, cuius quadratum æquale ſit comparationis homogeneo; & primò ſit recta P, vt in prima figura minor dimidia coefficiente AB, vel BC; ſecetur AC in D, ſic vt inter ſegmenta AD, DC, ſit P media proportionalis; quamobrem rectangulum ADC erit æquale quadrato P, atque adeò comparationis



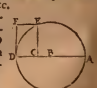


homogeneo. Dico tam A D, quam D C, fore latera, & rectè Regulam iubere &c. ſuper A D, D C deſcribantur quadrata A F, D K, & perficiatur figura vt vides. Quoniam A D, D F ſunt æquales & rectangulum ADC eſt æquale quadrato P, hoc eſt comparationis homogeneo; tam H D rectangulum, quàm D G erit comparationis homogeneo æquale. Et quoniam A C eſt data coefficiens, & rectangulum C A D, minus quadrato A D eſt æquale rectangulo A D C, comparationis homogeneo; & eſt æquatio b a — a² ═ z²; erit proinde recta A D radix quæſita, & C A D planum ſub latere, & data coefficiente; hoc idem oſtendetur de D C. At verò quia rectangulum A D C vnà cum quadrato B D æquale eſt quadrato rectæ A B dimidiæ coefficientis; ſi à quadrato eiuſdem A B dimidij coefficientis auferatur rectangulum A D C, nimirum comparationis homogeneum, remanebit quadratum, cuius latus eſt B D; ſi hoc addatur dimidio coefficientis A B fit notum latus A D, nimirum latus maius; & ſi idem latus B D auferatur à dimidia B C remanebit notum latus B C, nempè latus minus; rectè ergo Regula iubet &c.

Quod autem idem oſtendi poſſit de D C patet. Quoniam enim A C eſt coefficiens, & rectangulum A C D, minus quadrato D C eſt æquale rectangulo A D C comparationis homogeneo; & eſt æquatio b a — a² ═ z². Erit D C latus quæſitum, & A C D planum ſub latere, & data coefficiente longitudine.

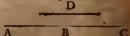
Sit recta P æqualis dimidiæ coefficienti A B, vel B C, vt in ſecunda figura. Dico eodem pacto Regulam rectè iubere &c. ex A B fiat quadratum A E, & compleatur rectangulum A F. Quoniam igitur AB, BC ſunt ſegmenta æqualia, erit tam AE, quàm BF quadratum; & quia tam AB, quàm BC ponitur æqualis ipſi P; erit proinde quadratum BF, vel A F (ipſorum alterutrum accipiatur nihil refert) æquale comparationis homogeneo; & quia AC eſt data coefficiens, & rectangulum CAB, minus quadrato AB æquatur quadrato BC comparationis homogeneo, & eſt æquatio b a — a² ═ z², erit proinde AB radix quæſita, & CAB, hoc eſt AF planum ſub latere, & data coefficiente. At verò ſi à quadrato ex AB dimidia coefficiente auferatur BF comparationis homogeneum, nihil remanebit; ſi vero nihil addatur, vel nihil ſubtrahatur dimidiæ coefficienti AB, remanet ipſa coefficiens A B dimidia, & ſimul radix quæſita; rectè itaque Regula iubet &c.

Alia Demonſtratio. Aliter. Hoc idem oſtendemus hunc in modum. Data ſit coefficiens DA; ſitque diuiſa bifariam in B, & ex hoc puncto tanquam ex centro deſcribatur circulus D E A, datum ſit latus D F, quod primo ſit minus dimidia coefficiente, cuius quadratum ſit æquale comparationis homogeneo, & ducatur F E parallela ipſi DA, adeo vt ſecet peripheriam in E puncto, a quo cadat perpendicularis EC. Quoniam DA eſt data coefficiens, & rectangulo D A C æquale eſt quadratum C A, vnà cum rectangula D C A, ſeu rectangulum D A C, minus quadrato C A eſt æquale rectangulo D C A comparationis homogeneo, cùm hoc ſit æquale quadrato CE; æquatio autem eſt b a — a² ═ z², ob id CA erit radix quæſita, & DAC planum ſub latere, dataque coefficiente longitudine; cùm autem DCA rectangulum vna cum quadrato CB ſit æquale quadrato BA, vel DB, fit, vt ſi à quadrato DB, vel ex BA dimidia coefficiente, auferatur rectangulum D CA, nimirum comparationis homogeneum remaneat notum quadratum, cuius latus eſt C B; hoc autem ſi addatur ipſi BA dimidio coefficientis, fit nota CA radix quæſita, & ſi idem latus CB auferatur à D B dimidia coefficiente remanebit D C ſegmentum, quod etiam eſſe quæſitam radicem, nempè minorem, eodem pacto facile demonſtrabimus.



At verò ſi latus, cuius quadratum æquale eſt comparationis homogeneo, fuerit æquale dimidio coefficientis; non enim poteſt eſſe maius, facile omnia demonſtrari poterunt.

Sit D latus, cuius quadratum eſt æquale comparationis homogeneo, & AC data coefficiens ſecta bifariam in B, vt D ſit æqualis vel A B, vel B C; cùm itaque rectangulum A B C ſit æquale quadrato D, erit æquale comparationis homogeneo; ſed quia rectangulum ſub A C data coefficiente, & BC, vel AB, minus quadrato AB, vel BC, eſt æquale rectangulo ABC comparationis homogeneo, & eſt æquatio b a — a² ═ z²; proinde BC, vel AB erit radix quæſita. At verò ſi à quadrato ex AB, vel B C dimidia coefficiente auferatur rectangulum ABC, hoc eſt quadratum A B, vel BC comparationis



ho-

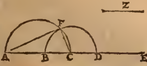
homogeneum, remanebit nihil, quo addito ad dimidium coefficientis, habebitur idem dimidium, vt patet.

Quod autem latus cuius quadratum, &c. non poſſit eſſe maius dimidio coefficientis patet, ex eo quia non poteſt fieri ſubtractio ipſius comparationis homogenei, atque adeo æquatio eſſet falſa.

Corollarium.

EX dictis collige quando latus comparationis homogenei fuerit minus dimidio coefficientis, tunc duplicem fore radicem; cum autem eſt æquale, vnicam fore radicem nimirum ipſum dimidium.

Aliter. Quadratum Z, ſit comparationis homogeneum, & AE data coefficiens longitudo, quæ ſecetur bifariam in C, & Z erit non maior dimidia A C, vel C E, vt ſupra dicebamus. In AC deſcribatur ſemicirculus A F C, & in eo accómodetur A F, quæ ſit æqualis ipſi Z, agaturque F C; erit [a] autem angulus AFC rectus; ergo quadratum AC erit [b] æquale quadratis laterum AF, FC; quare quadratum CF erit interuallum, ſeu exceſſus, quo quadratum ex AC dimidia coefficiente, ſuperat quadratum AF comparationis homogeneum: modò centro C, interuallo CF, deſcribatur periphæria B F D ſecans A E in B, & D. Dico minus latus ex quæſitis eſſe AB, maius autem AD, & rectè regulam iubere &c. [a] 31. *tertij*; [b] 47. *primi*.



Quoniam igitur AF, tangit circulum BFD in D, ſiquidem angulus [c] A F C, eſt rectus; quamobrem rectangulũ DAB, hoc eſt EBA, cui eſt æquale rectãgulum EAB, minus quadrato A B, æquabitur [d] quadrato AF; proinde rectangulũ EAB, minus quadrato AB, erit æquale quadrato AF, ſeu rectæ Z comparationis homogeneo; Cum autem ſit æquatio $ba - a^2 = z^2$, & AE ſit data coefficiens longitudo, erit ob id quæſitum latus AB, & EAB erit planum ſub latere, dataque coefficiente; at verò ſi quadrato rectæ C A dimidio coefficientis auferatur quadratum AF nempè comparationis homogeneum, fiet notum quadratum cuius latus eſt CF, quæ ſi auferatur ab AC, nota remanebit AB radix quæſita, [c] *corol.* 16. *tertij*. [d] 36. *tertij*.

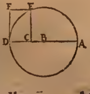
Secundò quoniam rectangulum BAD eſt æquale quadrato AF, hoc eſt rectæ Z comparationis homogeneo; idem verò rectangulum BAD, hoc eſt EDA æquale eſt rectangulo E AD, minus quadrato AD erit æquale quadrato rectæ Z comparationis homogeneo. Sed æquatio eſt $ba - a^2 = z^2$, & AE eſt data coefficiens; erit AD radix quæſita, & EAD planum ſub latere, & data coefficiente; Si autem à quadrato rectæ A C dimidiæ coefficientis auferatur quadratum AF comparationis homogeneum, remanebit quadratum, cuius latus eſt CF. quod ſi addatur ad A C dimidium coefficientem innoteſcet A D maior radix quæſita; rectè ergo Regula iubet &c,

Methodus peculiaris Vietæ.

Proponatur æquatio $ba - a^2 = z^2$. *Intelligatur z media inter extremas, & b aggregatum earundem; & ex media, atque aggregato extremarum quærantur extrema, nam alterutra erit a, de qua quæritur.* *Enarratio peculiaris Methodi Vietæ.*

DEMONSTRATIO.

DAta ſit coefficiens longitudo DA, & ſit DC radix quæſita; ſit verò deſcriptus circulus DEA, & à puncto C erigatur CE perpendicularis. Quoniam autem A D eſt data coefficiens, & DC radix quæſita, erit A D C planum ſub latere, & data coefficiente; quia autem D C eſt radix, & eſt æquatio $ba - a^2 = z^2$; erit proindè ADC minus quadrato D C æquale comparationis homogeneo; ſed idem eſt A D C, minus quadrato D C, ac eſt rectangulum D C A; ergo rectangulum DC *Eiuſdem Methodi demonſtratio.*



A erit æquale comparationis homogeneo; ſed rectangulum D C A eſt æquale quadrato C E; ergo quadratum C E, erit comparationis homogeneum. At verò DC, CE, CA, ſunt continuè proportionales, extremarum aggregatum eſt data coefficiens longitudo, & minor extrema DC, radix nimirum quæſita; rectè ergo Regula iubet &c.

Non diſſimili modo nos eandem operationem oſtendemus, radice quidem ſuppoſita, altera extrema, puta C A.

De Explicandis Æquationibus Solidis compoſitis, & primo de Cubicis. Caput III.

Methodi ad explicandam æquationem in qua Cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano, vt a^3 + $b^2 a$ = z^3 ſeu z ſolido.

EGimus hactenus de æquationibus affectis, & quidem quadraticis explicandis, quæ nullam Analyſtæ ferè difficultatem afferunt, ac nullam ingerunt curam. Nunc proximum eſt vt ad illas gradum faciamus, quæ altioris ſunt ordinis, proximè ſuccedentes quadraticis, quarum contemplatio Veterum, vt haud parum vexauit ingenia, ita earum explicatio non mediocriter Italiam illuſtrauit, præclarum ſiquidem hoc inuentum Italis acceptum referri debet. Nam Scipio Ferreus Bononienſis, & Nicolaus Tartalea Brixienſis, arduum hoc opus aggreſſi, ſingulari cum laude perfecerunt, ita vt difficillimarum æquationum, de quibus loquimur explicationes tradendo, ſibi gloriam immortalem peperiſſe videantur. Diſſimulandum tamen non eſt, quòd hæc ipſi magis Arithmeticè quam Geometricè præſtiterint, fortaſſis id Poſteritati relinquentes ne nobis locus deeſſet ad ſuppeditandam materiam pro excelſa Mercurij Statua fabricanda.

Italiam illuſtrauit.

Verùm cùm agendum ſit primùm de æquationibus Cubicis, in quibus affectio eſt ſub latere, iuvabit hìc in memoriam redigere, quæ ſcripſimus in primo Tomo, breuiter tamen, quatenus facit ad inſtitutum. Erat autem Canon huiuſmodi.

Cubus tertiæ partis numeri radicum addatur quadrato dimidij numeri abſoluti; aggregati autem ſumatur latus, cui additum, vel ſubtractum dimidium numeri abſoluti, gignit Binomium, & Apotomen. Si itaque latus cubicum ipſius Apotomes ſubtrahatur à latere cubico binomij, reſiduum erit quæſitæ radicis pretium.

Erat autem æquatio huiuſmodi 1 c + 72 R = 1720. cuius æquationis adinuenimus radicem eſſe 10: nam quadratum dimidij numeri abſoluti erat 739600, cubus verò tertiæ partis numeri radicum 13824. Aggregatum ex his 753424, cuius radix quadrata eſt 868, cui addito 860, fit 1728; cuius latus cubicum eſt 12; at radix quadrata primi aggregati erat 868, dimidium numeri abſoluti eſt 860, horum differentia eſt 8, cuius radix cubica eſt 2; radix autem cubica primi aggregati erat 12; differentia autem inter 2, & 12, eſt 10.

Hæc ſuperior Methodus non inſeruit Geometriæ.

Hæc autem Methodus Geometriæ non inſeruit, ſicut nec etiam altera, cuius Canon erat. Sumatur quarta pars quadrati ex numero abſoluto, & huic addatur vigeſima ſeptima pars cubi ex numero radicum, huius autem aggregati lateri quadrato addatur dimidium numeri radicum, & ab eodem ſubducatur, ex aggregati verò latere cubico ſubtrahatur latus cubicum reſidui; horum namque differentia erit radix quæſita.

Et quidem in eodem exemplo perſiſtendo. Quarta pars quadrati numeri abſoluti eſt 739600, cui ſi addatur 13824, vigeſima ſeptima pars cubi, e numero radicũ, fiet 753424, huius latus quadratum eſt 868, cui ſi addatur &c. Reliqua vide ibi. Nec etiam hæc vti dicebam idonea eſt ad Geometricas effectiones, propterea quod fit aſcenſus ad imaginarias quantitates, à quibus in Geometricis cauendum. Vnde reductio ad quadraticam æquationem per duplicatam hypoſtaſin, eodem laborat vitio.

Superiori numeroſæ æquationi ſpeciebus exhibita reſpondet æquatio a^3 + 3 b plano a = 2z ſolido, de qua in Algebra ſpecioſa pag. 214, diſſeruimus vbi reductionem illam tractauimus, quam hic breuiter ſubijciam numeris enucleatam, a quo ibi breuitati ſtudentes abſtinuimus. Si e^2 + a e æquetur b plano; igitur b pl. ex huiuſmodi conſtitutione intelligendum eſt rectangulum ſub duobus lateribus, quorum minus eſt e, maius autem differt per a.

Quoniam vero e^2 + a e, ſupponitur æquari b pl. propterea a e æquabitur b pl. − e^2, atque

que adeò $\frac{b\ pl. - e^2}{e}$ æquabitur a ; propterea $\frac{b\ pl.\ pl.\ pl. - 3 e^2 b\ pl.\ pl. + 3 e^4 b\ pl. - e^6}{e^3} + \frac{3\ b\ pl.\ pl. - 3\ b\ pl.\ e^2}{e}$, æquabitur 2 z ſol. Omnibus verò ductis per e^3, & ſecundum Artem diſpoſitis e cubi quadratum + 2 z ſol. e^3 æquabitur b planicubo. Sic autem hæc demonſtrabimus. Supponamus $a^3 + 3$ b pl. a, æquari 2 z ſol., & $e^2 + a\,e$, æquare b pl. Si autem iniunctum oſtendere $e^6 + 2$ z ſol. e^3 æquari b $pl.^3$. Quoniam igitur $e^2 + a\,e$ æquatur b pl., propterea a e æquabitur b pl $- e^2$; atque adeo a æquabitur $\frac{b\ pl. - e^2}{e}$; ergo & eorum cubi æquales erunt; quare a^3 æquabitur $\frac{b\ pl.^3 - 3\ b\ pl.^2 e^2 + 3\ b\ pl.\ e^4 - e^6}{e^3}$; ac proinde $a^3 + 3$ b plan. a, æquabitur $\frac{b\ pl.^3 - 3\ b\ pl.^2 e^2 + 3\ b\ pl.\ e^4 - e^6}{e^3} + \frac{3\ b\ plan.^2 - 3\ b\ plan.\ e^2}{e}$. Nam $\frac{3\ b\ pl.^2 - 3\ b\ pl.\ e^2}{e}$ æquiualet 3 b plan. a, æqualia verò ſi æqualibus addantur, orta ſunt æqualia. Atque adeo 2 z ſol. æquabitur $\frac{b\ pl.^3 - 3\ b\ pl.^2 e^2 + 3\ b\ pl.\ e^4 - e^6}{e^3} + \frac{3\ b\ plan.^2 - 3\ b\ pl.\ e^2}{e}$. Nam $a^3 + 3$ b pl. a æquabatur 2z ſol. Omnibus ductis in e^3, & 2 z ſol. e^3 æquabitur b $pl.^3 - 3$ b $pl.^2 e^2 + 3$ b pl. $e^4 - e^6 + 3$ b $pl.^2 e^2 - 3$ b pl. e^4; ac proinde e^6 + 2 z ſol. e^3 æquabitur b $pl.^3$; eadem enim homogenea affecta ſignis + & −, ſe mutuo interimunt.

Vnde conſectarium. Si $a^3 + 3$ b pl. a æquetur 2 z ſol., & $\sqrt{}$ b pl. pl. pl. + z ſol. ſol. − z ſol. æquetur d^3; ergo $\frac{b\ pl. - d^2}{d}$ fit a, de qua quæritur.

Vt autem numeris hæc explicemus, ſuperiorem æquationem ſumamus, nempe 1 c + 72 R = 1720, cui reſpondeat illa $a^3 + 3$ b pl. a = 2 z ſol. Supponamus $e^2 + a\,e$ æquare b pl., & deueniemus vt ſupra ad æquationem illam e cubi quadratum + 2 z ſol. e^3 = planicubo, nempè 1 Q + 1720 R = 13824, cuius radix eſt 8 Verùm quia 1 Q idem eſt quod e cubi quadratum radix eſt ſolida; eſt enim quadratum cubi, atque adeo ad habendam e oportet extrahere radicem cubicam ex octo, eaque eſt 2. Cùm igitur 2q + a e æquaretur b pl. propterea $\frac{b\ pl. - e^2}{e}$ æquatur a; igitur ſi ex b pl. hoc eſt ex 24 auſeratur 4 quadratum ex e, remanebit 20, quo diuiſo per e, proſilit 10, pro valore ipſius a, quæ erat radix ſpecioſæ æquationis $a^3 + 3$ b pl. a = 2 z ſol.; ac ob id numeroſæ æquationis 1c + 72 R = 1720.

Sed hæc Methodus non conducit ad opus Geometricum, vt vides, ſed Arithmeticæ eſt addicta.

Plerumque æquatio cubica de qua loquimur reducitur ad quadraticam; vnde ipſa deducta eſt, tuncque ſubit eandem explicationem cum ipſa quadratica: vnde maiori non eſt opus artificio ad eius radicis valorem exprimendum, ſed tunc affectio eſt ſub quadrato, atque contingit, quod diximus, quando coefficiens longitudo duobus nominibus conſtat, quorum vnum ductum in quadratum alterius, comparationis homogeneum procreat, de quibus in Algebra ſpecioſa diſſeruimus.

Ad explicandas igitur æquationes, in quibus cubi ſolidis, vel quadrato − quadrata plano-planis ſine affectione, vel cum affectione æquantur alterutro opere indiget Analyſta, vel ſcilicet conſtructionis duarum mediarum inter duas datas continuè proportionalium, vel tris-ſectionis anguli; propterea quod æquationes quadrato-quadratorum ad æquationes cuborum reducuntur; cubi verò affecti ſubquadrato ad cubos affectos ſub latere, quæ quidem æquationes duarum mediarum inuentione, vt dicebamus, vel anguli triſectione perfici poſſunt.

Methodus Communis Recentiorum.

Ex triente coefficientis plani ſub lateralis, tanquam rectangulo ſub lateribus, & ex comparationis homogeneo tanquam differentia cuborum ipſorum laterum, reperiatur aggregatum cuborum

borum ex iiſdem lateribus, & ex hoc aggregato cuborum inuento, & ex eorundem cuborum differentia data, reperiantur latera; horum ſiquidem differentia, quaſitam æquationis radicem exhibebit.

EXEMPLVM.

$a^3 + 3b^2a = z^3$ ſeu z ſolido.

b^2 *Triens plani coefficientis ſublateralis, & rectangulum ſub lateribus datum.*

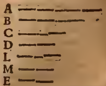
z^3 *Comparationis homogeneum, & differentia cuborum prædictorum laterum data. Hinc*

d^3 *Aggregatum cuborum eorundem laterum inuentum. Hinc*

$f\ g$ *Latera inuenta ſupradicti rectanguli. Hinc*

$f - g$ *Differentia laterum, & latus quaſitum.*

DEMONSTRATIO.

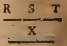


SIt recta A data, quæ poſſit coefficiens planum ſublaterale, ſitque data recta B, cuius cubus ſit comparationis homogeneû, at verò C poſſit trientem plani ſublateralis; ex cubo autem B, tanquam differentia cuborum data, & ex quadrato ipſius C tanquam dato rectangulo ſub lateribus comprehenſo, reperiatur cubus D aggregatum cuborum ex iiſdem lateribus; ex cubo autem B, tanquam ex differentia cuborum data, & ex cubo ipſius D aggregato cuborum inuento, reperiantur latera L & M, quibus comprehenditur rectangulum iam dictum æquale ſcilicet quadrato ipſius C; horum autem laterum differentia ſit E. Dico E eſſe propoſitæ æquationis quæſitam radicem, ita ut cubus ex E plus triplo ſolido à quadrato ipſius C, ducto in E, æquetur cubo ipſius B.

Quoniam enim cubus differentiæ laterum plus triplo ſolido ſub differentia laterum in rectangulum ſub lateribus æqualis eſt differentiæ cuborum à lateribus; ſed E per conſtructionem eſt differentia laterum L, & M, & cubus ex B eſt differentia cuborum eorundem laterum; ergo cubus ex E plus triplo ſolido à rectangulo ſub L, & M, in E differentiam laterum, æquabitur cubo ipſius B; ſed rectangulum ex L, & M, per conſtructionem æquale eſt quadrato ipſius C; ergo cubus ex E, plus triplo ſolido à quadrato ipſius C, in E differentiam laterum, æquabitur cubo ipſius B; Erat autem æquatio, in qua cubus lateris, plus triplo ſolido ſub quadrato C, in idem latus, æqualis eſt cubo ipſius B; ergo E erit radix propoſitæ æquationis quæſita.

LEMMA.

Datis differentia cuborum, & rectangulo ſub lateribus, cuborum aggregatum ſic reperiunt.



DAta ſit differentia cuborum r^3, at verò rectangulum ſub lateribus ſit s^2, & oporteat reperire aggregatum cuborum à lateribus, quibus rectangulum comprehenditur, quæque ſunt latera cuborum, quorum data eſt differentia. Itaque ſi a, & e ſint lineæ; dataque ſit differentia cuborum ex ipſis nempe $a^3 - e^3$, datumque itidem ſit ſub ipſis rectangulum $a\,e$. Oportet aggregatum cuborum puta $a^3 + e^3$ exhibere æquale cubo nempe x^3.

Sumpta ſit arbitraria quædam recta b; reperiantur autem ſeptem continuè proportionales b, r, f, g, h, i, l, item totidem alia b, s, m, n, o, p, q; fiat autem t æqualis quadruplo q, item u æqualis l + t; ſintque inuenta b, x, z, m, f, g, u, nempè inter b, m, duæ mediæ reperiantur x, z, & inter m, u, duæ mediæ reperiantur f, g continuè proportionales; reperiendus eſt autem cubus ex x: reperiantur b, n, p, h, o, o, t, ſeptem continuè proportionales.

Quoniam igitur n^6 æqualis eſt $t\,b^5$; at verò $t\,b^5$ æqualis eſt $4\,q\,b^5$, & $4\,q\,b^5$ æquatur $4\,s^6$; ergo n^6 æquabitur $4\,s^6$; ſed x^6 æquatur $r^6 + n^6$, ſiue $4\,s^6$, eſtque $r^6 + 4\,s^6 =$ quadrato ex $a^3 + e^3$; ergo x^6 æquabitur quadrato ex $a^3 + e^3$; ergo x^3 æquabitur $a^3 + e^3$.

SCHO-

SCHOLION.

HÆc demonſtratio per imaginarias quantitates procedit, à quibus Geometra cauendum non ſemel monuimus; niſi tamen alia ſuppetet via, ea calcanda eſt, qua quidem obuia dummodo ſcilicet ad veritatem conducat, dum autem per commemoratas quantitates procedit demonſtratio, non eo nomine reijcienda, quod aliquid falſi contineat, vel male deducet, ſed quoniam ſubobſcurior cùm ſit intellectui quodammodo tenebras offundit, neque quiſpiam illam redarguat, quòd cauſam non adhibeat tanquam medium ad inferendum; quod enim concomitans eſt, ad cauſæ genus reduci ſuperiùs notauimus.

Lemma II.

Datis aggregato, & differentia duorum cuborum, eorum latera ſic reperiunt.

Sint a, & e lineæ rectæ, & $a^3 + e^3$ æquetur $2\,b^3$, dato cuborum aggregato; præterea $a^3 - e^3$ æquetur $2\,d^3$ cuborũ differentia data; requiruntur autem a, & e. fiat f^3 æqualis $b^3 + d^3$ & g^3 æqualis $b^3 - d^3$.

Quoniam igitur $2\,a^3$ æquatur $2\,b^3 + 2\,d^3$; ergo a^3 æquabitur $b^3 + d^3$; ſed ex conſtructione f^3 æquatur $b^3 + d^3$; ergo a^3 æquabitur f^3; ergo a, æquabitur f; quamobrem a data erit. Et quoniam $2\,e^3$ æquatur $2\,b^3 - 2\,d^3$; ergo e^3 æquabitur $b^3 - d^3$; ſed g^3 æquatur $b^3 - d^3$ ex conſtructione; ergo e^3 æquabitur g^3; ergo e, æquabitur g.

Lemma III.

Quòd autem cubus differentię laterum plus triplo ſolido ſub differentia laterum in rectangulum ſub lateribus, ſit æqualis differentiæ cuborum à lateribus, ſic oſtendunt.

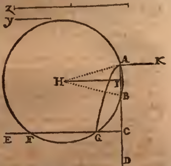
Si enim fuerint a, & b, quantitates datæ; demonſtrabitur cubum ex $a - b$, + triplo ſolido abs rectangulo $a\,b$ in $a - b$, æquari $a^3 - b^3$; nam cubus ex $a - b$ eſt $a^3 - 3\,b\,a^2 + 3\,b^2 a - b^3$; ſed triplum ſolidum prædictum nempè abs $3\,b\,a$, in $a - b$ eſt $3\,b\,a^2 - 3\,b^2 a$, & ex horum additione fit $a^3 - b^3$; ergo &c.

Modus quo Auctor eſt uſus ad duas medias continuè proportionales inueniendas inter duas datas.

Conſtructio eſt Carteſij. Demonſtratio autem Auctoris.

QVoniam ad huius Problematis effectionem duas medias continuè proportionales inter duas datas opus eſt reperire; ob id non grauabimur hic in medium afferre modum, quo nos vſi ſumus.

Datæ ſint duæ rectæ Y, Z, inter quas opus ſit reperire duas medias continuè proportionales. Exponatur A D, ex qua abſcindatur A B æqualis Y; mox diuiſa A B bifariam in I fiat I H æqualis dimidio Z, & ad rectos angulos cũ A B; Deinde centro H, interuallo H B, vel H A, deſcribatur circulus; deinde autem ad punctũ A, ducta ſit A K æqualis Y, & ad angulos rectos; hac verò tanquam latere recto, vertice A, circa axem A D deſcribatur parabole A G ſecans circulum prædictum in puncto G: agatur per G, recta EG, occurrens circulo in F, & G, ad rectos angulos cum ipſa A D in C, & fiat E C æqualis Z. Dico inter E C, & A B, hoc eſt inter Z, & Y, duas eſſe medias continuè proportionales A C, G C.



Quoniam enim rectangulum F C G æquale eſt rectangulo A C B, vtrinque addito quadrato G C; ergo rectangulum F G C, plus quadrato G C, hoc eſt rectangulum E C G æquabitur rectangulo A C B, plus quadrato G C; ſed quadrato G C æquale eſt rectangulum C A B, ob parabolen (eſt enim A B æqualis A K lateri recto) ergo rectangulum E C G æquabitur rectangulo A C B, plus rectangulo C A B; ſed rectangulum A C B, plus rectangulo CAB, eſt æquale qua-

Recta enim E C dupla eſt ex conſtructione ipſius HI. vnde E F, G C erunt æquales

quadrato A C; ergo rectangulum E C G æquabitur quadrato A C; ergo vt E C, ad A C ita A C ad G C; ſed vt A C ad G C, ita G C ad A B, ob parabolen, cùm rectangulum B A C; hoc eſt ſub A K latere recto, & axe AC æquale ſit quadrato G C; ergo vt E C ad A C, ita A C ad G C; & vt A C ad G C, ita GC ad AB; ergo inter duas EC, AB duæ G C, & A B, ſunt mediæ continuè proportionales. At verò EC eſt ex conſtructione æqualis Z, & A B æqualis Y; ergo inter duas datas Y, Z, duas adinuenimus medias proportionales A C, G C, in continua ratione. Quod facere propoſitum erat.

Auctoris Methodo abſoluitur, quod Clariſsimus Geometra præſtitit beneficio Speciosæ Logiſtices ad eandem Cubicam Æquationem affirmatiuè affectam ſub latere, explicandam.

ALia itidem via non minus eleganti poterit explicari; dummodo tamen illa, nimirum $a^3 + 3b^2 a = z^3$, ſeu z ſol. nouam hanc induat formam, videlicet

$$a^3 + b^2 a = b^2 d$$

Quod facilè fieri poteſt, ſi namque nota quantitas puta coefficiens planum ſublaterale appellatum 3 b² nuncupetur b² hoc enim ad libitum eſt, vbi b² aſſumitur tanquam æquipollens ipſi 3b² ſi quidem accipitur ad idem planum deſignandum; & quidem appellari potuiſſet d², vel alio quouis charactere deſignari, placet nihilominus retinere b. z ſol. data magnitudo applicetur ad b², * magnitudinem itidem datam; magnitudo quidem ortiua, quæ appelletur d, non ignorabitur; perinde igitur erit dicere b² d ac z³ vel z ſol. Conſiderandus igitur æquationis ortus qui quidem ex Zetetico deprehenditur, qua de re ſuo loco multa ſcripſimus; Sunt autem quatuor termini proportionales, & in ſuperiori quidem æquatione hunc in modum, vt b² ad a², ita a, ad d-a; hic igitur analogiſmus in quem ſuperior æquatio tranſmutata eſt. Ad comparandam itaque propoſitæ æquationis radicem, ſoluendum Problema illud

> * Quod ſcilicet aſſumitur ad ſignificandam magnitudinem, quæ prius erat, ſignificata per 3b².

Propoſitam rectam Q D, vtcunque diuiſam in A, iterum oportet diuidere in C, ita vt quadratum Q A ad quadratum A C ſit in ratione, quam habet A C ad C D.

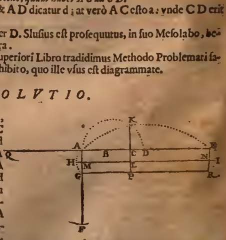
Intelligatur autem Q A æquari b, & A D dicatur d; at verò A C eſto a: vnde C D erit d – a. De hoc tamen infra.

Hæc acutè admodum, atque ſubtiliter D. Sluſius eſt proſequutus, in ſuo Meſolabo, beneficio Speciosæ Logiſtices, de quo infra.

> *Auctoris methodo idem Problema reſoluitur.*

Nunc eidem peculiari noſtra, quam ſuperiori Libro tradidimus Methodo Problemati ſatisfacere tentabimus, eodem prorſus adhibito, quo ille vſus eſt diagrammate.

RESOLVTIO.



SIt iam factum, ita vt quadratum QA, ad quadratum AC ſit in ratione AC ad C D; ad punctum A facta ſit A F ad rectos angulos & æqualis ipſi QA, & in A F, quouis accepto pũcto G protrahatur A D ad partes D vſq; ad E, ita vt AD ſit ad AE in ratione G F ad A F, & ex E ducta ſit E R parallela & æqualis ipſi A G: ductaque ſit G R, quæ parallela erit ipſi A E, atque adeo completum ſit rectangulum AG R E, mox autem per punctum C, in quo ſupponimus rectam eſſe diuiſam QD, vt Problema iubet, intelligatur ducta P K ad rectos angulos cum ipſa Q D; hoc enim nihil prohibet, eaque ſecet circumferentiam circuli deſcripti ſuper A D in puncto K, & rectam G R in puncto P; ſecetque etiam in puncto L rectam M N connectentem puncta M, & N, in quibus A G, & E R per æqualia ſupponimus fuiſſe diuiſas. Factum verò ſit vt A E ad A D, ita A C ad A B.

Quoniam igitur eſt, vt quadratum Q A ad quadratum A C, ita A C ad C D, hoc eſt ob cir-

circulum ita [a] quadratum AC ad quadratum CK; ſunt [b] igitur tres proportionales magnitudines, nempè prima QA: ſiue FA, ſecunda AC; tertia CK, atque adeo vt FA ad AC, ita AC ad CK; ſed vt FA ad AC, ita PC ad BC, vt mox conſtabit; ergo vt PC ad CB, ita [c] AC ad CK; ergo rectangulum ACB æquabitur [d] rectangulo PCK; ſed rectangulum ACD æquale eſt [e] quadrato CK ob circulum; ergo æqualibus vtrinque additis; rectangulum ACB, vnà cum rectangulo ACD æquabitur [f] rectangulo PCK, vnà cum quadrato CK; ſed rectangulum ex AC in BD æquale eſt [g] duobus rectangulis ACB, ACD, & rectangulum PKC æquale eſt [h] rectangulo PCK plus quadrato CK; ergo rectangulum ex AC in BD æquabitur rectangulo PKC; ſed vt AE ad AD, ita rectangulum ACE ad rectangulum ex AC in BD, vt mox oſtendam; ergo rectangulum ACE ad rectangulum PKC, erit, [i] vt AE ad AD; & conuertendo, vt AD ad AE, ita [k] rectangulum PKC ad rectangulum ACE; ſed ex conſtructione habita in præparatione, vt AD ad AE, ita GF ad FA; ergo rectangulum PKC ad rectangulum ACE, erit [l] vt GF ad FA; ſed vt rectangulum PKC ad rectangulum ACE, deſcripta ellipſi tranſeunte per puncta A, K, E, cuius axis HI, & ſemiordinatim applicata AM, ita eſt quadratum AM, ad rectangulum HMI, ſeu MHN, vt infra conſtabit; ergo quadratum AM ad rectangulum MHN, erit [m] vt GF ad FA; ſed quadratum AM ad rectangulum MHN eſt [n], vt latus rectum ad latus tranſuerſum, ſiue axim HI, ergo vt GF ad FA, ita [o] latus rectum ad latus tranſuerſum ellipſeos tranſeuntis per puncta A, K, E. Quod fieri poteſt &c.

a Ex ſchol. 13 ſexti, & corol. 20. eiuſdem.
b 22. ſexti.
c 11. quinti.
d 16. ſexti.
e Ex ſchol. 18 ſexti, & 17. eiuſdem.
f 2. axio pri.
g 1. ſecundi.
h 3 ſecundi.
i 7. quinti.
k corol. 4. ſex.
l 11. quinti.
m 11. quinti.
n 13. pri. Lib. Conic. Apollonij.
o 11. quinti.

Lemma I.

Quòd autem ſit, vt AF ad AC, ita PC ad BC, ſic oſtendo.

Quoniam igitur eſt vt AF ad FG, ita AE ad AD ex conſtructione, atque adeò, ita AC ad AB; ergo per conuerſionem rationis erit [a] vt AF ad AG, ſeu PC, ita AC ad BC; & permutando vt AF ad AC, ita [b] PC ad BC.

a corol. 19 qui.
b 16. quinti.

Lemma II.

Quod autem in recta AE, ſi fuerit vt AE ad AD, ita AC ad AB, ſit etiam vt AE ad AD, ita rectangulum ACE ad rectangulum ex AC in BD, ſic oſtendo.

Quoniam enim eſt vt AE ad AD, ita AC ad AB; ergo permutando vt AE ad AC, ita [a] AD ad AB, & diuidendo, vt CE ad AC, ita [b] BD ad AB; ergo rectangulum ex BD in AC æquabitur [c] rectangulo ex CE in AB; At verò vt AB ad AC, ita [d] ſumpta communi altitudine CE, rectangulum ex AB in CE ad rectangulum ACE; ergo vt AB ad AC; ita [e] rectangulum ex BD in AC ad rectangulum ACE, vel vt rectangulum ACE ad rectangulum ex BD in AC, ita [f] AC ad AB, ſeu AE ad AD.

a 16. quinti.
b 17. quinti.
c 16. ſexti.
d 1. ſexti.
e 7. quinti.
f corol. 4 qu.

Lemma III.

Quod autem ad quadratum AM, rectangulum HMI ſit vt rectangulum PKC ad rectangulum ACE, ſic oſtendo.

Quoniam enim ex natura ellipſeos, vt rectangulum ILH ad rectangulum IMH, ita [a] eſt quadratum LK ad quadratum AM, ſiue CL; ergo diuidendo erit [b] vt quadratum LK, minus quadrato CL, hoc eſt [c] rectangulum PKC; (eſt enim PC biſariam diuiſa in L) ad quadratum CL, ſiue AM, vt rectangulum ILH, minus rectangulo IMH, hoc eſt [d] rectangulum NLM, ad rectangulum HMI; ergo permutando [e] rectangulum PKC ad rectangulum NLM, ſeu ACE, erit vt quadratum AM ad rectangulum HMI;

a Ex Elem. Conicis.
b 17. quinti.
c 6. ſecundi.
d Ex Element.
e 16. quinti.

COMPOSITIO.

SVper AD deſcriptus ſit ſemicirculus AKD, & ad punctum A facta ſit FA ad rectos angulos, & æqualis ipſi QA, in qua ſumpto quouis puncto G protrahatur AD ad E, ita vt AD ad AE ſit, vt GF ad FA; ducta autem ER, quæ ſit æqualis & parallela ipſi AG, agatur GR, quæ parallela erit ipſi AE, atque adeò completum erit rectangulum AGRE: diuiſis autem AG, ER biſariam in punctis M, & N, acta NM protrahatur ad H, ità vt quadratum AM ad rectangulum

Geometrica effectio ex Analyſi deducta.

MHN, ſit in ratione GF ad FA. Et protracta MN ad I ita vt N I ſit aqualis H M, circa H I, tanquam axim, & latere recto, quod ad ipſam H I, velut ad latus tranſuerſum ſit in ratione vt GF ad FA, deſcribatur ſemiellipſis, qua neceſſariò tranſibit per puncta A, & E, ſecabitque circumferentiam ſemicirculi deſcripti ſuper AD in puncto K, ex quo cadat perpendicularis KC. Erit enim quadratum QA, ad quadratum AC, vt AC ad CD; protrahatur KC ad partes C, occurratque MN, in L, & GR in P. Fiat autem, vt AE ad AD, ità AC ad AB.

Quoniam igitur eſt vt GF ad FA, atque adeò vt latus rectum ad latus tranſuerſum, ſiue
axin HI, ellipſeos tranſeuntis per puncta A, K, E; ita quadratũ AM ad rectangulum M H N;
ſed vt rectangulnm PKC ad rectangulum ACE, deſcripta ellipſi tranſeunte per puncta A,
α 11. pri. lib. Coni. Apollonij. K, E, cuius axis HI, ſemiordinatim applicata AM, ita eſt α quadratum AM ad rectangu-
lum MHN, ſeu HMI, vt oſtenſum eſt; ergo rectangulum PKC, ad rectangulum ACE, erit
β 11. quinti. β vt GF ad FA; ſed ex constructione vt GF ad FA, ita AD ad AE; ergo vt AD ad AE, ita γ
γ 11. quinti. rectangulum PKC ad rectangulum ACE; & conuertendo vt AE ad AD ita rectan-
gulum ACE ad rectangulum PKC: ſed vt AE ad AD, ita eſt rectangulum ACE, ad
δ 9. quinti. rectangulum ex AC in BD, vt oſtenſum eſt; ergo rectangulum ex AC in BD, æquabitur δ
ε 1. ſecundi. rectangulo PKC; ſed rectangulum ex AC in BD, æquale eſt ε duobus rectangulis ACB, &
ζ 3. ſecundi. ACD; rectangulum verò PKC æquale eſt ζ rectangulo PCK plus quadrato CK; ergo duo
rectangula ACB, & ACD æqualia erunt rectangulo PCK, plus quadrato CK: ſed rectan-
η Ex ſchol. 13 ſexti, & 17. eiuſdem. gulum ACD, æquale eſt η quadrato CK; ergo æqualibus hinc inde ſublatis, æqualia remanebunt rectangula ACB, & PCK; ergo latera erunt proportionalia, ſcilicet, vt PC ad CB,
θ 16. ſexti. ita θ AC ad CK, ſed vt PC ad CB, ita FA, ad AC, vt oſtenſum eſt; ergo vt FA ad AC, ità
ι 11. quinti. ι AC ad CK; ſunt ergo tres quantitates proportionales, prima AF, ſiue QA, ſecunda AC;
κ Ex ſchol. 22 ſexti. tertia CK; ergo vt quadratum QA ad quadratum AC, ita κ quadratum AC ad quadratum
λ Ex ſchol. 13 ſexti, & coroll. 20. eiuſdem. CK, hoc eſt ob circulum; ita λ AC ad CD.

Cæterum qua arte beneficio ſpecioſæ Logiſtices reſolutionem, adhibuerimus, & inde Poriſma collegerimus, infra ſuo loco explicabimus.

Interim in memoriam eſt reuocandum, quod alibi diximus, nullum ferè Theorema, vel Problema eſſe, quòd ad ſui reſolutionem, aliqua præparatione non indigeat; plus vel minus, iuxta rei naturam,

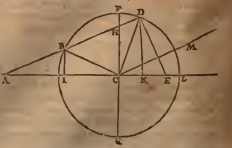
Methodi ad explicandam Cubicam Æquationem ſub latere negatiuè affectam; vt $a^3 - 3b^2 a = z^3$, ſeu z ſolido.

Methodus Communis Recentiorum.

F*iant duo triangula æquicrura, ita vt latera vnius æqualia ſint lateribus alterius, vtrunque vtrique, & quidem latus ſit recta, qua poſſit tertiam partem plani coefficientis ſublateralis, baſis autem ſecundi ſit recta, qua ducta in tertiam partem coefficientis plani, faciat comparationis homogeneum; angulus autem ad baſim triplus ſit anguli ad baſim primi; huius enim primi trianguli baſis pretium Radicis exhibebit.*

Commemorata æquatio Geometricè ſic explicabitur. Si enim fuerit $a^3 - 3b^2 a = z^3$, ſeu z ſol. aliam hanc retineat formam, nempe $a^3 - 3b^2 a = b^2 d$.

Sit igitur expoſita quædam recta CE, quæ ducta in tertiam partem plani coefficientis, faciat cõparationis homogeneũ, quodque in terminis Analyticis erat z^3, ſeu z ſol. hoc enim applicetur ad tertiam partem plani coefficiẽtis, quod in terminis Analyticis erat $3 b^2$. Inde verò magnitudo ortiua ſit CE, quæ bifariam ſecetur in K: ex K excitetur perpendicularis KD; mox autem centro C, ad interuallum C D, rectæ, quæ poſſit tertiam partem plani coefficientis ſublateralis, deſcribatur circulus ſecans K D in D; ducanturque CD, ED; ex ijs autem, quæ infra dice-



mus

mus, diuidatur angulus DCE triſariam, ſitque tertia pars anguli prædicti angulus M C L; mox autem ex puncto D, ducatur DA parallela ipſi M C, occurrens circuli circumferentiæ in puncto B, & rectæ EC protractæ ad partes C, in A; erit enim angulus DAC æqualis angulo M C E, atque adeò tertia pars anguli D C E; ducta autem C B. Quoniam igitur C B æqualis eſt CD; ergo angulus CBD æquabitur [a] angulo CDB; ſed angulus CDB æqualis eſt [b] angulo DCM ob parallelas AD, CM; ergo angulus CBD æquabitur [c] angulo DCM; ſed angulus DCM duplus eſt [d] anguli MCL, ſeu DAC; ergo angulus CBD duplus erit anguli DAC; eſt [e] autem angulus CBD æqualis duobus angulis BAC, BCA; ergo anguli B A C, BCA erunt inter ſe æquales; ergo AB æquabitur [f] C B; ſed C B æquatur [g] C D, cui æquatur E D (nam C K, K D æqualia ſunt lateribus EK, KD, vtrunque vtrique; anguli autem ad K ſunt recti, ex conſtructione, atque adeò æquales. ergo C D æquabitur E D per 4. primi) ergo duo ſunt triangula æquicrura ABC, DCE, ita vt latera vnius æqualia ſint lateribus alterius, vtrunque vtrique, anguluſque ad baſim prioris, puta BAC trianguli, nempè angulus B A C, ſubtriplus ſit anguli ad baſim poſterioris trianguli C D E, nempè anguli D C E.

[a] 5. primi. [b] 29. primi. [c] 1. axioma primi. [d] ex conſtructione. [e] 32. primi. [f] 6. primi. [g] 15. defi. pr.

Oſtendendum ſupereſt, quòd cubus ex AC, minus triplo ſolido ſub AC, & quadrato A B, æquale ſit ſolido ſub C E, & eodem quadrato AB. cadant BI, & FC perpendiculares ad A, L; Manifeſtum eſt quòd B I, F C, D K, erunt inter ſe parallelæ, & quòd A I, erit æqualis I C, item C K æqualis K E; prætereà A B æqualis B H, itaque A C æquabitur duplæ A I, & A H duplæ A B, inſuper C E duplæ C K, & C H duplæ B I.

Quoniam igitur recta F G diuiſa eſt biſariam in G, & non biſariam in H; ergo [h] rectangulum F H G, ſeu rectangulum B H D illi æquale [i], vna cum quadrato C H, æquabitur quadrato CF, ſeu A B: hinc inde ſubtracto quadrato C H; ergo rectangulũ B H D æquabitur [k] quadrato AB, minus quadrato C H; ſed quadratum A B minus quadrato C H, æquale eſt quadrato A B plus quadrato A C, minus quadrato A H, ſiue minus quadruplo quadrato AB, vt infrà conſtabit, & quadratum AB, plus quadrato A C, minus quadruplo quadrato A B, æquale eſt quadrato A C, minus triplo quadrato AB, vt mox demonſtrabitur; ergo rectangulũ BHD, æquabitur [l] quadrato AC, minus triplo quadrato AB; ſed vt AC ad CE, ita IC ad C K; vt enim duplum ad duplum, ita eſt [m] ſimplum ad ſimplum, & vt I C ad CK, ita B H ad H D, vtque B H ad HD, ita [o] quadratum BH, ſiue AB ad rectangulum B H D; ergo vt A C ad C E, ita [p] quadratum A B, ad rectangulum B H D, hoc eſt ad quadratum A C, minus triplo quadrato A B; hanc enim quadratorum differentiam oſtendimus æqualem rectangulo B H D; ergo cubus ex A C, minus triplo ſolido ex A C, in quadratum A B, æquabitur [q] ſolido ex C E in quadratum A B.

[h] 5. ſecundi. [i] 35. tertij. [k] 3. axioma primi. [l] 1. axioma primi. [m] 15. quinti. [n] 2. ſexti. [o] 1. ſexti. [p] 11. quinti. [q] 19. ſeptimi ſi ad Geometriam transferatur.

Lemma I.

Quod autem quadratum A B, minus quadrato C H, æquale ſit quadrato AB, plus quadrato AC, minus quadrato A H, ſiue minus quadruplo quadrato AB, ſic oſtendo.

Quoniam enim angulus A C H, eſt rectus; ergo quadratum A H æquabitur quadrato A C, plus quadrato CH; vtrinque addito quadrato AB, ergo quadratum A B plus quadrato A H, æquabitur quadrato AB, plus quadrato AC, plus quadrato CH; vtrinque ſubtracto quadrato AH; ergo quadratum AB æquabitur quadrato AB plus quadrato AC, plus quadrato C H, minus quadrato AH; vtrinque ſubtracto quadrato CH; ergo quadratum AB, minus quadrato CH, æquabitur quadrato A B, plus quadrato AC, minus quadrato AH, ſeu minus quadruplo quadrato A B. Cùm enim AH diuiſa ſit biſariam in B, quadratum AH, idem eſt, quod quadruplum quadratum AB.

Lemma II.

Quod verò quadratum AB, plus quadrato AC, minus quadruplo quadrato AB; æquale ſit quadrato A C, minus triplo quadrato A B, ſic oſtendo. *Quadratum enim A C æquale eſt quadrato AC, vtrinque ſubtracto triplo quadrato AB, ergo quadratum AC, minus triplo quadrato A B, æquabitur quadrato A C, minus triplo quadrato A B, ſed quadratum A C, minus triplo quadrato AB, idem eſt quod quadratum A B, plus quadrato A C, minus quadruplo quadrato A B; ergo quadratum AB, plus quadrato AC, minus quadruplo quadrato AB, æquabitur quadrato AC,*

minus triplo quadrato AB.

Si igitur AB, vel DC dicatur b, item CE, d, & AC, a, prodit æquatio $a^3 - 3 b^2 a = b^2 d$.

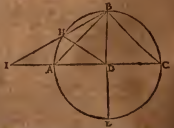
Quoniam autem ad ſuperioris æquationis radicem exhibendam opus eſt anguli triſectione, quæ pluribus quidem modis exhiberi poteſt, vel ſcilicet per Conchoidem, vel per modum ſimpliciorem, ſcilicet per circulum, & parabolen, vel per circulum, & hyperbolen &c. Nos poſteriori modo rem ipſam abſoluere tentabimus.

Anguli triſectio, qua Auctor in huius Problematis effectione vti conſueuit.

Veterum ingenia quidem inter duas datas, aliarum duarum continuè proportionalium, & anguli triſectionis æquè vexauit inuentio; primum iam ſuperius præſtitimus; ſecundum nunc exequemur.

PROBLEMA.

Datum angulum rectilineum trifariam diuidere.

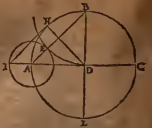


PRoblema iſtud duos habet caſus; vel enim angulus diuidendus eſt rectus, vel non rectus. Si angulus rectus fuerit, admodum facilè eſt Problemati ſatisfacere. Idque, nos hunc in modum breuiter aſſequemur.

Anguli recti triſectio. Propoſitus angulus rectus ſit ADB diuidẽdus trifariam. Centro D, interuallo D A, deſcribatur circulus A B C L. Protrahatur DA ad partes A in infinitum. Et B D producatur ad peripheriam vſque in L; mox autem centro B, interuallo B L deſcribatur arcus L I, ſecans D A protractam in I; ex puncto I, ad punctum B, agatur IB, occurrens peripheriæ in H. Ducatur H D. Dico angulum ADH, tertiam eſſe partem anguli recti ADB. Demonſtratio autem patet ex ijs, quæ nos de Circulo tractantes oſtendimus ad Propoſitionem 108.

Triangulũ enim HBD æquilaterũ eſt; ob id erit angulus HBD tertia pars duorum rectorum, atque adeò duæ tertiæ partes vnius recti; eſt autem angulus IDB ex hypotheſi rectus; ergo reliquus DIB tertia pars erit vnius recti. Quoniam verò IB, vt ibi oſtẽdimus, diuiſa eſt bifariam in H; eſtque H B æqualis ſemidiametro B D, ſeu H D, ob id etiam I H æqualis erit H D; quamobrem angulus H I D, æqualis erit angulo HDI: eſtque angulus H I D tertia pars vnius recti; proinde etiam angulus HDI vnius recti tertia pars erit. Id autem erat nobis oſtendendum.

Anguli cuiuſdam tàm obtuſi, quàm acuti triſectio. Operoſior tamen eſt hæc triſectio, cùm angulus non rectus, ſed vel acutus, vel obtuſus fuerit.



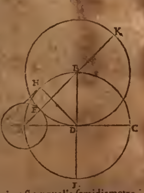
Si propoſitus angulus fuerit obtuſus duplex poteſt eſſe caſus; aut enim recta quidem æqualis circuli ſemidiametro applicanda inter periphæriæ conuexum, atque diametrum productam tanget ipſam periphæriam, aut illam ſecabit. Si itaque propoſitus angulus obtuſus tantus fuerit, vt applicanda illa linea ad triſectionem perficiendam, tangat ipſam peripheriam, Problemati facilè ſatisfiet per loca plana.

Sit igitur propoſitus angulus triſecandus H D C, Centro D, & interuallo quocunque D H, deſcribatur circulus HBCA, protrahatur CD ad partes A in infinitum. Applicanda eſt igitur inter conuexum periphæriæ, & diametrum productam, quæpiam recta I H æqualis ſemidiametro. Sed id admodum facilè eſt; namque cum hæc debeat tangere circulum in H æqualis exiſtens

ſtens ſemidiametro, erit angulus ad H rectus. Ad punctum igitur H ducatur I H, quæ angulum efficiat rectum cum H D. Et abſolutum erit quod oportet; applicata enim erit recta IH circulum tangens. Et quoniam angulus HDC ſupponitur tantus, ita vt ducta tangens IH ſit æqualis ſemidiametro, factum erit, quod oportet, applicata nimirum erit recta prout exigitur ad anguli triſectionem. Quoniam enim HI æqualis eſt ſemidiametro HD, erit angulus H I D æqualis angulo H D I; Cumque angulus I H D ſit rectus erit, & angulus vterque H I D, H D I ſemirectus; eſt autem angulus H D C externus æqualis duobus internis, & oppoſitis, I H D, H I D; quamobrem angulus H D C æqualis erit triplo angulo H I D; ſiquidem angulus I H D duplus eſt anguli H I D; quamobrem angulus I H D, vnà cum angulo HID, triplus erit anguli H I D; ſed angulus H D C æqualis eſt duobus I H D, H I D; vt dictum eſt ergo angulus H D C triplus erit anguli H I D. Quare angulus H I D tertia pars eſt anguli H D C.

Quoniam verò angulus H D I æqualis eſt angulo HID, perſpicuum eſt in hac hypotheſi angulum H D C triſectum eſſe, cuius tertia pars eſt angulus H D I. Et quoniam angulus H D I ſemirectus eſt, qualis eſt ille, qui continetur, ſeu conſtituitur à recta H D, & ab excitata ex puncto D perpendiculari D B, quemadmodum eſt angulus H D B; proinde ad huiuſmodi propoſiti anguli triſectionem, ſatis erit ex puncto D, ad alterutram ipſarum H D, DC perpendicularem excitare, vt hic excitata DB perpendiculari ad D C, fiet angulus H D B tertia pars anguli H D C; vnde biſariam diuiſo [a] angulo B D C, angulus H D C triſectus erit. a 9. primi.

Quòd ſi non eſſet datus angulus HDC ſed applicanda eſſet recta quidem æqualis ſemidiametro inter periphæriæ conuexum, & diametrum productam pluribus modis id fieri poſſet.



Primò reperto circuli centro D, & hinc excitata perpendiculari D B ad diametrum, atque diuiſo angulo A D B biſariam rectâ HD, & ad punctum H conſtituto angulo recto IHD. Recta IH erit æqualis ſemidiametro H D, ac erit applicata inter peripheriæ conuexum, atque diametrum productam.

Secundò verò ſic & elegantiùs. Excitata perpendiculari D B; ductaque A B, & centro B, interuallo B D, deſcripto arcu DE ſecante rectam A B in E, & centro A, interuallo A E, deſcripto arcu E I ſecante diametrum productam in I: ex puncto I, ducta [b] tangente I H, hæc erit æqualis circuli ſemidiametro, quamobrem inter peripheriæ conuexum, & diametrum productam applicata erit recta æqualis ſemidiametro. b 17 tertij.

Quod autem IH exiſtat ſemidiametro æqualis, facilè hunc in modum oſtendetur.

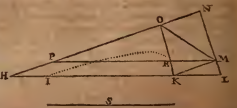
Completo circulo E D K productaque AB ad K; quoniam recta A D cum recta B D facit angulum rectum ad D, tanget [c] circulum EDK in puncto D; quamobrem rectangulum c coroll. 16. tertij.
K A E, æquale erit [d] quadrato AD. Eſt autem EK æqualis ipſi AC; dimidia enim ipſarum, d 36. tertij.
nempè E B, ſeu B D, & A D ſunt æqualia, eſtque A E æqualis A I; quare tota A K æqualis erit toti IC, exiſtentibus æqualibus AE, AI. proinde rectangulum C I A æquale erit rectangulo K A E; quapropter rectangulum C I A æquale erit quadrato A D; ſed rectangulum C I A æquale eſt [e] quadrato I H; ergo quadratum I H æquale erit quadrato A D, at- e 36. tertij.
que adeo I H erit æqualis ipſi A D. Quod oportebat oſtendere.

Itaque ad punctum D factus erit angulus I D H tertia pars reliqui anguli HDC. Ex hactenus porrò hucuſque allatis ne dum diuiſus erit angulus rectus trifariam, ſed etiam vt patet obtuſus angulus H D C; quinimmò & angulus acutus A D H; cum enim hic dimidius ſit anguli recti, diuiſo angulo recto trifariam non poteſt ignorari triſectio ipſius dimidij nempe anguli A D H, ſiue H D B.

Nunc reliquum eſt, vt diuidamus reliquos angulos, tùm acutos, tùm obtuſos.

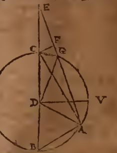
Datus ſit angulus diuidendus A D B, centro D, interuallo D A, deſcribatur circulus C A B; protrahatur B D ad partes D, occurrens peripheriæ in C: ductiſque CA, BA; a puncto C agatur C F, æquidiſtans rectæ B A: ſumaturque linea quæcunque O M, & ſuper Omnis anguli tàm obtuſi quàm acuti triſectio.

pun-



punctum eius O, fiat angulus M O P æqualis angulo A C E; Ducatur autem à puncto M, linea MK æquidiſtās lineæ O P: ex angulo autem M O P abſcindatur angulus M O K, æqualis angulo E C F, ducta nimirum linea CK, quæ cum MK neceſſariò concurret; angulus verò K O P reliquus, erit æqualis reliquo A C F.

A puncto M ducatur M L æquidiſtans lineæ OK, quæ neceſſariò concurret cum PO, ſi ad partes M fuerit illa protracta, hæc autem ad partes O, concurrat in puncto N, ſumaturq; linea S, quæ quidem ad lineam OM ſit quemadmodum diameter B C ad ſemidiametrum C D, nempè dupla. Mox autem per punctum K inter duas lineas, tanquam aſymptotos, NP, & N L, beneficio hyperboles ducatur linea H L ſecans lineas NL, N H, in punctis H, & L, ita vt pars eius I K ſit æqualis datæ lineæ S, & pars HI erit æqualis parti KL; à puncto verò M ducatur M P, parallela ipſi H L, occurrens rectæ O K, in R; fiat autem ad peripheriæ punctum A angulus E A C æqualis angulo O P M, ducta videlicet recta A E, quæ neceſſariò concurret cum producta diametro ad partes C. Cùm enim angulus E A C ſit æqualis angulo O P M, & angulus A C F ſit æqualis angulo P O K; angulus vero E C F æqualis ſit angulo M O K, atque totus angulus A C E æqualis toti angulo P O M; lineæ autem P M, & O M concurrant, proinde lineæ quoque A E, & C E concurrent. Quamobrem linea AE, aut peripheriam tanget, aut ſecabit.



Supponamus rectam A E circulum ſecare, adeòut cum producta diametro concurrens circuli peripheriam non tangat. Namque cùm tangit ſuperiùs, vidimus Problemati per loca plana ſatisfieri poſſe. Secet igitur. Quoniam angulus C A F æqualis eſt angulo OPM; angulus verò A C F æqualis eſt angulo P O R; reliquus propterea angulus A F C æqualis erit angulo ORP; qua propter triangulum ACF æquiangulum erit triangulo OPR; quam-
a 4. ſexti. obrem linea AF ad lineam AC rationem habebit,[a] vt PR ad PO. Ita quoque cùm angulus A C E ſit æqualis angulo P O M, & angulus C A E æqualis angulo O P M, proinde triangulum A C E ſimile erit triangulo P O M. Quamobrem vt A C ad C E, ita P O ad O M.
b 22. quinti. Si itaque vt A F ad A C, ita eſt P R ad PO, & vt AC ad CE, ita PO ad OM; erit[b] ex æquo vt A F ad C E, ita P R ad O M. Quoniam autem M K æquidiſtat P H, & P M æquidiſtat H
c 34. primi. K, ob id H P M K parallelogrammum erit; quamobrem recta P M æqualis erit[c] rectæ H K; quare P M æqualis erit I L, cùm H K, & I L ſint æquales. At verò K L æqualis eſt RM, & RK æqualis ML; ergo PR æqualis erit IK; ſed I K æqualis eſt rectæ S: ob id P R æquabitur
d 7. quinti. S, ſed vt S ad OM, ita diameter B C ad ſemidiametrum D C; ergo vt PR ad OM, ita[d] diameter B C ad ſemidiametrum D C. Quoniam autem erat AF ad CE, vt P R ad O M; proinde erit A F ad C E, vt diameter B C ad ſemidiametrum D C. Ducatur linea C G. Quo-
e 22. tertij. niam igitur quadrangulum A B C G in circulo deſcriptum eſt, erunt[e] anguli AGC, & A B C duobus rectis æquales; cùmque recta CF æquidiſtet rectæ BA, erit angulus FCE æqualis angulo C B A; quamobrem angulus F C E, vnà cum angulo A G C æqualis erit duobus rectis. At vero angulus F G C, vnà cum angulo A G C æqualis eſt duobus rectis; ob id angulus F C E æqualis erit angulo FGC. Eſt autem angulus FEC communis vtrique triangulo CEF, & G C E; ob id reliquus angulus E F C æqualis erit reliquo E C G; quamobrem
f 4. ſexti. circa æquales angulos latera erunt proportionalia; vt igitur G E ad E C, ita[f] E C ad E F;
g 17. ſexti. quare rectangulū G E F æquale erit[g] quadrato EC, eſt[h] autem rectangulum AEG æquale
h Coroll. 36. tertij. rectangulo BEC: præterea rectangulum AE G æquale[i] eſt rectangulo G E F plus rectan-
i 1. ſecundi. gulo ſub EG, & FA; rectangulum verò BEC æquale eſt [k]rectangulo BCE, plus quadrato
k 3. ſecundi. CE: æqualibus vtrinque ſublatis, nimirum quadrato CE ex vna parte, & rectangulo GEF ex altera, remanebit rectangulum ſub EG, & AF æquale rectangulo BCE; propterea igitur

tur erit vt AF prima ad CE ſecundam, ita BC tertia ad EG quartam; at verò AF ad EC rationem habet vt diameter BC ad ſemidiametrum DC, vt ſupra demonſtratum fuit, quamobrem EG æqualis erit ſemidiametro D C, ſeu D G; quare angulus GED æqualis erit angulo GDE; eſt autem angulus AGD æqualis illis duobus, GED nimirum, & GDE, atque adeò duplus anguli G E D, eſtque angulus G A D æqualis angulo D G A; quare angulus E AD duplus erit anguli DEA. At verò angulus ADB æqualis eſt duobus DEA, & EAD; quare angulus A D B triplus erit anguli D E A; atque adeò angulus D E A tertia pars erit propoſiti anguli ADB. 16. ſexti.

Quòd ſi angulus A D B triſectus erit, diuiſo trifariam angulo recto, triſectus etiam erit angulus reſiduus ad rectum, qualis eſſet angulus ADV; vnde triſecto angulo recto C D V, triſectus etiam erit angulus obtuſus CDA.

Auctoris Methodus

Ad generalem Polygonorum omnium ordinatorum inſcriptionem in Circulo.

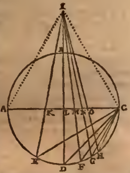
D I G R E S S I O.

Ad Iacobum Gregorium Mathematicarum in Collegio D. Andreæ apud Scotos Profeſſorem.

ET inter duas datas rectas lineas duas medio loco continuè proportionales inuenire, & angulum rectilineum trifariam diuidere, mirabile quidpiam eſt, non nego; longè tamen mirabilius illud fortaſſe, nempè celebre, ac præſtantiſſimum omnium.

P R O B L E M A.

Circuli circumferentiam in quotcunque partes æquales diſpeſcere. Vel quod in idem recidit. Propoſito circulo quodcunque polygonum æquilaterum, ac ordinatum inſcribere.



ESto circulus A B C D, cuius diameter A C. oporteat facere quod imperatum eſt. Centro A, ad interuallum diametri AC deſcribatur arcus, & viciſſim centro C, ad idem interuallum CA, alter deſcribatur arcus, priorem ſecans in I; diuidatur diameter A C, in tot æquales partes, in quot diuidenda eſt circuli circumferentia; duabus enim prætermiſſis, per punctum diuiſionis ducta recta, quæ à puncto interſectionis arcuum I ad peripheriæ cauum perueniat; arcum enim intercipiet ab extremitate ipſius diametri, ita vt tot partes illi æquales in tota peripheria contineantur, quot per diuiſionem in diametro continentur. Itaque

Pro Triangulo æquilatero diameter A C in tres æquales partes diuidatur, quarum prima ſit AK, per K, ex I agatur IE occurrens peripheriæ cauo in E, agatur E C. Dico E C eſſe latus Trianguli æquilateri. Triangulum.

Pro Quadrato diuiſa AC diametro in quatuor partes æquales, initio facto ab A duabus prætermiſſis, aggregatum è duabus prioribus ſit AL per L acta ID, mox ducatur DC. Dico DC eſſe latus Quadrati circulo inſcripti. Quadratum.

Pro Pentagono diuidatur AC in quinque partes æquales, initio facto ab A, quarum duabus poſterioribus prætermiſſis, trium priorum aggregatum ſit A M, per M ex I ducatur IF, & agatur F C. Dico FC eſſe latus Pentagoni ordinati, & circulo inſcripti, & ſic de Exagono; diuiſa ſiquidem diametro AC in ſex æquales partes, duabus prætermiſſis, quatuor priorum ſumma ſit AN per N, agatur IG, ductaque GC, erit quidem GC, latus Exagoni ordinati; Quod ſi diuidatur diameter in ſeptem æquales partes; quarum duæ fuerint omiſſæ, & quinque priorum ſumma ſit AO per O, ducta ſit I H; acta quidem HC erit Eptagoni ordinati latus, Circulo inſcripti. Pentagonum. Exagonum. Eptagonum.

Horum

Horum autem demonſtrationem, pluribus in Libro noſtro de Circulo proſecuti ſumus; In huius Problematis effectione, Seniores Geometræ melioris notæ plurimum inſudarunt; ac in eadem Recentiores non parum temporis, oleum, operamq; perdentes inſumpſerunt; vnde laudis non nihil, abſit à verbo iactantia, nobis à poſteritate ſperandum.

Auctoris Methodo abſoluitur, quod præclarus Geometra præſtitit beneficio ſpecioſæ Logiſtices ad eandem Cubicam Æquationem negatiuè affectam explicandam.

ALia itidem Methodo non minus eleganti ſuperior æquatio Geometricè poterit explicari dummodo tamen illa $a^3 - 3\, b^2 a = z^3$, ſeu z ſol. nouam hanc induat formam

$$a^3 - b^2 a = b^2 d.$$

Modo ſupra inſinuato, eadem enim nota quantitas, nempe b planum ſublaterale coefficiens deſignari hoc ſymbolo poteſt, nempe 3 b^2, vel b^2, vbi per b^2 non tertia pars illius coefficientis plani, ſed ipſiſſimum planum intelligendum eſt, & z^3 vel z ſol. intelligendum applicatum ad b^2 itaur ortiuaque magnitudo ſit d. Si aurem iam dicta æquatio per antitheſin euadat $a^3 = b^2 a + b^2 d$ ad hunc reuocabitur analogyſmum, vt b^2 ad a^2, ita a ad a + d.

Sed ad indagandam æquationis radicem illud ſoluendum.

Problema.

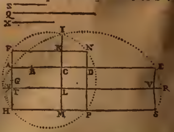
Datis duabus rectis Z, & Q, tertiam reperire X, ad cuius quadratum eandem habeat rationem quadratum Z, quæ eſt ipſius X ad aggregatum ex Z, & X.

Data ſint duo latera F N, & FG accommodata ad rectos angulos in F, oporteat F N diuidere in K, ita vt quadratum FG ad quadratum FK ſit, vt FK ad FN, plus FK, vbi FK intelligitur æqualis X, & FN æqualis Q, & FG intelligatur Z.

RESOLVTIO.

SIt iam factum, ita vt quadratum FG ad quadratum F K, ſit vt F K ad F N plus F K: Duplicetur F G in H, & in recta quidem FG quouis accepto puncto A, ducatur recta A D parallela, & æqualis ipſi FN; ſecetur autem, vel producatur ipſa A D in E, adeo vt eadem ſit ratio AD ad AE, quæ eſt AG ad GH, & compleatur rectangulum H A E S ſiat vt E A ad D A, ita C A ad BA.

Quoniam igitur eſt vt quadratum F G ad quadratum FK, ita FK ad FN plus FK, atque adeo vt quadratum FG ad quadratum A C, ita A C ad A D, plus A C; ergo ſumpta communi altitudine AC vt quadratum FG ad quadratum A C, ita quadratum A C ad rectangulum DAC, plus quadrato A C; ſed rectangulum D A C plus quadrato A C æquale eſt duobus rectangulis IMK, MIK; ergo, vt quadratum FG ad quadratum AC, ita quadratum AC ad rectangulum MIK, plus rectangulo IMK, ſeu ad quadratum MI; ergo vt FG ad AC, ità AC ad MI; ſed vt FG ad AC, ita KC ad BC; vt mox conſtabit; ergo vt KC ad BC, ità AC ad MI; ergo rectangulum A C B æquabitur rectangulo ex MI in KC; ſed rectangulum DCA, ſeu PMH æquale eſt rectangulo MIK; ergo per additionem æqualium rectangulum DCA plus rectangulo A C B, æquabitur rectangulo MIK, vnà cum rectangulo ex M I in CK. Sed rectangulum M I C æquale eſt duobus rectangulis MIK, & MI in CK rectangulum verò ex AC in BD æquale eſt duobus rectãgulis DCA, ACB; ergo rectangulum ex A C in BD æquabitur rectangulo MIC; ſed vt E A ad A D, ita quidem rectangulum ACE ad rectangulum ex A C in B D vt oſtenſum iam fuit; ergo rectangulum ACE ad rectangulum MIC, erit vt EA ad AD, vel vt GH ad GA, ſeu vt latus rectum ad latus transuerſum ellipſeos &c. Quod fieri poteſt.



Lemma I.

Quod autem ſit vt FG ad AC, ita KC ad CB. ſic oſtendo. *Quoniam enim eſt [illegible] H, [illegible] FG ad AG, ita EA ad AD, & AC ad AB, ex conſtructione; ergo per conuerſionem ra[illegible] erit, vt FG ad FA, ſiue ad KC [illegible] a AC ad BC; ergo permutando vt FG ad AC, ita KC ad B[illegible].*

Lemma II.

Quod vero rect[illegible] DAC plus qua[illegible]rato A C æquale ſit duobus rectangulis IMK, MI[illegible], ſeu qua[illegible]ato MI, ſ[illegible]do.

Quoniam enim rectangulum ſub FG, & M[illegible] æquale eſt [illegible]uadrato AC ob tres rectas proportio[illegible]es FG, A C, M I, ergo ſumpt[illegible] duplis, hoc eſt rectan[illegible]ulum ſub dupla F G, hoc eſt ſub F H, vel [illegible] M, ex conſtructione in MI, æqual[illegible] erit d[illegible]plo quadrat[illegible] R[illegible]angulum verò MIK æquale eſt [illegible]angulo D[illegible] A; ergo per additionem æqu[illegible] m D[illegible] A plus duplo quadrato A C, [illegible] æquale duobus rectangulis I[illegible]K, MIK [illegible] re[illegible] m D[illegible] A plus [illegible]uplo quadrato AC æqua[illegible] rectangulo DAC plus qua[illegible]r[illegible]o [illegible] er[illegible] m D[illegible] s quadrato AC, æquabitur du[illegible]bus rectangulis IMK M[illegible] ho[illegible] quadra[illegible] II &c.

C[illegible]

D*Vplicetur FG in H. [illegible] r[illegible]cta a[illegible] m[illegible] q[illegible] o A, ducatur AD æqualis, & parallela ip[illegible] FN, & [illegible]cetur vel pr[illegible]ducatur in [illegible] dem[illegible] r[illegible]tio AD ad AE, quæ [illegible] A[illegible] ad GH: compleatur rectangul[illegible]m A H[illegible] E [illegible] centur autem r[illegible]H, ES, in punctis [illegible] V atque du[illegible] TV pro[illegible]catur in R, a[illegible] r[illegible]ngulum TRV ad [illegible]uadratum EV, eandem [illegible]at rationem, quam [illegible]G ad CA: pro[illegible] autem V[illegible] in Y ita [illegible] TY [illegible] æqualis VR; axe au[illegible]em YR, & latere rec[illegible]o, quod ad [illegible] tranſuer[illegible]m ſi[illegible] ratione A[illegible] ad [illegible], deſcribatur ſemiel[illegible]ſis. Ea nec[illegible]ſario [illegible] ex [illegible]on[illegible]uctione [illegible] puncta A, & E circul[illegible]mque ſecabit, vel ſu[illegible]ra, vel infra N, [illegible]el in [illegible]met punct[illegible].*

Supponamus a[illegible]ionem [illegible] fi[illegible] N, [illegible] I, & ex I ad FN, perpendicularis cadat IK; erit enim FK æ[illegible] X [illegible] ut [illegible]m FG ad quadratum FK, ſit in rati[illegible] F[illegible] FN, [illegible] FK. Pr[illegible] IK [illegible] t rectis AE, TV, HS in pu[illegible] C, [illegible] M. [illegible] vt EA ad BA, ita CA ad BA.

Quon[illegible] ell[illegible] ergo [illegible] ECA [illegible]ulum MIC erit vt latus tranſuerſ[illegible] G [illegible] GA, v[illegible] EA [illegible] A [illegible] conſtructione; ſed vt E A ad DA, [illegible] ACE [illegible] A[illegible] BD, vt oſtenſum eſt;* ergo re[illegible] AC [illegible] a[illegible]ulum ex AC in BD æquale e[illegible] duobus [illegible] D[illegible] A, A[illegible] C æquale eſt duobus rectangulis MI[illegible], & MI, in KC; er[illegible] D[illegible] A, A C B æqualia erunt duobus rectanguli[illegible] MIK, & MI, in KC; ſe[illegible] rectangul[illegible] D[illegible] A, [illegible] PMI[illegible], æquale eſt rectangulo MIK ex circuli n[illegible]; er[illegible] ſu[illegible] æqualibus [illegible] æqua[illegible]ia remane[illegible]unt rectangula ACB, & quod fit ex MI in KC; ergo vt KC ad CB, ita CA ad MI, ſed vt [illegible]C [illegible] CB, ita FG [illegible] AC, vt oſte[illegible]ſum eſt; ergo vt FG ad AC, ita AC ad MI; ergo vt qua[illegible]tum F G ad q[illegible] C A, ita quadratum C A ad qua[illegible]m M I, ſeu quod idem eſt [illegible] rectangulu[illegible] M I [illegible] plu[illegible] rectangulo I M K; ſed rectang[illegible]um D A C plus quadrato A C [illegible]e eſt duob[illegible] I[illegible] k, M I k ſ[illegible] qua[illegible] MI, vt oſte[illegible]ſum eſt; ergo erit vt [illegible]atum FG ad q[illegible] A C, ita quadratum AC ad rectangulum D A C, plus qua[illegible]o AC; ergo dempta com[illegible] altitudine AC, erit vt quadratum F G ad quadratum A[illegible], ita A C ad D A plus A C, [illegible] a[illegible] eo vt quadratum F G ad quadratum F K, ita F K [illegible] N [illegible] F k.

[illegible] ſimiliter ſi punctum I ca[illegible]ret infra N; perpendicularis ſiquidem ex I, in FN pro[illegible] quæſitam rectam exhiber[illegible]. Quod ſi caderet in N, ipſa FN, foret recta quæſita,

* In l[illegible] te ad [illegible] ma ſu[illegible] tis æ[illegible] nis.

Methodi explicandi Æquationem, in qua ſolidum afficitur multa Cubi, vt 3 b a -- a³ = z³ ſeu z ſol.

M[illegible]odus Communis Recentiorum.

COnſtituantur duo triangula æquicrura, ita vt latera vnius æqualia ſint lateribus alterius, vtrumque vtrique: quodlibet autem laterum ſit recta potens tertiam partem [illegible] ſublateralis; angulus autem quem is, qui eſt ad ſecundi triangu[illegible] ducta in planum coefficiens [illegible] homo[illegible] ſit anguli, qui eſt ad b[illegible] prim[illegible] trianguli [illegible] Rad[illegible] exhib[illegible]

Superior autem æquatio [illegible] induat [illegible] b [illegible] a = [illegible] d

Expoſita ſit E C, quæ d[illegible] homo[illegible] protracta quidem in L [illegible] vt [illegible] planum [illegible] ctum in altitudinem E C facit [illegible]. S[illegible] EC [illegible] gulum æquicrur[illegible] D [illegible] C [illegible] D cum DC aptanda e[illegible] A D [illegible] A D C æ[illegible] angulis DCE, & eo, qui e[illegible] DCL [illegible] DCL [illegible] riam, ſeu beneficio [illegible] perbo[illegible]es, [illegible] cuimus, ſiue aux[illegible]o C[illegible] ctum D fiat angulu[illegible] A D C v[illegible] punctum C fi[illegible] A C [illegible] parti a[illegible] DCL [illegible] A D [illegible] currat ipſi C B, exc[illegible] B.



Quoniam igitur a[illegible] ECA ex c[illegible]ſtructione æqualis eſt tertiæ par[illegible] anguli D C L angulus verò CDA [illegible] eſt duob⁹ rectis, minu[illegible] DC L, & inſuper m[illegible] angulo DCA; [illegible] guli tres CDA, DAC, ACD, æquales [illegible] rectis; ergo duo angul[illegible] DAC, ACD, [illegible] erunt tertiæ parti anguli DCL [illegible] lo DCA. Dempto com[illegible] manebit angulu[illegible] D[illegible] DCL [illegible] angulo ACB [illegible] obrem duo l[illegible] C[illegible] æqualia.

Quoniam [illegible] A [illegible] C [illegible] tertiæ parti anguli D[illegible] angulus A[illegible]C [illegible] angulo D C A, [illegible] A C [illegible] æqualis eſt extern[illegible] D[illegible] C [illegible] latera BC, DC [illegible] ad intern[illegible] CD, [illegible] D [illegible] normal[illegible] C in I [illegible] D[illegible] A [illegible] B, [illegible] den[illegible] eſt [illegible] bo eiuſ[illegible] A C, æqual[illegible] adeout AC ſit propoſ[illegible]

Quandoquidem quad[illegible] B H D, æquale eſt [illegible] D æquale quadr[illegible] C [illegible] B, æqua[illegible] eſt quadrato A [illegible] quadrato AB, minus q[illegible] to AB, æ[illegible] L H D [illegible] A B [illegible] C

[illegible] vt [illegible] C ad CE, [illegible] C ad CA, [illegible] Ch, [illegible] HD [illegible]

quæ-

quadrâtum BH, vel AB ad rectangulum BHD; propterea, vt AC ad CE, ita erit quadratum A B ad rectangulum B H D, vel ad triplum quadratum A B, minus quadrato A C. Quamobrem triplum ſolidum ſub quadrato AB, vel CL, & altitudine AC, minus cubo eiuſdem A C, æquale erit ſolido ſub quadrato AB, ſiue DC, vel CL, & altitudine quidem EC.

Auctoris Methodo abſoluitur, quod præclarus Geometra præſtitit beneficio Specioſæ Logiſtices ad eandem Cubicam Æquationem explicandam, in qua ſolidum ſub latere afficitur multa Cubi.

Alia etiam Methodo Geometricè poterit explicari ſuperior æquatio $3\, b^2 a - a^3 = z^3$, ſeu z ſol., dummodo nouam hanc induat formam

$$b^2 a - a^3 = b^2 d$$

MOdo ſupra inſinuato, eadem enim nota quantitas, nempè b planum ſublaterale coefficiens deſignari hoc ſymbolo poteſt, nempè $3\, b^2$, vel b^2, vbi per b^2, non tertia pars illius coefficientis plani, ſed ipſiſſimum planum intelligendum eſt & z^3 vel z ſol. intelligendum applicatum ad b^2, ita vt ortiua magnitudo ſit d; Si autem iam dicta æquatio per antitheſin euadat $b^2 a - b^2 d = a^3$, ad hunc reuocabitur analogyſmum, vt b^2 ad a^2, ita a, ad $a - d$; ſed ad indagandam æquationis radicem, illud ſoluendum.

Problema.

Datis duabus rectis P, & Q tertiam adinuenire, vt X, ad cuius quadratum, datæ P quadratum eandem habeat rationem, quæ eſt ipſius X ad exceſſum, quo I ſuperat Q. Sit A B facta dupla ipſius P, & biſſecta in M.



RESOLVTIO.



SIt iam factum, adeo vt quadratum BM ad quadratum FG, ſit vt FG ad exceſſum, quo FG ſuperat AC, vel GH. Sumatur AB æqualis duplæ P, eique ad rectos angulos in A, aptetur A C æqualis Q: perficiatur rectangulum B A C D, circa quod ſit deſcriptus circulus A F B C: biſſectaq; erit BA in M, ſumpto in BM etiã indefinitè producta quouis puncto E, & protracta AC ad partes C, fiat vt M E ad M B, ita A C ad A k, & perficiatur rectangulum E A k L biſariam autem diuiſis A k, E L, in punctis S, & T, iungatur S T, quæ protrahatur ad partes T in N, ea lege vt rectangulum SNT ad quadratum TE, ſit in ratione EM ad MB; protrahatur TS ad partes S in O, ita vt SO ſit æqualis T N. Fiat vt BM ad ME, vel I G ad GH, G F ad F R.

Quoniam igitur eſt vt quadratũ B M ad quadratum F G, ita F G ad exceſſum, quo F G erat AC, ſeu ita FG, ad FG minus GH; ſed vt quadratum FG, ad quadtatũ AG, ita FG FG minus GH, vt mox conſtabit; ergo vt quadratũ BM ad quadratum FG, ita quadra- FG ad quadratum AG; ergo vt BM ad FG, ita FG ad GA. Sed vt BM ad F G, ita BE G R, vt infra patebit; ergo vt B E ad G R, ita F G ad G A; ergo rectangulum ex B E in GA æquabitur rectangulo F G R. Sed rectangulum B G A æquale eſt rectangulo H F G, circuli natura; ergo æqualibus additis, rectangulum H F G plus rectangulo ex B E in G A æquabitur rectangulo B G A, vna cum rectangulo F G R; vtrinque ſubtracto rectangulo F G R; ergo rectangulum H F G, minus rectangulo F G R, plus rectangulo ex B E in G A æquabitur rectangulo B G A; Sed rectangulum H G F plus rectangulo G F R æquale eſt rectangulo H F G, minus rectangulo F G R (cùm H G plus F R ſit æqualis rectæ HF minus RG: communis autem altitudo G F) ergo rectangulum H G F plus rectangulo G F R, vnà cum rectangulo ex B E in G A, æquabitur rectangulo E G A, plus rectangulo ex B

E in G A. Vtrinque ſubtracto rectangulo ex B E in G A; ergo rectangulum H G F, plus rectangulo G F R, æquabitur rectangulo E G A. Sed vt H G ad G I, ita rectangulum H G F plus rectangulo G F R, ad rectangulum I F G, vt mox demonſtrabitur; ergo vt rectangulum E G A ad rectangulum I F G, ita H G ad G I, hoc eſt, E M ad B M, ſeu axis O N ad latus rectum. Quod fieri poteſt &c.

Lemma I.

Quod autem vt quadratum F G ad quadratum A G, ita ſit F G ad F G, minus G H, ſic demonſtrabitur. Hoc à nobis oſtenſum fuit in Libro de Ellipſi.

Lemma II.

Quod verò ſit vt BM ad FG, ita BE ad GR, ſic demonſtrabitur. *Quoniam enim eſt ex conſtructione vt BM ad M E, ita GF ad F R; ergo per conuerſionem rationis erit vt B M ad B E, ita FG ad GR; & permutando vt BM, ad FG, ita BE, ad GR.*

Lemma III.

Quod verò ſit vt HG ad GI, ita rectangulum HGF, plus rectangulo GFR ad rectangulum I F G, ſic demonſtrabitur.

Quoniam enim ſupponitur vt IG ad GH, ita GF ad FR; ergo permutando vt IG ad GF, ita GH ad FR; & componendo vt IF ad GF, ita HG, plus FR ad FR; & iterum permutando, vt I F, ad GH plus. FR, ita FG, ad FR; ſed vt IF, ad HG, plus FR, ſumpta communi altitudine FG, ita rectangulum IFG, ad rectangulum HGF plus rectangulo GFR; ergo vt FG ad FR, ſeu IG ad GH, ex conſtructione ſic rectangulum IFG, ad rectangulum HGF plus rectangulo GFR; & conuertendo vt HG ad GI, ita rectangulum HGF plus rectangulo GFR ad rectangulum IFG.

COMPOSITIO.

SVmatur A B dupla ipſius P, eique ad rectos angulos in A aptetur AC æqualis Q: perficiatur rectangulum B A C D, circa quod ſit deſcriptus circulus A F B C: biſſecta B A in M, ſumpto in B M etiam indefinitè producta quouis puncto E, & protracta A C ad parte C, fiat, vt M E ad M B, ita A C ad A K, & perficiatur rectangulum E A K L; bifariam autem diuiſis AK, EL, in punctis S, & T, iungatur S T, quæ protrahatur ad partes T in N, ea lege vt rectangulum S N T ad quadratum T E, ſit in ratione E M ad M B; protrahatur T S ad partes S in O, ita vt S O ſit æqualis T N. Mox autem axe, O N, & latere recto, quod ad axem ſit in ratione M B ad E M, deſcribatur ſemiellipſis quæ neceſſario ex conſtructione tranſibit per puncta A, & E, & circulo occurrens, occurret in vno, vel pluribus punctis; occurrat in F, ex quo ſuper A B cadat perpendicularis F G, quæ protracta ad partes G ſecet parallelas C D, K L, in punctis H, & I; Erit e[illegible] F G æqualis X quæſitæ, adeo vt quadratum B M ad quadratum F G, ſit vt F G ad exceſſum, quo FG ſuperat AC, vel G H.

Fiat autem vt BM ad ME, vel I G ad G H, ſic G F ad F R.

Quoniam igitur ex ellipſeos natura, vt eſt rectangulum E G A ad rectangulum I F G, ita axis O N ad latus rectum, ſeu E M, ad B M, hoc eſt H G ad GI ex conſtructione; ſed vt HG ad GI, ita rectangulum HGF plus rectangulo GFR ad rectangulum IFG, vt oſtẽſum eſt in Lemmate; ergo rectangulũ HGF, plus rectangulo GFR, æquabitur rectangulo EGA; ergo vtrinque addito rectangulo ſub B E, & G A, rectangulum H G F plus rectangulo G F R, vnà cũ rectangulo ex BE in GA, æquabitur rectangulo EGA plus rectãgulo ex BE in GA ſeu BGA; ſed rectangulũ HGF, plus rectangulo GFR, æquale eſt rectangulo HFG, minus rectangulo F G R (cum H G, plus F R, ſit æqualis rectæ H F, minus R G, & communis altitudo ſit G F) ergo rectangulum H F G, minus rectangulo F G R, plus rectangulo ex BE in G A, æquabitur rectangulo B G A; ergo vtrinque addito rectangulo F G R, rectangulum H F G, plus rectangulo ex B E in G A, æquabitur rectangulo B G A, vnà cum rectangulo F G R, ſed rectangulum B G A æquale eſt rectangulo H F G, ex circuli natura; ergo

ablatis

ablatis æqualibus, remanebit rectangulum ex B E in G A æquale rectangulo F G R; ergo vt B E ad G R, ita F G ad G A, ſed vt B M ad G F, ita B E ad G R, vt oſtenſum eſt, ergo vt B M ad F G, ita F G ad G A; ergo vt quadratum B M ad quadratum F G, ita quadratum F G ad quadratum A G; ſed vt quadratum F G ad quadratum A G, ita F G ad F G, minus G H, vt oſtenſum eſt; ergo vt quadratum B M, ad quadratum F G, ita F G ad F G minus G H, ſeu ita F G ad exceſſum, quo F G ſuperat A C. Quod facere oportebat.

MONITVM.

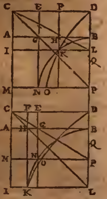
AT ſi quis nullo habito reſpectu ad Analyſin; ſed ex demonſtratis in Syntheſi progredi velit; quod dicebatur aſſumptum, nimirum Quadratum F G ad quadratum AG, ita eſſe vt FG, ad FG minus GH; cùm ſyntheticè eo peruenerit vt BM, ad F G, ita FG ad G A, pergat dicendo, ergo vt BA, nempe dupla BM, ad duplam FG, ita FG ad GA ergo rectangulum BAG æquabitur duplo quadrato FG. Sed rectangulum BAG æquale eſt quadrato AG plus rectangulo BGA, ſeu ob circuli naturam, æquatur rectangulo HFG. ergo quadratum AG plus rectangulo HFG æquabitur duplo quadrato F G, ſed rectangulum H FG æquale eſt quadrato FG plus rectangulo F G H, ergo quadratum AG plus quadrato F G, plus rectangulo FGH æquabitur duplo quadrato FG. ergo vtrinque ſublato quadrato FG, quadratum AG plus rectangulo FGH æquabitur quadrato FG, vtrinq; ſublato rectangulo FGH quadratum AG æquale manebit quadrato FG minus rectangulo FGH. ergo vt FG ad AG, ita AG ad FG minus GH, ergo vt quadratum FG ad quadratum AG, ita FG ad FG minus GH. ob trium proportionalium naturam. Cumque conſtet eſſe vt quadratum BM ad quadratum FG, ita quadratum FG ad quadratum AG. propterea illud infertur quod ſit vt quadratum BM ad quadratum FG ita FG ad FG, minus GH.

SCHOLION.

Veteres quoque hoc idem aſſequebantur beneficio interſectionis paraboles, cùm hyperbole, quod apud Eutocium videre licet in Commentarijs ſuper libros Archimedis de Sphæra, & Cylindro; quo autem pacto id ab ipſis præſtitum ſit, ex ijs, quæ hic ſubijcimus quiſque cognoſcet.

Methodus explicandi æquationem, in qua ſolidum affectum ſub quadrato multatur Cubo.

HÆc æquatio Geometricè quidem explicari poteſt hunc in modum. Sit æquatio $ba^2 - a^3 = dz^2$*. Dicatur b eſſe A B; ſitque d idem quod A C, & z² ſit G B quadratum. Quandoquidem ſupponitur diuiſa A B, in G, ita vt G B, ſit dupla ipſius A G. Deinde diuidatur rurſus in H; citra, vel vltra G; adeò vt parallelepipedum, cuius baſis quadratum H B; altitudo autem H A, æquale ſit parallelepipedo, cuius baſis quadratum G B; altitudo vero A C. Oportet autem A B maiorem eſſe, quàm triplam ipſius C A.*



Præſuponendum tamen Lemma iam ab alijs oſtenſum quod. *Si recta quadam diuiſa ſit in duas partes, quarum maior ſit minoris dupla. Parallelepipedum contentum ſub quadrato partis maioris, & ſub reliqua parte velut altitudine Maximum eſſe omnium; quæ per quamcumque diuiſionem effici poſſunt.* Vnde parallelepipedum, quod eſt comparationis homogeneum: nequit eſſe maius eo, quod ſub A G & quadrato G B continetur. Itaque ſit ex. gr. recta quædam X, cuius quadratum ductum in A C, faciat ſolidum maius contento ſub AG in quadratum GB. Problema erit impoſſibile; quoniam iſtud eſt maximum. *Fiat rectangulum A C D B; cuius latera C A; D B producantur ad partes A, & B. Mox vero fiat rectangulum C D Q, æquale quadrato ſegmenti G B. Ductaque diametro*

metro C G P, protrahatur D Q, donec illi quidem occurrat in P; per punctum autem G, ducta B N parallela alterutri ipſarum C M, D P; compleantur vero parallelogramma A E, A N, E B, B N. Axe verò D B, & latere recto D Q, deſcribatur Parabole D K O, ſecans M P, in O.

Quoniam igitur circa axem D B, deſcripta eſt Parabole, D K O, latere recto exiſtente D Q, erit rectangulum Q D P, æquale quadrato O P. Quamobrem quadratum D P, ad rectangulum Q D P, rationem eandem habebit, quam habet ad quadratum O P. Sed quadratum D P, ad rectangulum Q D P, rationem habet, vt D P, ad Q D, communi exiſtente altitudine DP. Eſt quo rectangulum C D P, ad rectangulum C D Q, communi quidem exiſtente altitudine C D; eſt inquam, vt D P, ad D Q; & vt D P, ad D Q, ita erat quadratum D P, ad rectangulum Q D P; proinde erit quadratum D P, ad quadratum O P, vt rectangulum C D P, ad rectangulum C D Q; atque adeo permutando rectangulum C D P, ad quadratum DP, rationem habebit, vt rectangulum C D Q. ad quadratum O P. At vero vt rectangulum C D P, ad quadratum DP, ita CD, ad D P, atque adeo ita A G, ad A C; Quamobrem, vt A G, ad A C; ita erit rectangulum C D Q ad quadratum O P, ſeu quadratum G B, hoc eſt quadratum N P, ad quadratum O P. At vero A C minor eſt, quam A G, quæ tertia pars eſt totius A B, & A B maior ſupponitur, quàm tripla ipſius A C; quare quadratum O P, minus erit quadrato N P, atque adeo O P, minor erit, quam N P; vnde N P maior erit, quàm O P. Deinde per punctum B, intra Aſymptotos A C, C D deſcribatur hyperbole B K N, quæ per punctum N, neceſſariò tranſibit, a cùm parallelogramma A D,
a 4. & 12. lib. 2. Apollonij. *C N, æqualia ſint, propter diagonalem C G P; proinde punctum O Paraboles, cadet intra hyperbolen BKN. At vero Parabole D k O, occurrit Aſymptoto CD, in vertice D; & occurrit Aſymptoto C A, in aliquo alio puncto; propterea quod C A, parallela eſt axi DP Paraboles; Hyperbole*
b rec. 2. lib. 2. Apollonij. *autem ſemper incedit b intra Aſymptotos; proinde Parabole DkO bis hyperbole occurrit, ſupra nimirum, & infra punctum O. Sit autem punctum occurſus K, à quo ducantur Parallelæ ad Aſymptotos, nempè k F, & kI. compleantur autem Parallelogramma I F, & A D, quæ quidem æqualia ſunt c inter ſe, quippequæ conſtituuntur à lineis ductis, ad Aſymptotos, & parallelis &c.*
c 12. lib. 2. Apollonij. *Quamobrem CHL, erit parallelogrammorum diameter, & linea recta. Quoniam autem eſt A H, ad A C, vt CQ, ad DL, ſiue, vt rectangulum C D Q. ad rectangulum L D Q; & erat quadratum G B, æquale rectangulo C D Q, ex conſtructione, & quadratum H B, ſiue k L in Parabola æquale eſt rectangulo L D Q, proinde A H, ad A C erit, vt quadratum G B, ad quadratum H B. Quamobrem Parallelopipedum, cuius baſis eſt quadratum H B, altitudo autem H A, æquale erit Parallelopipedo, cuius baſis eſt quadratum G B, altitudo verò A C. Quod erat operæ pretium efficere.*

Itaque H B erit radicis valor, nam parallelepipedum, cuius altitudo A B, baſis autem quadratum H G, minus cubo ipſius H B, æquatur parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum G B, nempè quadratum ex z, & altitudo eſt A C, nimirum d.

Aequationes Cubicæ affectæ ſimpliciter ſub Quadrato.

SVperſunt Æquationes aliæ itidem Cubicæ affectæ, ſimpliciter tamen ſub quadrato, vt $a^3 + b a^2 = b d^2$, item $a^3 - b a^2 = b d^2$, tandem $b a^2 - a^3 = b d^2$. Hæ ſuas haben Geometricas effectiones mediatè, vel immediatè; Priori modo, ſi cubos hunc in modum affectos nimirum ſimpliciter ſub quadrato, ad cubos ſimpliciter affectos ſub latere reducantur, qua de re nos in Algebra Specioſa multa diximus. Secundo modo ſi earum conſtitutio ſpectetur, earundemque ortus accuratè conſideretur, de quo loco citato cumulatè ſcripſimus. Hìc ſolum addam ad exhibendum Geometrice latus Aequationis propoſitæ conducere diuiſionem magnitudinis coefficientis ſubquadraticæ; ſiquidē hinc quæſita radix innoteſcit, hoc etiam Antiquis pérſpectum fuiſſe liquet, ex ijs, quæ poſteritati tradiderunt, de quo infra. Interim eſt operæ pretium in memoriam redigere reductionem Cuborum ſimpliciter affectorum ſub quadrato ad cubos ſimpliciter affectos ſub latere & quidem.

Si $a^3 + 3 b a^2$ æquetur z ſol. $a + b$, eſto e, & $e^3 - 3 b^2 e$, æquabitur z ſol. $- 2 b^3$

Cum igitur Analyſta reſoluendo peruenerit ad huiuſmodi æquationem, vt Geometricè radicis æſtimationem exhibeat, debet æquationem illam, ad quam peruenerat, ad hanc reuocare ſimpliciter affectam ſub latere, cùm illa foret affecta ſimpliciter ſub quadrato. Et

Si $a^3 - 3 b a^2$ æquetur z ſol. $a - b$ eſto e, & $e^3 - 3 b^2 e$ æquabitur z ſol. $+ 2 b^3$.

Cum itaque ad illam æquationem peruentum fuerit oportet ad hanc illam redigere, vt

[illegible] mat. Geometricè exhiberi poſſit. Et [illegible] a^3 - a^2 æ[illegible]r z ſ[illegible]. a - b eſto c. 3 b^2 c - c^3 æquabitur z ſol. - 2 b^3, vel b - a eſto c. 3 b c - c^3 æq[illegible] 2 b^3 - z ſ[illegible].

Cùm igitur ad [illegible]am æquationem peruentum erit, ad hanc reductionem eſt confugiendum, vt Geometrice ra[illegible] va[illegible]r exhibeatur.

Aequationes Cubicæ affectæ, tam ſub quadrato, quam latere.

NOn raró acc[illegible]it vt in reſolutionibus a[illegible]s æquationes perueniatur; tunc autem præſta[illegible]as [illegible] tr[illegible]c, vt ſe[illegible]und[illegible]s æqua[illegible]io[illegible] te[illegible] minus de medio auferatur, vel reducendę ſunt ad eũ modum quo fie[illegible]i debere docuimu[illegible], ſicut de to[illegible]endo ſecundo æquationis termino in Algebra Specioſa, ſed reductionem ipſam hic in memoriam reuocabimus.

Aequationes Cubicæ a[illegible]æ tam ſub quadrato, quam latere.

NOn rar[illegible] acc[illegible], vt in reſ[illegible]bu[illegible] a[illegible]s æquationes perueniatur [illegible] tunc autem ex[illegible] [illegible] ad [illegible]tio[illegible] m[illegible] in Algebra ſpecioſa locuti ſumus [illegible].

[illegible] ✠ [illegible] ✠ [illegible] a ✠ [illegible].

[illegible] ✠ [illegible] 3 b c [illegible] ✠ d [illegible] - 2 b^3.

Si [illegible] ✠ [illegible] - [illegible] p[illegible] ſ[illegible]. a ✠ b [illegible] c - 3 b - d pl. c. [illegible] - d [illegible].

Si [illegible] - 3 b [illegible] ✠ [illegible] z [illegible] a - b [illegible] c [illegible] - 3 [illegible] ✠ d pl. c [illegible] z [illegible] ✠ 2 [illegible] d p[illegible].

[illegible] - [illegible] - d [illegible] - c^3 [illegible] z ſol. ✠ 2 b - d pl. b

S[illegible] - [illegible] - d [illegible] z [illegible] - b [illegible] c. c - 3 b - d [illegible]. c [illegible] ✠ d pl. b

Si d pl. [illegible] z [illegible] ✠ b [illegible] c. d pl. ✠ 3 b c - c^3 [illegible] ✠ [illegible] ✠ d pl. b.

Si 3 b [illegible] z [illegible] - b [illegible] c. d [illegible]. ✠ 3 b c - c^3 [illegible] pl. b [illegible].

V[illegible] ✠ [illegible] c [illegible] b [illegible] ✠ d pl. b - z ſol.

Si [illegible] - b [illegible] 3 b - d pl. c - c^3 [illegible] pl. b - 2 b

Vel [illegible] - [illegible] - d pl. b - z ſol.

Hac [illegible] m ſub quadrato, quàm l[illegible] Geometricè radix æquationis exhiberi poſſit, [illegible] c æ[illegible]as glor[illegible]ari, nam huiuſmo[illegible] cere minimè poterant.

[illegible] ſuprap[illegible]ones cubicæ explicari poſſunt [illegible] quod [illegible] io ipſa perficitur.

[illegible] hæc [illegible]eret, facile quidem aſſequere[illegible] ſub quadrato, cuiuſmodi [illegible] a ✠ [illegible] ✠ [illegible], a[illegible] b, & procedendo [illegible] ad para[illegible] &c. Tandem enim [illegible] ſectione circuli cum parabo[illegible]a, vel [illegible].

[illegible] o, quàm latere, eius explicatio ad [illegible] le[illegible]s, de quo agemus infra, tractan[illegible].

Metho-

Methodi explicandi Aequationes compoſitas Quadrato-quadraticas, & primo de Aequationibus Quadrato quadraticis ſimpliciter affectis ſub quadrato. Cap. IV.

HArum æquationum explicatio facilis admodum eſt, cùm ad locum planum, nempè circulum ſpectet. Sit autem primo æquatio quadrato quadratica affecta ſub quadrato per affirmationem.

Plana magnitudo, quæ poteſt comparationis homogeneum conſtituatur media è tribus proportionalibus, ita vt extremarum differentia ſit coefficiens plana magnitudo, minori extrema exiſtente magnitudine quæſita.

Proponatur $a^4 + b^2 a^2 = d^4$. Sunt propor[illegible] $+ b$, d^2, a^2.

In hac autem æquatione datur media proportionalis inter extremas, qu[illegible]ntia eſt b^2, minori extrema exiſtente a^2.

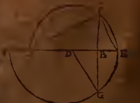
Quoniam autem è tribus magnitudinibus prop[illegible] minor ext[illegible] a: Intelligatur triangulum rectangulum, cuius baſis erit b; at v[illegible] media proporti[illegible] hypothenuſam, & perpendiculum; a de[illegible]ue perpend[illegible] ipſum. Hæc ex Z[illegible] deprehenduntur. Sit b quidem baſis [illegible] vero d media p[illegible] inter hypothenuſam, & perpendicul[illegible] atque demum a [illegible] perpendicu[illegible].

8 47. prim. Quoniam igitur quadratum hypothenuſæ æquale e[illegible] a quadrato perpendic[illegible] plus quadrato baſeos; ſi quadratum per[illegible]culi e[illegible] a, baſ[illegible] b², rec[illegible] q[illegible]atum hypothenuſæ erit $a^2 + b^2$. Si itaque ſuppon[illegible] eſſe, vt $a + b$ ad d^2, [illegible] æquatio $a^4 + b^2 a^2 = d^4$. Ex Zetetico igitur conſtat Si fuer[illegible] $a^4 + b^2 a^2 = d^4$ ne[illegible] vt $a^2 + b^2$ ad d^2, ita d^2, ad a^2. Quapropter a eſſe perpendiculum, triangu[illegible] re[illegible]uli; d ve[illegible] mediam proportionalem inter hypothenuſam, & perpe[illegible]m; b, d[illegible]. H[illegible] enim modo erit vt $a^2 + b^2$, ad d^2, ita d^2 ad a^2; hoc eſt vt quadratum hyp[illegible] ad quadratum mediæ inter hypothenuſam, & perpendiculum, [illegible] ad [illegible]dratum perpendiculi. Si namque magnitudines [illegible] propo[illegible], etiam & qua[illegible]

b 22 ſexti. ipſarum erunt b proportionalia.

Vt autem hæc æquatio Geometricè ſoluatur, adhibendum eſt Problema, quod [illegible]tum attulit Vieta in ſuis effectionibus Geo[illegible].

Data baſe trianguli rectanguli, dataque media proportionali inter hypothenuſam, & perpendiculum, reperire triangulum



Data ſit baſis A B; media proportionalis inter hypothenuſam, & perpendiculum ſit Z, oportet reperire triangulum. Fiat vt A B ad Z, ita Z ad BG, ſitque BG conſtituta ad rectos angulos cum A B; diuidatur A B bifariam in D, centro D, interuallo DG deſcribatur ſemicirculus C G E, protracta B hinc inde ad C, & E, & ſuper A E deſcrip[illegible] ſemicirculo A F E, protrahatur G B ad F, ductis A F F E. Quoniam C D, D E ſunt æquales, item A D, D B; p[illegible]nde C A reliqua, reliquæ BE æqu[illegible] q[illegible]alis erit A E; proinde rectangulum A E B æqu[illegible] rectangulo C B E; ſed illud æquale eſt qua[illegible] quadrato B G, er[illegible]dratum F E, æquale erit quadrato B G, a[illegible] F E, B G æqu[illegible] Quoniam autem triangula A F B, F B E [illegible] pro[illegible]nde vt AB ad AF, [illegible] F E; quare rectangulum ſub A F, & B F æ[illegible] ſub A B, & F E, hoc re[illegible]ctangulo ſub AB, & BG. Eſt autem re[illegible]ſub A B, & G B æquale quadra[illegible] Z [illegible]go rectangulum ſub A F, & F B, æquale erit quadrato ex Z. E[illegible] au[illegible] A [illegible] rectus; quamobrem angulus A B F rect[illegible] erit.

Methodus explicandi Aequationem, in qua Quadrato-quadratum afficitur negatè ſub Quadrato.

PLana magnitudo, quæ poteſt comparationis homogeneum conſtituatur media, è tribus proportionalibus, ita vt extremarum differentia ſit coefficiens plana magnitudo, maiori extrema exiſtente magnitudine quæſita.

Proponatur $a^4 - b^2 a^2 = d^4$; ſunt proportionales $a^2 - b^2$, d^2, a^2. In hac autem æquatione datur media proportionalis d^2, ita vt differentia extremarum ſit b^2, maiori extrema exiſtente a^2.

Quoniam autem è tribus magnitudinibus proportionalibus maior extrema eſt a^2.

Intelligatur triangulum rectangulum, cuius baſis erit b; at verò d, media proportionalis inter hypothenuſam, & perpendiculum; a denique erit hypothenuſa ipſa. Hæc ex Zetetico deprehenduntur.

Sit b quidem baſis trianguli rectanguli; at verò d, media proportionalis inter hypothenuſam & perpendiculum; atque demum a, ſit hypothenuſa ipſa.

Quoniam igitur quadratum hypothenuſæ æquale eſt ₂ quadrato perpendiculi, plus quadrato baſeos. Si quadratum hypothenuſæ eſt a^2; at verò quadratum baſeos eſt b^2, neceſſariò perpendiculi quadratum erit $a^2 - b^2$. Vt autem eſt a^2, ad d^2, ita d^2 eſt ad $a^2 - b^2$. Proinde fiet æquatio $a^4 - b^2 a^2 = d^4$. Ex Zetetico igitur conſtat. Si fuerit $a^4 - b^2 a^2 = d^4$, neceſſariò eſſe, vt a^2 ad d^2, ita d^2 ad $a^2 - b^2$. Quapropter a eſſe hypothenuſam trianguli rectanguli, d verò mediam proportionalem inter hypothenuſam, & perpendiculum; b denique baſim; hoc enim modo erit, vt a^2 ad d^2, ita d^2 ad $a^2 - b^2$. hoc eſt vt quadratum hypothenuſæ, ad quadratum mediæ inter hypothenuſam, & perpendiculum, ita huiuſmodi quadratum ad quadratum perpendiculi.

Si namque magnitudines fuerint proportionales, etiam & quadrata ipſarum erunt proportionalia.

Vt autem hæc Æquatio Geometricè ſoluatur, adhibendum eſt Problema, quod reſolutum attulit Vieta in ſuis effectionibus Geometricis, nempè.

Data baſe trianguli rectanguli, & media proportionalis inter hypothenuſam, & perpendiculum, reperire triangulum.

Sed hoc iam ſuprà ſolutum fuit.

Methodus explicandi Aequationem, in qua plano planum ſub quadrato multatur Quadrato quadrato.

PLana magnitudo, quæ poteſt comparationis homogeneum conſtituatur media è tribus proportionalibus, ita vt extremarum ſumma ſit coefficiens plana magnitudo, vtralibet extremarum exiſtente magnitudine quæſita.

Proponatur $b^2 a^2 - a^4 = d^4$. Proportionales erunt $b^2 - a^2$; d^2; a^2. In hac autem æquatione datur media proportionalis d^2, ità vt ſumma extremarum ſit b^2, vtralibet extremarum exiſtente a^2 magnitudine quæſita.

Quoniam autem vtralibet extremarum è tribus magnitudinibus proportionalibus eſt a^2.

Intelligatur triangulum rectangulum, cuius hypothenuſa erit b; at verò d media erit inter baſim & perpendiculum; at verò a erit baſis, vel perpendiculum. Hæc eſt Zetetico deprehenduntur.

Sit b hypothenuſa trianguli rectanguli; at verò d media proportionalis inter baſim, & perpendiculum, atque demum a, ſit perpendiculum, vel baſis.

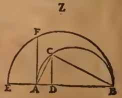
Quoniam igitur quadratum hypothenuſæ, æquale eſt ª quadrato perpendiculi, plus quadrato baſeos. Si quadratum hypothenuſæ eſt b^2; quadratum verò perpendiculi ſit a^2, neceſſariò quadratum baſeos erit $b^2 - a^2$; ac proinde cùm ſit vt a^2 ad d^2, ita d^2 ad $b^2 - a^2$, fiet æquatio $b^2 a^2 - a^4 = d^4$. Ex Zetetico igitur conſtat. ſi fuerit $b^2 a^2 - a^4 = d^4$, neceſſariò eſſe, vt a^2 ad d^2, ita d^2 ad $b^2 - a^2$; quapropter a, eſſe perpendiculum trianguli rectanguli, d verò

mediam proportionalem inter baſim, & perpendiculum. Hoc enim modo erit, vt a^2 ad d^2, ita d^2 ad $b^2 - a^2$, hoc eſt vt quadratum perpendiculi ad quadratum mediæ proportionalis inter baſim, & perpendiculum, ita huiuſmodi quadratum; ad quadratum baſeos.

Vel ſi b^2 eſt quadratum hypothenuſæ, quadratum autem baſeos ſit a^2: perpendiculi quadratum ſit $b^2 - a^2$; eſt autem vt $b^2 - a^2$, ad d^2, ita d^2 ad a^2; Quamobrem fiet æquatio $b^2 a^2 - a^4 = d^4$.

Vt autem hæc æquatio Geometricè ſoluatur adhibendum eſt Problema quod reſolutum attulit Vieta in ſuis effectionibus Geometricis, nempè.

Data hypothenuſa trianguli rectanguli, & media proportionali inter baſim, & perpendiculum, reperire triangulum.



Data ſit hypothenuſa A B, & media proportionalis inter baſin, & perpendiculum ſit Z: oporteat reperire triangulum. Ad punctum A excitetur perpendicularis A F, ita vt A F, ſit æqualis Z.

Deſcriptis verò ſemicirculis A C B, & E F B, protracta nimirum B A, ad E. Cadat C D perpendicularis ad A B, ita vt ſit æqualis E A ductis A C, BC. Quoniam igitur angulus rectus eſt ACB, quippe qui eſt in ſemicirculo; & AF eſt æqualis Z; propterea quadratum ex Z æquale erit quadrato A F, atque adeò rectangulo E A B; ſed rectangulo E A B, æquale eſt rectangulum ſub DC, & A B; rectangulum verò ſub D C, & AB æquale eſt rectangulo ſub AC, & C B; proinde rectangulum ſub A C, & C B æquale erit quadrato ex Z. quamobrem vt A C, ad Z, ita erit Z ad C B. Eſt autem angulus A C B rectus, in triangulo A C B, cuius hypothenuſa data eſt A B; & Z pariter data media eſt proportionalis inter perpendiculum AC, & baſim CB. Triangulum igitur adinuentum eſt, vt oportebat.

Aequationes Quadrato quadraticæ affectæ ſimpliciter ſub Latere.

CVm autem fuerit Quadrato-quadratum affectum ſub latere, pro eius explicatione opus eſt parabola, & circulo.

Quòd ſi fuerit affectum quadrato-quadratum ſub cubo opus eſt pro eius explicatione hyperbola, vel parabola, & circulo, ſed de his infra.

Placet hìc autem in memoriam redigere æquationes quaſdam cubicas affectas ſub quadrato, quæ ad cubicas æquationes affectas ſub latere reducuntur, qua de re nos multa ſcripſimus in Algebra ſpecioſa. Ita quidem ad $a^3 - 3 b^2 a = z$ ſol. reuocantur $a^3 + 3 b a^2 = z$ ſol. ita $a^3 - 3 b a^2 = z$ ſol. & $a^3 + 3 b a^2 + d$ pl. $a = z$ ſol. In qua reductione tamen eſt opus, vt $3 b^2$ excedat d pl. Item $a^3 + 3 b^2 a - d$ pl. $a = z$ ſol. & $a^3 - 3 b^2 a + d$ pl. $a = z$ ſol. In qua reductione eſt opus, vt $3 b^2$ excedat d pl.

Quod ſi æquatio fuerit in qua ſolidum afficitur multa cubi; fit etiam reductio. Ita ut ad æquationem $3 b^2 a - a^3$ reducatur $3 b a^2 - a^3 = z$ ſol. & $a^3 - 3 b a^2 + d$ pl. $a = z$ ſol. In qua reductione eſt opus, vt $3 b^2$ excedat d pl. Inſuper & d pl. $a - 3 b a^2 - a^3 = z$ ſol. & $3 b a^2 + d$ pl. $a - a^3 = z$ ſol. & $3 b a^2 - d$ pl. $a^3 = z$ ſol. In qua æquatione $3 b^2$ debet excedere d pl.

Hæc autem reductio fit expurgatione per Vncias; de qua ſuo loco verba fecimus in Algebra ſpecioſa; Quando itaque peruentum erit reſoluendo ad huiuſmodi æquationes adhibenda eſt reductio, & exhibenda Geometricè radix modo iam explicato ſuperius cum de reſoluendis æquationibus cubicis, loqueremur.

Vt autem magis, quæ diximus perſpicua fiant; non eſt ignorandum æquationes cubicas per diuiſionem ad quadraticas reduci poſſe, ſed illud præmittendum, nimirum quo pacto per multiplicationem conſtituantur.

Primò ſupponamus igitur $a^2 + b a = b^2$ per antitheſin fiet $a^2 + b a - b^2 = 0$ inſtituta multiplicatione per $a + b$. proueniet $a^3 + 2 b a^2 - b^2 a = 0$, ergo per antitheſin $a^3 + 2 b$

$a^2 =$

$a^3 = b^3$, quæ contraria via per diuiſionem reſoluitur in $a^2 + ba = b^2$.

Secundò ſupponamus $a^2 - ba = b^2$ per antitheſin fiet $a^2 - ba - b^2 = 0$ inſtituta multiplicatione per $a - b$. fiet $a^3 - 2ba^2 + b^3 = 0$ per antitheſin $2ba^2 - a^3 = b^3$; quæ contraria via per diuiſionem reſoluitur in $a^2 - ba = b^2$.

Tertiò ſupponamus $a^2 + da = b^2$ per antitheſin $a^2 + da - b^2 = 0$.

inſtituta multiplicatione per $a + b$. & $a^3 \left.\begin{matrix} +b \\ +d \end{matrix}\right\} a^2 \left.\begin{matrix} -b^2 \\ +db \end{matrix}\right\} a - b^3 = 0$.

& per anthiteſin $a^3 \left.\begin{matrix} +d \\ +b \end{matrix}\right\} a^2 \left.\begin{matrix} -b^2 \\ +bd \end{matrix}\right\} a = b^3$, quæ contraria via per diuiſionem reſoluitur in $a^2 + da = b^2$.

Quartò ſupponamus $a^2 + ba = d^2$ per antitheſin $a^2 + ba - d^2 = 0$.

inſtituta multiplicatione per $b - a$. & $\left.\begin{matrix} +b^2 \\ +d^2 \end{matrix}\right\} a - a^3 - bd^2 = 0$.

& per anthiteſin $\left.\begin{matrix} +b^2 \\ +d^2 \end{matrix}\right\} a - a^3 = bd^2$. quæ contraria via per diuiſionem reſoluitur in $a^2 + ba = d^2$.

Quintò ſupponamus $b^2 = \left.\begin{matrix} +b \\ +d \end{matrix}\right\} a - a^2$ per antitheſin autem

$a^2 + b^2 \left.\begin{matrix} -b \\ -d \end{matrix}\right\} a = 0$. inſtituta multiplicatione per $a - d$.

$a^3 \left.\begin{matrix} -2d \\ -b \end{matrix}\right\} a^2 \left.\begin{matrix} +b^2 \\ bd \\ +d^2 \end{matrix}\right\} a - b^2 d. = 0$, & per antitheſim etiam

$a^3 \left.\begin{matrix} -2d \\ -b \end{matrix}\right\} a^2 \left.\begin{matrix} +b^2 \\ +bd \\ +d^2 \end{matrix}\right\} a = b^2 d$. quæ contraria via per diuiſionem

reſoluitur in $b^2 = \left.\begin{matrix} +b \\ +d \end{matrix}\right\} a - a^2$.

Quod enim ſupeteſſicit multiplicatio, illud reſoluit diuiſio. Sed aliquando fruſtranea redditur reſolutio, quoniam videlicet æquatio ipſa cubica minimè reſolubilis eſt ad quod explorandum videndum, num inſtituta æquatione, ſic vt termini poſitiui comparentur cum o, per ignotam quantitatem plus, minuſue quantitate nota, æquatio ipſa diuidi poſſit; Tunc enim æquatio reſolubilis erit. Hæc tamen exemplis illuſtrabimus.

Supponamus primò $a^3 - 2b^2 a$ æquari b^3 per antitheſin fiet $+ a^3 - 2b^2 a - b^3 = 0$; atque adeò $+ a^3 + 0a^2 - 2b^2 a - b^3 = 0$. Diuidatur per $a + b$, nempè facta antitheſi proueniat æquatio $a^3 - 2b^2 a - b^3 = 0$; diuiſione autem inſtituta, proueniet quotiens $a^2 - ba - b^2$; ita igitur fit per antitheſin $a^2 - ba = b^2$; ac propterea hæc eſt æquatio quadratica, in quam cubica illa reducta eſt.

Supponamus ſecundò $2b^2 a - a^3 = b^3$, & per antitheſin $2b^2 a - a^3 - b^3$, æquabitur o; atque adeo $- a^3 + 0a^2 + 2b^2 a - b^3$, æquabitur o; inſtituta diuiſione per $- a + b$, fit quotiens $a^2 + ba - b^2 = 0$, & per antitheſin $a^2 + ba = b^2$, ad quam quidem æquationem cubica illa reducitur.

De Theorematibus reſoluendis beneficio ſpecioſæ Logiſtices. Caput V.

IN Theorematibus reſoluendis, quorum videlicet veritas per Algebram exploranda ſuſcipitur, eodem ordine, quo Theorematis veritas eſt adinuenta, demonſtratio ipſa procedit, itaque diſſimilis eſt Methodo ſuperiori Libro explicatæ, propterea quod illa componendo regredimur per reſolutionis veſtigia, & in ipſorum Theorematum reſolutionibus ſic Analyſta procedit, vt niſi ei datum fuerit Theorema demonſtrandum Theorema ipſum adinueniat; mox verò eodem ordine demonſtrationem contexit, quod ſi ei fuerit exhibitum Theorema demonſtrandum, non ſecus ac ſi primum â ſe inueniendum illud aggreditur · hæc autem exemplis clariora fient.

In Theorematibus reſoluendis per Algebram, eodem ordine quo procedit Reſolutio, procedit etiam Demonſtratio ſeu Compoſitio.

Supponamus igitur conſiderandam aſſumi lineam rectam vtcunque diuiſam, ſimulque

conſiderandum rectangulum ſub tota, & differentia partium, cui plano ad ipſas partes relato, æquale ſit. Vbi aduerte, non inconſulto adiectam fuiſſe particulam illam ad ipſas partes relato; nam non de quocunque plano hic eſt ſermo, ſed de illo, qui prædictas lineæ partes concernit. Hoc igitur primum eſto exemplum, vtpotè facillimum, quo etiam vſus eſt Ghetaldus initio ſui Operis &c.

PROPOSITIO.

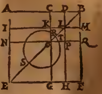
Si recta linea ſecetur vtcunque, rectangulum ſub tota, & differentia partium, cui, plano ad ipſas partes relato, æquale ſit, inquirere.

Pars vna eſto a, alia autem b, harum aggregatum erit $a + b$, earundem differentia erit $a - b$; ducatur illud in iſtud, & proueniet $a^2 - b^2$; eſt autem a^2 vnius partis quadratum, & b^2 eſt alterius partis quadratũ; itaque rectangulum ſub tota, & differentia partium æquale eſt differentiæ quadratorum partium; hinc autem deducitur Theorema.

THEOREMA.

Si recta linea ſecetur vtcunque, rectangulum ſub tota, & differentia partium æquale eſt differentiæ quadratorum partium.

SIt recta A B vtcunque ſecta in D. Dico rectangulum ſub tota A B, & differentia partium A D, D B, æquale eſſe differentiæ quadratorum earundem partium. Fiat C D æqualis D B: compleatur quadratum A E F B; ducatur diameter E B; item rectæ C G, D H, parallelæ alterutri laterum AE, BF, occurrentes diametro in punctis O, & L, per quæ agantur rectæ I M, N Q parallelæ alterutri laterum &c. Quoniam DM, KP, N G, I H, ſunt circa diametrum quadrati, erunt quadrata; inſuper D M eſt quadratum partis D B, cui æquale eſt K P quadratum partis C D; eſt verò IH quadratum partis A D; at ſi ex I H ſubtraxeris quadratum K P remanet gnomon R S T, pro differentia quadratorum partium; eſt autem rectangulum O H, æquale N K, cui æquale eſt I C; quare O H æquabitur I C; communi igitur addito I G, fiet rectangulum A G æquale gnomoni differentiæ quadratorum partium; ſed AG continetur ſub A E, ſeu A B, tota; & A C differentia partium; ergo rectangulum ſub tota, & differentia partium æquale eſt differentiæ quadratorum partium. Quod erat operæ pretium oſtendere.



SCHOLION.

Poſſet etiam ſic illud proponi.

Si duo ſint latera quæcunque, rectangulum ſub aggregato laterum, & eorundem differentiæ, cui, plano, ad ipſam, & latera relato, æquale ſit inquirere.

Corollarium.

Ex his manifeſtum eſt illud.

Si differentia quadratorum applicetur ad laterum differentiam oritur eorundem laterum aggregatum;

Cum enim differentia laterum ducta in laterum aggregatum efficiat quadratorum differentiam, proinde differentia quadratorum diuiſa per differentiam laterum oritur eorundem laterum aggregatum. Secundò autem et illud inde conſtat.

Si differentia quadratorum applicetur ad laterum aggregatum, oritur laterum differentia.

PROPOSITIO.

Si recta linea ſecetur vtcunque, quadratum differentiæ partium, quibus, planis ad ipſas partes relatis æquale ſit, inquirere.

Pro-

Propoſita ſit recta quædam diuiſa in partes a, b, quarum illa ſit maior, hæc autem minor; earum igitur differentia erit $a - b$. Sit autem iniunctum inquirere quibus planis ad ipſas partes relatis æquale ſit quadratum ex $a - b$.

Ducatur $a - b$ quadraticè in ſe, & fiat $a^2 + b^2 - 2ba$; hæc autem ſunt illa plana, quibus quadratum differentiæ partium eſt æquale. Hinc

THEOREMA.

Si recta linea ſecetur vtcunque, quadratum differentiæ partium æquale eſt quadratis partium, minus duplo rectangulo ſub partibus.



Quadratum enim C D plus quadrato C B æquale eſt quadrato B D plus duplo rectangulo D B C, plus quadrato C B duplo, ſeu quod idem eſt, eſt æquale quadrato B D, vnà cum duplo rectangulo D C B; ergo exceſſus quadrati C D plus quadrato CB ſupra quadratum B D, eſt duplum rectangulum D C B; ergo quadratum BD æquabitur quadrato C D, plus quadrato CB, minus duplo rectangulo D C B.

PROPOSITIO.

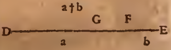
Si recta linea ſecta ſit vtcunque, ſolidum ſub differentia partium, & ſub aggregato quadratorum, vna cum rectangulo ab ipſis, cui, ſolido ad ipſas partes relato æquale ſit, inueſtigare.

Sit recta diuiſa in partes, quarum vna a, alia b, vt tota ſit $a + b$, differentia partium erit $a - b$: quadratum ex a, eſt a^2; ex b, eſt b^2: rectãgulum ſub ipſis eſt ba; quare horum aggregatum $a^2 + ba + b^2$, quo ducto in $a - b$, fit $a^3 - b^3$, vt ex multiplicatione patet; quare ſi recta linea diuiſa ſit vtcunque, ſolidum ſub differentia partium, & ſub aggregato planorum, quorum vnum eſt quadratum vnius partis, aliud quadratum alterius: tertium denique rectangulum ſub ipſis, æquale eſt differentiæ cuborum à partibus; Hinc

$$a + b$$
$$a - b \qquad b$$
$$a$$
$$a^2 + ba + b^2$$
$$a - b$$
$$- ba^2 - b^2a - b^3$$
$$a^3 + ba^2 + b^2a$$
$$a^3 - b^3$$

Theorema.

Si recta linea ſecetur vtcunque, ſolidum, cuius altitũdo eſt differentia partium: baſis autem aggregatum planorum, quorum duo ſunt quadrata partium, reliquum autem rectangulum ſub ipſis, æquale eſt differentiæ cuborum ab ipſis partibus.



Sit recta D E, vtcunq; diuiſa in F; & G F, æqualis ſit F E, vt D G ſit differentia partium. Dico ſolidum, cuius altitudo D G, baſis autem aggregatum planorum, quorum duo ſunt quadrata partium D F, F E; aliud demum eſt rectangulum D F E, æquale eſſe differentię cuborum earundem partium. Solidum enim, cuius altitudo D G, baſis autem aggregatum quadratorum D F, F E, vnà cum rectangulo D F E conſtant cubo D F, minus cubo ex F E, ex opere multiplicationis. Quamobrem ſi recta linea ſecta ſit &c. Quod erat &c.

SCHOLION.

Poſſet etiam ſic illud proponi

Si duo ſint latera quæcunque, ſolidum, cuius altitudo ſit differentia laterum, aggregatum planorum, quorum duo ſint quadrata partium, tertium verò rectangulum ſub ipſis, cui, ſolido ad

ad ipſas partes relato æquale ſit, inquirere.

Corollarium.

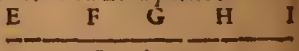
Ex his manifeſtum eſt illud.

Differentia cuborum applicata ad laterum differentiam oritur aggregatum planorum, quorum duo ſunt quadrata laterum; aliud autem rectangulum ſub ipſis lateribus.

Contra verò ſi applicetur ad ipſum aggregatum planorum etc. oritur differentia laterum.

PROPOSITIO.

Sit recta E I, & in ea ſit, vt I E ad H E, ita G E, ad F E, rectanguli quidem E H F ad rectangulum ſub E H, & G I, quæ ratio ſit penès lineæ partes num vt EF ad EG inquirere.



Supponamus E I eſſe b: at E G, c: H E, d: E F erit $\frac{dc}{b}$: at H F erit $d - \frac{cd}{b}$. Rectangulum E H F erit $d^2 - \frac{d^2c}{b}$; rectangulum verò ſub E H, & G I erit $bd - dc$.

EI = b
EG = c
HE = d
EF = $\frac{dc}{b}$
HF = $d - \frac{dc}{b}$
GI = $b - c$

a 16. quinti. Quoniam igitur eſt vt b, ad d, ita c, ad $\frac{dc}{b}$, erit [a] vt
b 17. quinti. b, ad c, ita d, ad $\frac{dc}{b}$; ergo diuidendo [b] vt $b - c$ ad c, ita
c 16. quinti. $d - \frac{dc}{b}$ ad $\frac{dc}{b}$; & permutando [c] vt $b - c$ ad $d - \frac{dc}{b}$, ita c,
d corol. 4. qui. ad $\frac{dc}{b}$; & conuertendo [d] vt $\frac{dc}{b}$ ad c, ita $d - \frac{dc}{b}$ ad $b - c$;
ſumpta autem communi altitudine d, erit vt $\frac{dc}{b}$ ad c, ita $d^2 - \frac{d^2c}{b}$ ad $bd - dc$. Hinc

THEOREMA.

Sit recta quidem A B, ſitque vt A B ad A E, ita A D, ad A C. Dico eſſe vt A C ad A D, ita rectangulum A E C, ad rectangulum ſub A E, & D B.

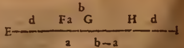


Quoniam enim eſt vt A B ad A E, ita AD ad AC;
α 16. quinti. erit [α] permutando vt A B ad A D, ita A E, ad A C;
β 17. quinti. quare diuidendo erit [β], vt D B ad A D, ita C E ad A C; & permutando [γ] vt D B ad E C,
γ 16. quinti. ita A D ad A C; & conuertendo [δ] vt A C ad A D, ita E C ad D B. Sumpta autem com-
δ corol. 4. qu. muni altitudine A E, erit vt A C ad A D, ita rectangulum ſub A E, & E C, hoc eſt rectangulum A E C, ad rectangulum ſub A E, & D B. Quod erat operæ pretium oſtendere.

PROPOSITIO.

Si ex E I abſciſſæ ſint æquales partes E F, H I, & interceptum ſegmentum F H, vtcunque diuiſum in G, oporteat rectangulum F G H quibus planis ad alia lineæ ſegmenta relatis, æquale ſit, inueſtigare.

Pars E F ſit d; etiam H D erit d, interceptum ſegmentum F H, ſit b: pars G F eſto a, reliqua G H erit $b - a$: rectangulum ſub E G, G I comprehenſum, erit $bd + d^2 + ba - a^2$; at rectangulum E F I comprehenſum erit ſub d, & $b + d$ illudque erit $bd + d^2$, quo ſubtracto ex $bd + d^2 + ba - a^2$, remanebit $ba - a^2$. Hinc autem Theorema deducitur,



$b + d - a$ $b + d - a$
$d + a$

$ba + da - a^2$
$bd + d^2 - da$

$bd + d^2 + ba - a^2$
$bd + d^2$

$ba - a^2$

THEO-

THEOREMA.

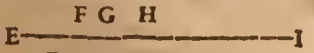
Si ex recta A B abſciſſa ſint æquales partes A C, D B, & interceptum ſegmentum C D vtcunque diuiſum in E. Dico rectangulum CED, æquale eſſe rectangulo AEB, minus rectangulo ACB.



QVoniam rectangulum C E D æquale eſt rectangulo D C E, minus quadrato C E; rectangulum verò A E B æquale eſt quadrato A C plus rectangulo C D B, plus rectangulo D C E, minus quadrato C E; ex hoc autem ſubtracto rectangulo A C B, remanebit rectangulum D C E, minus quadrato C E, hoc eſt rectangulum C E D. Quamobrem rectangulum C E D æquale erit rectangulo A E B, minus rectangulo A C B. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO.

Si fuerit vt E I ad H I, ita E G ad G H, biſariam autem E H ſecetur in F, è reliquis tres deſignare continuè proportionales. Exemplum VI.

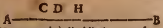


QVoniam igitur eſt vt E I, ad H I, ita E G, ad G H, erit etiam vt E I, plus H I, ad H I, ita E H, ad G H; igitur E I = b: H I = c: E H erit b − c; & E I plus H I erit b + c: & F I erit $\frac{b-c}{2} + c$. Vt itaque b + c ad c, ita b − c ad $\frac{bc-cc}{b+c}$; quare G H erit $\frac{bc-cc}{b+c}$; dimidiatis igitur antecedentibus erit vt $\frac{b-c}{2} + c$, ad c, ita $\frac{b-c}{2}$, ad $\frac{bc-cc}{b+c}$; & per conuerſionem rationis erit vt $\frac{b-c}{2} + c$ ad $\frac{b-c}{2}$, ita $\frac{b-c}{2}$ ad $\frac{b-c}{2} - \frac{bc-cc}{b+c}$. Hinc deducitur.

E I = b
H I = c
E H = b − c
E I plus H I = b + c
G H = $\frac{bc-cc}{b+c}$
G I = $\frac{bc-cc}{b+c} + c$
F H = $\frac{b-c}{2}$
F I = $\frac{b+c}{2}$

THEOREMA.

Si ſit recta A B, ſitque vt A B ad H B, ita AD ad DH, & AH biſariam ſecetur in C. Dico item eſſe vt C B ad C H, ita C H ad C D.



QVoniam enim eſt A B ad H B, vt A D ad D H erit cõponendo vt AB plus HB ad HB, hoc eſt dupla C B, ad H B, ita A H, nempe dupla A C ad D H; atque adeò dimidiatis antecedentibus, erit vt C B ad H B, ita C H ad D H; & per conuerſionem rationis erit, vt C B ad C H, ita C H ad C D. Quod erat operæ pretium oſtendere.

SCHOLION.

Hæc peculiare habet præſtantiſſima hæc reſoluendi Methodus, quòd ea, quæ enunciantur oculorum ictu vera cernuntur: vnde ſi proportionales aliqui termini eſſe dicantur, ſtatim huiuſmodi eſſe cognoſcuntur. Ita quidem in hac reſolutione contingit. Quando ſiquidem dicimus vt b + c ad c, ita b − c ad $\frac{bc-cc}{b+c}$, ſtatim apparet hos terminos proportionales eſſe; ex multiplicatione etenim extremorum fit productum $bc - c^2$, quod etiam fit ex multiplicatione mediorum. Dimidiatis autem antecedentibus dicebamus eſſe vt $\frac{b-c}{2} + c$ ad c ita $\frac{b-c}{2}$ ad $\frac{bc-cc}{b+c}$, quos quidem terminos proportionales eſſe perſpicuum eſt. Si namque ducatur c, in $\frac{b-c}{2}$ fit $\frac{bc-cc}{2}$ ſi verò multiplicetur $\frac{b-c}{2} + c$ per $\frac{bc-cc}{b+c}$ fit idem; nam fractio illa $\frac{b-c}{2} + c$, idem valet ac altera $\frac{b-c+2c}{2}$, hoc eſt $\frac{b+c}{2}$, quæ ducta in $\frac{bc-cc}{b+c}$ facit $\frac{b^2c-c^3}{2b+2c}$, cui æquiualet $\frac{bc-cc}{2}$; nam ſi diuidatur $b^2c - c^3$ per 2 b + 2 c, fit quotiens $\frac{bc-cc}{2}$ vt conſtat; ſi enim diuidatur $b^2c - c^3$ per b + c, oritur $bc - c^2$; Cùmque eſſet diuiſor. 2b + 2c, propterea fit quotiens $\frac{bc-cc}{2}$ &c. Vnde etiam per conuerſionem rationis dicebamus eſſe vt $\frac{b-c}{2} + c$ ad $\frac{b-c}{2}$, ita $\frac{b-c}{2}$ ad $\frac{b-c}{2} - \frac{bc-cc}{b+c}$. Tantum enim fit ſi ducatur $\frac{b-c}{2}$ in ſe quadraticè, quantum fit ſi ducatur $\frac{b-c}{2} + c$ in $\frac{b-c}{2} - \frac{b^2c-c^3}{b+c}$.

In

Ex hoc adiuncto paradigmate cernitur multiplicationis productum $\frac{b^2-2bc+c^2}{4}$ *nam* $\frac{b^2c-2bc^2+c^3}{2b+2c}$ — $\frac{bc^2-c^3}{b+c}$*, ſimul iuncta faciunt* $\frac{bc-c^2}{2}$*. Totum autem illud afficitur ſigno* —*, vt fractio* $\frac{bc-c^2}{2}$ *afficitur ſigno* ✱. *At* ✛*, &* — *in additione ſe mutuò interimunt, vnde remanet* $\frac{b^2-2bc+c^2}{4}$*. Quod autem* $\frac{b^2c-2bc^2+c^3}{2b+2c}$ *cum* $\frac{bc^2-c^3}{b+c}$ *faciat* $\frac{bc-c^2}{2}$ *patet nam fractio illa* $\frac{bc^2-c^3}{b+c}$ *reuocatur ad hanc* $\frac{2bc^2-2c^3}{2b+2c}$*, quæ addita ad* $\frac{b^2c-2bc^2+c^3}{2b+2c}$ *facit* $\frac{b^2c-c^3}{2b+2c}$*; inſtituta diuiſione per b* ✱ *c fit quotiens* $\frac{bc-c^2}{2}$.

$$\frac{b-c}{2} \ast C$$

$$\frac{b-c}{2} - \frac{bc-c^2}{b\dagger c}$$

$$- b^2c - 2bc^2 \ast c^3 - \frac{bc^2-c^3}{b\dagger c}$$

$$\frac{b^2-2bc\dagger c^2}{4} \ast \frac{bc-c^2}{2}$$

$$b^2 - 2bc \dagger c^2.$$

PROPOSITIO.

Exemplum VII. *Iiſdem poſitis &c. Nam dicendum vt G I ad E G ita G H ad F G inquirere.*

E F G H I

Quoniam enim oſtendimus eſſe, vt $\frac{b-c}{2}$ ✱ c ad $\frac{b-c}{2}$ ita $\frac{b-c}{2}$ ad $\frac{b-c}{2} - \frac{bc-c^2}{b+c}$; propterea rectangulum ſub extremis æquabitur quadrato medij: nempè $\frac{b^2-2bc+c^2}{4}$; ſed huic æquale eſt rectangulum ſub b − c − $\frac{bc-c^2}{b+c}$ & ſub $\frac{bc-c^2}{b+c}$ vna cum quadrato ex $\frac{b-c}{2} - \frac{bc-c^2}{b+c}$; Vtrinque igitur huiuſmodi quadrato ſubtracto, remanebit rectangulum ex $\frac{b-c}{2} - \frac{bc-c^2}{b+c}$ in $\frac{bc-c^2}{b+c}$ ✱ c æquale rectangulo ſub b − c − $\frac{bc-c^2}{b+c}$ & ſub $\frac{bc-c^2}{b+c}$ ergo erit vt $\frac{bc-c^2}{b+c}$ ✱ c ad b − c − $\frac{bc-c^2}{b+c}$ ita $\frac{bc-c^2}{b+c}$ ad $\frac{b-c}{2} - \frac{bc-c^2}{b+c}$. Hinç deducitur.

THEOREMA.

Iiſdem poſitis &c. in recta A B, & ſit vt A B ad H B ita A D ad D H. Dico eſſe vt D B, ad A D ita D H ad DC.

Quoniam enim oſtendimus eſſe, vt C B ad C H; ita C H ad C D; erit rectangulum B C D æquale quadrato C H; ſed eidem quadrato C H; æquale eſt rectangulum A D H; plus quadrato C D; ergo vtrinque ſublato quadrato C D; erit rectangulum C D B, æquale rectangulo A D H; quare erit vt D B, ad A D ita D H ad C D. Quod erat operæ pretium oſtendere.

A C D H B

Notandum; In proximis ſuperioribus exemplis litteræ maiuſculæ Reſolutionis & Compoſitionis non ſunt eædem, id tamen non neceſſariò, ſed ad benè eſſe, ſi placet, ne Reſolutionis maiuſculæ eædem ſint ſpecie cum minuſculis.

SCHOLION.

Hic autem eſt operæ pretium adiungere ſequentem pragmatiam, vt conſtet terminos illos proportionales eſſe, vnde magis quoque liquet, quod dicebamus, nimirum, hoc præcipuum in hac eſſe reſoluendi ratione, vt illico conſtet, enunciatum de æqualitate inter aliquos terminos, vel de analogiſmo in tribus, aut quatuor terminis, quæ certè ſine hoc artificio, non niſi vi diſcurſus deprehendi poteſt; & ex illatione conſtat, cum hic ob oculos omnia ſint luculenter conſtituta.

Termini proportionales.

$$\underset{D}{\frac{bc-c^2}{b+c}+c}\;\Big|\;\underset{A}{b-c-\frac{bc-c^2}{b+c}}\;\Big|\;\underset{B}{\frac{bc-c^2}{b+c}}\;\Big|\;\underset{E}{\frac{b-c}{2}-\frac{bc-c^2}{b+c}}$$

$$b-c-\frac{bc-c^2}{b+c}\ A$$
$$\frac{bc-c^2}{b+c}\ B$$
$$\frac{b^2c-2bc^2+c^3-b^2c^2-2bc^3+c^4}{b+c\qquad\qquad b^2+2bc+c^2}\ C$$

$$\frac{bc-c^2}{b+c}+c\ D$$
$$\frac{b-c}{2}-\frac{bc-c^2}{b+c}\ E$$
$$\frac{b^2c^2-2bc^3+c^4}{b^2+2bc+c^2}-\frac{bc^2-c^3}{b+c}$$

$$\frac{b^2c-2bc^2+c^3}{2b+2c}+\frac{bc-c^2}{2}$$

$$\frac{b^2c-2bc^2+c^3}{2b+2c}+\frac{bc-c^2}{2}-\frac{b^2c^2-2bc^3+c^4}{b^2+2bc+c^2}-\frac{bc^2-c^3}{b+c}\ F$$

$$\frac{b^2c-2bc^2+c^3}{2b+2c}$$
$$\frac{b^2c-2bc^2+c^3}{b+c}$$

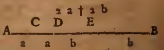
$$\frac{bc-c^2}{2}\ \mathrm{X}\ \frac{bc^2-c^3}{b+c}$$
$$\frac{2bc^2-2c^3}{b^2c-bc^3}$$
$$\frac{b^2c-2bc^2-c^3}{2b+2c}$$

Vides igitur ex ducta A in B fieri C; quantum fit ex ducta D in E. Fit enim F, eſt autem F, æqualis ipſi C nam $-\frac{b^2c-2bc^2+c^3}{2b+2c}$ *reperitur vtrobiq; at ſi ex* $\frac{bc-c^2}{2}$ *auferatur* $\frac{bc^2-c^3}{b+c}$ *remanet* $\frac{b^2c-2bc^2-c^3}{2b+2c}$ *quo addito ad* $\frac{b^2c-2bc^2+c^3}{2b+2c}$ *fit* $\frac{b^2c-2bc^2+c^3}{b+c}$.

PROPOSITIO.

Sit recta quædam ſecta per inæqualia in D; ſint autem partes AD, DB diuiſa bifariam in C, & E: oporteat conferre quadratum totius AB plus quadrato DB, cum quadrato AC, plus quadrato C B. Exemplum VIII.

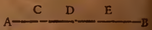
SVpponamus A C eſſe a, etiam C D erit a. At D E ſit b, nam & E B erit b; tota autem A B erit $2a \dagger 2b$: huius quadratum eſt $4a^2 \dagger 8ba \dagger 4b^2$; quadratum autem D B, eſt $4b^2$; itaque aggregatum ex his erit $4a^2 \dagger 8ba \dagger 8b^2$. At verò quadratum partis A C eſt a^2, partis autem C B, eſt $a^2 \dagger 4ba \dagger 4b^2$. Horum aggregatum eſt $2a^2 \dagger 4ba \dagger 4b^2$; eſt autem $2a^2 \dagger 4ba \dagger 4b^2$ dimidium illius quidem $4a^2 \dagger 8ba \dagger 8b^2$. Hinc



THEOREMA.

Si recta A B diuiſa ſit per inæqualia in D. Diuiſis autem partibus in punctis C, & E, biſariam. Dico quadratum A B plus quadrato D B duplum eſſe quadrati A C, plus quadrato C B.

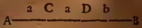
QVandoquidem A B diuiſa eſt per inæqualia in D; partes autem AD, D B, diuiſæ biſariam in C, & E, quadratum totius A B æquale erit duplo rectangulo B A C plus duplo rectangulo A B E; quare rectangulum B A C, vnà cum rectangulo A B E, hoc eſt rectangulum ſub A B, & C E dimidium erit quadrati A B; quadratum autem D B duplum eſt rectanguli ſub D B, & E B; quamobrem rectangulum ſub A B, & C E, vnà cum rectangulo ſub D B, & E B dimidium erit quadrati A B, plus quadrato D B. Sed rectangulum ſub A B, & C E plus rectangulo ſub D B, & E B æquale eſt rectangulo E C E plus rectangulo E C D, vnà cum rectangulo D B E, ſeu plus rectangulo E D C vnà cum quadrato C D plus rectangulo D B E. At verò hæc omnia rectangula ſcilicet B C E plus rectangulo E D C, vnà cum quadrato C D, plus rectangulo D B E æqualia ſunt quadratis A C, C B; ergo quadratum A B, vnà cum quadrato D B duplum eſt quadrati A C plus quadrato C B. Quod oportebat oſtendere.



PROPOSITIO.

Exemplum VIIII. *Si latus aliquod ſectum ſit vtcunque, quadratum totius plus quadrato differentiæ partium quibus planis ad ipſas partes relatis æquale ſit, inquirere.*

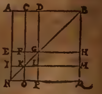
DAta ſit recta A B, vtcunque ſecta in C, ità tamen vt partes A C, C B, ſint inter ſe inæquales, alioquin nulla earum differentia foret. Sit earum differentia D B. Supponamus A C eſſe a, etiam C D erit a; at verò D B ſupponamus b; tota igitur A B erit $2a \dagger b$, cuius quadratum, eſt $4a^2 \dagger 4ba \dagger b^2$, cui ſi addas b^2, fiet $4a^2 \dagger 4ba \dagger 2b^2$. At verò quadrata partium ſunt a^2, & $a^2 \dagger 2ba \dagger b^2$, quorum aggregatum eſt $2a^2 \dagger 2ba \dagger b^2$; hoc autem dimidium eſt illius $4a^2 \dagger 4ba \dagger 2b^2$. Hinc



THEOREMA.

Si latus aliquod diuiſum fuerit vtcunque, quadratum totius plus quadrato differentiæ partium duplum eſt aggregati quadratorum à partibus.

QVoniam A B ſecta eſt vtcunque in D, quadratum totius A B, erit æquale quadrato A B plus duplo rectangulo A D B plus quadrato A D; ſed A D ſecta eſt biſariam in C. Proinde duplum rectangulum A D B idem eſt quod quadruplum C D B, & quadratum A D, idem quod quadruplum quadratum C D; proinde quadratum A B æquale erit quadrato D B plus quadruplo rectangulo C D B, plus quadruplo quadrato CD, vel A C. Quare quadratum A B plus quadrato D B, æquale erit quadruplo quadrato A C, plus quadruplo rectangulo C D B, plus duplo quadrato D B.



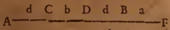
Quoniam autem C B diuiſa eſt vtcunque in D, erit quadratum C B æquale quadratis C D, D B plus duplo rectangulo C D B addito quadrato C D, ſeu A C; quadratum CB plus quadrato A C, erit æquale duplo quadrato A C, plus duplo rectangulo C D B, plus quadrato D B. Hoc autem aggregatum eſt dimidium illius, quod conſtat ex duplo quadrato D B, plus quadruplo quadrato A C, plus quadruplo rectangulo C D B; quamobrem quadratum totius, plus quadrato differentiæ partium duplum eſt quadratorum à partibus. Quod erat operæ pretium demonſtrare.

Hæc cernere licet in ſuperiori ſchemate A B Q N, ducta diagonali N B, ductiſque paralleli C O, D P, item E H, I M, ſe mutuo ſecantes in F, G, K, L, &c.

PROPOSITIO.

Si recta A B ſecta ſit in C, & D, vt A C, D B ſint inter ſe æquales; ſit autem adiecta ipſi quæcunque B F: rectangulum C F D, quibus planis ad ipſas partes relatis æquale ſit, inquirere. Exemplum X.

SVpponamus A C eſſe d, tantum etiam erit D B. Intercepta CD ſit b. adiecta vero B F, eſto a. rectangulum C F D, erit $bd + d^2 + 2da + ba + a^2$. At rectangulum A F B eſt $2da + ba + a^2$. Rectangulum verò C B D eſt $bd + d^2$. Proinde cùm $bd + d^2$ ✠ $2da + ba + a^2$, conſtet ex $2da + ba + a^2$, & ex $bd + d^2$. His igitur planis æquale erit rectangulum CFD. Hinc



$$\begin{array}{r} b + d \\ d \\ \hline bd + d^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} b + d + a \\ d + a \\ \hline ba + da + a^2 \\ bd + d^2 + da \\ \hline bd + d^2 + 2da + ba + a^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2d + b + a \\ a \\ \hline 2da + ba + a^2 \end{array}$$

THEOREMA.

Si recta linea A B ſecta ſit in C, & D, ita vt A C, D B ſint æquales, & adiecta & ſit B F. Dico rectangulum C F D æquale eſſe rectangulo A F B, vnà cum rectangulo C B D.



QVandoquidem rectangulum C F D æquale eſt rectangulo C D B plus quadrato D B plus rectangulo duplo B D F vnà cum rectangulo ſub C D, & B F, plus quadrato B F. At vero rectangulum A F B æquale eſt duplo rectangulo D B F, plus rectaugulo ſub C D, & B F, vnà cum quadrato B F. Rectangulum verò C B D æquale eſt rectangulo C D B, plus quadrato D B; horum aggregatum eſt rectangulum C D B: plus quadrato D B, vnà cum duplo rectangulo D B F, plus rectangulo ſub C D, & B F, vnà cum quadrato D B. Quare &c.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt, rectanguli C F D exceſſum ſupra rectangulum C B D, eſſe rectangulum A F B.

PROPOSITIO.

Sit recta E F ſecta quidem in G, & H, ita vt quadratum E G ad quadratum G H, ſit vt E F ad H F. Sit autem iniunctum inquirere, quo pacto ſe habeant E F, G F, & H F, ſi inter ſe conferantur. Exemplum XI.

Statim ſe ſe offert analogiſmus: vnde

THEOREMA.

Si recta E F ſecta ſit in G, & H, ita vt quadratum E G ad quadratum G H, ſit vt E F ad H F, Dico E F, G F, H F, in continua eſſe analogia.

Si enim G F non eſt media proportionalis inter E F, & H F, ſit alia quæpiam I F, quæ maior erit, vel minor quam G F.



QVoniam igitur eſt vt E F, ad H F, ita quadratum E G ad quadratum G H; erit propterea, vt E G ad G H, ita E F ad I F, quæ media eſt inter E F, & H F. Sed vt E F ad I F, ita debet eſſe E I ad I H, exceſſus ad exceſſum; ergo vt E G, ad G H, ita E I ad I H. Quod eſt impoſſibile.

Aliter. Quoniam igitur eſt vt E F ad I F, ita I F ad H F; ergo vt E F ad H F, ita quadratum E I ad quadratum I H. Sed vt E F ad H F, ita quadratum E G ad quadratum G H ex hypotheſi; ergo vt quadratum E I ad quadratum I H, ita quadratum E G, ad quadratum G H. Quod eſt impoſſibile.

Aliter. Supponamus I F mediam eſſe inter E F, & H F.

Quoniam igitur E F, I F, H F, ſunt proportionales; ergo ex naturâ proportionálium vt E F ad H F, ita quadratum E I, ad quadratum I H; ſed vt E F ad H F, ex hypotheſi ita quadratum E G ad quadratum G H; ergo vt quadratum E I ad quadratum I H, ita quadratum E G ad quadratum G H; ergo vt E I ad I H, ita E G ad G H; & componendo, vt E H ad I H, ita E H ad G H; & permutando vt E H, ad E H, ita I H ad G H; ergo addita communi H F, erunt I F, & G F inter ſe æquales. Sed I F media ſupponitur proportionalis inter E F, H F; ergo G F media quoque proportionalis erit inter eaſdem E F, H F; ergo E F, G F, H F, erunt proportionales.

Perinde eſt igitur ad demonſtrandum ſuſcipere quod punctum I, neceſſariò cadit in puncto G, quando I, ſignificet extremum mediæ proportionalis inter E F, H F, alia eius exiſtente extremo in puncto F.

Hoc autem demonſtrandi genus eſt magnopere obſeruandum; quamuis enim rarò accipetur; tamen eſt maximè elegans, ac in primis idoneum ad oſtendendum, quod aliàs deducendo ad incoueniens, demonſtraretur.

PROPOSITIO.

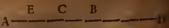
Exemplum XII. *Sit recta A D diuiſa in punctis C, B, itaut rectangulum A D B, ſit æquale quadrato C D, quo pacto ſegmenta inter ſe collata ſe habeant inueſtigare.*



SVpponamus A C eſſe b, at C B eſſe c; & B D quidem eſto a. ad A D erit b † c † a, rectangulum A D B erit b a † c a † a², ſed quadratum ex C D erit c² † 2 c a † a². vnde b a † c a † a² cum æquetur c² † 2 c a † a² per antitheſin vtrinque ſublato rectangulo c a † a². remanebit b a æquale c² † c a. & iterum per antitheſin vtrinque ſublato rectangulo c a. remanebit b a — c a = c². & reſoluta æqualitate in proportionem fiet, vt b — c ad c ita c ad a. Hinc

THEOREMA.

Sit recta A D diuiſa in punctis C & B. itaut rectangulum A D B, æquale ſit quadrato C D; erit A C maior, quam C B, & erit vt differentia inter A C & C B ad C B. ita C B ad B D.



QVoniam enim ex hypotheſi E C æqualis C B, itaut exceſſus ipſius A C ſupra C B ſit A E, fiat rectangulum A B D eſt æquale quadrato C D, vtrinque ſublato rectangulo C D B, remanebit rectangulum ſub A C & D B, æquale rectangulo ſub C D, & C B ablato iterum vtrinque rectangulo ſub C B & B D, remanebit rectangulum ſub A E & B D, æquale quadrato C B; & reſoluta æqualitate in proportionem erit quidem vt A E exceſſus,

ceſſus, ipſius A C ſupra C B ad E C ſeu C B, ita C B ad B D. Quod erat operæ prætium oſtendere.

Non raro tamen accidit, vt declinandum præſtet ab æqualitatis vſu; ſola quidem proportione retenta, & ea quidem adhibita donec eò peruentum fuerit, vt ex terminis notis, is de quo quæritur innoteſcat; propterea, quando hoc Analyſta obſeruauerit, ſe potius ad analogiſmum adigat, vnde hoc eodem exemplo retento; ſic procedendum. Notandum.

Quoniam igitur $ba + ca + a^2$ æquatur $c^2 + 2ca + a^2$, reſoluta æqualitate in proportionem fiet, vt $b + c + a$ ad $c + a$, ita $c + a$ ad a. Cum autem ſit, vt totum $b + c + a$ ad totum $c + a$, ita ablatum $c + a$ ad a erit etiam vt reliquum b ad reliquum c ita $c + a$ ad a, & diuidendo vt $b - c$ ad c ita c ad a.

Vides igitur elegantius concluſum fuiſſe illud idem quod ſupra nulla adhibita æqualitate, ſed tantum per proportionalium vſum.

Compoſitio autem reſolutioni reſpondens in ſe habet.

Quoniam igitur rectangulum A D B æquale eſt quadrato C D, reſoluta æqualitate in proportionem, erit vt A D ad C D, ita C D ad B D; cùm itaque ſit vt totum A D ad totum C D, ſic ablatum C D ad ablatum B D, etiam erit, & reliquum A C ad reliquum C B, vt ablatum C B ad ablatum B D, & diuidendo, vt A E ad E C, vel C B, ita C B ad B D.

SCHOLION.

Iuuat hic aduertere diſcrimen inter hanc Methodum, & illam qua veteres vtebantur in theorematum reſolutionibus. Huic theoremati Recentiorum Methodo ſatisfecimus beneficio ſpecioſæ Logiſtices, Compoſitionem contexentes eodem ordine, quo procedit reſolutio. Nunc quo pacto Veteres eidem ſatisfacerent videamus; hinc enim inter iſtas Methodos diſcrimen patebit.

Supponamus igitur ita eſſe, nempè, vt A E ad E C, vel C B, ita C B ad B D. Suppoſito quòd rectangulum A D B æquale ſit quadrato C D.

Quoniam igitur eſt vt A E, ad E C, vel C B, ita C B ad B D; ergo componendo erit vt A C ad C B, ita C D ad B D, & permutando vt A C ad C D, ita C B ad BD, & componendo, vt A C plus C D, hoc eſt A D ad C D, ita C B, plus B D, hoc eſt C D ad B D; ergo reſoluta æqualitate in proportionem rectangulum A D B æquabitur quadrato C D. Quod ita ſe habet; hunc enim in modum proponitur linea diuiſa.

Propoſitum ſit inquirere quod oſtenditur ab Apollonio Lib. primo Conicor Prop. XI; nempè repetito ſchemate adhibito in Exemplo LXIX ſuperioris Libri. Hæc etiam Schooten, ſed nos multo aliter.

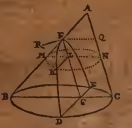
PROPOSITIO.

Sit iniunctum inquirere; cuinam plano relato ad rectam abſciſſam ex diametro F L ſit æquale quadratum ſemiordinatim applicatæ in ſectione, quæ dicitur Parabole. Exemplum XIII.

SIt conus A B C cuius vertex A baſis verò circulus B E C D ſectio, quæ dicitur parabole D F E, cuius diameter F G, ſemiordinatim applicata K L, & abſciſſa ex diametro ſit FL oporteat inquirere cui nam plano relato ad abſciſſam L F, æquale ſit quadratum rectæ K L.

Intelligatur ducta F Q parallela ipſi M N. Quoniam igitur triangula B A C, M E L ſunt ſimilia; ergo vt A C ad C B, ita F L ad M L; quare ſi fiat vt c ad d, ita a ad aliam $\frac{da}{c}$, hæc ipſa erit M L. Et rurſus quoniam triangula B A C, F A Q ſunt ſimilia; propterea erit vt A B ad B C, ita A F ad F Q, ſeu L N; quare ſi fiat vt b ad d, ita f ad aliam $\frac{df}{b}$ hæc ipſa erit L N. At rectangulum M L N, hoc eſt ducta L N, in M L, fit rectangulum æquale quadrato K L; propterea ducta $\frac{df}{b}$ in $\frac{da}{c}$, fiet productum

A B = b
A C = c
B C = d
A F = f
F L = a
K L = e



$\frac{daf}{bc}$

$\frac{df}{bc}$ a $=$ e^2. Sed ſi fiat vt b c ad d^2, ita f, ad aliam, hæc ipſa erit $\frac{df}{bc}$; ergo ſi fiat vt b c ad d^2, ita f ad aliam, hæc ipſa ducta in a, facit productum æquale e^2. Hinc

THEOREMA.

Si fuerit vt rectangulum B A C ad quadratum B C, ita A F ad F R. Dico rectangulum R F L, æquale eſſe quadrato K L.

QVoniam enim triangula B A C, M E L ſimilia ſunt, propterea erit, vt A C ad C B, ita F L ad M L. Et rurſus quoniam triangula B A C, F A Q ſimilia ſunt, propterea erit vt A B ad B C, ita A F ad F Q, ſeu N L; Ducta autem L N in M L, facit rectangulum æquale quadrato K L. Et ſi fiat vt rectangulum B A C ad quadratum B C, ita A F ad aliam, quæ ſit R F, hæc ipſa ducta in F L facit rectangulum æquale rectangulo M L N; ergo ſi fiat vt rectangulum B A C ad quadratum B C, ita A F ad aliam F R, hæc ipſa ducta in F L, faciet rectangulum æquale quadrato K L. Quod oportebat oſtendere.

Vides igitur hoc artificio, eximium illud Apollonij Theorema adinueniri, & adinuentum demonſtrari.

Aliter autem in Exemplo LXIX proceſſimus. Diximus enim, quoniam ob ſimilitudinem triangulorum B A C, M E L, vt eſt c ad d, ita a ad $\frac{da}{c}$, & ob ſimilitudinem triangulorum B A C, F A Q, vt b ad d, ita f ad $\frac{df}{b}$; proportionalibus verò per proportionalia multiplicatis, proportionalia fiunt; ergo vt b c ad d^2, ita f a ad $\frac{d^2}{bc}$ a. Sed ſi fuerit vt b c, ad d^2,

$\frac{df}{bc}$ eſt RF.

ita f ad aliam, nempe $\frac{df}{bc}$, hæc ipſa ducta in a, facit $\frac{df}{bc}$ a; propterea rectangulum factum ab hac quarta proportionali $\frac{df}{bc}$ & a æquabitur e^2, cui erat æquale rectangulum factum ex $\frac{df}{b}$ ducta in $\frac{d}{c}$. Sed hoc æquatur e^2, ob circuli naturam; ergo huic etiam æquabitur rectangulum factum ex quarta proportionali iam dicta in a; hinc itaque Theorema.

Si fiat vt rectangulum B A C ad quadratum B C, ita A F ad F R. Dico rectangulum R F L, æquale eſſe quadrato K L.

Alias etiam proprietates eiuſdem ſectionis in tertia huius operis parte non diſſimili Methodo perſequemur.

PROPOSITIO.

Exemplum XLV.

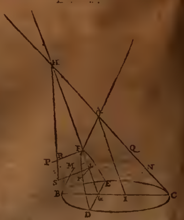
Sit iniunctum inquirere, cui nam plano relato ad rectam abſciſſam ex diametro ſit æquale quadratum ſemiordinatim applicatæ in ſectione, quæ dicitur Hyperbole.

SIt conus B A C, cuius vertex A, baſis autem circulus B E C D, ſectio quæ dicitur hyperbole ſit D F E; cuius diameter G F, abſciſſa ex diametro eſto L F, ſemiordinatim applicata K L ſitque propoſitum inquirere, cui nam plano relato ad rectam L F, æquale ſit quadratum K L.

BI $=$ b
AI $=$ c
IC $=$ d
HF $=$ q
FL $=$ a eritq: HL $=$ q † a
KL $=$ e.

Quoniam igitur triangula C A I, N H L ſunt ſimilia; eſt vt A I ad I C, ita H L ad L N. quare ſi fiat vt c ad d, ita q † a ad $\frac{dq + da}{c}$ hæc ipſa erit L N.

Et rurſus quoniam triangula B A I; M F L, ſimilia ſunt, propterea erit, vt A I ad B I. Ita F L, ad M L, quare ſi fiat, vt c ad b, ita a ad $\frac{ba}{c}$ hæc ipſa erit M L, at rectangulum M L N, hoc eſt ducta M L in L N. fit productum æquale quadrato K L. propterea ducta $\frac{dq + da}{c}$ in $\frac{ba}{c}$ fit productum $\frac{bdqa + bda^2}{c^2}$ æquale e^2. Sed ſi fiat vt c^2 ad b d, ita q ad quartam $\frac{bdq}{c^2}$ hæc ipſa erit R F. Rurſus ſi fiat, vt c^2 ad b d hoc eſt H F, ad F R, ita a; hoc eſt F L, ſeu R O ad $\frac{bda}{c^2}$, erit quidem tanta O S; quare S L, ſeu P F, erit $\frac{bdq}{c^2}$ ✝ [illegible] ſeu [illegible] quo ducto in a hoc eſt F L fiet [illegible], ſed hoc erat æquale e^2 ergo rectangulum ex $\frac{bdq}{c^2}$ ✝ $\frac{bda}{c^2}$ in a æquabitur e^2.



THEOREMA.

Si fuerit vt quadratum A I ad rectangulum B I C, ita H F ad R F, & rurſus ſi fiat vt quadratum A I ad rectangulum B I C ita F L ſeu R O ad aliam O S ſeu P R, & hæc P R plus R F ducatur in F L, vt fiat rectangulum P F L. Dico rectangulum P F L æquale eſſe quadrato K L.

Demonſtratio procedit non abſimili modo ac ſuperior.

Quoniam igitur triangula C A I, N H L, ſunt ſimilia; ergo vt A I ad I C, ita H L, ad L N. Rurſus ob ſimilitudinem triangulorum B A I, M F L, erit vt A I ad B I, ita F L ad M L; at ſi ducatur M L in L N, fit productum, ſiue rectangulum æquale quadrato K L; verùm ſi fiat vt quadratum A I, ad rectangulum B I C, ita H F ad R F. Rurſus ſi fiat vt quadratum A I, ad rectangulum B I C, ita F L, ſeu R O, ad aliam O S, ſeu P R, quæ plus R F, ducta in F L, facit rectangulum M L N, ſed hoc rectangulum erat æquale quadrato K L; ergo ſi fiat vt quadratum A I, ad rectangulum B I C, ita HF, ad R F; & rurſus fiat vt quadratum A I, ad rectangulum B I C, ita F L, ſeu RO ad aliam O S, ſeu P R, & P R plus R F ducatur in F L, fiet rectangulum æquale quadrato K L.

PROPOSITIO.

Sit iniunctum inquirere, cui nam plano relato ad F L, ſit æquale quadratum ſemiordinatum applicata K L, in ſectione, quæ dicitur Ellipſis.

Sit conus B A C cuius vertex A; baſis autem circulus cuius diameter B C; ſectio, quæ dicitur ellipſis ſit K F H, cuius diameter F H.

B I	= b.
A I	= c.
C I	= d.
F H	= q.
F L	= a. & erit L H = q − a
F I	= e.

Notentur magnitudines characteribus ad reſolutionem idoneis, vt hic à latere cernis. Deinde

Quoniam triangula A C I, & H N L, ſunt ſimilia propterea vt A I ad I C, ita H L ad L N, atque adeo, vt c ad d, ita q − a ad $\frac{dq-da}{c}$, itaque L N erit $\frac{dq-da}{c}$. Et quoniam rurſus triangula A B I, M F L, ſunt ſimilia; proinde vt AI ad B I, ita F L ad M L. hoc eſt vt c ad b, ita a ad $\frac{ba}{c}$, itaque M L erit $\frac{ba}{c}$, at ſi ducatur M L in L N, fit rectangulum æquale quadrato K L; itaque $\frac{ba}{c}$ ductum in $\frac{dq-da}{c}$ facit productum $\frac{bdqa-bdaa}{cc}$ æquale e^2.



At ſi fiat vt quadratum A I ad rectangulum B I C, ita F H ad quartam F R, ſeu vt c^2 ad b d ita q ad $\frac{bdq}{cc}$ erit hæc ipſa F R.

Si verò fiat vt F H ad F R: ita F L ſeu P S ad P R, hoc eſt vt c^2 ad b d ita a ad $\frac{bda}{cc}$ hæc ipſa erit P R, at $\frac{bdq}{cc} - \frac{bda}{cc}$ ductum in a facit $\frac{bdqa-bdaa}{cc}$, nempe rectangulum ex $\frac{ba}{c}$ in $\frac{dq-da}{c}$, quod erat æquale e^2; quare rectangulum ex $\frac{bdq}{cc} - \frac{bda}{cc}$, in a erit æquale e^2. Hinc

THEOREMA.

Si fiat vt quadratum A I ad rectangulum B I C, ita F H ad F R, & vt F H ad F R ita F L ſeu P S ad P R. Dico rectangulum P F L æquale eſſe quadrato K L.

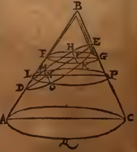
Demonſtratio patet &c.

PROPOSITIO.

Exemplum XVI.

Propoſita ſit ellipſis D M E O ib cono A B C: eius autem axis D E, ordinatim applicatæ H K, M O. Sit iniunctum inquirere, quænam ſit ratio quadrati I K ad quadratum N O.

TRanſeat planum per H K, & fiat communis ſectio circulus F H G K, cuius diameter F G; huiuſmodi enim planum eſt parallelum baſi. Trāſeat etiam per M O planum alterum, & fiat communis ſectio circulus L M P O, cuius diameter L P; eſt enim huiuſmodi planum baſi parallelum. Quoniam igitur hæc plana ſunt parallela baſi ipſius coni erunt inter ſe parallela, ac ob id & eorum communes ſectiones F G, L P, cum plano A B C erunt inter ſe parallelæ; quare triangula E I G, E N P, erunt inter ſe ſimilia; item D I F, D N L, ſimilia erunt inter ſe. E I ſit b: I G, c. E N, a; prætereà I D ſit d. F I, f. D N, g. Inſuper I K ſit e, & N O eſto u. Quoniam igitur triangula E I G, E N P ſunt ſimilia; fiat vt b ad c, ita a ad $\frac{ca}{b}$. Rurſus quoniam triangula D N L, D I F ſunt ſimilia fiat vt d ad f, ita g ad $\frac{fg}{d}$; ergo vt rectangulum b d ad rectangulum f c, ita rectangulum g a, ad rectangulum $\frac{cfg}{bd}$ a. Sed rectangulum fc, ob circuli naturam æquale eſt e^2, & rectangulum $\frac{cfg}{bd}$ a, æquale eſt u^2; ergo vt rectangulum b d, ad e^2, ita rectangulum g a, ad u^2, & permutando, vt rectangulum b d ad rectangulum g a ita e^2 ad u^2; Hinc



THEOREMA.

Si ſit ellipſis D H E O, in cono A B C, cuius axis D E: ordinatim applicatæ H K, M O. Dico quadratum I K ad quadratum N O, eſſe vt rectangulum E I D, ad rectangulum E N D.

QVoniam enim triangula E I G, E N P, ſunt ſimilia; ergo vt E I ad I G, ita E N ad N P. Et rurſus quoniam triangula D N L, D I F ſunt ſimilia; ergo erit vt I D ad I F, ita D N ad L N; ergo vt rectangulum E I D ad rectangulum F I G, ita rectangulum E N D, ad rectangulum L N P, ſed rectangulum F I G æquale eſt quadrato I K, & rectangulum L N P æquale eſt quadrato N O; ergo vt rectangulum E I D ad quadratum I K ita rectangulum E N D ad quadratum N O; ergo permutando, vt rectangulum E I D ad rectangulum E N D, ita quadratum I K ad quadratum N O. Quod erat operæ pretium oſtendere.

Cau-

Cautiones, quibus indiget Analyſta in Theorematis oblati Reſolutione inſtituenda, & quid inter Antiquam, & nouam Methodum interſit. Cap. VI.

SAgacis Artificis eſt expeditam viam ſeligere, ne difficultatibus obrutus, ab operẽ cœpto deſiſtat. Illud autem in primis curet, vt mentis agitatione Theorematis oblati naturam perſpectam habeat, qua comperta, & ſedulò quidem explorata, præparationẽ, ſi qua opus eſt, inſtituat, qua in re ipſius ſolertia non exiguum habebit momentum; Præparatio autem magni facienda eſt, cùm hinc pateat aditus ad analyſin; hæc porrò maximè innoteſcent ex obſeruatione multarum reſolutionum vnius, eiuſdemque Theorematis; proptereà quod inde cuique planum fiet, qua ratione ſeligere viam liceat expeditiorem ad propoſitum conducentem; Sit autem in exemplum. *Quid Analyſta caueñdũ.*

THEOREMA.

In omni circulo ſumpto quouis arcu minori quàm 45 grad. eiuſque duplo, erit vt tangens arcus ſimpli ad tangentem arcus dupli, ita differentia inter quadratum radij, & quadratum tangentis arcus ſimpli ad duplum quadrati radij.

HVius Theorematis variæ extant demonſtrationes, in quibus variæ præparationes cernuntur; illud quidem demonſtrauit Ægidius Perſonerius de Roberual Amicus noſter, Thomas Hobbes, Petrus Carcauius, Carolus Cauendyſius, D. Palieur, Ioannes Ludouicus VVolzogen, Bonauentura Caualerius, Claudius Mydorgius, Iacobus Golius, Franciſcus Schooten, & nos eidem Theoremati Analyticè procedentes ſatisfecimus. Si quis igitur conferat prædictorum Geometrarum demonſtrationes, facilè Diſciplinæ fœcunditatem notabit, ſimulque conſpiciet, qua induſtria liceat aptiorem viam ſeligere, notando videlicet, quid inter illas præparationes interſit, quarum nulla cum alia coincidit, Et hinc operoſum non erit præceptum depromere.

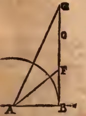
Hic non foret abs re ſupradictas demonſtrationes in medium afferre, breuitati tamen ſtudentes prætermiſimus, contenti ſolùm ſequentes noſtras Reſolutiones attuliſſe.

Auctoris modi, quibus propoſito Theoremati fit ſatis.

ROPOSITIO.

Iiſdem poſitis, & propoſitum ſit inquirere, quæ ſit ratio differentiæ quadratorum A B, B F, ad duplum quadratum A B relata ad B F & B G.

RESOLVTIO I.



POteſt reſolutio inſtitui procedendo ſcil. vel per æqualitatem, vel ſolum per terminos proportionales; per æqualitatem ſic illam inſtituo A B ſit b. B G ſit c, nam A G erit $℞(b^2 \dagger c^2)$ & B F eſto a, vnde F G erit $c - a$; ergo cum angulus G A B, ſit biſectus à recta A F erit vt $c - a$ ad a, ità $℞(b^2 \dagger c^2)$ ad b: quare rectangula ſub extremis, & medijs erunt æqualia; proinde $a\,℞(b^2 \dagger c^2)$ æquabitur $bc - ba$. omnibus applicatis ad a fiet $℞(b^2 \dagger c^2) = \frac{bc - ba}{a}$ ergo horum quadrata erunt æqualia, quamobrem $b^2 \dagger c^2$ æquabitur $\frac{b^2c^2 - 2b^2ac \dagger b^2a^2}{a^2}$, tollatur fractio inſtituta communi multiplicatione per a^2, & $b^2a^2 \dagger c^2a^2$ æquabitur $b^2c^2 - 2b^2ac \dagger b^2a^2$ vtrinque ſubtracto b^2a^2, & fiet $c^2a^2 = b^2c^2 - 2b^2ac$. omnibus applicatis ad c fiet $ca^2 = b^2c - 2b^2a$, & per antitheſin $ca^2 \dagger 2b^2a = b^2c$. & rurſus $2b^2a = b^2c - a^2c$, ſeu $b^2c - a^2c = 2b^2a$. inſtituto paraboliſmo omnibus applicatis ad $b^2 - a^2$. fiet $\frac{2b^2a}{b^2 - a^2} = c$. vnde reſoluta æqualitate in proportionem fit analogiſmus huiuſmodi. Vt $b^2 - a^2$ ad $2b^2$ ita a ad c.

Hæc tamen reſolutio per æqualitatem procedens, quamuis in proportionem deſinat; nihilominus, minus idoneam ſuppeditat viam ad demonſtrandum, ob aſcenſum in æqua-

 tioni-

tionibus ad quantitates imaginarias, præſtat ob id hanc ommittere, quæ tamen omninò ſpernenda non eſt, cum oſtendat quod quæritur; ſed elegantiùs fiet progreſſus per terminos proportionales, vt in ſequenti Reſolutione.

PROPOSITIO.

Quod ſupra dicebatur &c. Propoſitum ſit inquirere Auctoris ſuprapoſiti Theorematis.

RESOLVTIO II.

QVoniam igitur eſt vt c -- a, ad a, ita ℞ Q(b^2 ✠ c^2) ad b; ergo eorum quadrata proportionalia erut; quamobrem vt $c^2 - 2ca + a^2$, ad a^2, ita $b^2 + c^2$, ad b^2, hoc eſt vt rectangulum $c^2 - 2ca + a^2$, ad a^2, ita c^2 ✠ b^2, ad b^2; & diuidendo vt rectangulum $c^2 - 2ca$, ad a^2, ita c^2, ad b^2, & permutando, vt rectangulum $c^2 - 2ca$, ad c^2, ita a^2 ad b^2, hoc eſt ob communem altitudinem c, vt $c - 2a$, ad c, ita a^2, ad b^2, & conuertendo vt c, ad $c - 2a$, ita b^2, ad a^2; & per conuerſionem rationis vt c, ad 2 a, ita b^2, ad $b^2 - a^2$; & ſubduplatis conſequentibus, vt c ad a, ita 2 b^2, ad $b^2 - a^2$; & conuertendo, vt a, ad c, ita $b^2 - a^2$, ad 2 b^2. Hinc

THEOREMA.

In omni circulo ſumpto quouis arcu minori quam 45 grad. eiuſque duplo; erit vt tangens arcus ſimpli ad tangentem arcus dupli, ita differentia inter quadratum radij, & quadratum tangentis arcus ſimpli ad duplum quadrati radij.

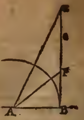
Fiat F O, æqualis B F.

QVoniam igitur eſt vt F G ad B F, ita A G ad A B; ergo vt quadratum F G, ad quadratum F B, ita quadratum A G ad quadratum A B, hoc eſt vt rectangulum B G O, plus quadrato F O, ſeu B F, ad quadratum BF, ita quadratum B G, plus quadrato A B, ad quadratum A B; & diuidendo vt rectangulum B G O ad quadratum B F, ita quadratum B G ad quadratum A B; & permutando, vt rectangulum B G O ad quadratum B G, ita quadratum B F ad quadratum A B, hoc eſt ob communem altitudinem B G, vt O G ad B G, ita quadratum B F ad quadratum A B; & conuertendo, vt B G ad O G, ita quadratum A B, ad quadratum B F; & per conuerſionem rationis vt BG ad BO, ita quadratum A B ad quadratum A B, minus quadrato B F, & ſubduplatis conſequentibus vt B G ad BF, ita duplum quadratum A B ad quadratum A B, minus quadrato B F. & conuertendo, vt B F ad B G, ita quadratum A B, minus quadrato B F, ad duplum quadratum AB. Quod erat operæ pretium oſtendere.

Hunc igitur in modum ſuprapoſiti Theorematis beneficio ſpecioſæ Logiſtices Reſolutio procedit iuxta præcepta iam tradita. Non erit autem inutile perpendere quid interſit inter hanc reſolutionis formam, & antiquam, quam hic propterea ſubijcere non grauabimur.

Eiuſdem Theorematis ab Auctore iuxtà Methodum antiquam inſtituitur.

RESOLVTIO I.



SEcetur F O æqualis ipſi F B.

Quoniam igitur eſt vt B F, ad B G, ita quadratum A B, minus
a Corol. 4. qu. quadrato B F, ad duplum quadratum A B; ergo conuertendo [a] vt B G, ad BF, ita duplum quadratum A B, ad quadratum A B, minus quadrato B F; duplatis autem conſequentibus, vt B G, ad B O, ita quadratum A B, ad quadratum A B, minus quadrato B F, & per cō-
b Coro. 19. qu. uerſionem rationis [b] vt B G ad G O, ita quadratum A B ad quadra-
c Corol. 4. qu. tum B F; & conuertendo [c] vt GO, ad BG, ita quadratum BF, ad qua-
d 1. ſexti. dratum A B, hoc eſt ob communem altitudinem B G, vt [d] rectangulum B G O ad quadratum B G, ita quadratum B F, ad quadratum
e 16. quinti. A B; & permutando [e] vt rectangulum B G O ad quadratum B F, ita
f 18. quinti. quadratum B G ad quadratum A B; & componendo [f] vt rectangulū

B G O,

B G O, plus quadrato B F, ad quadratum B F, ſeu O F, ita qnadratum B G, plus quadrato A B, ad quadratum A B, hoc eſt, vt [g] quadratum F G ad quadratum B F, ita [h] qnadratum A G; ad quadratum AB; ergo vt [i] F G, ad B F, ita A G ad A B. Quod ita ſe habet &c. Cum enim angulus G A B, ſit [k] biſariam diuiſus à recta A F, erit ex tertia ſexti, vt G F ad F B, ita A G ad A B. g 6. ſecundi. h 47 prim. i 22. ſexti. k 23. tertij.

COMPOSITIO.

QVoniam igitur eſt [α] vt F G ad B F, ita A G ad A B; ergo vt quadratum F G ad quadratum B F, ita [β] quadratum A G, ad quadratum A B, hoc eſt vt [γ] rectangulum B G O, plus quadrato O F, ſeu B F, ad quadratum B F, ita [δ] quadratum B G plus quadrato A B ad quadratum A B; & diuidendo [ε] vt rectangulum B G O, ad quadratum B F, ita quadratum B G ad quadratum A B; & permutando [ζ] vt rectangulum B G O ad quadratum B G, ita quadratum B F ad quadratum A B, hoc eſt ob communem altitudinem B G, vt G O, ad B G, ita [η] quadratum B F ad quadratum A B; & conuertendo [θ] vt B G, ad G O, ita quadratum A B, ad quadratum B F; & per conuerſionem rationis, vt [ι] B G ad B O, ita quadratum AB, ad quadratum AB, minus quadrato BF; ſubduplatis conſequentibus vt BG ad BF, ita duplum quadratum AB ad quadratum A B, minus quadrato B F; & conuertendo [κ], vt BF ad BG, ita quadratum AB, minus quadrato B F, ad duplum quadratum AB. α 23 tertij. & 3. ſexti. β 22. ſexti. γ 6. ſecundi. δ 47. primi. ε 17. quinti. ζ 16. quinti. η 1. ſexti. θ Corol. 4. qu. ι Coro. 19. qu. κ Corol. 4 qu.

Ex hactenus commemoratis Reſolutionibus non erit operoſum intelligere, qua ratione poſſit ad præceptum reuocari modus ineundi viam ad oblati Theorematis Reſolutionem inſtituendam.

Vel enim Theorema datum fuerit, ſolumque deſideretur demonſtratio, vel proponitur inquirendum tantummodò quibuſdam datis. Hæc autem diuerſa eſſe, non ſemel ſuperiùs inculcauimus, vtcunque ſe res habeat, omnis progreſſus, ſiue ſit ex hypotheſi ad quæſitum, ſiue contra, vel procedit per terminos proportionales, æqualitate nunquam adhibita, vel per proportionalia ad æqualitatem deuenit, aut contra æqualitatem in proportionalia reſoluit; illud eſt obſeruandum Præceptum paulò infra à nobis allatum. *Aduertenda quædam*

Quoniam verò reſolutionem poſtremam ſpecioſæ Algebræ beneficio inſtitutam, poſtmodum aduerti affinem non nihil eſſe illi, quam vnùs ex prædictis exhibuit, vt aliam attuliſſe videar, cui nullam hactenus ſimilem obſeruaui, placuit ob id nouam hanc ſubijcere.

Iiſdem poſitis, ducatur F C parallela ipſi A G, & ſegmento C B, æqualis fiat C D, atque C B appelletur d, quanta erit C D; at A D erit $b - 2d$, & B F ſit a, & B G erit $\frac{ba}{d}$.



QVoniam igitur F C eſt parallela ipſi A G, ob id angulus G A F æquabitur [a] angulo A F C; ſed angulus G A F æqualis eſt angulo F A C, ex hypotheſi propterea angulus F A C æquabitur angulo A F C; quare A C æquabitur [c] C F. Cum itaque A C ſit $b - d$, etiam C F, erit $b - d$; tam igitur illius, quàm huius quadratum erit $b^2 - 2bd + d^2$, ſed B F eſt a, & C B eſt d; quorum quadrata ſunt a^2 & d^2, ergo C F quadratum erit $a^2 + d^2$, cui æquabitur $b^2 - 2bd + d^2$; vtrinque ſubtracto d^2, reſidua erunt [d] æqualia; ergo $b^2 - 2bd$, æquabitur a^2; ſed $b^2 - 2bd$, eſt [e] exceſſus, quo b^2 ſuperat $2bd$; ergo $2bd$, erit exceſſus, quo b^2, ſuperat a^2; ſed b^2, ad $2bd$, eſt [f] vt b ad 2 d; ergo b^2 ad exceſſum quo ſuperat a^2, erit vt b, ad 2 d; ergo $2b^2$, ad eundem exceſſum erit vt 2 b, ad 2 d, ſeu quod idem eſt, erit vt b, ad d; ſed vt b, ad d, ob parallelas, ita eſtq; $\frac{ba}{d}$ ad a; ergo $2b^2$, ad $2bd$ exceſſum prædictum, erit vt $\frac{ba}{d}$ ad a; & conuertendo [h] vt a, ad $\frac{ba}{d}$, ita $2bd$, ad $2b^2$. Hinc

a 29. primi. b 1. ax. pri. c 6. primi. d 3. ax primi. e 2. ſecundi. f 1. ſexti. g 1. ſexti. h Corol. 4 qu.

THEOREMA.

In omni circulo ſumpto quouis arcu minori, quàm 45 graduum, eiuſque duplo, erit &c.

DVcatur [†] F C parallela ipſi A G, ſeceturque [α] C D æqualis C B. Quoniam angulus G A F æqualis eſt angulo F A C, ex hypotheſi; ſed ob parallelas A G, C F, angulus G A F æqualis eſt [β] angulo A F C; ergo angulus A F C æquabitur [γ] angulo F A C; ergo A C æquabitur [δ] C F; ergo quadratum A C æquabitur quadrato C F. Sed quadratum A † 31. primi. α 3. primi. β 29 primi. γ 1. ax. pri. δ 6 primi.

 C æqua-

ε 6. ſecundi. C æquale eſt, rectangulo B A D, plus quadrato D C; ergo quadratum C F æquabitur ζ re-
ζ 1. ax. pri. ctangulo B A D, plus quadrato D C; ſed quadratum C F æquale eſt, η quadratis B F, C B;
η 47. primi. ergo rectangulum B A D, plus quadrato D C, æquabitur θ quadrato B F, plus quadrato
θ 1. ax. pri. B C; ſed quadratum C D æquatur quadrato C B; ergo reliquum rectangulum B A D,
æquabitur ι reliquo quadrato B F; ſed rectangulum A B D eſt κ exceſſus, quo quadratum
ι 3 ax. pr. A B ſuperat rectangulum B A D; ergo rectangulum A B D erit exceſſus, quo quadratum
κ 2. ſecundi. A B, ſuperat quadratum B F. Sed quadratum A B, ad rectangulum A B D eſt λ vt A B ad
λ 1. ſexti. B D; ergo quadratum A B ad exceſſum, quo ſuperat quadratum B F, erit vt A B ad B D;
ergo duplum quadratum A B, ad eundem exceſſum, erit vt dupla A B, ad B D, ſeu quod
μ 2. ſexti. idem eſt, vt ſimpla A B, ad ſimplicem C B, ſeu ob parallelas A G, C F, vt μ B G, ad B F;
ν Coroll. 4. qu. ergo, & conuertendo ν exceſſus quadrati A B, ſupra quadratum B F, hoc eſt quadratum A B minus quadrato B F, ad duplum quadratum A B, erit vt B F ad B G.

Eiuſdem Theorematis ab Auctore iuxtà Methodum antiquam inſtituitur.

RESOLVTIO II.

† 31. primi. DVcatur † F C parallela ipſi A G, ſeceturque a C D æqualis C B.
a 3. primi. Quoniam igitur eſt quadratum A B minus quadrato B F, hoc eſt exceſſus quadrati
b Coroll. 4. qu. A B supra quadratum B F ad duplum quadratum A B vt B F ad B G; ergo conuertendo b
c 3. ſexti. duplum quadratum A B ad eundem exceſſum erit, vt B G ad B F, ſeu c ob parallelas A G, C F, vt A B ad C B, ſeu quod idem eſt, vt dupla A B, ad B D; ergo quadratum A B ad exceſſum, quo id ſuperat quadratum B F, erit vt A B ad B D; ſed quadratum A B ad rectan-
d 1. ſexti. gulum A B D eſt d vt A B ad B D; ergo rectangulum A B D, erit exceſſus, quo quadratum A B ſuperat quadratum B F; ſed rectangulum A B D eſt exceſſus, quo quadratum A B ſuperat rectangulum B A D; ergo rectangulum B A D æquabitur quadrato B F; ſed quadratum C D æquatur quadrato C B ergo; rectangulum B A D plus quadrato D C æquabitur
e 2. axio. pri. e quadrato B F plus quadrato B C; ſed quadratum C F æquale f eſt quadratis B F, C B;
f 47. primi. ergo quadratum C F æquabitur g rectangulo B A D, plus quadrato D C; ſed quadratum
g 4. axio. pri. A C æquale eſt h rectangulo B A D plus quadrato D C; ergo quadratum A C æquabitur
h 6. ſecundi. quadrato C F; ergo A C æquabitur C F; ergo angulus A F C æquabitur i angulo F A C;
i 6 primi. ſed ob parallelas A G, C F, angulus G A F æqualis eſt k angulo A F C; ergo angulus G
k 29 primi. A F æqualis erit l angulo F A C. Quod ita ſe habet ex hypotheſi.
l 1. axio. pri.

COMPOSITIO.

DVcatur † F G parallela ipſi A G, ſeceturque α C D, æqualis C B.
† 31. primi. Quoniam angulus G A F æqualis eſt angulo F A C ex hypotheſi, ſed
α 3. primi. angulus G A F æqualis eſt β angulo A F C; ergo angulus A F C æquabitur
β 29. primi. γ angulo F A C; ergo A C æquabitur δ C F; ergo quadratum A C æquabitur qua-
γ 1. ax. pri. drato C F; ſed quadratum A C æquale eſt ε rectangulo B A D, plus quadrato D C; ergo
δ 6. primi. quadratum C F æquabitur ζ rectangulo B A D, plus quadrato D C; ſed quadratum C F
ε 6 ſecundi. æquale eſt η quadratis B F, C B; ergo rectangulum B A D, plus quadrato D C æquabitur
ζ 1. ax. pri. θ quadrato B F, plus quadrato C B; ſed quadratum C D æquatur quadrato C B; ergo re-
η 47. primi. liquum rectangulum B A D, æquabitur ι reliquo quadrato B F; ſed rectangulum A B D
θ 1. ax. pri. eſt κ exceſſus, quo quadratum A B ſuperat rectangulum B A D; ergo rectangulum A B D
ι 3. ax. primi. erit exceſſus, quo quadratum A B, ſuperat quadratum B F. Sed quadratum A B ad rectan-
κ 2. ſecundi. gulum A B D, eſt λ vt A B ad B D; ergo quadratum AB ad exceſſum, quo ſuperat quadra-
λ 1. ſexti. tum B F, erit vt A B ad B D; ergo duplum quadratum A B, ad eundem exceſſum erit, vt dupla A B ad B D, ſeu quod idem eſt, vt ſimpla A B, ad ſimplicem C B, ſeu ob parallelas A
μ 2. ſexti. G, CF, vt μ B G ad BF; ergo & conuertendo ν exceſſus quadrati AB ſupra quadratum B F,
ν Coroll. 4. qu. hoc eſt quadratum A B, minus quadrato B F, ad duplum quadratum A B, erit vt B F ad B G.

Sit autem exemplum alterum, vt ſequitur Theorema, quod Schooten ad eum, qui ſequitur modum reſoluit.

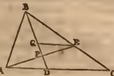
THEO-

THEOREMA.

Si trianguli angulus bifariam ſectus ſit, ſecans autem angulum recta linea ſecuerit, & baſin, rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis baſeos, vna cum quadrato rectæ ſecantis, æquale erit rectangulo ſub trianguli lateribus comprehenſo.

SIt B D æqualis b amplius, ſit A B æqualis d, & A D æqualis ſit c. Eſto verò B C æqualis a, & D C æqualis e. Item D F, æqualis u.

Intelligatur B E æqualis facta A B, atque acta A E; intelligatur G E parallela ipſi A C. Quoniam igitur eſt A D ad D C, vt A B ad B C, eſt verò B E æqualis A B, ergo erit vt A D ad D C, ità E B ad B C; ſed vt B E ad B C, ità B G ad B D, ergo vt A D ad D C, ità B G ad B D, itemque A B ad B C.



Oſtendam autem B D in D C minus B D in A D applicatum ad duplum D C æquari D F, & quia propter ſimilitudinem triangulorum A D F, F G E. Latus D F eſt æquale lateri F G, eſt enim latus A B æquale lateri B E, & angulus A B F, æqualis angulo F B E, ergo angulus AFB, æqualis erit angulo EFB, quare vterque rectus, at verò angulus G E F, æqualis eſt angulo F A D, ob parallelas GE, A D, quare reliquus æqualis reliquo, vnde ſimilia ſunt triangula, ob id vt E F ad F G, ità A F ad F D, & permutando vt E F ad A F, ita F G ad F D, eſt autem E F æqualis A F, ob id & D F erit æqualis F G; ſi itaque D F eſt u, vtique D G erit 2 u.

Quoniam eſt vt B G ad B D, ità A D ad D C, ſiue $b - 2u$ ad b, ità c ad e, propterea rectangulum ſub B G, & D C æquabitur rectangulo ſub B D, & A D, hoc eſt $be - 2eu$ æquabitur b c, vtrinque addito $2eu$ fiet $be = 2eu + bc$, vtrinque ſublato b c fiet $be - bc = 2eu$, omnibus applicatis ad 2 e fiet $\frac{be-bc}{2e} = u$; ſeu, quod idem eſt fiet, vt 2 e ad $e - c$, ità b ad u, nempè, vt dupla D C ad D C — A D, ità B D ad D F.

Cùm autem duplum rectangulum B D F æquale ſit quadrato A D, plus quadrato D B, minus quadrato A B, hoc eſt $2bu = c^2 + b^2 - d^2$, facta diuiſione ex vtraque parte per 2 b proueniet $u = \frac{c^2+b^2-d^2}{2b}$ atqui ſuperius inuentum fuit $\frac{be-bc}{2e} = u$, erit propterea $\frac{c^2+b^2-d^2}{b} = \frac{be-bc}{e}$ diuiſo vtroque denominatore per 2 inſtituatur multiplicatio per crucem, & proueniet $c^2e + b^2e - d^2e = b^2e - b^2c$. addatur vtrinque d^2e fiet $c^2e + b^2e = d^2e + b^2e - b^2c$, tollatur vtrinque b^2e proueniet $c^2e = d^2e - b^2c$ addatur vtrinque b^2c, erit $c^2e + b^2e = d^2e$, loco autem ipſius de ſubſtituatur ca,* & proueniet $c^2e + b^2e = dca$, vtrinque facta diuiſione per e fiet $ce + b^2 = da$. * Eſt enim vt A D ad D C hoc eſt C ad E ita A B ad B C hoc eſt d ad a vnde c a æquatur d e

Adhibita verò cum ſit multiplicatio per crucem ad intentum quo pacto conducat explicetur; liquet autem eſſe vt dupla D C ad D C minus A D, ita B D ad D F, hoc eſt vt 2 e ad $e - c$ ita b ad u; propterea fiet duplum rectangulum C D F æquale duplo rectangulo B D C minus rectangulo A D B, nempe $2eu = be - bc$.

Præterea vt eſt B D ad D C, ita duplum rectangulum B D F ad duplum rectangulum C D F; aſſumpta communi altitudine dupla D F, hoc eſt vt b ad e, ita 2 b u ad 2 e u; aſſumpta communi altitudine 2 u; ob id cum duplum rectangulum B D F æquetur quadrato A D plus quadrato D B minus quadrato A B, & duplum rectangulum C D F æquetur rectangulo B D C minus rectangulo A D B, hoc eſt $2bu = c^2 + b^2 - d^2$, & $2eu = be - bc$; erit vt B D ad D C, ſeu quadratum B D ad rectangulum B D C aſſumpta communi altitudine B D, hoc eſt b^2 ad b e aſſumpta communi altitudine b ita quadratum A D plus quadrato D B minus quadrato A B ad rectangulum B D C minus rectangulo A D B hoc eſt $c^2 + b^2 - d^2$ ad $be - bc$; proinde & reliquum quadratum A B minus quadrato A D ad reliquum rectangulum A D B, erit vt totum ad totum, ſeu B D ad D C; hoc eſt $d^2 - c^2$ ad b c; erit vt b ad e.

At verò vt B D ad D C ita pariter eſt rectangulum A D B ad rectangulum A D C aſſumpta communi altitudine A D, hoc eſt vt b ad e ita b c ad c e aſſumpta communi altitudine c, & vt B D ad A D ita quoque eſt rectangulum A D B ad quadratum A D aſſumpta communi altitudine A D; hoc eſt vt b ad c ita b c ad c^2; aſſumpta communi altitudine c, &

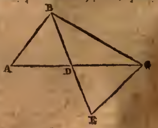
qua-

quadratum B D ad rectangulum A D B, hoc eſt b^2 ad bc; erunt proptèrea quadratum A B minus quadrato A D: rectangulum A D B: quadratum A D: hoc eſt $d^2 - c^2 : bc : c^2$ tres magnitudines ex vna parte; at vero quadratum B D: rectangulum A D B: rectangulum A D C; hoc eſt $b^2 : bc : ce$ tres aliæ ex altera parte, quæ binæ ſunt acceptæ proportionales ſecundùm rationem perturbatam; quamobrem ex æqualitate ſecundum huiuſmodi rationem proportionales erunt; atque adeo erit vt quadratum A B minus quadrato A D ad quadratum A D vt quadratum B D ad rectangulum A D C; hoc eſt vt $d^2 - c^2$ ad c^2 ita b^2 ad ce, & componendo vt quadratum A B ad quadratum AD, ita quadratum B D plus rectangulo A D C ad rectangulum A D C, hoc eſt vt d^2 ad c^2 ita $b^2 + ce$ ad ce; permutandoque vt quadratum A B ad quadratum B D plus rectangulo A D C, vt quadratum A D ad rectangulum A D C, hoc eſt vt d^2 ad $b^2 + ce$ ita c^2 ad ce, ſeu ita A D ad D C, nempe retenta communi altitudine A D ideſt c ad e, retenta communi altitudine e; at verò vt A D ad D C ita quoque eſt A B ad B C, hoc eſt e ad e, vt d ad a ſeu, quadratum A B ad rectangulum A B C hoc eſt d^2 ad de; propterea erit vt quadratum A B ad quadratum B D, plus rectangulo A D C, ita quadratum A B ad rectangulum A B C, hoc eſt vt d^2 ad $b^2 + ce$, ita d^2 ad da; ergo quadratum B D, plus rectangulo A D C æquabitur rectangulo A B C, hoc eſt $b^2 + ce$ æquabitur da.

THEOREMA.

Auctor iuxta Methodum Antiquam idem Theorema reſoluit.

Si trianguli angulus bifariam ſectus ſit, ſecans autem angulum recta linea ſecuerit & baſin; rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis baſeos vnà cum quadrato recta ſecantis, æquale erit rectangulo ſub trianguli lateribus comprehenſo.



ESto triangulum A B C, cuius latera A B, B C, baſis autem A C, recta verò B D ſecet bifariam angulum A B C. Dico rectangulum A D C, plus quadrato B D, æquale eſſe rectangulo ſub A B, & B C.

Protrahatur B D vſque ad E, vt ſit quemadmodum B D ad D C, ità A D ad D E; agaturque E C.

RESOLVTIO.

QVoniam igitur rectangulum A D C, plus quadrato B D, eſt æquale rectangulo ſub A B, & B C; eſt autem rectangulum A D C, plus quadrato B D, æquale rectangulo E B D, cum rectangulum A D C æquale ſit rectangulo B D E; eſt enim vt B D ad D C, ita A D ad D E ex conſtructione; quadratum verò B D eſt commune; ergo rectangulum ſub A B, & B C æquale erit rectangulo E B D. Quod ità ſe habet; triangulum enim A B D æquiangulum eſt triangulo D E C, angulus igitur A B D eſt æqualis angulo D C E, eſt autem angulus A D B æqualis angulo D C B, plus angulo D B C, ſeu D B A, hoc eſt D C E, ergo angulus A D B æquabitur angulo B C E, at verò angulus A B D eſt æqualis angulo E B C, quare reliquus æqualis eſt reliquo, ac ob id triangulum A B D eſt æquiangulum triangulo E B C, vndè latera circà æquales angulos erunt proportionalia, quare vt B C ad B E, ità B D ad A B; propterea rectangulum ſub extremis A B, B C æquabitur rectangulo ſub medijs E B, B D.

COMPOSITIO.

Quoniam rectangulum ſub A B, & B C æquale eſt rectangulo E B D, vt oſtenſum eſt, in ipſa reſolutione, rectangulum verò E B D æquale eſt rectangulo E D B plus quadrato B D, ergo rectangulum ſub A B, & B C æquabitur rectangulo E D B plus quadrato B D. eſt verò rectangulum E D B æquale rectangulo A D C, ergo rectangulum ſub A B, & B C æquabitur rectangulo A D C plus quadrato B D; quod erat operæ pretium oſtendere.

Ex hactenus dictis obſeruare licet, quid interſit inter antiquam, & nouam methodum;

illa

illa ſiquidem, vt vidimus contrario reſolutionis, hæc autem eodem ordine procedit; Illa à quæſito ad hypotheſin, hæc verò contrario procedit modo.

De Problematibus Reſoluendis Specioſæ Algebræ beneficio. Cap. VII.

Analytica ferè omnis induſtria in Problematum reſolutionibus inſumebatur, cuius gratia ab ipſis hanc Artem fuiſſe in primis excultam, teſtatur Pappus Alexandrinus initio ſeptimi Libri Mathematicarum Collectionum. Recentiores quoque de hac Matheſeos parte videntur optimè meriti, cùm plura quidem adinuenerint; vnde facilis Problematum reſolutiones redduntur, ad quod Specioſa Algebra conducit, etſi etiam Numeroſa ad id non parum habeat momenti. *In cuius gratia inſtituta ſit analitica.*

In Problematum reſolutionibus iuxta huius Artis præcepta perficiendis, ita procedendum, vt ſupponamus iam factum quod quæritur, & per inde conſequentia, tandem ad effectionem perueniamus. Rarò autem contingit niſi in Problematibus facilioribus, vt Analyſis inſtitui poſſit nulla præeunte præparatione, in quo fortaſſis omnis poſita difficultas; Cùm enim hæc fuerit adinuenta, cætera ferè omnia ſe dant in conſpectum. Ad præparationem autem, & ingenij alacritas, & in his Diſciplinis eruditio, conducit. Primum naturæ quidem, ſecundùm verò ſtudijs, vigilijſque acceptum referri debet. Non ſatis eſt enim operam nauaſſe primis Elementis, ſed etiam oportet plurimas Propoſitiones inde deductas nouiſſe, ac propterea præ manibus habere figurarum cuiuſcunque generis proprietates, à quibus Geometrica effectio ducit ortum. *In Problematibus reſoluendis, quomodo procedendum.*

Duo autem in Problemate ſunt, nempe Datum, ac Notum, & inſuper Ignotum, atque Quæſitum. Quod autem quæritur ac ignotum eſt, per vocales denotare conſueuimus, quod verò datum; ac notum, per conſonantes. Quæſtio autem propoſita ſedulo pependenda eſt, & magnitudines tam datæ, quàm quæſitæ iuxtà eius tenorem, ita tractandæ ſunt, vt ratiocinando deueniamus ad id, quod fieri poteſt, vel nimirum ad analogiſmum trium terminorum, è quibus, qui poſtremò eſt loco ſit quæſitus; duobus enim antecedentibus cognitis hic amplius non ignorabitur; vel ad analogiſmum quatuor terminorum, è quibus, qui poſtremum obtinet locum ſit quæſitus; tribus enim prioribus cognitis, quartus prodibit &c. vel ad æquationem, ſiue ſimplicem, ſiue compoſitam, & vtraque ſiue plana ſit, ſiue ſolida; quælibet enim Arte ſupra iam tradita feliciter explicatur, laterîſque valor exhibetur. *Duo ſunt in quocunque Problemate.*

Ex iam habita reſolutione colligitur Poriſma, quod nos docet, quidnam ſit agendum, vt oblati Problematis effectio perficiatur, qua quidem abſoluta, repetitis Analyicos veſtigijs, quod conſtructum fuit Geometricè demonſtramus. Sed hæc varijs exemplis illuſtrare tentabimus, à facilioribus exordientes.

Aduertendum eſt autem poſtquam in reſoluendo peruentum fuerit, vel ad analogiſmum, vel ad æquationem, opus eſſe diligenter inſpicere qua linea ſit opus ad oblati Problematis effectionem. Superius etenim huius tractationis initio iuxta diuerſam Problematis naturam pro ipſius effectione diuerſam quoque lineam adhibendam eſſe notauimus; quoniam videlicet fieri poterit, vt Problematis, de quo loquimur, natura proprietatem exigat, quæ non vni ſed alteri cõueniat lineæ, vt exempli gratia huiuſmodi poteſt eſſe problema, vt ad eius conſtructionem non ſufficiant proprietates conuenientes circulo per lineam rectam diuiſo, ſed opus ſit diuiſione circuli per parabolen, vel per hyperbolen, vel vt requiratur vna ex ſectionibus conicis diuiſa per lineas rectas: vel etiam fortè aliqua alia linea conſentanea Problematis naturæ, opus erit; Ita quidem ſuperius inter duas datas rectas lineas duas alias in continua ratione medias adinuenimus beneficio circuli diſſecti per parabolem; ſi quis porro contenderet illud idem aſſequi, vt incauti quidam è veteribus facere conſueuerunt beneficio circuli diſſecti per lineam rectam, grauiter in Arte peccaret, ignorans ipſius Problematis conditionem, quæ poſtulat pro ſui effectione lineam longè diuerſam. Sic præterea plani anguli triſectionem exhibuimus media hyperbole per lineam rectam diuiſa circulo extrinſecùs accerſito; ſi quis autem illud idem per rectam lineam diſſecantem circulum comparare niteretur non exiguæ foret redarguendus inſcitiæ, cum inde cuique conſtaret, haud ab ipſo benè fuiſſe introſpectam Problematis naturam, quæ pro ſui con- *Notanda quædam pro reſoluendis Problematibus.*

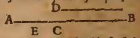
conſtructione circulo diuiſo per rectam lineam contenta non eſt.

Genus Problematum tripartitum.

Quoniam autem tripartitum eſt Problematum genus. Aliud ſiquidem planum, nimirum illud quod per circulum, lineamque rectam reſolui poteſt; aliud ſolidum, quod pro ſui ſolutione conicas ſectiones expoſcit; aliud demum lineare, quod reſolui non poteſt niſi per lineas magis compoſitas, vel ſaltem diuerſas ab ipſis ſectionibus conicis, cuiuſmodi eſt Quadratrix, Conchoides, Cyſsoides, Cycloides, Spiralis, quibus accedunt illæ ſi placet, quas proprio marte nos adinuenimus, & quidem multitudine plures vtilitate non ſpernendas, quas haud infelici omine Mediceas dixeramus.

Notandum.

Inſtituta autem Analyſi ſi peruentum fuerit ad æquationem ſolidam, ita tamen vt modis iam explicatis ad planam reduci poſſit, tunc nulli dubium quin Problema illud per circulum lineamque rectam reſolui poſſit; ſecus autem ſi æquatio ad planam reduci nequeat; certum enim tunc omnino ad Problematis constructionem non ſufficere circulum cum linea recta, ſed opus eſſe, aut ſectionibus conicis, aut aliquo alio lineæ genere longe diuerſo à linea recta, & circulari. Sed vt hæc melius percipiantur, intelligamus reſolutionem propoſitam ad æquationem eſſe deductam, in qua ſit b -- d = 2 a, quæ quidem æquatio pertinet ad circulum; Hinc enim Poriſma *Recta data minus exceſſu dato æqualis eſt duplo partis minoris.*



Si enim data recta ſit A B ſecanda, vt pars maior, minorem ſuperet exceſſu æquali datæ rectæ lineæ D. Conſtructio ſic ſe habet. A recta A B auferenda eſt B C æqualis ipſi D: reliqua verò C A ſecanda bifariam in E; nam A E minor pars, & E B maior erit. Hæc tamen pro ſui effectione circulum requirunt, vt ex Elementis perſpicuum eſt; datis enim duabus rectis inæqualibus, vt à maiore ſegmentum æquale minori auferatur, opus eſt circulo.

Notanda quædam.

Hic igitur diligenter eſt aduertendum, quando dicimus æquationem ad circulum pertinere nil aliud à nobis intelligi niſi quod ad exhibendam ignotam quantitatem, atque adeò quantitatem quæſitam opus eſſe circulo, vel ſaltem circulum ſufficere, ſi tamen per rectam ſecetur, id enim ſemper ſubintelligendum, ſed hic eſt operæ pretium aduertere, in quo non nulli decepti ſunt exiſtimantes idem eſſe Problema reſolui, per locum planum, ac per circulum recta linea diſſectum; ad locum enim pertinet Problema locale, at non omne Problema locale eſt; propterea quod locus, vt ſupra nos docuimus eſt ſpatium illud, quod totum Problemati, vel Theoremati ſatisfacit: vnde dicebamus Theorema locale illud eſſe, exempli gratia, inter duas parallelas ſuper eadem, vel æqualibus baſibus conſtituta parallelogramma ſunt inter ſe æqualia; totum enim illud ſpatium inter parallelas Problemati ſatisfacit. Sic etiam de alijs Theorematibus quæ localia dicuntur, nec aliam ob cauſam ſic appellantur.

Problema locale.

Non diſſimiliter Problema locale dicetur; quando totum ſpatium nempe tota linea recta, tota linea circularis, tota parabolica &c. Problemati ſatisfacit; ita profectò ſe habet inter cætera Problema illud, quod ad calcem ſuperioris Libri de Deductione tractantes attulimus in Exemplo ; tota enim illa circumferentia ſemicirculi Problemati ſatisfacit; & ità ſe habebant loca plana de quibus diſſeruit Apollonius, & hac ratione datur locus ad lineam rectã, ſeu in linea recta, vel qui eſt in linea recta, datur locus, qui eſt parabola, ſiue linea parabolica; ſic datur locus, qui eſt hyperbola ſeu linea hyperbolica, item datur locus, qui eſt ellipſis, ſeu linea elliptica. Quando igitur locus eſt linea recta quodcunque punctum acceptum in ipſa recta linea problemati ſatisfacit; ſi verò fuerit in circuli circumferentia hæc ipſa Problemati ſatisfaciet: vtrouis modo ſe habeat locus dicetur planus, quod ſi locus fuerit parabolæ, hyperbole, vel ellipſis, locus dicetur ſolidus. Non idem eſt igitur Problematis effectionem ad locum pertinere planum, vel ſolidum, non idem eſt inquam ac ad æquationem illam explicandam requiri lineam rectam, vel circularem; propterea quod nulla eſt Problematis effectio quamuis ſimpliciſſima, quę per lineã rectam tãtummodo, circumferentia non accepta perfici poſſit, & nihilominus datur locus, qui eſt linea recta. Quando enim locus eſt linea recta non propterea effectio abſolui poteſt circumferentia neglecta; ſi namque rectilineus angulus alteri angulo rectilineo fieri debet æqualis, vel recta, rectæ ducenda eſt parallela, quantumuis locus eſſe poſſit linea recta, non propterea id ſine circulo poteſt abſolui; & in hoc mihi videntur allucinati quamplurimi promiſcuè hæc vſurpantes.

Si

Si tamen per locum aliquis intelligat lineam ipſam, quæcunque ſit, licet non tota ſed tantummodo punctum ipſius Problemati ſatisfacit, admitti poterit modus ille loquendi, quod *Quo ſenſu admitti poſſit.* ſcilicet Problema dicatur ſolutum per locum planum, quando ſolutum fuerit per circulum cum linea recta; item per locum ſolidum, cùm conſtructio ipſius per Conicas ſectiones abſoluta fuerit.

Deinde ſi æquatio fuerit $r\,a - s\,a = b\,s$, quæ quidem pendet ab analogiſmo vt $r - s$ ad s, ita b, ad a: vnde Poriſma. Vt differentia terminorum rationis datæ ad terminum minorem, ita eſt data ad adiunctam, qui quidem analogiſmus linea indiget recta cum circulo. *Exempla de æquationibus planis.*

Ita pariter ſi fuerit $r\,a + s\,a = s\,b - r\,b$, quæ quidem pendet ab analogiſmo vt $r + s$ ad $s - r$, ita b, ad a; hæc indigent linea recta cum circulo, & ſic de ſimilibus, nempè ſi fuerit vt $r + s$ ad s, ita b, ad a; item ſit $2\,a^2$ æquetur b^2, vel $s\,a^2$ æquetur b^2; præterea ſi fuerit vt s ad r, ita b^2 ad a^2. Inſuper vt $2\,r - s$ ad s, ita b^2, ad a^2; item vt ℞$(g^2 - d^2)$ ad ℞$(4\,b^2 + g^2 - d^2)$ ita d ad a.

Nec diſſimili modo, cum æquationes fuerint affectæ intra planorum limites vt $a^2 + b\,a = z^2$; item $a^2 - b\,a = z^2$; præterea $b\,a - a^2 = z^2$; hæ omnes enim æquationes ad circulum pertinent, nempè huiuſmodi ſunt vt per circulum & lineam rectam ijs ſatisfieri poſſit.

At verò ſi fuerint æquationes $a^3 + 3\,b^2\,a = z$ ſol., præterea $a^3 - 3\,b^2\,a = z$ ſol. & $3\,b^2\,a - a^3 = z$ ſol. eius ſunt generis vt per circulum & lineam rectam abſolui non poſſint, ſiquidem ad earum explicationem opus eſt triſectione anguli rectilinei. Inſuper inuentione *Æquationes ſolidæ.* duarum mediarum in continua ratione, quæ per circulum cum linea recta præſtari non poſſunt. Vnde Problemata ſolida nuncupantur quemadmodum, & æquationes ipſæ, quæ in huiuſmodi Problematibus inuoluuntur.

Inſtituta igitur Analyſi alicuius Problematis obſeruare præſtat qua nam ſit opus linea ad effectionem ipſius, & quidem multoties non vna eſt, nam aliquando contingit, vt idem *Inſtituenti Problematis reſolutionem quid obſeruandum.* Problema reſolui poſſit; atque adeo eius effectio perfici per conicas ſectiones, & etiam per circulum.

Non raró tamen contingit vt Problemati ſatisfieri poſſit per plures conicas ſectiones In infinitum, & quidem eiuſdem ſpeciei, nempè paraboles, hyperboles, vel ellipſeos, methodicè tunc proceditur inquirendo quænam æquationes ad conſtructionem Problematis conducant; fieri enim poteſt, vt ad id conducant æquationes pertinentes ad circulum, & ellipſim, vel ad circulum & parabolen &c.

Multoties autem euenit, vt inſtituta Reſolutione, peruentum ſit ad quantitates imaginarias, vel ſaltem ad ſolidas quantitates, inter quas detur æqualitas, ad cuius explicationem *Quando peruentum eſt ad quantitates imaginarias quid agendũ.* opus eſt Algorithmo in quantitatibus prædictis; hoc tamen terrere non debet Analyſtam, nam, vt inferius conſtabit, adhuc via Regia proceditur, in huiuſmodi reſolutionibus. Quod vt aliquo exemplo illuſtremus ſit.

PROBLEMA.

Sit iniunctum quatuor quantitates Geometrice proportionales reperire, ita vt differentia quadratorum, quæ fiunt ab illis, ſint in harmonica ratione.

INſtituta Reſolutione, tandem adhibita decenti antitheſi, atque paraboliſmo, ad æquationem deuenitur: vnde colligitur Poriſma, vt eligantur tres quantitates, quarum quadrata ſint harmonicè proportionalia, & quadrato-quadratum minoris iungatur cum producto ex quadratis duorum minorum, ſumma diuidatur per quadratum maioris multatum minoris quadrato; hinc enim comparabitur quadratum minimi &c. Et nihilominus effectio Geometrica abſtinet ab huiuſmodi quantitatibus, quoniam id totum ad analogyſmum inter plana, atque adeò latera reuocatur.

Item ſi proponatur

PROBLEMA.

Tres quantitates proportionales inæquales adinuenire, quæ cum alia quauis data, quadrilaterum circulo quidem inſcriptibile, efficiant.

Exemplum alterum.

POſt enim debitam reductionem ſecundùm Artis præcepta, ad æquationem illam deuenitur, ex qua Poriſma deducitur, vt ex quadrato diametri datæ tollatur quadratum quadrantis diametri; reſiduum verò ducatur in quadratum diametri, & ex producto auferatur duplum productum ex cubo quadrantis diametri in diametrum; reliquum verò diuidatur per quadratum diametri, quotientis capiatur dimidium, ex cuius quadrato ſubtrahatur quadrato-quadratum quadrantis diametri, reſidui latus quadratum ſupradicto detractum & additum dimidio dabit quadrata minoris, maioriſque lateris inſcribendi. Et nihilominus in effectione Geometrica huiuſmodi quantitates vitantur. Totum autem id ad analogiſmum reuocatur inter plana, atque adeo latera &c.

Præcepta pro Reſoluendis Problematibus beneficio Specioſæ Algebræ varijs Exemplis illuſtrantur. Cap. VIII.

AVt enim æquatio ſimplex eſt aut affecta, & vtraque vel plana, vel ſolida.

PRIMVM EXEMPLORVM GENVS

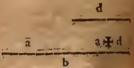
Ad quod Problemata pertinent Plana, in quibus ſimplex æquatio contingit.

PROBLEMA.

Exemplum I.

Propoſitum latus ità diſpeſcere, vt maior pars minorem, dato ſuperet exceſſu.

RESOLVTIO.

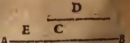


PRopoſitum ſit latus b, diuidendum in duas partes, quarum maior, minorem ſuperet dato exceſſu d; Sit iam factum, atque pars minor eſto a; ergo maior erit a + d; hoc enim pacto pars maior minorem ſuperabit exceſſu dato d; & quoniam hæ ſunt partes totius b: propterea earum ſumma debet æquari b; quare 2 a + d (hæc enim eſt ſumma conſurgens ex a, & a + d) debet æquari b; Cùm igitur ſit $2a + d = b - d$; ergo $\frac{b-d}{2} = a$. Hìc autem ſiſtendum ſiquidem datæ magnitudines ex vna æquationis parte exiſtunt, ex alia verò quantitas quæſita. Hinc deducitur.

PORISMA.

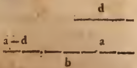
Propoſitum latus multetur exceſſu dato, nam reſiduum biſectum, maiorem partem exhibebit.

COMPOSITIO.



PRopoſitum ſit latus diuidendum AB, & quidem in duas partes, quarum exceſſus ſit D; abs A B auferatur BC æqualis ipſi D; & reliqua A C bifariam diuidatur in E; nam A E pars erit minor: reliqua verò E B maior. Quoniam enim A E, E C ſunt æquales, proinde E B excedet A E exceſſu C B; ſed C B, eſt æqualis D; ergo E B excedit A E exceſſu D; ſed A E, E B conficiunt A B latus propoſitum; ergo diuiſum eſt propoſitum latus A B, in duas pertes prout Problema requirit.

ALIA RESOLVTIO.

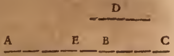


PArs maior eſtò a; ergo minor erit a – d; tota proinde erit 2 a – d, ſed eadem eſt data b; ergo 2 a – d æquabitur b; & per antitheſin fiet 2 a = b + d; quare facto paraboliſmo $\frac{b+d}{2}$ æquabitur a. Hinc

PORISMA.

Propoſito lateri diuidendo addatur data differentia, nam aggregati dimidium maiorem partem exhibebit.

COMPOSITIO.



PRopoſitum ſit latus diuidendum A B, data verò differentia D; protracta A B in C, ita vt B C ſit æqualis D: atque tota A C biſſecetur in E, nam A E erit pars maior, minor autem reliqua E B. Quoniam enim A E, E C ſunt æquales, quanto exceſſu ipſa E C ſuperat E B, tanto quidem eandem E B ſuperabit A E; ſed E C ſuperat E B exceſſu, qui eſt æqualis ipſi D; ergo A E ſuperabit E B eodem exceſſu D; ſed A E, E B conficiunt propoſitum latus; ergo illud diuiſimus, vt Problema requirit.

SCHOLION.

HOc idem in planis ſiue ſuperficiebus, & ſolidis locum habet. Vt Propoſitum ſit b pl. diuidendum in duas partes, quæ dato d pl. differant. Pars minor eſto a pl. ergo maior erit a pl. † d pl. harum aggregatum eſt 2 a pl. † d pl. quod æquabitur b pl.; & per antitheſin 2 a pl. æquabitur b pl. – d pl. ergo a pl. = $\frac{b\,pl. - d\,pl.}{2}$*. Caterùm vt quantitates veluti determinatæ tractentur b pl. intelligi debet redactum ad quadratum, item & d pl. vnde, & a pl.; quare fit a =* $\frac{bq - dq}{2}$ *& hinc eliciitur Poriſma.*

Non ignorandum tamen hoc idem Problema alia ratione concipi poſſe; perinde enim eſt, ac illud propoſuiſſe.

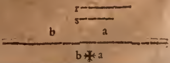
Data differentia laterũm, & aggregato eorundem, reperire latera.

Eſtque Zeteticum primum Primi Libri apud Vietam, vbi laterum aggregatum idem eſt, quod latus propoſitum diuidendum, cuius quæſitæ partes ſunt quæſita latera, & partium exceſſus eſt laterum quæſitorum differentia.

PROBLEMA.

Propoſito lateri latus adiungere, vt datum cum adiuncto, ad adiunctum datam habeat rationem. Oportet autem rationem datam eſſe maioris ad minus. Exemplum II.

RESOLVTIO.



PRopoſitum ſit latus b, cui ſit adiungendum alterum, vt datum cum adiuncto ad adiunctum datam habeat rationem vt r ad s.

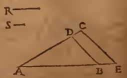
Sit iam factum, & latus adiungendum eſto a; ergo aggregatum ex dato, & adiuncto erit b + a; at iuxtà quæſtionis tenorem, vt r ad s, ita debet eſſe b + a, ad a; ergo diuidendo, vt r – s ad s, ita b ad a; tribus autem terminis datis, quartus nequit ignorari. Hinc

PORISMA.

Vt differentia terminorum datæ rationis ad terminum minorem, ita latus datum ad adiunctum fieri debet.

COMPOSITIO.

PRopoſitum ſit latus A B, cui ſit adiungendum alterum, ita vt datum cum adiuncto ad adiunctum datam habeat rationem R ad S, maioris ad minus; Conſtituatur A C faciens cum A B quemlibet angulum C A B, & ipſa quidem A C fiat æqualis R: mox verò ſecetur D C æqualis S, ita vt differentia terminorum R, & S, ſit A D: agatur D B, cui fiat parallela C E. Dico B E eſſe latus adiunctum ipſi A B, ita vt A E ad B E, ſit vt R ad S. Quoniam enim D B, C E ſunt parallelæ; ergo vt A D ad D C, ita A B ad B E; quare componendo vt A C ad D C, ita A E ad BE; ſed vt A C ad D C, ex conſtructione, ita R ad S; ergo vt R ad S, ita A E ad B E. Lateri igitur propoſito A B adiunximus latus B E, ita vt datum cum adiuncto ad adiunctum datam habeat rationem. Quod facere oportebat.



MONITVM.

Aduertendum eſt quando in ipſa reſolutione nos incurrimus in terminos plures proportionales, ita vt quæſitæ magnitudines à datis magnitudinibus, vt in ſuperiori reſolutione, non ſeparentur, tunc adhibenda eſt cura pro ſeparatione, quod diuidendo perficitur.

Non rarò contingit, vt æquatio, compoſitionem, ſiue affectionem præſeferat, & tamen ſimplex æquatio eſt vt in ſequenti Problemate.

SCHOLION.

Superius Problema hunc etiam in modum enunciari potuiſſet:

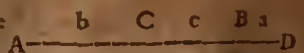
Data differentia duorum laterum, & ratione eorundem, reperire latera.

Differentia ſiquidem laterum eſt latus datum cui fieri debet additio latuſque maius è duobus quæſitis eſt datum cum adiuncto at verò minus eſt ipſum adiunctum. Vt itaque vides hoc in idem recidit cum illo.

PROBLEMA.

Exemplum III. *Propoſitum latus A B vtcunque diuiſum in C, ita protrahere ad D, vt rectangulum A D B, quadrato C D ſit æquale.*

RESOLVTIO.

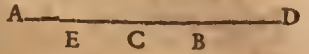


SIt iam factum, & pars A C dicatur b: at C B ſit c: latus adiungendum B D eſto a; itaque A D erit $b + c + a$; & C D, erit $c + a$, rectangulum A D B ſub latere dato cum adiuncto & adiuncto, nempe ſub $b + c + a$, & a, erit $ba + ca + a^2$; At quadratum ex C D erit $c^2 + 2ca + a^2$; huic autem æquari debet prædictum rectangulum. Vtrinque auferatur a^2 ſimilia ſiquidem tanquam ſuperflua ſunt reijcienda, & remanebunt $ba + ca = c^2 + 2ca$. Vtrinque auferatur ca, & fiet $ba = c^2 + ca$; vtrinque auferatur ca, vt nota quantitas c^2 conſtituat vnam æquationis partem, cui altera comparatur, & fit $ba - ca = c^2$; cùm autem per repetitam antithesin ad hanc æquationem peruentum erit inſtituatur paraboliſmus per $b - c$, nam inde quidem emerget æquatio $\frac{c^2}{b-c} = a$. Vnde reſoluta æquatione in analogiſmum vt ſuo loco docuimus, fit vt $b - c$, ad c, ita c, ad a. Hinc

PORISMA.

Fiat vt differentia ſegmentorum A C, C B ad C B, ita C B ad alind; hoc enim erit latus adiungendum.

COMPOSITIO.



SEcetur E C æqualis C B, & fiat vt reliqua A E ad E C, vel C B, ita C B ad B D. Dico rectangulum A D B æquale eſſe quadrato C D.

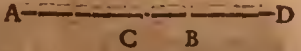
Quoniam igitur eſt vt A E ad E C, vel C B, ita C B ad B D, ex conſtructione; reuocata proportione ad æqualitatem, rectangulum ſub A E, B D, æquabitur quadrato C B, vtrinque addito rectangulo ſub E C, vel C B, & B D; ergo rectangulum ſub AC, & B D, æquabitur rectangulo ſub C D, & C B. Rurſus addito vtrinque rectangulo ſub C D, & DB. ergo rectangulum ſub A D, & D B, hoc eſt rectangulum A D B æquabitur quadrato C D. Quod facere oportebat.

SCHOLION.

Ex dictis facilè intelliges Analyſeos præſidio conſtare conditionem Problemati præfigendam, ſine qua Problemati fieri ſatis non poteſt, nam ex datis quæſitum inueniri nequit; debet enim A C, maior eſſe ipſa C B, vt ex A C ſubtrahi poſſit B C; hæc enim ſubtractio ad huiuſmodi Problematis ſolutionem requiritur; & quidem ſi A C foret æqualis vel minor quam C B, Problema foret impoſſibile, nam AC cum fuerit æqualis ipſi C B, non poterit rectangulum A D B æquale eſſe quadrato C D: nam A B foret bifariam diuiſa in C, eidemque adiecta B D; atque adeo rectangulum A D B, unà cum quadrato C B per ſextam ſecundi æquale eſſet quadrato C D; ſolum igitur rectangulum A D B, non poſſet eſſe æquale quadrato C D, ſed minus, & multo minus etiam ſi A C ſupponeretur minor quam C B, vt conſtat. Notandum.

Sed aliter per proportionalia procedendo ſic inſtituetur ſecunda Reſolutio.

RESOLVTIO.

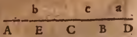


QVoniam igitur b a † c a † a^2 æquatur c^2 † 2 c a † a^2 ergo reuocata æqualitate ad proportionem, erit vt b † c † a ad c † a, ita c † a ad a; ergo diuidendo, vt b ad c † a, ita c ad a; ergo permutando, vt b ad c, ita c † a ad a; ergo diuidendo, vt b — c ad c, ita c ad a. Hinc

PORISMA.

Fiat vt differentia ſegmentorum propoſitæ lineæ ad lineæ ſegmentum minus, ita huiuſmodi ſegmentum ad aliud; hoc enim erit, quod quæretur.

COMPOSITIO.



SIt propoſita recta A B, cui fieri debeat additio &c. cum autem ipſa ſupponatur ſecta in C fiat, vt A E differentia ſegmentorum A C, C B ad C B, ita C B ad aliam B D; Dico B D problemati ſatisfacere. Quoniam enim eſt, vt A E ad E C ſeu C B, ita C B ad B D; ergo componendo vt AC ad C B, ita C D ad B D, ergo permutando erit A C ad C D, ita C B ad B D, ergo componendo vt A D ad C D, ita C D ad B D, & reuocata proportione ad æqualitatem rectangulum ſub A D & B D hoc eſt rectangulum A B D, æquabitur quadrato C D. Quod facere oportebat.

Con-

Conſpectus prioris Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Initium Reſolutionis

$ba + ca + a^2 = c^2 + 2ca + a^2$,

Vtrinque auferatur a^2.

$ba + ca = c^2 + 2ca$,

Vtrinque auferatur ca,

$ba = c^2 + ca$.

Vtrinque auferatur ca

$b - a - ca = c^2$.

Inſtituto paraboliſma fit

$\frac{c^2}{b-c} = a$. ergo

Reuocata æquatione ad proportionem

Vt bc ad c ita c ad a.

Finis Reſolutionis.

Finis Compoſitionis

ſeu $ADB =$ quadrato CD

$ACBD + CBD +$ quad $BD =$ quad. CB $+ 2\,CBD +$ quad BD

Vtrinque addatur quadratum BD.

$ACBD + CBD =$ quadr. $CB + 2\,CBD$.

Vtrinque addatur CBD.

$ACBD =$ quadrato $CB + CBD$.

Vtrinque addatur CBD

$ACBD - CBD =$ quadrato CB.

Reuocata proportione ad æqualitatem

Vt AE ad EC vel CB ita CB ad BD.

Principium Compoſitionis.

Conſpectus ſecundæ Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Initium Reſolutionis.

$ba + ca + a^2 = c^2 + 2ca + a^2$

Reuocata æqualitate ad proportionem

Vt $b + c + a$ ad $c + a$ ita $c + a$ ad a,

diuidendo

Vt b ad $c + a$ ita c ad a,

permutando

Vt b ad c ita $c + a$. ad a

diuidendo

Vt $b - c$ ad c ita c ad a.

Finis Reſolutionis.

Finis Compoſitionis.

ſeu $ADB =$ quadrato CD.

$AC, BD + CBD +$ quad: $BD =$ quad. CB $+$ bis $CBD +$ quad. BD

Reuocata proportione ad æqualitatem

Vt AD ad CD ita CD ad BD.

componendo

Vt AC ad CD ita CB ad BD.

permutando

Vt AC ad CB ita CD ad BD

componendo

Vt AE ad EC ſeu CB ita CB ad BD.

Initium Compoſitionis.

Superius Problema fuit propoſitum de proportione æqualis ad æquale; præclarius foret ſi proponeretur vniuerſaliter de quacunque ratione, videlicet.

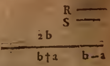
Propoſitum latus A B, vtcunque diuiſum in C, ita protrahere ad D, vt rectangulum A D B, ad quadratum C D, datam habeat rationem.

Problema.

Exemplum. Vs.

Propoſitum latus in duas partes diuidere, vt rectangulum ſub partibus ad quadratum differentiæ partium datam habeat rationem.

RESOLVTIO.



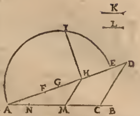
Datum ſit latus diuidendum $2b$, proportio verò data ſit vt r ad s. Pars vna eſt $b + a$, alia erit $b - a$, ita vt differentia partium ſit $2a$, rectangulum verò ſub partibus erit $b^2 - a^2$: quadratum differentiæ partium erit $4a^2$; vt autem eſt r, ad s, ita debet eſſe $b^2 - a^2$, ad $4a^2$, ſeu vt $4r$, ad s, ita $b^2 - a^2$, ad a^2; & componendo erit, vt $4r + s$ ad s, ita b^2 ad a^2. Hinc deducitur.

PORISMA.

Vt eſt quadruplum primi termini plus termino ſecundo ad ipſum terminum ſecundum, ita eſt quadratum dimidij lateris diuidendi, ad quadratum dimidiæ differentiæ partium.

COM-

COMPOSITIO.



DAtum ſit latus A B diuidendum, vt Problema iubet; dataque ſit ratio, vt L ad K; a puncto A ducatur linea ad partes B, faciens angulum quemcunque cũ A B, & ex ipſa abſcindatur A G, quadrupla termini primi L, ita vt F G ſit æqualis L, & A F ſit tripla ipſius F G. Deinde fiat G H ſegmentum æquale ipſi K, duplicetur G H ſegmentum in E, & ſuper A E deſcribatur ſemicirculus A I E: mox à puncto H excitetur [a] perpendicularis H I, cui fiat [b] æqualis H D, & A B diuidatur [c] bifariam in M, ducaturque H M, cui [d] à puncto D agatur parallela D C; & N M[e] fiat æqualis ipſi M C; erit autem N C differentia partium A C, C B; ſiquidem ab æqualibus A M, M B, aufer⸗ntur æquales N M, M C; ideo A N, C B ſunt æquales; quare A C, C B, differunt per N C; &ı ⸗ctum eſt quod Poriſma iubet,

a 11. primi.
b 3. primi.
c 10. primi.
d 31. primi.
e 3. primi.

Nunc ad demonſtrationem accedamus, quam per Analyſeos filum deducemus.

Quoniam vt eſt [f] A H ad H E, ſeu G H, ita etiam quadratum ex A M dimidia totius diuidendæ A B, ad quadratum ex M C, dimidia differentia partium A C, C B, erit [g] diuidendo vt A G, ad G H, ſeu H E, ita quadratum ex A M, minus quadrato ex M N, ad quadratum ex M N, ſeu vt F G ad G H, ita quadratum A M, minus quadrato M N, ad quadratum M N quater. At verò quadratum ex A M minus quadrato ex M N, æquale eſt rectangulo ſub partibus A C, C B, & quadratum quater ex dimidia differentia N M, eſt æquale totius differentiæ N C, quadrato; ergo vt eſt F G ad G H, ita erit rectangulum A C B, nempe rectangulum ſub partibus ad quadratum differentiæ partium N C; ſed F G eſt ad G H, vt L, ad K, itaque ſecta eſt A B, in C, vt Problema poſtulat &c.
Quod oportebat &c.

f Cor. 20. ſexti
g 17. quinti.

Eſt enim vt A H ad H D ſeu H I ita A M ad M C; vnde vt quad. A H ad quad. H I, atq; adeo vt A H ad H E ita quadr. A M ad quadr. M C.

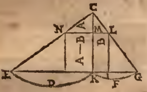
Problema.

Exemplum V 4.

In dato triangulo E G C, quadratum inſcribere.

Hoc antiquum Problema eſt ab alijs ſolutum, nos tamen alia via reſolutionem, compoſitionemque inſtituemus.

RESOLVTIO.



CAdat C K perpendicularis ad E G, & appelletur b; ſegmentum autem E K nuncupetur d: & ſegmentum K G eſto f; at verò ſegmentum C M eſto a; ergo M K, erit b-a. Vt autem eſt C K ad K E, ita C M ad M N; vt itaque b, ad d, ita fiat a, ad aliud, illudque erit $\frac{da}{b}$, quod æquabitur ipſi N M. Rurſus vt C K, ad K G, ita C M ad M L; quamobrem erit vt b, ad f, ita a, ad $\frac{fa}{b}$, & ita $\frac{fa}{b}$ æquabitur M L. Quapropter erit æquatio huiuſmodi $\frac{da}{b} + \frac{fa}{b} = b - a$; atque adeo $da + fa$ æquabitur $b^2 - ab$: & per antitheſin $da + fa + ab$ æquabitur b^2 quæ quidem æquatio ſi ad proportionem reuocetur, erunt proportionales hi termini, nimirum d † f † b . b . a.

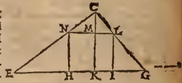
Hinc autem deducitur.

PORISMA.

Sumatur linea, quæ ſit æqualis baſi trianguli dati plus perpendiculari cadente à vertice ipſius; & fiat vt hoc aggregatum ad lineam perpendicularem iqm dictam, ita hæc ad aliam; hæc enim

enim tertia proportionalis, erit radicis pretium, atque differentia inter perpendicularem, & latus inſcribendi quadrati.

COMPOSITIO.



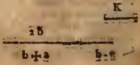
Datum ſit triangulum E G C, in quo quadratum deſcribere oporteat.

Sumatur E O, ita vt ſit æqualis baſi E G, plus C K perpendiculari; & fiat vt E O ad C K, ita C K ad C M; erit proinde rectangulum ſub E O, & C M æquale quadrato ex K C; & quia G O, C K ſunt æquales, erit rectangulum ſub C M, & G O, æquale rectangulo K C M; quo vtrinque ſublato erit rectangulum ſub E G, & C M æquale quadrato ex C K, minus rectangulo K C M; ergo rectangulum ſub E G, C M æquale erit rectangulo C K M; Vt igitur E G ad C K, ita M K ad C M, & vt E G ad C K, ita N L ad C M; ergo N L eſt æqualis M K, vel N H; eſt itaque H L quadratum ex H I, quæſitum. Deſcripſimus itaque quadratum in propoſito triangulo. Quod facere oportebat.

Exemplum VII.

Problema.

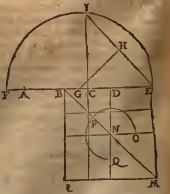
Data ſumma duorum laterum, & differentia quadratorum ab ipſis, reperire latera, ſeu datum latus diuidere &c.



Propoſitum latus diuidendum, vel ſumma laterum ſit 2b; & recta k poſſit differentiam quadratorum. Differentia laterum ſit a; pars vna, vel vnum ex lateribus erit b + a; aliud b - a, adeo vt ſimul faciant 2b; differentia quadratorum eſt 4ba; hæc autem æquabitur k^2. Itaque proportionales erunt b, K, 4a. Hinc

PORISMA.

Sume dimidium lateris diuidendi, vel ſummæ laterum; deinde rectam, quæ poteſt quadratorum differentiam; his autem tertia reperiatur proportionalis; hæc enim quadruplum erit differentiæ partium, vel laterum quæſitorum.



Datum ſit latus diuidendum A E, ſecetur biſariam in C, ad punctum C excitetur perpendicularis C I, quæ poſſit differentiam quadratorum partium: agatur EI, quæ biſariam ſecetur in H; hinc agatur HG ad rectos angulos ſecans AE, in G (neceſſario occurret ipſi AE, vt aliàs dictum eſt) centro G, interuallo GE, deſcribatur circulus, qui neceſſariò tranſibit per I; cū ducta GI, GE, ſint æquales, & peripheria ſecet E A protractam in F; ſecetur autem F C in quatuor æquales partes, quarum vna ſit B C; Dico quæſitas lateris partes eſſe A B, B E, adeò vt quadrata iſtarum partium differant quadrato ex C I. Secetur C D æqualis ipſi C B, & erit D E æqualis A B; conſtituatur figura vt vides facto B L M E quadrato ſuper B E; quadratum B M, differet à quadrato NM, ſeu quadrato ex DE, hoc eſt quadrato ex A B per gnomonem O P Q, ſeu per quadruplum rectangulum E C B, hoc eſt per rectangulum E C F; ſed hoc rectangulum eſt æquale quadrato ex CI; ergo diuiſum eſt latus A E, in puncto B, quemadmodum Proble-

ma

ma iubet. Manifeſtum eſt autem rectam, quæ poteſt planum datum debere eſſe minorem ipſomet latere diuidendo; quod animaduertiſſe oportet pro conditione propoſiti reſoluendi Problematis.

Secundum Exemplorum genus, ad quod pertinent illa Problemata, in quorum Reſolutionibus æquationes affectæ intercedunt, non traſcendentes tamen Planorum Limites.

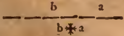
Sequitur agendum de Problematibus illis, quorum reſolutio æquationes affectas expoſcit; ſit igitur

Problema.

Dato rectangulo ſub lateribus, & differentia laterum, inuenire latera. Exemplum I.

RESOLVTIO.

DAta ſit laterum differentia b, & rectangulum eſto z^2; latus minus eſto a, maius erit $b + a$ ducatur $b + a$ in a, fit $ba + a^2 = z^2$, explicata æquatione fiet vnius radicis pretium $\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + z^2)} - \frac{1}{2}b$. Hinc

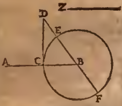


PORISMA.

Quadrato dimidij datæ differentiæ addatur planum; & huius aggregati lateri ſubtrahatur dimidium differentiæ, reſiduum enim erit latus minus; vnde maius non latebit.

COMPOSITIO.

DAta ſit differentia laterum A B; planum autem, cui æquale eſt rectangulum, ſit Z, quad., ſeu quadr. ex C D: ª ſecetur A B bifariam in C, & ex puncto C, ᵝ excitetur perpendicularis C D, agatur D B: modo centro B, interuallo B C deſcribatur circulus ſecans B D in E; protrahatur D B ad F; & factum erit, quod Poriſma iubet. Quadrato ſiquidem ex C B dimidio differentiæ datæ, addidimus quadratum ex C D; etenim D C B angulus rectus eſt; ac proinde quadratum ex B D æquale ᵞ erit quadratis ex C D, C B. & ab ipſo latere D B abſtulimus B E dimidium differentiæ; at protracta D B ad F, additur E D, ipſi E F, quæ eſt differentia æqualis datæ A B. Dico latus minus eſſe E D, & maius D F. Quoniam enim D C ᵟ tangit circulum in C, ᵋ erit rectangulum F D E æquale quadrato C D, ſeu Z quadr. Latera verò E D, D F, differunt per E F, hoc eſt A B, inuenimus ergo latera &c. Quod facere oportebat.



ª 10. primi.
ᵝ 11. primi.
ᵞ 47 primi.
ᵟ Cor. 16 tert.
ᵋ 36. tertij.

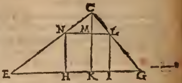
RESOLVTIO II.

Vel latus vnum eſto a, aliud erit $a + b$, nempè latus maius; quamobrem $a^2 + ba = z^2$; atque adeo $a + b$, z, a, erunt proportionalia. Dato autem medio è tribus lateribus proportionalibus, & differentia extremorum dantur latera.

enim tertia proportionalis, erit radicis pretium, atque differentia inter perpendicularem, & latus inſcribendi quadrati.

COMPOSITIO.

DAtum ſit triangulum E G C, in quo quadratum deſcribere oporteat.

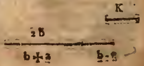


Sumatur E O, ita vt ſit æqualis baſi E G, plus C K perpendiculari; & fiat vt E O ad C K, ita C K ad C M; erit proinde rectangulum ſub E O, & C M æquale quadrato ex K C; & quia G O, C K ſunt æquales, erit rectangulum ſub C M, & G O, æquale rectangulo K C M; quo vtrinque ſublato erit rectangulum ſub E G, & C M æquale quadrato ex C K, minus rectangulo K C M; ergo rectangulum ſub E G, C M æquale erit rectangulo C K M; Vt igitur E G ad C K, ita M K ad C M, & vt E G ad C K, ita N L ad C M; ergo N L eſt æqualis M K, vel N H; eſt itaque H L quadratum ex H I, quæſitum. Deſcripſimus itaque quadratum in propoſito triangulo. Quod facere oportebat.

Exemplum VII.

Problema.

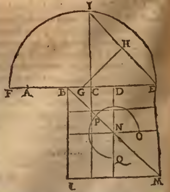
Data ſumma duorum laterum, & differentia quadratorum ab ipſis, reperire latera, ſeu datum latus diuidere &c.



PRopoſitum latus diuidendum, vel ſumma laterum ſit 2b; & recta k poſſit differentiam quadratorum. Differentia laterum ſit a; pars vna, vel vnum ex lateribus erit b + a; aliud b - a, adeo vt ſimul faciant 2b; differentia quadratorum eſt 4 b a; hæc autem æquabitur k^2. Itaque proportionales erunt b, K, 4 a. Hinc

PORISMA.

Sume dimidium lateris diuidendi, vel ſumma laterum; deinde rectam, quæ poteſt quadratorum differentiam; his autem tertia reperiatur proportionalis; hæc enim quadruplum erit differentiæ partium, vel laterum quæſitorum.



DAtum ſit latus diuidendum A E, ſecetur bifariam in C, ad punctum C excitetur perpendicularis C I, quæ poſſit differentiam quadratorum partium: agatur EI, quæ bifariam ſecetur in H; hinc agatur HG ad rectos angulos ſecans AE, in G (neceſſario occurret ipſi A E, vt aliàs dictum eſt) centro G, interuallo GE, deſcribatur circulus, qui neceſſariò tranſibit per I; cũ ducta GI, GE, ſint æquales, & peripheria ſecet E A protractam in F; ſecetur autem F C in quatuor æquales partes, quarum vna ſit B C; Dico quæſitas lateris partes eſſe A B, B E, adeò vt quadrata iſtarum partium differant quadrato ex C I. Secetur C D æqualis ipſi C B, & erit D E æqualis A B; conſtituatur figura vt vides facto B L M E quadrato ſuper B E; quadratum B M, differet à quadrato NM, ſeu quadrato ex DE, hoc eſt quadrato ex A B per gnomonem O P Q, ſeu per quadruplum rectangulum E C B, hoc eſt per rectangulum E C F; ſed hoc rectangulum eſt æquale quadrato ex CI; ergo diuiſum eſt latus A E, in puncto B, quemadmodum Proble-

ma

ma iubet. Manifeſtum eſt autem rectam, quæ poteſt planum datum debere eſſe minorem ipſomet latere diuidendo; quod animaduertiſſe oportet pro conditione propoſiti reſoluendi Problematis.

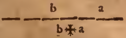
Secundum Exemplorum genus, ad quod pertinent illa Problemata, in quorum Reſolutionibus æquationes affectæ intercedunt, non traſcendentes tamen Planorum Limites.

Sequitur agendum de Problematibus illis, quorum reſolutio æquationes affectas expoſcit; ſit igitur

Problema.

Dato rectangulo ſub lateribus, & differentia laterum, inuenire latera. Exemplum I.

RESOLVTIO.

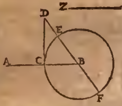


DAta ſit laterum differentia b, & rectangulum eſto z^2; latus minus eſto a, maius erit b ✠ a ducatur b ✠ a in a, fit ba ✠ $a^2 = z^2$, explicata æquatione fiet vnius radicis pretium ℞ ($\frac{1}{4} b^2$ ✠ z^2) $- \frac{1}{2} b$. Hinc

PORISMA.

Quadrato dimidij datæ differentiæ addatur planum; & huius aggregati lateri ſubtrahatur dimidium differentiæ, reſiduum enim erit latus minus; vnde maius non latebit.

COMPOSITIO.



DAta ſit differentia laterum A B; planum autem, cui æquale eſt rectangulum, ſit Z, quad., ſeu quadr. ex C D: α ſecetur A B bifariam in C, & ex puncto C, β excitetur perpendicularis C D, agatur D B: modo centro B, interuallo B C deſcribatur circulus ſecans B D in E; protrahatur D B ad F; & factum erit, quod Poriſma iubet. Quadrato ſiquidem ex C B dimidio differentiæ datæ, addidimus quadratum ex C D; etenim D C B angulus rectus eſt; ac proinde quadratum ex B D æquale γ erit quadratis ex C D, C B. & ab ipſo latere D B abſtulimus B E dimidium differentiæ; at protracta D B ad F, additur E D, ipſi E F, quæ eſt differentia æqualis datæ A B. Dico latus minus eſſe E D, & maius D F. Quoniam enim D C δ tangit circulum in C, ε erit rectangulum F D E æquale quadrato C D, ſeu Z quadr. Latera verò E D, D F, differunt per E F, hoc eſt A B, inuenimus ergo latera &c. Quod facere oportebat.

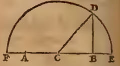
α 10. primi.
β 11. primi.
γ 47 primi.
δ Cor. 16 tert.
ε 36. tertij.

RESOLVTIO II.

Vel latus vnum eſto a, aliud erit a ✠ b, nempè latus maius; quamobrem a^2 ✠ $ba = z^2$; atque adeo a ✠ b, z, a, erunt proportionalia. Dato autem medio è tribus lateribus proportionalibus, & differentia extremorum dantur latera.

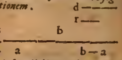
COMPOSITIO.

a 10. *primi.* *ß* 11. *primi.* Sit enim differentia A B, *a* ſecetur bifariã in C; ſit recta B D perpendicularis media *ß* inter duas, quarum differentia A B, ducatur C D. modo centro C interuallo C D deſcribatur periferia in E, F vtrinque ipſam A B productam ſecans; erit F B latus maius, vt B E minus, medium autem B D. Quoniam igitur F A, & B E, ſunt æquales, eſt itaque A B differentia laterum, & rectangulum F B E, *γ* æquale quadrato ex B D; factum eſt igitur quod oportebat. Inuenimus enim latera F B, B E, quorum differentia eſt A B data, & rectangulum F B E æquale eſt dato plano, ſcilicet quadrato ex B D &c. *γ Ex conſtructione.*



PROBLEMA.

Exemplum II. *Propoſitis duobus lateribus, alterum ita diuidere, vt rectangulum ſub indiuiſo, & altero ſegmentorum diuiſi, ad quadratum reliqui ſegmenti datam habeat rationem.*



Propoſitum latus eſto b; diuidendum quidem alterum ſit d; ratio vt d ad r. Pars vna ſit a, alia erit b — a, hoc modo ſimul ſumptæ conficiunt b; ſi verò b — a, ducatur in d, producetur d b — d a; & erit d b — d a, ad a², vt d ad r; ob id fiet æquatio huiuſmodi d b r = d a². Inſtituto paraboliſmo, nimirum omnibus diuiſis per d, fiet æquatio huiuſmodi b r — r a = a²; & per antitheſin a² ✳ r a = b r. Reperiatur media proportionalis inter b, & r, ſitque illa z, cuius quadratum z². Itaque erit a² + r a = z², cuius ℞ Q erit ℞ Q(¼ r² ✳ z²) — ½ r.

Poſſumus etiam deuenire in notitiam ℞ Q huius æquationis, ſi habito rectangulo ſub extremis, & differentia extremarum, reperiamus extrema atque adeo ſint a † r. ℞ Q(b r;) a. termini proportionales. Hinc

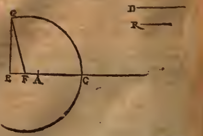
PORISMA.

Inter totum latus diuidendum, & ſecundum terminum datæ rationis reperiatur latus medio loco proportionale; Deinde quadratum dimidij ſecundi termini addatur quadrato lateris iam dicti, & ex aggregati latere auferatur dimidium prædictum, nam reliquum erit radix, quæ ſit a &c. Vel fiat quod poteſt rectangulum ſub latere ſecto, & ſub ſecundo termino datæ rationis, latus medio loco proportionale inter extrema, quorum differentia ſit terminus idem ſecundus rationis datæ.

COMPOSITIO.

Data ſint duo latera, quorum vnum A B, alterum D, & illud ita ſit diuidendum, vt rectangulum ſub D indiuiſo, & ſegmentorũ vno diuiſi, ad quadratum alterius ſegmenti ſit vt D ad R.

a 10. *primi.* *ß* 13. *primi.* Sumatur E A, quæ ſit æqualis datæ R, bifariam *a* diuidatur in F; modo *ß* excitetur E G, quæ poſſit rectangulum ſub A B, & R: ducatur G F; centro F, interuallo F G deſcribatur circulus ſecans datum latus diuidendum A B, in C. Dico rectangulum ſub C B, & D, eſſe ad quadratum ex A C altera parte, vt D ad R. Quoniam igitur rectangulum E C A, hoc eſt A C quadratum, plus rectangulo C A E, æquale eſt E G quadrato, hoc eſt rectangulo ſub A B, & R, hoc eſt rectangulo E A B; per antitheſin rectangulum E A B, minus rectangulo E A C, hoc eſt rectangulum ſub E A, & C B, æquale erit A C quadrato. Sed rectangulum ſub D, & B C, *γ* eſt ad rectangulum ſub B C, & E A, vt D ad E *γ* 1. *ſexti.*

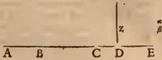


A, hoc

A, hoc eſt vt D ad R; ergo rectangulum factum, ſub D, & C B, δ eſt ad quadratum ex A C, quòd erat æquale rectangulo ſub E A, & C B; erit, inquam, vt D ad R. Quod facere oportebat. Diuiſum eſt igitur latus datum A B in puncto C ſic, vt rectangulum ſub vna parte C B comprehenſum, & ſub dato latere D, ad quadratum alterius partis A C, habet datam rationem, vt D ad R. Quod facere oportebat. δ 7.quinti.

Aliter eidem Problemati ſatisfaciemus.

DAta ſint latera A B, B D, & oporteat, exempli gratia, diuidere B D, ea lege vt rectangulum ſub inſecto latere A B, & ſegmento vno lateris B D ad quadratum alterius ſegmenti eiuſdem B D, datam habeat rationem vt A B ad D E. Inter B D, D E α reperiatur latus z, medio loco proportionale, erit β quidem quadratum ex z æquale rectangulo ſub B D, D E. Deinde habito quadrato ex z; & differentia extremorum laterum D E, reperiantur extrema, quorum maius ſit CE: minus autem C D. α 13 ſexti. β 17 ſexti.



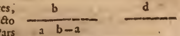
Quoniam igitur quadratum ex z, vel rectangulum B D E æquale eſt rectangulo E C D, ex conſtructione; ſi commune ſubtrahatur rectangulum C D E, γ remanebit rectangulum ſub B C, D E, æquale quadrato ex C D; ſed rectangulum A B C, eſt δ ad rectangulum ſub B C, D E, vt A B ad D E; ergo rectangulum A B C, erit ε ad quadratum C D, vt A B ad D E. Quod facere oportebat. γ 1. ſecundi. & 1. eiuſdem. δ 1. ſexti. ε 7 quinti.

Problema.

Propoſitum latus in duas partes diuidere, vt rectangulum ſub ipſis æquale ſit plano facto ex differentia partium in latus aliud datum. Exemplum III.

RESOLVTIO.

PRopoſitum ſit latus b diuidendum in duas partes, vt rectangulum ſub ipſis æquale ſit plano facto ex differentia partium in aliud datum latus d. Pars vna eſto a, alia erit b − a: rectangulum ſub his eſt b a − a^2; & quoniam b − 2 a eſt differentia partium, ſi hæc ducatur in d, fiet productum, quod æquabitur ipſi b a − a^2; productum autem iſtud eſt b d − 2 d a; proinde fiet æquatio huiuſmodi, nimirum b a − a^2 = b d − 2 d a; & per Antitheſin fiet b a + 2 d a, ſeu b a † 2 d a − a^2 = b d; huius autem æquationis radix eruetur iuxta Artis præcepta; in qua quidem extractione per b + 2 d, nos intelligamus g, quod hic liberum ſit magnitudines ad libitum nominare, ad confuſionem euitandam; atque adeò fiet ½ g − ℞ Q(¼ g^2 − b d) & erit pars minor. Hinc.

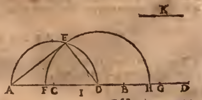


PORISMA.

Ad latus diuidendum addatur duplum alterius dati; & hoc aggregatum biſſecetur; ab eius autem quadrato ſubducatur rectangulum factum à datis lateribus; nempè à diuidendo, & ab altero: reſidui ſumatur latus, quod ſi ſubtrahatur ab illo dicto dimidio, habebitur pars minor, lateris diuidendi; vnde maior non latebit.

COMPOSITIO.

PRopoſitum ſit latus diuidendum A B; ſitque latus alterum K 1 oporteat diuidere vt imperatum eſt. Producatur A B vſque ad D, ſic vt B D ſit dupla ipſius K, adeo vt B G, G D ſint æquales vni K, & B D dupla ipſius. Tota verò A D diuidatur bifariam in O, & ſuper A O deſcribatur ſemicirculus A E O, in quo a accommodetur E, quæ poſſit rectág. ſub AB, & K, ducatur OE, quæ poterit differ. inter quad. a prima quar.



ex A O, & A E; centro O, interuallo O E deſcribatur circulus E F H, ſecans D A in F. Dico AF partem eſſe minorem dati lateris A B, & F B, maiorem; adeo vt rectangulum ſub A F, F B ſit æquale rectangulo ſub differentia iſtarum partium, & data recta K. Secetur B I æqualis A F, & erit F I differentia partium A F, F B. Quoniam igitur A E O angulus rectus eſt, erit A E tangens circuli F E H; proinde rectangulum H A F erit æquale quadrato ex A E; ſed rectangulo H A F eſt æquale rectangulum D F A, ob id hoc illi erit æquale. Itaque rectangulum D A F minus quadrato ex A F, eſt æquale quadrato ex A E, hoc eſt rectangulum ſub A B, plus dupla K in A F, æquale eſt rectangulo A B G; hoc enim ex conſtructione eſt æquale quadrato ex A E. Quamobrem rectangulum D A F minus quadrato ex A F æquale eſt rectangulo A B G, minus rectangulo ſub B G in A F bis; hoc eſt rectangulo ſub F I, & B G; hoc eſt K; ergo rectangulum A F B ſub partibus æquale eſt rectangulo ſub F I differentia partium, & K data.

Problema.

Exemplum IV. *Data ratione interualli quadratorum minoris extremi, & medij ad quadratum maioris, inuenire tria latera proportionalia.*

DAta ſit ratio vt s, ad r, minoris ad maius; ſumatur autem r, pro maiori extremo: minus verò ſit a; ob id ra æquabitur quadrato medij; quamobrem interuallum quadratorum minoris, & medij erit $ra - a^2$; Vt autem eſt s, ad r, ita debet eſſe $ra - a^2$ ad r^2; quamobrem $r^2a - ra^2$ æquabitur r^2s. Omnibus autem applicatis ad r, fiet $ra - a^2 = rs$; huius autem æquationis radix eſt $\frac{1}{2}r - ℞(\frac{1}{4}r^2 - rs)$ & erit minus extremum. Hinc verò

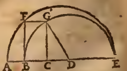
PORISMA.

Sumatur dimidium termini maioris datæ rationis, & ab eius quadrato ſubtrahatur rectangulum factum ſub ipſis terminis; reſidui verò latus quadratum ſubtrahatur à prædicto dimidio, & remanebit latus minus.

Oportet autem rectam, quæ poteſt prædictum rectangulum minorem eſſe dimidio maioris termini; ſeu debet rectangulum minus eſſe quadrato ex dimidio termini maioris.

DAti ſint rationis termini A B, B E, ille minor, hic maior; ſuper AE, eorum aggregato deſcribatur ſemicirculus AFE, & ſuper BE, ſemicirculus BGE; agatur perpendicularis BF, à puncto F, acta FG parallela ipſi AE, occurret neceſſariò peripheriæ; quandoquidem minor B F ſupponitur, ſemidiametro circuli B G E ducatur G C perpendicularis, & factum erit, quod Poriſma iubet; ducta D G.

In Schemate intelligatur ducta recta B G.



Nam à quadrato ex G D ducta nimirum à centro D ad punctum G, ſubtractum eſt quadratũ ex G C, & reliquum factum eſt quadratum ex C D; latus autem C D ſubtractũ fuit à BD, dimidio BE & remanſit BC, additum autem fuit D E, & factum eſt C E; Iam dico BC eſſe minus latus ex quæſitis, dum B E eſt latus maius. Quoniam A B, B F, B E, ſunt in continua ratione, vt eſt A B ad B E, ita eſt quadratum B F, ſeu CG, ad quadratum BE; ſed BC, BG, BE ſunt in ratione continua, & quadratum ex C G eſt differentia inter quadratum B C primi lateris, & B G ſecundi; ergo adinuenta ſunt tria latera B C, B G, B E, ſecundum præſcriptam conditionem, vt differentia quadratorum minoris, & medij ad quadratum maioris, habet datum proportionem.

a 19. ſexti.

PROBLEMA.

Exemplum V. *Dato vno ex cruribus trianguli angulum rectum ambientibus, dataque differentia ſegmentorum baſeos, triangulum reperire.*

HOc Problema Ghetaldus proponit, & ei ſatisfacit. Nos autem aliter illud reſoluemus, & componemus. Datum ſit latus maius b, differentia ſegmentorum data ſit d; oporteat reperire triangulum. Segmentum minus eſto a; ergo maius erit $d + a$; tota itaque baſis erit $d + 2a$ quare erit vt $d + 2a$, ad b, ita b, ad $d + a$. quamobrem $d^2 + 3da + 2a^2$ æquabitur b^2; & per antitheſin erit $3da + 2a^2 = b^2 - d^2$; ergo dimidia erunt æqualia.

$$\frac{3da}{2} + a^2 = \frac{b^2 - d^2}{2}, \text{ ſeu } \frac{3da}{2} + a^2 = \frac{b^2 - d^2}{2}.$$

$$\begin{array}{r} d + 2a \\ d + a \\ \hline da + 2a^2 \\ d^2 + 2da \\ \hline d^2 + 3da + 2a^2 \end{array}$$

Ad confuſionem tollendam pro dimidio ipſius 3 d ſubſtituatur g, & pro dimidio ipſius $b^2 - d^2$, intelligatur z^2, & erit, explicata æquatione ſecundum artem, Radix huius æquationis hæc $R\,Q(\frac{1}{4}g^2 + z^2) - \frac{1}{2}g$. Hinc autem deducitur.

PORISMA.

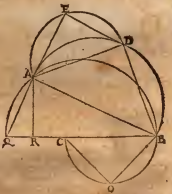
Sumatur triplum datæ differentiæ, & ad quadratum quartæ partis ipſius addatur differentia inter dimidium quadrati ex dato latere, & dimidium quadrati ex data differentia; huius autem aggregati latus quadratum minuatur quarta parte tripli datæ differentiæ; nam hæc erit ſegmentum minus.

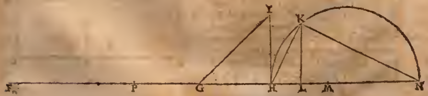
DAtum ſit crus maius circa rectum A B, ſitque differentia ſegmentorum C B; ſumatur F H triplum ipſius C B, & eius quarta pars ſit G H; adeò vt eiuſdem pars dimidia ſit P H: ad punctum H excitetur perpendicularis H I æqualis ipſi AE, quæ poſſit differentiam inter quadratum rectæ A D; nimirum dimidium quadrati ex A B, & quadratum ex B O, ſcilicet dimidium quadrati ex differentia C B, connectatur G I, cui fiat æqualis G L, &

Intelligatur triangulum quæſitum Q A B, cuius latus maius AB ſit datum, & differentia ſegmẽtorum baſeos Q R, R B, a perpẽdiculari A R data ſit C B.

Intelligere enim oportet, quod ſit deſcripti ſemicirculi A E D ſuper A D peripheria.

Item deſcripti ſemicirculi C O B ſuper C B, peripheria bifariam diuidatur in O. & actæ ſint C O, B O; cui æqualis D E applicetur in A E D, & agatur A E.





factum erit, quod Poriſma iubet. Fiat autem ſegmento H L æquale L M; protrahatur H M ad N, vt M N, ſit æqualis C B, datæ differentiæ ſegmentorum; nempe idem ſuper H N deſcribatur ſemicirculus, & excitetur L K perpendicularis. Agantur autem H K, K N. Dico triangulum H K N, eſſe illud quod quæritur.

Quoniam enim angulus H K N eſt rectus, differentia ſegmentorum H L, L M, eſt M N datę ex conſtructione æqualis; eſt vero latus K N maius, quàm K H, vt infra conſtabit. Reliquum eſt vt oſtendamus latus K N, eſſe æquale dato lateri A B. Quoniam P H ſecta eſt biſariam in G, & ei addita H L, erit rectangulum P L H, hoc eſt P H L plus quadrato H L, vnà cum quadrato G H, æquale quadrato G L, hoc eſt quadrato G I, hoc eſt quadratis G H, H I; communi ablato quadrato G H, remanebit rectangulum P H L, plus quadrato H L æquale quadrato H I; ergo duplum rectangulum duplo quadrato, nempè rectangulum F H L, plus duplo quadrato H L, æquale duplo quadr. H I, hoc eſt duplo differentiæ inter quadr. dimidium ex laterę dato, & dimid. ex data differentia; ergo quod idē eſt, æquabitur quadr. dati lateris A B, minus quadr. datæ differentiæ B C; Quamobrem quadratum differentiæ B C, hoc eſt M N, plus rectangulo F H L, plus duplo quadrato H L, æquabitur quadrato ex A B, ſed quadratum M N, plus rectangulo F H L, plus duplo quadrato H L, eſt æquale quadrato K N; ergo quadratum K N æquatur quadrato A B; ergo recta K N æqualis eſt rectæ A B &c.

Quod autem quadratum MN, plus rectangulo FHL, plus duplo quadrato H L, ſit æquale quadrato K N, oſtenditur ex eo quia quadratum K N eſt æquale rectangulo H N L; ſed rectangulo H N L, eſt æquale rectangulum F H L, plus quadrato M N, plus duplo quadrato H L; ſiquidem H L, eſt æqualis L M, & F H tripla eſt ex conſtructione ipſius M N; & HNL æquale eſt triplo rectangulo LMN, plus duplo quadrato LM, vnà cum quadrato MN ergo &c. Facilè porrò eſt demonſtrare latus K N maius eſſe latere HK. Si enim KH, KN eſſent æqualia latera, etiam ſegmenta H L, L N eſſent æqualia, quod eſt falſum, cùm ſegmenta ponantur differre interuallo M N, neque poteſt H K maius eſſe quàm K N; quandoquidem ſegmentum H L, maius eſſet ſegmento L N, cùm tamen ſegmentum H L ſit minus vt patet; eſt ergo minus H K, quam K N &c.

Hic autem occurrit Problema Florentiæ mihi propoſitum reſoluendum ab Adoleſcente, cui nomen erat Italicè *Paulino del Bono*; erat autem huiuſmodi.

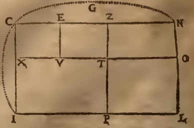
Problema.

Exemplum VI. *Propoſitum ſit rectangulum, in quo oporteat deſcribere rectangulum alterum, vt in infra poſita figura, ita vt hoc ſit quarta pars illius.*

RESOLVTIO I.

INtelligatur rectangulum I C N L reſpondens ipſi A B C D, Vide figuram ad pag. 415, & in hoc P T O L reſpondeat alteri, quod eſt quarta pars illius G E F H. Deinde Supponatur iam factum, adeo ut rectangulum in medio conſtitutum æquale quartæ parti totius ſit P O, cui quidem æquale ſit V E N O, atque adeo quarta etiam pars totius; debet igitur inueſtigari X I &c. Ratio verò quam debet habere I N ad P O ſit vt R ad S erit X V æqualis V T.

Latus maius C N appelletur g, & latus C I nuncupetur f: rectangulum IN ad PO, debet eſſe vt r, ad s.



Supponamus autem XI ignotā eſſe a, ac proinde rectangulum I N, erit f g rectangulum P O, erit $\frac{sgf}{r}$; recta verò T O erit $\frac{sgf}{ra}$, & recta C X, erit $f - a$; Præterea X T, recta erit $g - \frac{sgf}{ra}$; quamobrem rectangulum X Z erit $gf - \frac{sgf^2}{ra} - ga + \frac{sgf}{r}$; rectangulum autem T N erit $\frac{sgf^2}{ra} - \frac{sgf}{r}$. Duplum autem rectangulum V N, ſeu X Z, plus duplo rectangulo T N eſt $gf - \frac{sgf^2}{ra} - ga + \frac{sgf}{r} +$

$\frac{sgf}{ra}$

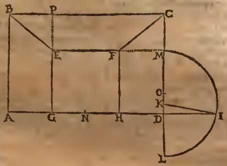
$\frac{gaam}{ra} - \frac{gfbis}{r}$, ſeu quod idem eſt g d -- g a - $\frac{gsf}{r}$ + $\frac{gsfs}{ra}$; duplum autem rectangulum P O eſt $\frac{gsfbis}{r}$; Cùm autem rectangula illa V N, P O, ſint ex hypotheſi æqualia; ergo etiam eorum dupla æqualia erunt; quamobrem g f -- g a -- $\frac{gsf}{r}$ + $\frac{gsfs}{ra}$ = $\frac{gsfbis}{r}$; ſi verò vtrinque addatur $\frac{gs}{r}$ fiet æquatio g f - g a + $\frac{gfs}{ra}$ = $\frac{gs\ ter}{r}$; omnib. autem applicatis ad g, fiet f -- a + $\frac{fs}{ra}$ = $\frac{s\ ter}{r}$; illa autem fractio $\frac{sf}{r}$ reuocetur ad integram magnitudinem, quæ ſit z; ergo f -- a + $\frac{zf}{a}$ æquabitur z ter; omnibus autem ductis in a, fiet æquatio f a -- a^2 + z f = z a ter, & per antitheſin fiet a^2 - f a -- z a ter = z f; at verò loco ipſius f -- z ter ſubſtituatur b; ergo a^2 -- b a æquabitur z f, huius vero æquationis radix erit nota ſi ſumatur $\frac{1}{4}$ b^2, nempè quadratum dimidiæ coefficientis, & addatur z f comparationis homogeneo, propterea quod huius aggregati lateri quadrato ℞ ($\frac{1}{4}$ b^2 + z f) ſi addatur dimidia coefficiens $\frac{1}{2}$ b, fiet ℞ ($\frac{1}{4}$ b^2 + z f) + $\frac{1}{2}$ b pro radicis valore; hinc

PORISMA.

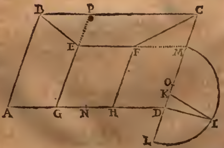
Applicetur rectangulum ſub f, latere minori propoſiti rectanguli, & ſub s minori termino datæ rationis, ad r terminum maiorem, & proueniat z; huius triplo ſubtracto ex f, remaneat b; ad huius autem dimidij quadratum addatur rectangulum ſub z, inuenta ex illa applicatione, & f latere minori, ex huiuſmodi aggregato eruatur latus quadratum hoc eſt reperiatur recta potens illud aggregatum, quæ addita dimidio b ſubſtituta in locum ipſius f -- z 3, exhibebit quæſitam radicem.

COMPOSITIO.

Datum ſit parallelogrammum A B C D, & ſit inſcriptum intrà illud conſtituere parallelogrammum G E F H, ea conditione ſeruata, vt ſi ducantur B E, F C, ſpatia G E F H, B E F C, A G E B, H E C D, ſint inter ſe æqualia, adeòut vnumquodque ipſorum ſit quarta pars totius parallelogrammi dati.



Ex alterutro extremorum lateris A D, puta, vel ad A, vel ad D, excitetur D I, ad rectos angulos quidem; ſit autem D I æqualis dimidio lateris D C; ſumatur autem D K ſuboctupla ad D C, ſeu ſit octaua pars ipſius D C. Deinde ducatur K I, cui fiat æqualis K M; modo centro K, interuallo K M, deſcribatur peripheria MIL, ſecans CD protractam in L: factum erit quod Poriſma iubet. Sumatur autem D O quarta pars totius D C, & fiat, vt M D, ad D N, dimidium totius A D, ita D O ad aliam, puta G N, vel N H; conſtruatur figura vt vides, adeo vt H F ſit æqualis ipſi D M, & E F parallela rectæ A D, vt G E, & H F parallelæ tum inter ſe, tum lateribus A B, D C; actis verò B E, F C, protrahatur E F in M, & G E, in P. Dico iam intra datum parallelogrammum eſſe deſcriptum parallelogrammum, vt quæritur.

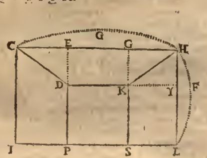


Quoniam enim aſſumpta fuerunt, recta quidem D K ſuboctupla, recta verò D O ſubquadru-

Vt D A ad H G, ita C D ad O M; ergo
Rectangulum D A O M = rectangulo H G C D.
Præterea
O C = 3 D O; ob id
Rectangulum O C D A = rectangulo triplo D O D A; ergo
Rectangulum 3 O D A = rectangulo D A O C, hoc eſt
Rectangulo D A M C + rectangulo D A O M, hoc eſt
+ rectangulo H G C D, hoc eſt plus duobus rectangulis C M H G
Et M D H G, hoc eſt & rectangulo O D A; ſed
Rectangulum 3 O D A = rectangulo D A M C + rectangulo C M H G
+ rectangulo O D A, dempto vtrinque rectangulo O D A remanet
Rectangulum 2 O D A = rectangulo C M H G + rectangulo D A M C, hoc eſt
+ tribus rectangulis M C D H; M C H G; M C G A; ſed
Rectangulum M C G A = rectangulo C M D H; ergo
2 Rectangulum O D A æquabitur 2 rectangulo M C H G plus 2 rectangulo M C D H; ergo
Rectangulum O D A = rectangulo M C H G + rectangulo M C D H, vel
Rectangulo M C D G, ſed eidem rectangulo M C D G = rectangulum C M E
cùm E M = D G; ergo
Rectangulum O D A = rectangulo C M E, ſed eidem rectangulo O D A
= M D H G; ergo
Rectangulum C M E = M D H G, ſed
Rectangulum 4 O D A = C D A; ergo
Rectangulum 4 C M E, vel 4 M D H G, hoc eſt rectangulum 4 E F H G
= C D A rectangulo.

Aliter etiam hoc idem Problema reſoluetur hunc in modum.

RESOLVTIO II.



Sit iam factum & C H appelletur g: item H L nuncupetur f, at vero E G differentia partium E H, C E, ſit 2 a; adeo vt dimidium differentiæ E G, qua differunt partes C E, E H, ſeu C G, G H, ſit a, itaque E H erit $\frac{1}{2}$ g + a. Eſt autem E G, vt diximus 2 a; modò fiant duæ magnitudines rationem habentes, vt $\frac{1}{2}$ g + a ad 2 a, quæ ſimul collectæ conficiant f; ducatur f in illas partes, nempè in $\frac{1}{2}$ g + a, & fiet $\frac{1}{2}$ g f + f a, & in 2 a, & fiet 2 f a. applicetur ad aggregatum ex $\frac{1}{2}$ g + a, & 2 a, nempe ad $\frac{1}{2}$ g + 3 a, & erunt quatuor partes quæſitæ proportionales $\frac{1}{2}$ g + a; 2 a; $\frac{\frac{1}{2} gf + fa}{\frac{1}{2} g + 3a}$; $\frac{2 fa}{\frac{1}{2} g + 3a}$; productum autem abs 2 a in $\frac{\frac{1}{2} gf + fa}{\frac{1}{2} g + 3a}$ eſt $\frac{gfa + 2fa^2}{\frac{1}{2} g + 3a}$, hoc eſt $\frac{gfa + 2fa^2}{\frac{1}{2} g + 3a}$, & æquabitur *quartæ parti totius rectanguli, quæ ſit K^2; tollatur fractio, & fiet g f a + 2 f a^2 = $\frac{1}{2}$ g K^2 + 3 K^2 a, ob id g f a − 3 K^2 a + 2 f a^2 æquabitur $\frac{1}{2}$ g K^2, ſeu g f a − 3 K^2 a + 2 f a^2 æquabitur $\frac{1}{2}$ g K^2; & per communem applicationem ad 2 f, fiet æquatio $\frac{gfa - 3K^2 a}{2f}$ + a^2 = $\frac{\frac{1}{2} g K^2}{2f}$. * D E H Y ſeu P D K S.

Vt autem tollatur fractio fiat vt 2 f ad $\frac{1}{2}$ g, ita K^2 ad aliud, nempè z^2, illudque retineatur pro comparationis homogeneo: Mox autem fiat nota differentia inter plana, quorum vnū g f, alterum vero 3 K^2, eaque ſit m pl., quo applicato ad 2 f, emergat b: modò ſuperiori

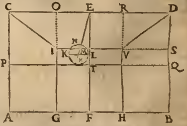
æquationi æquiualebit hæc $a^2 + ba = z^2$; huius autem æquationis Radix erit ℞ $(\frac{1}{4} b^2 + z^2)$ $- \frac{1}{2} b$, & hinc deducitur.

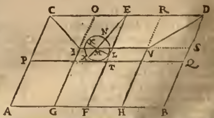
PORISMA.

Sumatur duplum lateris minoris f & fiat vt hoc ad dimidium lateris maioris g, ita k^2 quarta pars totius rectanguli ad aliud quod ſit z^2. Deinde ſumatur m pl., ſcilicet quarta pars totius differentia, inter rectangulum totum g f & 3 k^2, nempè tres quartas partes totius rectanguli, & huiuſmodi differentia applicetur ad 2 f duplum lateris minoris, & emergat b, ſi namque ad quadratum ex dimidio ipſius b addatur z^2, & ex aggregati latere ſubtrahatur dimidium ipſius b remanebit nota radix quæſita.

COMPOSITIO.

Datum ſit parallelogrammum A C D B, & oporteat facere quod imperatum eſt. Diuidatur C D bifariam in E, & agatur E F parallela lateribus A C, B D; fiat autem vt duplum minus latus A C, vel B D ad D E dimidium totius C D, ita planum E Q, quarta pars totius parallelogrammi ad quadratum, cuius latus eſt E L. Deinde ad punctum L, recta K L fiat ad rectos angulos, & ſit illa, quæ prouenit ex applicatione quartæ partis E Q, exempli gratia ad duplam D B, hoc eſt rectangulum ſub K L, & dupla D B, ſit æquale quartæ parti totius A D; ſecetur ipſa K L, in M quidem bifariam, & centro M, interuallo M L, vel M K, deſcribatur circulus ſecans ductam E M in N; nunc centro E, interuallo E N, deſcribatur arcus ſecans C D in punctis O, R. Factum erit quod Poriſma iubet. Fiat autem vt O R ad O D, ita D S ad S B: agantur rectæ O G, R H, parallelæ lateribus C A, D B; ducatur I V parallela rectæ C D, vel A B, & agatur P Q coniungens puncta P, Q, in quibus illæ ſectæ ſunt bifariam. Dico O R eſſe differentiam partium lateris C D, quæſitam; & parallelogrammum I G H V æquale eſſe cuilibet trium reliquorum ſpatiorum. Quoniam enim rectangulum ſub K L, & dupla D B æquale eſt quartæ parti totius C B, ob id quod ſub dupla K L, & ſimpla D B, & quod ſub quadrupla K L, & dimidia D B, æquabitur quartæ parti totius; ſed dimidia D B eſt Q B; ergo quod ſub quadrupla K L, & Q B continetur æquatur quartæ parti &c. Sed quartæ parti æquatur rectangulum T B; ergo quadrupla K L æqualis eſt ipſi T Q; quare K L ſubquadrupla ipſius T Q erit ſuboctupla totius C D, atque adeo M L erit pars decima ſexta totius C D, & non diſſimili modo contexemus demonſtrationem ac ſupra fecimus &c. ibi coefficiens erat quarta pars lateris minoris D B; hic verò eſt octaua pars lateris maioris C D vt patet; at verò comparationis homogeneum eſt quadratum quartæ partis lateris maioris, vt liquet. Quemadmodum enim eſt duplum lateris D B, ad latus E D, ita rectangulum ſub dupla D B & E D ad quadratum ex E D; ergo vt duplum lateris D B ad E D, ita quarta pars rectanguli, ſub dupla D B, & E D, nempè rectangulum E Q quarta pars etiam totius A D, ad quartam partem quadrati ex E D, nempè ad quadr. ex dimidio ipſius E D &c. In priori igitur autem modo comparationis homogeneum erat quadratum ex dimidio lateris minoris D B; hic autem quadratum eſt ex dimidio ipſius E D, hoc eſt ex quarta parte totius C D &c.





TER-

TERTIVM EXEMPLORVM GENVS

Ad hoc genus pertinent ea quidem Problemata, quorum reſolutiones per rectam, & circulum perfici non poſſunt, ſed vel Conicas ſectiones, vel lineas magis compoſitas requirunt.

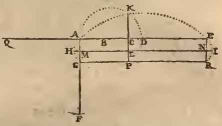
Problema.

Propoſitam rectam QD diuiſam in A, iterum ſecare quidem in C, vt ſit quadratum QA, ad quadratum AC in ratione AC ad CD. Exempl. I.

QA vel AF =		b
AD =		d
GF =		q
AK =		a
CD =		d − a
CK =		e

RESOLVTIO.

Sit iam factum, & magnitudines notentur characteribus, vt à latere, & adhibita decenti præparatione iam ſuperius ſignificata &c. ita procedendum erit.



Quoniam igitur eſt vt b^2 ad a^2, ita a ad d − a, hoc eſt ob circulum ita a^2, ad e^2, ſunt tres proportionales magnitudines, prima b; ſecunda a, tertia e; atque adeo vt b ad a, ita a, ad e; ſed vt b, ad a, ita b − q, ad $a - \frac{qda}{bd}$; ergo vt b − q, ad $a - \frac{qda}{bd}$, ita a, ad e; ergo rectangulum $a^2 - \frac{qda^2}{bd}$, æquabitur rectangulo b e − q e; ſed rectangulum d a − a^2, æquatur e^2; ergo æqualibus vtrinque additis, rectangulum $a^2 - \frac{qda^2}{bd}$ ✠ d a − a^2, æquabitur b e − q e ✠ e^2; ſed rectangulum d a − $\frac{qda^2}{bd}$ æquatur rectangulo $a^2 - \frac{qda^2}{bd}$ ✠ rectangulo d a − a^2, & rectangulum b e − q e ✠ e^2, æquatur b e − q e, vnà cum e^2; ergo rectangulum d a − $\frac{qda^2}{bd}$ æquabitur b e − q e ✠ e^2; ſed $\frac{bd}{q}$ eſt ad d, vt rectangulũ $\frac{bda}{q} - a^2$, ad rectangulum d a − $\frac{qda^2}{bd}$; ergo rectangulum $\frac{bda}{q} - a^2$, ad rectangulum b e − q e ✠ e^2, erit vt $\frac{bd}{q}$ ad d; & conuertendo vt d ad $\frac{bd}{q}$ ita rectangulum b e − q e ✠ e^2, ad $\frac{bda}{q} - a^2$; ſed vt d ad $\frac{bd}{q}$, ita q, ad b; ergo rectangulum b e − q e ✠ e^2, ad rectangulum $\frac{bda}{q} - a^2$, erit vt q, ad b; ſed in Ellipſi vt rectangulum b e − q e ✠ e^2, ad rectangulum $\frac{bda}{q} - a^2$, ita quadratum $\frac{b^2 - 2qb + q^2}{4}$ ad rectangulum $\frac{b^3 - 2qb^2 + bq^2}{4q}$; ergo vt $\frac{b^2 - 2bq + q^2}{4}$ ad rectangulum $\frac{b^3 - 2b^2q + bq^2}{4q}$ erit vt q, ad b. Sed vt $\frac{b^2 - 2bq + q^2}{4}$ ad rectangulum $\frac{b^3 - 2b^2q + bq^2}{4q}$, ita latus rectum ad latus tranſuerſum ſeu axim H I, ellipſeos &c.; ergo vt q ad b, latus rectum ad latus tranſuerſum ellipſeos tranſeuntis per puncta A, K. Quod fieri poteſt &c. Hinc

PORISMA.

Super A D deſcriptus ſit ſemicirculus A K D, & ad punctum A facta ſit F A ad rectos angulos, & æqualis ipſi Q A, in qua ſumpto quouis puncto G protrahatur A D ad E, ita vt A D ad A E, ſit vt G F ad F A; ducta autem E R, quæ ſit æqualis, & parallela ipſi A G, agatur G R, quæ parallela erit ipſi A E; atque adeo completum erit rectangulum A G R E; Diuiſis autem A G, E R biſariam in punctis M, & N, acta N M protrahatur ad H, ità vt quadratum A M, ad rectangulum M H N ſit in ratione G F, ad F A. Et protracta M N ad I, ita vt N I ſit æqualis H M, circa H I tanquam axim & latere recto, quod ad ipſam H I, velut ad latus tranſuerſum ſit in ratione vt G F, ad F A: deſcribatur ſemi ellipſis, quæ neceſſariò tranſibit per puncta A, & E, ſecabitque circumferentiam ſemicirculi deſcripti ſuper A D in puncto K, ex quo cadat perpendicularis K C; Erit enim quadratum Q A ad quadratum A C vt A C, ad C D; protrahatur K C

 ad

ad partes C, occurratque M N in L, & G R in P; ſiat autem vt A E ad A D, ita A C ad A B.

COMPOSITIO.

QVoniam igitur eſt vt G F ad F A, ita latus rectum ad latus tranſuerſum ellipſeos tranſeuntis per puncta A, K, E; ſed quadratum A M, ad rectangulum M H N eſt vt latus rectum ad latus tranſuerſum, ſiue axim H I; ergo quadratum A M, ad rectangulum M H N, erit vt G F, ad F A; ſed vt rectangulum P K C, ad rectangulum A C E, deſcripta ellipſi tranſeunte per puncta A, K, E, cuius axis H I, & ſemiordinatim applicata A M, ita eſt quadratum A M, ad rectangulum H M I, ſeu M H N, vt oſtenſum eſt; ergo rectangulum P K C, ad rectangulum A C E erit, vt G F ad F A; ſed ex præparatione vt A D ad A E, ita G F, ad F A; ergo vt A D ad A E, ita rectangulum P K C, ad rectangulum A C E; ergo conuertendo, vt A E ad A D, ita rectangulum A C E ad rectangulum P K C, ſed vt A E ad A D, ita rectangulum A C E, ad rectangulum ex A C in B D; ergo rectangulum ex A C in B D æquabitur rectangulo P K C; ſed rectangulum ex A C in B D æquale eſt rectangulo A C B plus rectangulo A C D, & rectangulum P K C, æquale eſt rectangulo P C K plus quadrato C K; ergo rectangulum A C B, vna cum rectangulo A C D æquabitur rectangulo P C K vnà cum quadrato C K; ſed rectangulum A C D æquale eſt quadrato C K, ob circulum; ergo per ſubtractionem æqualium rectangulum A C B æquabitur rectangulo P C K; ergo vt P C ad B C, ita A C, ad C K; ſed vt P C ad B C, ita F A ad A C; ergo ſunt tres proportionales magnitudines; nempè prima Q A, ſiue F A; ſecunda A C; tertia C K; atque adeo vt quadratum Q A, ad quadratum A C, ita quadratum A C ad quadratum C K; hoc eſt ob circulum, ita A C ad C D. Secuimus ergo &c. Quod facere oportebat.

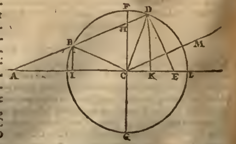
Problema.

Exemplum II. *Latus reperire à cuius cubo ſi ſubtraxeris ſolidum ex ipſo in quadratum alterius lateris dati; remaneat ſolidum, itidem datum.*

RESOLVTIO.

DAtum ſit latus l, datumque ſolidum m^3, oporteat facere quod imperatum eſt, Latus quæſitum eſto a, cuius cubus eſt a^3; ducto autem l^2 in a, fit $l^2 a$, quo ſubtracto ex a^3 fit $a^3 -- l^2 a$, quod æquabitur m^3; loco autem ipſius l^2 ſubſtituatur $3\,b^2$, ita vt $3\,b^2$ æquetur l^2, & loco m^3, ſubſtituatur $b^2 d$, ita vt $b^2 d$, æquetur m^3; ac propterea æquatio nouam hanc induat formam $a^3 - 3\,b^2 a = b^2 d$, quæ quidem explicationem iuxta ſuperius tradita ſubire poteſt.

COMPOSITIO.



Exponatur recta AL, ex qua abſcindatur C L æqualis rectæ quæ poſſit tertiam partem plani coefficientis; centro autem C, interuallo C L deſcribatur circulus B F L; fiat autem C E æqualis rectæ, quæ ducta in tertiam partem plani coefficientis puta in quadratum C L facit comparationis homogeneum. Deinde biſſecetur C E in K, & ex K erigatur perpendicularis K D, agantur D C, D E, angulus verò D C E triſſecetur per rectam M C, cui ex D agatur parallela D A occurrens peripheriæ in B, & rectæ L C protractæ ad partes C in A; Dico rectam AC eſſe quæſitam adeo vt cubus ex A C, minus triplo ſolido ex A C in quadratum A B æquale ſit ſolido ex C E in idem quadratum A B. Demonſtratio patet ex dictis ad paginam 362

PRO-

PROBLEMA.

Propoſitum latus A B, vtcunque ſectum in C, iterum diuidere in D, inter C B, ita vt ſolidum parallelepipedum ex A D, in quadratum C D, ad cubum D B, rationem habeat datam. Exemplum III.

HVius Problematis triplex eſt caſus; vel enim ratio data eſt æqualitatis, vel maioris, vel minoris inæqualitatis.

RESOLVTIO PRIMI CASVS.

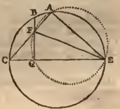
Ad primum quod attinet; pars A C ſit b; at C B ſit d; pars D B eſto a, reliqua C D erit d -- a; & A D erit b ✠ d -- a, quo ducto in d^2 -- 2 d a ✠ a^2, quadratum ſcilicet ipſius CD, fit productum b d^2 ✠ d^3 -- 2 b d a -- 3 d^2 a ✠ b a^2 ✠ 3 d a^2 -- a^3 = a^3; & per antitheſin 2 a^3 ✠ 3 d^2 a ✠ 2 b d a -- 3 d a^2 -- b a^2 = b d^2 ✠ d^3; omnibus autem diuiſis per 2, fiet a^3 ✠ $\frac{3}{2}$ d^2 a ✠ b d a -- $\frac{3}{2}$ d a^2 -- $\frac{1}{2}$ b a^2 = $\frac{1}{2}$ b d^2 † $\frac{1}{2}$ d^3; quæ quidem æquatio iuxta præcepta ſuo loco tradita per ſublationem ſecundi termini reuocabitur ad vnam ex illis æquationibus in quibus cubus afficitur ſub latere vnde facta huiuſmodi reductione, & æquatione explicata iuxta Artis præcepta, quod quæritur innoteſcet. Non diſſimili modo, cum proportio fuerit maioris, vel minoris inæqualitatis.

PROBLEMA.

Eſt circulus A B C D E, in quo diameter C E, & perpendicularis B G, diametrum ſecans in G. Oporteat reperire in peripheria punctum verbi gratia A à quo ducta recta A C; ad diametri extremum C occurrat B G in F, itaut A F, F G, G E ſint in continua ratione. Exemplum IV.

PRÆPARATIO.

INtelligatur ducta A E, & quoniam angulus C A E rectus eſt, itemque rectus F G E, erunt in circulo; quamobrem rectangulum E C G æquabitur rectangulo A C F; quare vt C E ad A C, ita C F ad C G, itaque cùm A F, F G, G E ſint proportionales, atque adeo rectangulum ſub A F, & G E æquale quadrato G F, ob id cùm G E ſit exceſſus, quo prima C E ſuperat quartam C G; & A F ſit exceſſus, quo ſecunda A C ſuperat tertiam C F, item quadratum F G eſt exceſſus quo quadratum C F tertiæ ſuperat quadratum C G quartæ, eo Problema deductum eſt vt datis duabus lineis inter illas duæ mediæ reperiantur, ita vt quod fit ab exceſſu ſecundæ ſupra tertiam in exceſſum primæ ſupra quartam, æquale ſit exceſſui, quo quadratum tertiæ ſuperat quadratum quartæ.



RESOLVTIO.

SVpponamus igitur C G eſſe b, & G E eſſe C, ita vt C E tota ſit b † c; at verò C A eſto a, ita vt prima ſit b † c; ſecunda a, quarta b; vt autem habeatur tertia ducatur b † c prima in b, quartam, & proueniet b^2 † b c, quo applicato ad a ſecundam proueniet $\frac{b^2 + bc}{a}$ pro tertia; ſunt igitur quatuor quantitates proportionales. prima b † c: ſec. a, tertia $\frac{b^2 + bc}{a}$; quarta denique b; & quia factum ab exceſſu primę ſupra quartam in exceſſum ſecundæ ſupra tertiam æquale eſt exceſſui, quo quadratum tertiæ ſuperat quadratum quartæ, cum prima ſit b † c: exceſſus primæ ſupra quartam erit c; & quia ſecunda eſt a, tertia vero $\frac{b^2 + bc}{a}$ exceſſus ſecundæ ſupra tertiam erit a -- $\frac{b^2 + bc}{a}$ ſeu $\frac{a^2 - b^2 + bc}{a}$; & quia tertia eſt $\frac{b^2 + bc}{a}$, quadratum erit $\frac{b^4 + 2b^3c + b^2c^2}{a^2}$, à quo ſi dempſeris b^2, nempe quadratum quartæ remanebit $\frac{b^4 + 2b^3c + b^2c^2}{a^2}$ -- b^2, ſeu quod idem eſt $\frac{b^4 + 2b^3c + b^2c^2 - b^2a^2}{a^2}$ factum autem ab exceſſu ſecundæ ſupra tertiam in exceſſum primæ ſupra quartam erit c a -- $\frac{b^2c + bc^2}{a}$ ſeu quod idem eſt $\frac{a^2c - b^2c - bc^2}{a}$ & erit æquatio huiuſmodi

juſmodi $\frac{ca^2 - b^2c + bc^2}{b} = \frac{b^3 + 2b^2c + bc^2 - ba^2}{a^2}$, decuſſatim autem facta multiplicatione $\frac{ca^4 - b^2ca^2 + bc^2a^2}{ab} = \frac{b^4a + 2b^3ca + b^2c^2a - b^2a^3}{ab}$ atque adeo $ca^4 - b^2ca^3 + bc^2a^2$ æquabitur $b^4a + 2b^3ca + b^2c^2a - b^2a^3$; & per hypobibaſmum $ca^3 - b^2ca + bc^2a$ æquabitur $b^4 + 2b^3c + b^2c^2 - b^2a^2$; & per antitheſin $ca^3 + b^2a^2 - b^2ca + bc^2a$ æquabitur $b^4 + 2b^3c + b^2c^2$; omnibus autem applicatis ad c, vt poteſtas per ſe ſubſiſtat, & $a^3 + \frac{b^2a^2}{c} - b^2a + bca$ æquabitur $\frac{b^4}{c} + 2b^3 + b^2c$; tollantur fractiones; fiat vt c ad b, ita b, ad 3 f; Deinde fiat vt c ad b, ita b^3, ad aliud quod ſit g ſol. ergo $a^3 + 3fa^2 - \frac{}{b^3 + b^2c}a$, æquabitur g ſol. $+ 2b^3 + b^2c$, ad cuius elegantiorem explicationem ſimplicioribus terminis vti ſi placet, loco $b^2 + bc$ ſubſtituatur d pl., & loco g ſol. $+ 2b^3 + b^2c$ ſubſtituatur z ſol., & æquatio illa hanc induet formam, nempe $a^3 + 3fa^2 - d$ pl. a æquabitur z ſol. a + f eſto e; ergo ex ijs, quæ in ſpecioſa tradidimus $e^3 - \frac{}{3f^2 - d\,pl.}e$, æquabitur z ſol. - d pl. f; itaque æquatio illa cubica, quæ erat affecta ſub quadrato & latere ad ſimplicem æquationem cubicam affectam tantummodo ſub latere reuocata erit; hæc autem æquatio Geometricè explicabitur modo ſupra tradito.

COMPOSITIO.

Si itaque nos intelligamus quadratum A B, valere tertiam partem ipſius plani coefficientis, quod erat $3f^2$ - dp: ſolidum autem ex C E, in quadratum A B, eſſe comparationis homogeneum, quod erat z ſol. $- 2f^2$ - d pl. f. erit cubus ex A C cubus è quantitate quæſita, minus triplo ſolido ex quadrato A B, in A C, æquale ſolido ex C E in quadratum A B, ſeu, quod idem eſt, cubus ex A C, minus ſolido ex triplo quadrato A B in A C, æquabitur ſolido ex quadrato A B, in C E.



Operando igitur iuxta prædicta, facile nos aſſequemur intentum; ac ob id in periphæria ſuperioris Schematis reperto valore radicis, puta C A, adinuenerimus punctum A, applicando quantitatem inuentam, in circulo ex puncto C, itaut F A, F G, G E, ſint in continua ratione. Quod facere oportebat.

De Cautionibus in cuiuslibet oblati Problematis Reſolutione inſtituenda. Deque Subſidiaria coefficiente quantitate, *quam Auctor ad altos gradus in ipſamet reſolutione vitandos, & adhibere conſueuit. Cap. IX.*

Illud in primis Artifex curet ne ſe adigat viæ obſcuriori; paſſim enim contingit, vt ex minus ac curato examine quæſtionis propoſitæ implicatior via occurrat, quam omni ſtudio de clinare oportet.

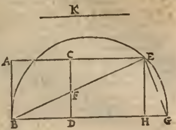
Hæc autem vt cuique magis perſpecta fiant, non erit abs re ſi aliquod Problema nos afferamus in medium, vnde hactenus inſinuata facilè quidem innoteſcant. Eſto autem illud, quod propoſuit Pappus Alexandrinus Libro ſeptimo Prop. 72.

Problema.

Exemplum. *Quadrato dato, & vno latere producto, aptare ſub exteriori angulo rectam magnitudinem datam, quæ quidem ad oppoſitum angulum pertingat.*

Da-

Datum ſit quadratum A D, & recta quæpiam K, oporteat latus A C producere ad E vſque, ita vt ducta ab E verſus B, cuiuſmodi eſt E F ſit æqualis rectæ K.



Pappus aggreſſus huius Problematis reſolutionem eam effectionem adinuenit, quam nos quoque ſuperiori Libro noſtra Methodo conſecuti ſumus, adeout producere debeamus B D, in G, & facere D G æqualem rectæ, quæ poteſt aggregatum quadratorum, quorum vnum eſt B C, nempè ex B D, aliud ex K; protracto enim latere A C, donec occurrat peripheriæ in E, & ducta E B, interceptum ſegmentum E F æquabitur K; & Problemati ſatisfacit. Hæc tamen conſtructio non ſatis eſt obuia; perinde enim eſt ac aſſumere DG pro quãtitate ignota, cùm potius C F, vel F D, vel C E, ſi forent aſſumptæ ad æquationem conducerent, ad quam etſi perueniatur per quantitates imaginarias, tamen effectionem ſuppeditat geometricè demonvrabilem; itaque B D, vel C D dicatur b; & E F dicatur c; at verò D F aſſumpta pro ignota quantitate eſto a: vnde C F erit b -- a; vtque C F; ſiue b--a eſt ad F E, ſeu c, ita F D, ſeu a, eſt ad B F; quamobrem hæc erit $\frac{ca}{b-a}$; & quoniam triangulum B D F eſt rectangulum, cuius latus vnum eſt a, alterum b, ipſorum quadrata $a^2 + b^2$ æqualia erunt baſeos quadrato $\frac{cc\,aa}{aa-2ba+bb}$. Quod ſi totum ducatur in $a^2 - 2ba + b^2$, proueniet æquatio $a^4 - 2ba^3 + 2b^2a^2 - 2b^3a + b^4 = c^2a^2$, ſeu quod idem eſt $a^4 - 2ba^3 \frac{+bb}{-cc} a^2 - 2b^3a + b^4 = 0$, cuius Radix eſt $\frac{1}{2}b + ℞Q(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2) - ℞Q(\frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}b\,℞(b^2 + c^2))$

Hæc tamen Reſolutionis ratio per viam admodum ſalebroſam conducit quam calcauit Carteſius; ſed infra in noſtro Promoto Geometra de huiuſmodi reſoluendi via verba faciemus. *Carteſij modus.*

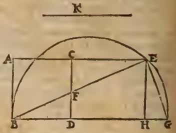
Alio quoque modo huius Problematis reſolutio poteſt inſtitui; nempe ſit B D, vel D C æqualis b: F E ſit æqualis C; inſuper B F ſit æqualis e, & D G æqualis a. Quoniam igitur E H eſt æqualis C D, vel D B, & triangulum E H G ſimile eſt triangulo B D F, erit & E G æqualis B F, nempe e. Rurſus quoniam triangula B G E, B E H, ſimilia ſunt, erit vt B G, nimirum $b + a$, ad G E, nempe e, ita B E, hoc eſt $e + c$ ad E H, hoc eſt b; multiplicatis extremis & medijs inter ſe fiet æquatio $e^2 + ce = b^2 + ba$; præterea cum triangula BFD, BEH, ſint ſimilia, ſi fiat vt BF, hoc eſt e, ad BD, ſeu b, ita BE, nempe $e + c$ ad BH, erit B H idem quod $\frac{be+bc}{e}$; quod ſi ſubtrahatur B H ex B G, hoc eſt $\frac{be+bc}{e}$, ex $b + a$, remanebit $\frac{ae-bc}{e}$ pro ipſa HG. Quoniam autẽ eſt vt BH, ad HE, ita HE ad HG, ſi multiplicetur BH, per H G, hoc eſt $\frac{be+bc}{e}$ per $\frac{ae-bc}{e}$ fiet productum [illegible] quod æquabitur b^2; hoc eſt quadrato ex H E; ac propterea $ae^2 - be^2$ æquabitur $\frac{bc}{a}e + bc^2$; ac proinde e^2 æquabitur $-ce + \frac{bc^2}{a-b}$; quæ autem eidem ſunt æqualia, ſunt etiam inter ſe æqualia; erat autem e^2 æquale $-ce + \frac{bb}{ba}$; propterea $-ce + \frac{bb}{ba}$ æquabitur $-ce + \frac{bc^2}{a-b}$: vtrinque ſublatis æqualibus, & quæ ſuperſunt ſi multiplicentur per $a - b$, fiet $ba^2 - b^3 = bc^2$; ergo per antitheſin ba^2 æquabitur $bc^2 + b^3$; & omnibus applicatis ad b, a^2 æquabitur $b^2 + c^2$. *Schooten modus.*

Auctoris modi, quibus ſuperiori Problemati fit ſatis.

Non vnus eſt procedendi modus ad ſuprapoſiti Problematis reſolutionem à nobis inuentus.

Primus eſt ſatis obuius, ſed ad imaginarias quantitates aſcendit; eſt autem huiuſmodi, vt poteſtas ſit quatuor dimenſionum, cum omnibus parodicis gradibus, in ipſa æquatione.

RESOLVTIO I.

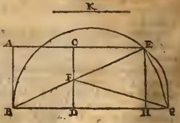


SIt B D, atque adeo C D, quidem b. F E ſit c at F C eſto a, ergo D F erit b − a; quoniam verò triangula B D F, F C E, ſunt ſimilia, proinde erit vt D F, ſcilicet b − a ad B D nempe b, ita F C, ſeu a ad C E, nimirum $\frac{ba}{b-a}$, & quoniam angulus F C E, eſt rectus $\frac{b^2a^2}{b^2-2ba+a^2}$ nẽpe quadr. ex $\frac{ba}{b-a}$ plus a^2, ſc. quad. ex F C æqu. quad. ipſius F E. erit igitur æquatio $\frac{b^2a^2}{b^2-2ba+a^2} + a^2 = c^2$, & ſublata fractione $2b^2a^2 - 2ba^3 + a^4 = b^2c^2 - 2bc^2a + c^2a^2$, & per repetitam antitheſin fiet æquatio $2b^2a^2 - c^2a^2 + 2bc^2a - 2ba^3 + a^4 = b^2c^2$. ſeu $a^4 - 2ba^3 \begin{smallmatrix}+2bb\\-cc\end{smallmatrix} a^2 + 2bc^2a - b^2c^2 = 0$.

Qua vérò Arte ex huiuſmodi æquatione eruatur Geometricè Radix, reductionis præſidio, in Specioſa explicui, & iterum in meo Promoto Geometra explicabo. Hac igitur reſoluendi ratione prætermiſſa; ad aliam accedam ſic ſe habentem.

RESOLVTIO II.

Poſitio hic ſit iuxta ſecundum modum ſupra expoſitum; vnde G E eſſe c; & D G eſſe a.



QVoniam igitur H G eſt $\frac{ac-bc}{a}$, cuius quadratum eſt $\frac{a^2c^2-2bca+b^2c^2}{a^2}$ eſt autem D F, æqualis ipſi H G, vt mox conſtabit; ergo quadratum ipſius D F, erit itidem $\frac{a^2c^2-2bca+b^2c^2}{a^2}$ cui ſi addatur a^2, nempe quadratum ipſius D G, fiet $\frac{a^2c^2-2bca+b^2c^2}{a^2} + a^2$, ſed hoc aggregatum æquale eſt aggregato quadratorum F E, E H, H G. vt infra patebit, nempe $c^2 + b^2 + \frac{a^2c^2-2bca+b^2c^2}{a^2}$, ergo vtrinque ſublatis æqualibus remanebit $a^2 = b^2 + c^2$. ergo a poterit aggregatum quadratorum ex b & c. Hinc

PORISMA.

Protrahatur B D in G, vt D G poſſit aggregatum quadratorum ex B D, & K. & hec erit quæſita æquationis Radix.

Lemma I.

Quod verò D F ſit æqualis H G ſic planum fiet. *Triangula enim B D F, E H G, ſunt ſimilia, ergo circa angulos rectos D & H, atque adeo aquales, latera erunt proportionalia, quare vt B D, ad D F, ita E H, ad H G. & permutando vt B D ad E H, ita D F, ad H G, ſed B D eſt aqualis E H; vtraque enim eſt aqualis D C, ergo D F aquabitur H G.*

Lemma II.

Quod verò aggregatum quadratorum D F, D G æquale ſit aggregato quadratorum F E, E H, H G, ſic oſtenditur *Anguli enim F D G, F E G. ſunt recti, quare aggregatum quadratorum F D, D G, aquale eſt quadrato recta F G connectentis puncta F, G, cuius quadrato aquale eſt etiam aggregatum quadratorum F E, E G. ergo aggregatum quadratorum F D, D G erit aquale aggregato quadratorum F E, E G. Quod oportebat &c.*

Componenti ſiquidem conſtat quadratum E G æquari duobus quadratis EH, HG; ergo ſi quadratum D F, plus quadrato D G, æquetur quadrato F E plus quadrato E G; æquabitur etiam quadrato F E, plus quadratis E H; H G.

COMPOSITIO.

Protrahatur B D, vſque ad G; itaut D G poſſit aggregatum quadratorum B D, & K; deinde ſuper B G, deſcripto ſemicirculo B E G, & protracta A C donec occurrat circumferentiæ in E, actaque E B, occurrente C D in F, & factum erit quod oportet. Recta ſiquidem E F, protracta ad partes F, occurrit puncto B, & eſt æqualis datæ rectæ K, vt oportet, &c.

Sic etiam obſeruare licet, quod nos multoties in reſoluendo viam inire ſolemus, quæ magis eſt ſalebroſa, cùm alioquin non deſit alia expeditiſſima, vt ſi proponeretur,

PROBLEMA.

Data recta biſſecta, ſuper ipſam conſtituere triangulum rectangulum, ita vt quæ à vertice anguli recti ducitur ad punctum biſſectionis, media ſit proportionalis inter latera circa rectum. Exemplum II.

SI quis oſcitanter huiuſmodi Problema reſoluendum aſſumat ſic Reſolutionem inſtituet. *Aduertenda quædam.* Propoſita recta ſit 2 b, dimidium eius erit b, quanta erit, quæ à vertice anguli ad biſſectionis punctum; latus vnum circa rectum eſto a, aliud erit $\frac{b^2}{a}$; ſic enim a; b; $\frac{b^2}{a}$ conſtituent analogiſmum; at ob angulum rectum ſumma quadratorum æquari debet quadrato rectæ quæ ſupponebatur 2 b; quamobrem $a^2 + \frac{b^4}{a^2}$ æquabitur $4\,b^2$; & ſublata fractione $a^4 + b^4$, æquabitur $4\,b^2 a^2$, & per antitheſin $4\,b^2 a^2 - a^4$ æquabitur b^4, cuius æquationis radix eruitur iuxta præcepta iam tradita.

Sed vide, quàm incautè inceſſerit Analyſta; plurimis enim tricis inuoluitur, cùm tamen facillima via propoſitum conſequi liceat, ſic ratiocinando. *Cautiùs procedendum Analyſtæ.* Triangulum quæſitum cùm rectangulum ſit, neceſſariò erit in ſemicirculo; hoc itaque deſcripto ſupra datam rectam imaginemur triangulum eſſe deſcriptum, cùmque recta à vertice ad biſſectionis punctum hypothenuſæ, ſeu rectæ datæ ſit ſemidiameter circuli, ſubtendet ſextantem totius peripheriæ, quo diuiſo biſariam, hinc ductis rectis ad extrema diametri conſtitutum erit quæſitum triangulum, quod facile demonſtrabitur. Hoc vnum exemplum adduxiſſe ſufficiat, vt quiſque cautus factus antequam ad Reſolutionis aliquem modum ſe adigat, ſedulò meditetur Problematis naturam; paſſim enim aduertet, niſi diligentiam adhibuiſſet ſe per viam illam fuiſſe inceſſurum, quæ ei dedecoris non parum attuliſſet; maximum enim exiſtimandum eſt peccatum in Arte per obſcura incedendo, in ea quæ obuia maximè ſunt, non impingere.

Obſeruandum autem, quod ſi reſolutio ad ſolida aſcenderit; nec alia ratione inſtitui poſſit; ſumpti Poriſmatis per modum Propoſitionis veritas analyticè eſt inquirenda; nam inde Theorema deducetur, in quo veritas demonſtrabitur, & oſtendetur quod Poriſma dictauit; atque adeò rectè illud effectionem præcepiſſe; ſed de hoc infra ſuo proprio Capite diſſeremus. *Obſeruanda quædam.*

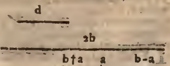
PROBLEMA.

Datum latus biſariam diuiſum, iterum in partes inæquales diſpeſcere, vt rectangulum ſub partibus ipſis inæqualibus ad quadratum intermedij ſegmenti, propoſitam rationem obtineat. Exemplum III.

Vulgaris Reſolutio foret hunc in modum.

RESOLVTIO I.

Data ſit ratio vt b ad d.



LAtus diuidendum ſit 2 b, ita vt eius dimidium ſit b, pars intermedia ſit a; maior enim pars erit $b + a$, minor verò $b - a$; rectangulum ſub partibus erit $b^2 - a^2$; ergo vt b, ad d, ita $b^2 - a^2$, ad a^2; multiplicatis extremis & medijs $b\,a^2$ æquabitur $d\,b^2 - d\,a^2$, & per antitheſin $b\,a^2 + d\,a^2$ æ-

quabitur db^2; omnibus applicatis ad $b + d$, & a^2 æquabitur $\frac{db^2}{b+d}$ tollatur fractio faciendo, vt $b + d$ ad d, ita b^2, ad aliud planum, nempè s^2; ſeu fiat vt $b + d$, ad d, ita b ad r, & inter b, r, media ſit s proportionalis, erit vt b, ad r, ita b^2, ad s^2; atque adeo vt $b + d$ ad d; ita b^2 ad s^2, ſed a^2 æquatur s^2: vnde a, media quoque erit inter b, & r; Hinc

PORISMA.

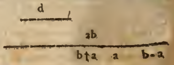
Fiat vt dimidium lateris diuidendi plus conſequenti data rationis ad ipſum terminum conſequentem, ita dimidium prædictum ad aliam magnitudinem; inter hanc enim & ipſum dimidium media proportionalis, quantitatem ignotam exhibebit.

Hæc tamen Reſolutio non admittit regreſſum niſi per comparationem ſolidorum. Aliter ergo adhibitis *Vicarijs* quantitatibus.

RESOLVTIO II.

Latus diuidendum ſit 2 b, & ratio data ſit vt b, ad d, vt Problema requirit; pars intermedia eſto a; ſic enim pars vna ſcilicet maior erit $b + a$, altera erit $b - a$; rectangulum ſub partibus eſt $b^2 - a^2$.

Quantitates b; r, *Vicaria* ab Auctore dicuntur. Quoniam igitur eſt vt b, ad d, ita $b^2 - a^2$ ad a^2; ergo componendo erit, vt $b + d$, ad d, ita b^2, ad a^2; ſed vt $b + d$, ad d, ita ſit b ad r; ergo vt b, ad r, ita erit b^2, ad a^2; ergo erit vt b ad s, mediam proportionalem inter b, & r, ita b, ad a; ergo a, media eſt proportionalis inter b, & r. Hinc

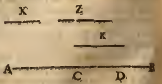


PORISMA.

Fiat vt dimidium lateris diuidendi, plus conſequente data rationis ad ipſum conſequentem; ita idem dimidium ad aliam magnitudinem; inter hanc enim, & ipſum dimidium media proportionalis, quantitatem ignotam exhibebit.

COMPOSITIO.

Sit A B bifariam diuiſa in C, diuidenda quidem in D, vt rectangulum A D B, ad quadratum C D ſit, vt A C ad X; fiat vt A C plus X, ad X, ita A C ad K, & inter A C, & K, media ſit Z, cui fiat æqualis C D; Dico, rectangulum A D B ad quadratum C D eſſe, vt A C ad X.



Ex conſtructione. Quoniam enim eſt vt A C, plus X, ad X, ita A C ad K; eſt autem z media proportionalis inter A C, & K, ſeu C D media proportionalis inter A C, & K; ergo erit vt AC, plus X, ad X, ita quadratum A C, ad quadratum C D; ergo diuidendo erit vt A C, ad X, ità quadratum A C, ſeu C B, minus quadrato C D, hoc eſt rectangulum A D B, ad quadratum C D. Quod oportebat &c.

PROBLEMA.

Exemplum IV. *Datis duobus lateribus vnum ipſorum ita producere, vt rectangulum contentum ſub compoſito ex dato, & adiuncto, & ſub adiuncto, ad quadratum alterius, itidem dati, datam habeat rationem.*

RESOLVTIO I.

Datum ſit latus b, & oporteat illi adiungere aliud, at rectangulum ſub aggregato ex dato, & adiuncto, & ſub adiuncto, ad quadratum alterius lateris dati d, datam habeat rationem, vt b, ad r; Latus adiungendum eſto a, aggregatum erit $b + a$, rectangulum

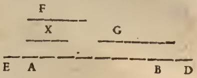
ſub

ſub hoc,& ſub a,eſt b a † a^2;vt autẽ eſt b,ad r,ita debet eſſe b a † a^2,ad d^2;multiplicatis extremis,& medijs fiet r b a † r a^2 = b d^2; omnibuſque applicatis ad r, fiet b a † a^2 = $\frac{bd^2}{r}$; tollatur fractio faciendo, vt r, ad b, ita d^2, ad z^2, & erit b a † a^2 = z^2, quæ æquatio ad analogiſmum ſi reuocetur fiet vt b † a, ad z, ita z, ad a. Hinc

PORISMA.

Fiat vt terminus conſequens ad terminum antecedentem datæ rationis, ita quadratum ſecundi lateris dati, ad quadratum aliud, cuius latere, tanquàm medio e tribus proportionalibus, & latere, cui debet fieri additio, tanquàm differentia extremorum laterum, reperiantur extrema latera; minus enim ex his quæſitam quantitatem repræſentabit.

COMPOSITIO.



Datum ſit latus A B, cui fieri debeat additio, ita vt rectangulum ſub aggregato, ex latere A B, & addito,& ſub addito ad quadratum dati lateris F, rationem habeat vt A B ad X. Fiat vt X, ad A B, ita F quadratum, ad quadratum G;mox verò G, tanquàm medio, & A B, tanquàm differentia extremorum è tribus proportionalibus, reperiantur extrema E B, B D, quorum minus ſit B D. Dico rectangulum A D B ad quadratum F, eſſe vt A B ad X. Quoniam enim eſt, vt E B ad G, ita G ad B D, erit rectangulum E B D, ſeu A D B, hoc eſt rectangulum A B D, plus quadrato B D, æquale quadrato G; ſed vt eſt X ad A B, ita quadratum F, ad quadratum G, ex conſtructione; propterea quadratum G æquabitur rectangulo orto, ex applicatione ſolidi ſub A B, in quadratum F, ad magnitudinem X. ergo quadratum B D, vnà cum rectangulo A B D æquabitur plano prædicto; omnibus igitur ductis in X, ſolidum ſub X, in rectangulum A B D, vnà cum ſolido ex X, in quadratum B D, æquabitur ſolido ex A B in quadratum F; ergo erit vt A B ad X, ita rectangulum A B D, plus quadrato B D, hoc eſt rectangulum A D B, ad quadratum F.

Hæc tamen Compoſitio minus eſt commendabilis, quod per ſolidorum comparationem procedat repetitis Analyſeos veſtigijs; longè autem melius, ſaltem clariùs eadem effectio ſic demonſtrabitur.

Quoniam igitur eſt vt X ad A B ex conſtructione, ita quadratum F ad quadratum G; ergo conuertendo erit vt A B ad X, ita quadratum G ad quadratum F, ſed quadrato G æquale eſt rectangulum E B D, ſeu A D B ex conſtructione; ergo erit vt A B ad X, ita rectangulum A D B, ad quadratum F; hæc tamen compoſitio ac demonſtratio, non procedit per Analyſeos veſtigia.

Alia igitur ineunda reſolutio hunc in modum;

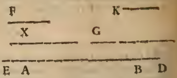
RESOLVTIO II.

Quoniam igitur eſt vt b, ad r, ita b a † a^2 ad d^2; ſi igitur fiat vt b ad r, ita s, ad d, erit vt s, ad d, ita b a † a^2, ad d^2; ſed vt s ad d, ita eſt rectangulum s d, ad d^2; ergo eadem eſt ratio b a † a^2, ad d^2, quæ eſt s d, ad d^2; ergo s d æquabitur b a † a^2; ergo vt b † a, ad d, ita s, ad a; reperiatur media inter d, & s, datas quantitates, eaque ſit z. hinc

PORISMA.

Media iam inuenta ſit quoque media è tribus proportionalibus, extremorum autem differentia ſit latus cui fieri debet additio; reperiantur extrema latera, ex his enim minus, quæſitam repræſentabit quantitatem.

COMPOSITIO.



DAtum ſit latus, cui fieri debet additio A B, & oporteat huic addere latus &c. ratio data ſit vt A B ad X, quam rectangulum ſub aggregato ex dato, & adiuncto, & ſub adiuncto, debet habere ad quadratum F; fiat vt X, ad A B, ita F ad aliam G; mox verò inter F, G, media ſit K, & hac, tanquàm medio, & A B, tanquàm differentia extremorum è tribus proportionalibus, reperiantur extrema latera, quorum minus ſit B D, maius autem E B. Dico rectangulum A D B, ad quadratum F, eſſe vt A B, ad X.

Quoniam enim ex conſtructione eſt, vt E B, ſeu A D, ad K, ita K ad B D; ſed K eſt media proportionalis inter F, & G; ergo erit vt A D ad F, ita G ad B D; ergo rectangulum ADB, æquabitur rectangulo ſub F, & G; ergo eadem eſt ratio rectanguli ſub F, & G ad quadratum F, quæ eſt rectanguli A D B, ad idem quadratum F; ſed rectangulum ſub F, & G, ad quadratum F eſt vt G ad F; ergo rectangulum A D B ad quadratem F, erit vt G ad F; ſed vt G ad F, ita eſt A B ad X; ergo vt A B ad X, ita erit rectangulum A D B, ad quadratũ F.

Problema.

Exemplum VII. *E tribus lateribus continuè proportionalibus, dato medio, inuenire extrema, vt maius, plus multiplici medio, ad minus, plus aquè multiplici medio, datam rationem obtineat.*

Datum ſit medium latus b, & ratio data ſit vt b, ad r, quam debet habere maius plus, exempli gratia, triplo medio, ad minus plus triplo medio.

RESOLVTIO.

LAtus maius quæſitum eſto a; medium autem datum eſt b; propterea minus *erit* $\frac{bq}{a}$; ac verò maius plus triplo medio eſt $a + 3b$; ſed minus plus triplo medio, ſeu quod idem eſt triplum medium plus minori eſt $3b + \frac{bq}{a}$. Quoniam igitur eſt vt b, ad r, ita $a + 3b$, ad $3b + \frac{bq}{a}$; ergo permutando erit vt b, ad $a + 3b$, ita r, ad $3b + \frac{bq}{a}$, & conuertendo, vt $3b + \frac{bq}{a}$ ad r; ita a ✱ 3 b ad b. Eſt autem vt a, ad b, ita b, ad $\frac{bq}{a}$; ac propterea, vt mox conſtabit, vt $b + \frac{3bq}{a}$, ad $\frac{bq}{a}$, ita $a + 3b$, ad b; ergo vt $3b + \frac{bq}{a}$, ad r, ita $b + \frac{3bq}{a}$ ad $\frac{bq}{a}$; ergo triplatis conſequentibus erit vt $3b + \frac{bq}{a}$ ad 3 r, ita $b + \frac{3bq}{a}$ ad $\frac{3bq}{a}$; ergo diuidendo vt $3b - 3r + \frac{bq}{a}$, ad 3 r, *ita b*, ad $\frac{3bq}{a}$. Claritatis gratia, loco ipſius $3b - 3r$, ſubſtituatur m, perindeque ſit ac vt $m + \frac{bq}{a}$ ad 3 r, ita b, ad $\frac{3bq}{a}$; ergo ſubtriplatis conſequentibus erit vt $m + \frac{bq}{a}$, ad r, ita b, ad $\frac{bq}{a}$.

Vides igitur quatuor eſſe proportionales magnitudines, quarum extremæ $m + \frac{bq}{a}$, & $\frac{bq}{a}$, differunt per m; atque adeo per $3b - 3r$ datam magnitudinem; mediæ verò ſunt r, & b datæ, rectangulum ſub quibus ignorari non poteſt atque adeo recta, quæ illud poſſit. Hinc

PORISMA.

Recta, quæ poteſt rectangulum ſub terminis datæ rationis, tanquàm media è tribus proportionalibus, differentia verò inter triplos prædictos terminos, tanquàm differentia extremarum, reperiantur ipſa extrema; minor enim quæ oritur ſi applicetur quadratum termini antecedentis datæ rationis, quod erat medium è tribus lateribus ad latus maius, eſt latus minus quæſitum &c.

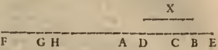
Lemma.

Quod autem ſi fuerit vt a, ad b, ita b, ad $\frac{bq}{a}$, debeat etiam eſſe vt $b + \frac{3bq}{a}$ ad $\frac{bq}{a}$, ita $a + 3b$, ad b. ſic planum fiet. *Cùm enim fuerint tres magnitudines proportionales, fuerintque acceptæ duæ magnitudines in eadem ratione ad ſecundam & tertiam, erit vt prima plus magnitudine*

reſpi-

reſpiciente ſecundam ad ſecundam, ita ſecunda plus magnitudine reſpiciente tertiam ad tertiam; at verò a eſt prima: b, ſecunda: $\frac{bb}{a}$ tertia; vtque eſt 3 b, ad b, ita $\frac{3bb}{a}$ ad $\frac{bb}{a}$; propterea, vt dicebamus quemadmodum eſt a † 3 b, ad b ita b † $\frac{3bb}{a}$, ad $\frac{bb}{a}$.

COMPOSITIO.



Datum ſit latus medium A B, dataque ſit ratio A B ad B C; erit autem vt patet maioris ad minus, & inter A B, B C, media ſit adinuenta proportionalis X, & B A protracta ad partes A in F, ita vt F B ſit multiplex ipſius A B, vt Problema requirit, nempè tripla. Deinde ex F B, ablata F H tripla ipſius C B, vt remaneat H B pro differentia, quæ eſt inter triplos terminos datæ rationis; mox verò recta X, tanquàm media, quæ fuit adinuenta potens rectangulum A B C, & H B, tanquàm differentia extremorum laterum, reperiantur extrema B G, G H; fiat autem A D æqualis ipſi G H, & fiat vt A D ad A B, ita A B ad A E. Dico eſſe, vt A E, plus tripla A B, ad A D, plus tripla A B, ita A B ad B C. *Erit GH. minor quàm A B, cum X ſit eadem A B minor.*

Quoniam igitur ex conſtructione vt eſt G B, hoc eſt B H, plus G H, ſeu plus A D, ad X, ita X ad G H, ſiue A D, erit rectangulum B G H æquale quadrato X; ſed eidem æquale eſt ex conſtructione rectangulum A B C; ergo rectangulum B G H æquabitur rectangulo A B C; ergo erit, vt B G, hoc eſt vt B H, plus H G, ad B C, ita A B, ad G H; ergo triplatis conſequentibus vt B H, plus G H, ad triplam C B, hoc eſt ad F H, ita A B, ad triplam G H, & componendo vt B H, plus tripla C B, hoc eſt plus F H, hoc eſt vt B F, plus G H, ſiue A D, ad F H; ita A B, plus tripla G H, ad triplam G H; ergo ſubtriplatis conſequentibus erit vt B F, nempe tripla A B, plus G H, ſiue A D, ad C B, ita A B, plus tripla G H, ſiue A D, ad ipſam G H, vel A D; cùmque ſit vt A E ad A B, ita A B ad A D; Id enim conuertendo ex conſtrutione; atque adeo vt A B plus tripla G H, ad G H, ſeu A D, ita A E, plus tripla A B ad A B; ergo vt tripla A B plus A D ad B C ita A E plus tripla A B ad A B. conuertendo propterea erit vt A B ad A E, plus tripla A B, nempè F B, ita C B ad triplam A B, ſeu ad F B, plus G H, vel A D; ergo permutando vt A B, ad C B, ita A E, plus F B, hoc eſt tripla A B, ad eadem F B, ſeu tripla A B, plus A D.

Quod autem diximus de multiplici ratione tripla, de alia quacunque multiplici ratione intellige. Imò poteſt Problema vniuerſaliùs concipi.

E tribus lateribus proportionalibus dato medio, extrema reperire latera vt maius cum medio, plus aliqua magnitudine, quæcunque huius ſit ratio ad medium, ſit ad minus, plus eadem magnitudine in data ratione,

Problema.

Dato vno ex lateribus trianguli, rectum angulum ambientibus, datoque aggregato ex reliquo latere, & baſi, reperire triangulum. *Exemplum VIII.*

RESOLVTIO,



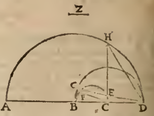
Datum ſit latus circa rectum d; reliquorum aggregatum ſit b. Oporteat &c. latus alterum circa rectum eſto a, baſis igitur erit b -- a. quadratum iſtius eſt b^2 -- 2 b a ✠ a^2. illius autem quadratum eſt b^2 -- 2 b a; quod æquabitur d^2, & per antitheſin 2 b a æquabitur b^2 -- d^2 quare fiet analogiſmus 2 b; ℞ (b^2 -- d^2); a, Hinc

PORISMA,

Vt duplum aggregati dati, ad rectam, quæ poteſt differentiam inter quadratum aggregati dati, & quadratum dati lateris, ita huiuſmodi linea ad aliud; hoc enim erit latus alterum circa rectum.

COM-

COMPOSITIO.



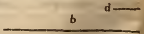
Datum ſit B D, aggregatum ex latere circa rectũ, & ex baſi. Datumque ſit z latus alterum circa rectum. Oporteat facere &c.

Supra B D deſcribatur ſemicirculus B G D, in quo accommodetur B G æqualis Z; ducaturque G D; duplicetur B D in A, & ſuper A D, deſcribatur ſemicirculus A H D; in quo accommodetur D H, æqualis D G, ex puncto autem H, cadat perpendicularis HC, ſecans A D in C. Mox autem ſupra B G deſcribatur ſemicirculus B F C in quo accommodetur C F, æqualis C D ducaturque B F. Dico triangulum B F C, Problemati ſatisfacere. Quandoquidem triangulum B F C, vtpote conſtitutum in ſemicirculo rectangulum eſt, & laterum B C, C F, aggregatum æquale eſt aggregato dato B D; ſiquidem B C communis eſt, & C F facta eſt æqualis C D. Supereſt, vt oſtendamus B F, latus alterum circa rectum æquale eſſe B G, ſiue Z lateri dato. Id autem ſic demonſtrabimus. Quoniam igitur eſt, vt A D, ad D H, ſeu D G, ita D G ad D C; erit rectangulum A D C, hoc eſt duplum rectangulum B D C, æquale quadrato G D, nempe differentiæ inter quadratum B D, & B G. vtrinque addito quadrato B G, fiet duplum rectangulum B D C, vna cum quadrato B G, æquale quadratis B G, G D, hoc eſt quadrato B D, vtrinque ſublato duplo rectangulo B D, C remanebit quadratum B G, æquale quadrato B D minus duplo rectangulo B D C; at quadratum B D minus duplo rectangulo B D C æquale eſt differentiæ quadratorum B C, C D, hoc eſt B C, C F, differentia verò quadratorum B C, C F, eſt quadratum B F, ergo quadratum B G æquabitur quadrato B F, ergo B G æquabitur B F, atque dato Z. Dato igitur vno ex lateribus trianguli &c. triangulum adinuenimus. Quod facere oportebat &c.

Problema.

Exemplum VIIII. *Datum latus ita diſpeſcere, vt rectangulum ſub toto, & parte, ad quadratum alterius partis ſit in ratione data.*

RESOLVTIO I.



Datum ſit latus b, diuidendum, vt rectangulum ſub toto, & parte, ad quadratum alterius partis ſit in ratione, vt b ad d. Pars vna eſto a, altera erit b — a, rectangulum ſub tota, & parte b — a erit $b^2 - b a$; quadratum alterius partis eſt a^2; ergo vt b, ad d, ita $b^2 - b a$, ad a^2; multiplicatis extremis & medijs, fiet æquatio $b a^2 = d b^2 - d b a$; & per antitheſin $b a^2 + d b a$ æquabitur $d b^2$; omnibus applicatis ad b; $a^2 + d a$ æquabitur $d b$, huius æquationis radix eſt ℞$(\frac{1}{4} d^2 + b d) - \frac{1}{2} d$. Hinc

PORISMA.

Ad quadratum dimidij termini conſequentis addatur rectangulum ſub eodem termino & latere diuidendo, ex aggregati latere ſubtrahatur dimidium ipſius termini. Vel

Fiant tria latera proportionalia, ita vt extremorum differentia ſit terminus conſequens, medium autem ſit id quod poteſt rectangulum ſub latere prædicto, & latere diuidendo; hoc eſt

Termino conſequente datæ rationis tanquam differentia extremorum & rectangulo ſub terminis ipſis tanquam rectangulo ſub extremis tria latera proportionalia reperiantur; minus enim extremum ignotam quantitatem exhibebit.

COMPOSITIO.



DAtum ſit latus A B diuidendum, vt Problema requirit; ratio data ſit vt A B ad E A, ſuper rectam E B deſcribatur ſemicirculus E G B, & ex puncto A excitetur perpendicularis A G, quæ poteſt rectangulum E A B, comprehenſum ſub terminis E A, A B, datæ rationis; mox autem termino conſequente E A biſſecto quidem in D, agatur DG, & centro D, interuallo D G, deſcribatur ſemicirculus F G C ſecans A B, in C. Dico rectangulum A B C, ad quadratum A C eſſe, vt A B ad E A; Protrahatur B E ad partes F, donec occurrat circumferentiæ in F.

Quoniam igitur rectangulum F A C æquale eſt quadrato A G, cui æquale eſt rectangulum B A E; ergo rectangulum F A C æquabitur rectangulo B A E, quare vt F A, ad A E, ita B A ad A C; & diuidendo vt F E, ad E A, ita B C, ad C A; Eſt* autem F E æqualis A C; ergo vt C A ad A E, ita B C ad C A; ergo rectangulum ſub E A, & C B æquabitur quadrato A C; ob id rectangulum A B C ad quadratum A C eandem habebit rationem, quam habet ad rectangulum ſub E A, & C B; ſed rectangulum A B C, ad rectangulum ſub E A, & C B rationem habet vt A B, ad EA, ob eandem altitudinem C B; ergo rectangulum A B C, ad quadratum A C rationem habebit vt A B ad E A. * Eſt enim DE, æqualis AD; & DF, æqualis DC, ergo FE æquabitur AC.

Hæc tamen Compoſitio non proceſſit per filium reſolutionis, cùm hæc ad ſolida aſcenderit. Longè igitur elegantiùs inſtitui poteſt reſolutio hunc in modum.

RESOLVTIO II.

IIſdem ſuppoſitis nempe quod A B ſit b, & A E ſit d: A C erit a, & C B, erit b - a.

Quoniam igitur eſt vt b, ad d, ita b' - b a, ad a'; ſed vt b, ad d, ob communem altitudinem b - a, ita eſt b' - b a, ad b d - d a; ergo eadem erit ratio b' - b a, ad a', & ad b d - d a; ergo b d - d a æquabitur a'; ergo vt b - a, ad a, ita a, ad d; ergo componendo, vt b, ad a, ita a + d, ad d; & conuertendo vt d, ad d + a, ita a, ad b; At verò z poſſit b d, erit igitur vt d + a, ad z ita z, ad a. Hinc

PORISMA.

Termino conſequente rationis data, tanquàm differentia extremorum & recta qua poteſt rectangulum ſub terminis data rationis tanquàm medio, reperiantur tria latera proportionalia; minus enim extremum ignotam quantitatem exhibebit.

COMPOSITIO.

EOdem ſchemmate repetito, eademque conſtructione facta. Quoniam igitur eſt vt FA, ad A G, ita A G, ad A C; eſt autem A G potens rectangulum E A B; ergo erit vt EA, ad F A, ita A C ad A B; & conuertendo vt A B ad A C, ita F A, ad E A; ergo diuidendo vt B A, minus A C, ad A C, ita F E, ſeu A C ad E A; ergo rectangulum B A E, minus rectangulo E A C æquabitur quadrato A C; ergo, quæ ratio eſt quadrati A B, minus rectangulo B A C, ad quadratum A C, eadem erit ad rectangulum B A E, minus rectangulo E A C; ſed quadratum A B, minus rectangulo B A C, ad rectangulum B A E, minus rectangulo E A C, ob communem altitudinem A B, minus A C, hoc eſt ob communem altitudinem C B, eſt vt A B, ad A E; ergo vt A B ad A E, ita quadratum A B, minus rectangulo B A C, hoc eſt ita rectangulum A B C, ad quadratum A C.

Problema.

eropoſitum latus in duas partes diuidere vt harum vtriuſque, non tamen eadem data partes ſico-

ſi coniungantur, datum latus conficiant. Oportet autem, vt ſumma conficienda in medio ſit partium propoſiti lateris, quæ ſcilicet ſiunt, ſi lateris ab initio propoſiti accipiantur.

RESOLVTIO.

PRopoſitum latus ſit b, diuidendum in duas partes, vt dimidium vnius, plus ſexta parte alterius efficiat d. Dimidium vnius partis ſit a; ergo pars ipſa erit 2 a; quoniam autem a, cum ſexta parte alterius partis, è duabus nimirum, in quas datum latus diuidendum eſt, debet efficere d, & a, cum d — a, efficit d, ob id ſexta pars alterius erit d — a; proinde integra pars erit 6 d — 6 a; hæ autem partes efficere debent b; proinde fiet æquatio 6 d — 4 a = b; & per antitheſin 4 a = 6 d -- b; quamobrem $\frac{6d - b}{4}$ æquabitur a, Hinc deducitur

PORISMA.

A ſextuplo lateris conficiendi ſubtrahatur latus diuidendum, hoc eſt multiplicetur latus conficiendum, per denominatorem maioris rationis quam habere debet pars vna, ad ſuam particulam; à producto ſubtrahatur latus diuidendum, reſiduum verò diuidatur per hunc denominatorem, minus alio denominatore, nam in quotiente proſiliet quantitas quæſita.

RESOLVTIO.

Potuiſſet etiam ſic inſtitui

PArs vna eſto a, alia erit b — a, illius dimidium eſt $\frac{1}{2}$ a, ſextans eſt $\frac{b-a}{6}$; quæ ſimul debent æquari d; ergo 2 b + 4 a æquabitur 12 d; ergo b + 2 a æquabitur 6 d; ergo 6 d - b æquabitur 2 a; ergo $\frac{6d-b}{2}$ æquabitur a. Hinc Poriſma &c.

In priori Reſolutione a valet dimidiam partis, in hac autem integra pars.

Quoniam autem Problema iſtud proponi poteſt ſecundùm quamcumque rationem, ob id iuvabit illud iuxta hanc generalitatem reſoluere.

Datum ſit latus diuidendum b; dataque ſit ratio vt r, ad s, quam habere debet pars vna è duabus ad ſui particulam, quæ vna cum particula alterius, ad quam pars illa habere debet rationem vt t, ad s, conficere debet d.

Particula vnius partis eſto a; ergo pars ipſa erit $\frac{ta}{s}$; hoc enim modo eſt vt s, ad t, ita quidem a, ad $\frac{ta}{s}$. Deinde particula alterius partis, ad quam pars iſta eſt vt r, ad s, erit quidem d — a; hoc enim modo particula, ad quam pars eſt vt r, ad s, vnà cum particula alterius partis ad quam nimirum ipſa pars eſt vt t, ad s, ſimul conficient d; quamobrem è duabus partibus, quarum vna erat $\frac{ta}{s}$, alia erit $\frac{rd - ra}{s}$; hoc enim pacto erit vt s, ad r, ita d — a, ad $\frac{rd - ra}{s}$ harum autem aggregatum eſt $\frac{rd - ra}{s}$ + $\frac{ta}{s}$ hoc eſt $\frac{rd - ra + ta}{s}$, quod æquabitur b; omnibus autem ductis in s, r d — r a + t a, æquabitur b s; & per antitheſin r d — s b, æquabitur r a — t a, ſeu quod idem eſt r a — t a, æquabitur r d — s b; inſtituto paraboliſmo $\frac{rd - sb}{r - t}$ æquabitur a. Hinc

PORISMA.

Quoniam rationis tres ſunt termini ordine propoſiti Poriſma concipi poteſt.

Ducatur latus efficiendum in terminum primum, à quo ſubtrahatur rectangulum factum à latere diuidendo in terminum vltimum; ſi namque reſiduum applicetur ad differentiam inter terminum medium, & vltimum, orietur particula quæſita &c.

COMPOSITIO.

DAtum ſit latus diuidendum A B, latus verò conficiendum datum ſit Z, & oporteat ſupradictum latus ita diuidere in duas partes, vt vnius ex ipſis particula, ad quam pars eſt vt T, ad S, vnà cum particula alterius partis, quæ ad ſui particulam eſt vt R ad S, conficiat datum latus Z. Protrahatur A B vſque ad C, adeo vt B C ſit æqualis S, & ſuper A C deſcripto ſemicirculo, erigatur B G, hæc autem poterit rectangulum A B C. Deinde ſiat

B E æqua-

B E æqualis R, & L B ſit æqualis Z; ſuper L E deſcribatur peripheria L F E ſecans G B protractam in F; ſuper B F deſcribatur peripheria B I F, in qua aptetur B I æqualis BG; & agatur FI, cui fiat æqualis B H: mox ſit D E æqualis T, vt B D ſit differentia inter BE, & D E. puncto in A B tanquam centro deſcribatur peripheria tranſiens per puncta D, H, vt ſæpe dictum fuit ſecans A B in M, eritque B M particula habens ad ſuam partem proportionem, vt S, ad T; fiat igitur vt S ad T, ita B M, ad BK, & quidem B K erit pars, ſi itaque N K ſignetur æqualis L M, habebitur particula N K, quæ ad A K habebit rationem vt S ad R, & cum M B conficiet magnitudinem L B ſeu Z. Hactenus effectio Geometrica. Demonſtratio ſic ſe habet.

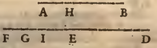


Quoniam igitur M B oritur ex applicatione quadrati B F, minus quadrato ex B G, ſeu B I, hoc eſt quadrati F I, ſeu B H, ad B E, minus D E, hoc eſt ad B D, ſeu quod idem eſt ex applicatione rectanguli L B E, minus rectangulo A B C ad B E minus D E; fiet M B E rectangulum minus rectangulo ſub M B, in D E æquale rectangulo L B E, minus A B C rectangulo, atque adeo rectangulum L B E, minus rectangulo M B E, plus rectangulo M B in D E, æquabitur A B C rectangulo; applicatis autem omnibus ad B C fiet $\frac{LBE - MBE + MB\ in\ DE}{BC}$ = A B, ſeu $\frac{LBE - MBE}{BC}$ + $\frac{MB\ in\ DE}{BC}$, ſeu $\frac{LM\ in\ BE}{BC}$ + $\frac{MB\ in\ DE}{BC}$ = A B, hoc eſt ortiua magnitudo ex prædicta applicatione æqualis A B. magnitudo ortiua ex applicatione L B E minus M B E ad B C ſit Y. & ex applicatione M B in D E ad B C ſit Z; ſic enim hæc ad Geometricam phraſin erunt eleganter traducta; vnde Y plus Z æquabitur A B. Cumque ſit vt B C ad D E, ita M B, ad Z quod oritur ex applicatione M B in D E ad B C, factumq; ſit vt B C ad D E, ſeu vt S ad T, ita M B, ad K B, erit K B, id quod ex huiuſmodi applicatione oritur, nempe æqualis Z quod cum Y latere oriente ex applicatione L B E, minus M B E ad B C, efficiet A B, efficit autem A B ſi addatur ipſi A K; ergo A K erit quod ex huiuſmodi oritur applicatione, & æquabitur Y. Reliquum verò eſt, vt N K oſtendatur eſſe ad A K, ſeu Y vt B C ad B E, ſeu vt S ad R; nam cum M B facit magnitudinem æqualem L B, ſeu Z. Quoniam ergo eſt vt B C ad B E, ita L B, minus M B, hoc eſt L M, hoc eſt N K ad id quod oritur ex applicatione L B E, minus M B E, ad B C; ſed A K ſeu Y, eſt id, quod oritur ex huiuſmodi applicatione vt dictum eſt; ergo vt B C ad B E, ſeu vt S ad R, ita erit N K ad A K. Diuiſum eſt ergo latus A B in K, ita vt particula eius M B, ad quam K B eſt vt T ad S, vna cum N K particula, ad quam pars A K rationem habet vt R ad S, conficit datam magnitudinem Z. Quod facere oportebat.

SCHOLION.

SI ratio fuerit multiplex, hunc in modum ratiocinandum.

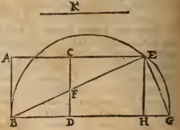
Latus diuidendum ſit A B; conficiendum verò F I. Sumatur F D ſextuplum ipſius F I, à quo ſubtrahatur E D æqualis A B; reſiduum F E diuidatur in quatuor partes; eiuſq; pars quarta ſit F G, hæc enim erit quantitas quæſita; Si itaque in A B, ſignetur A H æqualis duplæ F G, erit quidem AH vna ex partibus, cuius dimidium, nempe F G, vna cum G I ſexta parte ipſius H B, conficiet F I.



Et quoniam F G, vna cum G I, conficit F I latus conficiendum; eſtque F G, dimidium ipſius A H ex conſtructione; ſupereſt oſtendendum G I, eſſe ſextam partem ipſius H B.

Quoniam igitur F G, quarta pars eſt ipſius F E; hoc eſt; quarta pars eſt rectæ F D, ſextupli, conficiendi lateris F I, minus E D, ſeu A B, latere diuidendo; propterea quadrupla F G, æquabitur ſextuplo F I minus E D; ergo per antitheſin F D, hoc eſt ſextuplum F I minus quadruplo F G, hoc eſt F E, æquabitur E D ſeu A B; Itaque pars vna ipſius A B, erit dupla F G nempe A H; altera, puta H B erit F D, nempe ſextuplum F I minus ſextuplo F G. Hunc enim in modum dupla F G, addita ipſi F D, nempe ſextuplo F I, minus ſextuplo F G, facit E D, ſeu A B, eſt autem

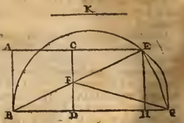
RESOLVTIO I.



SIt B D, atque adeo C D, quidem b. F E ſit c at F C eſto a, ergo D F erit $b - a$; quoniam verò triangula B D F, F C E, ſunt ſimilia, proinde erit vt D F, ſcilicet $b - a$ ad B D nempe b. ita F C, ſeu a ad C E, nimirum $\frac{ba}{b-a}$, & quoniam angulus F C E, eſt rectus $\frac{b^2a^2}{b^2-2ba+a^2}$ nēpe quadr. ex $\frac{ba}{b-a}$ plus a^2, ſc. quad. ex F C æqu. quad. ipſius F E. erit igitur æquatio $\frac{b^2a^2}{b^2-2ba+a^2} + a^2 = c^2$, & ſublata fractione $2b^2a^2 - 2ba^3 + a^4 = b^2c^2 - 2bc^2a + c^2a^2$, & per repetitam antitheſin fiet æquatio $2b^2a^2 - c^2a^2 + 2bc^2a - 2ba^3 + a^4 = b^2c^2$, ſeu $a^4 - 2ba^3 \frac{+2b^2}{-c^2} a^2 + 2bc^2a - b^2c^2 = 0$.

Qua verò Arte ex huiuſmodi æquatione eruatur Geometricè Radix, reductionis præſidio, in Specioſa explicui, & iterum in meo Promoto Geometra explicabo. Hac igitur reſoluendi ratione prætermiſſa; ad aliam accedam ſic ſe habentem.

RESOLVTIO II.



Poſitio hic ſit iuxta ſecundum modum ſupra expoſitum; vnde G E eſt c, & D G eſt a.

QVoniam igitur H G eſt $\frac{ac-bc}{e}$, cuius quadratum eſt $\frac{a^2c^2-2bac^2+b^2c^2}{e^2}$ eſt autem D F, æqualis ipſi H G, vt mox conſtabit; ergo quadratum ipſius D F, erit itidem $\frac{a^2c^2-2bac^2+b^2c^2}{e^2}$ cui ſi addatur a^2, nempe quadratum ipſius D G, fiet $\frac{a^2c^2-2bac^2+b^2c^2}{e^2} + a^2$, ſed hoc aggregatum æquale eſt aggregato quadratorum F E, E H, H G. vt infra patebit, nempe $c^2 + b^2 + \frac{a^2c^2-2bac^2+b^2c^2}{e^2}$, ergo vtrinque ſublatis æqualibus remanebit $a^2 = b^2 + c^2$. ergo a poterit aggregatum quadratorum ex b & c. Hinc

PORISMA.

Protrahatur B D in G, vt D G poſſit aggregatum quadratorum ex B D, & K. & hæc erit quæſita æquationis Radix.

Lemma I.

Quod verò D F ſit æqualis H G ſic planum fiet. *Triangula enim B D F, E H G, ſunt ſimilia, ergo circa angulos rectos D & H, atque adeo æquales, latera erunt proportionalia, quare vt B D, ad D F, ita E H, ad H G. & permutando vt B D ad E H, ita D F, ad H G, ſed B D eſt æqualis E H; vtraque enim eſt æqualis D C, ergo D F æquabitur H G.*

Lemma II.

Quod verò aggregatum quadratorum D F, D G æquale ſit aggregato quadratorum F E, E H, H G, ſic oſtenditur *Anguli enim F D G, F E G. ſunt recti, quare aggregatum quadratorum F D, D G, æquale eſt quadrato rectæ F G connectentis puncta F, G, cuius quadrato æquale eſt etiam aggregatum quadratorum F E, E G. ergo aggregatum quadratorum F D, D G erit æquale aggregato quadratorum F E, E G. Quod oportebat &c.*

Componenti ſiquidem conſtat quadratum E G æquari duobus quadratis EH, HG; ergo ſi quadratum D F, plus quadrato D G, æquetur quadrato F E plus quadrato E G; æquabitur etiam quadrato F E, plus quadratis E H; H G.

COMPOSITIO.

Protrahatur B D, vſque ad G; itaut D G poſſit aggregatum quadratorum B D, & K; deinde ſuper B G, deſcripto ſemicirculo B E G, & protracta A C donec occurrat circumferentiæ in E, actaque E B, occurrente C D in F, & factum erit quod oportet. Recta ſiquidem E F, protracta ad partes F, occurrit puncto B, & eſt æqualis datæ rectæ K, vt oportet, &c.

Sic etiam obſeruare licet, quod nos multoties in reſoluendo viam inire ſolemus, quæ magis eſt ſalebroſa, cùm alioquin non deſit alia expeditiſſima, vt ſi proponeretur,

PROBLEMA.

Data recta biſecta, ſuper ipſam conſtituere triangulum rectangulum, ita vt quæ à vertice anguli recti ducitur ad punctum biſſectionis, media ſit proportionalis inter latera circa rectum. Exemplum II.

SI quis oſcitanter huiuſmodi Problema reſoluendum aſſumat ſic Reſolutionem inſtituet. Propoſita recta ſit 2 b, dimidium eius erit b, quanta erit, quæ à vertice anguli ad biſſectionis punctum; latus vnum circa rectum eſto a, aliud erit $\frac{b^2}{a}$; ſic enim a; b; $\frac{b^2}{a}$ conſtituent analogiſmum; at ob angulum rectum ſumma quadratorum æquari debet quadrato rectæ quæ ſupponebatur 2 b; quamobrem $a^2 + \frac{b^4}{a^2}$ æquabitur $4\,b^2$; & ſublata fractione $a^4 + b^4$, æquabitur $4\,b^2\,a^2$, & per antitheſin $4\,b^2\,a^2 - a^4$ æquabitur b^4, cuius æquationis radix eruitur iuxta præcepta iam tradita. *Aduertenda quædam.*

Sed vide, quàm incautè inceſſerit Analyſta; plurimis enim tricis inuoluitur, cùm tamen facillima via propoſitum conſequi liceat, ſic ratiocinando. Triangulum quæſitum cùm rectangulum ſit, neceſſariò erit in ſemicirculo; hoc itaque deſcripto ſupra datam rectam imaginemur triangulum eſſe deſcriptum, cùmque recta à vertice ad biſſectionis punctum hypothenuſæ, ſeu rectæ datæ ſit ſemidiameter circuli, ſubtendet ſextantem totius peripheriæ, quo diuiſo biſariam, hinc ductis rectis ad extrema diametri conſtitutum erit quæſitum triangulum, quod facile demonſtrabitur. Hoc vnum exemplum adduxiſſe ſufficiat, vt quiſque cautus factus antequam ad Reſolutionis aliquem modum ſe adigat, ſedulò meditetur Problematis naturam; paſſim enim aduertet, niſi diligentiam adhibuiſſet ſe per viam illam fuiſſe inceſſurum, quæ ei dedecoris non parum attuliſſet; maximum enim exiſtimandum eſt peccatum in Arte per obſcura incedendo, in ea quæ obuia maximè ſunt, non impingere. *Cautiùs procedendum Analyſtæ.*

Obſeruandum autem, quod ſi reſolutio ad ſolida aſcenderit; nec alia ratione inſtitui poſſit; ſumpti Poriſmatis per modum Propoſitionis veritas analyticè eſt inquirenda; nam inde Theorema deducetur, in quo veritas demonſtrabitur, & oſtendetur quod Poriſma dictauit; atque adeò rectè illud effectionem præcepiſſe; ſed de hoc infra ſuo proprio Capite diſſeremus. *Obſeruanda quædam.*

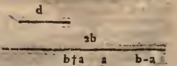
PROBLEMA.

Datum latus biſariam diuiſum, iterum in partes inæquales diſpeſcere, vt rectangulum ſub partibus ipſis inæqualibus ad quadratum intermedij ſegmenti, propoſitam rationem obtineat. Exemplum III.

Vulgaris Reſolutio foret hunc in modum.

RESOLVTIO I.

Data ſit ratio vt b ad d.



LAtus diuidendum ſit 2 b, ita vt eius dimidium ſit b, pars intermedia ſit a; maior enim pars erit b + a, minor verò b − a; rectangulum ſub partibus erit $b^2 - a^2$; ergo vt b, ad d, ita $b^2 - a^2$, ad a^2; multiplicatis extremis & medijs $b\,a^2$ æquabitur $d\,b^2 - d\,a^2$, & per antitheſin $b\,a^2 + d\,a^2$ æ-

quabitur $d b^2$; omnibus applicatis ad $b + d$, & a^2 æquabitur $\frac{db^2}{b+d}$ tollatur fractio faciendo, vt $b + d$ ad d, ita b^2, ad aliud planum, nempè s^2; ſeu fiat vt $b + d$, ad d, ita b ad r, & inter b, r, media ſit s proportionalis, erit vt b, ad r, ita b^2, ad s^2; atque adeo vt $b + d$ ad d; ita b^2 ad s^2, ſed a^2 æquatur s^2: vnde a, media quoque erit inter b, & r; Hinc

PORISMA.

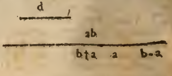
Fiat vt dimidium lateris diuidendi plus conſequenti data rationis ad ipſum terminum conſequentem, ita dimidium prædictum ad aliam magnitudinem; inter hanc enim & ipſum dimidium media proportionalis, quantitatem ignotam exhibebit.

Hæc tamen Reſolutio non admittit regreſſum niſi per comparationem ſolidorum. Aliter ergo adhibitis *Vicarys* quantitatibus.

RESOLVTIO II.

LAtus diuidendum ſit 2 b, & ratio data ſit vt b, ad d, vt Problema requirit; pars intermedia eſto a; ſic enim pars vna ſcilicet maior erit $b + a$, altera erit $b - a$; rectangulum ſub partibus eſt $b^2 - a^2$.

Quantitates b; r, *Vicaria* ab Auctore dicuntur. Quoniam igitur eſt vt b, ad d, ita $b^2 - a^2$ ad a^2; ergo componendo erit, vt $b + d$, ad d, ita b^2, ad a^2; ſed vt $b + d$, ad d, ita ſit b ad r; ergo vt b, ad r, ita erit b^2, ad a^2; ergo erit vt b ad s, mediam proportionalem inter b, & r, ita b, ad a; ergo a, media eſt proportionalis inter b, & r. Hinc

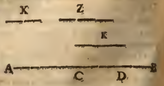


PORISMA.

Fiat vt dimidium lateris diuidendi, plus conſequente data rationis ad ipſum conſequentem; ita idem dimidium ad aliam magnitudinem; inter hanc enim, & ipſum dimidium media proportionalis, quantitatem ignotam exhibebit.

COMPOSITIO.

SIt A B bifariam diuiſa in C, diuidenda quidem in D, vt rectangulum A D B, ad quadratum C D ſit, vt A C ad X; fiat vt A C plus X, ad X, ita A C ad K, & inter A C, & K, media ſit Z, cui fiat æqualis C D; Dico rectangulum A D B ad quadratum C D eſſe, vt A C ad X.



Ex conſtructione. Quoniam enim eſt vt A C, plus X, ad X, ita A C ad K; eſt autem z media proportionalis inter A C, & K, ſeu C D media proportionalis inter A C, & K; ergo erit vt AC, plus X, ad X, ita quadratum A C, ad quadratum C D; ergo diuidendo erit vt A C, ad X, itá quadratum AC, ſeu C B, minus quadrato C D, hoc eſt rectangulum A D B, ad quadratum C D. Quod oportebat &c.

PROBLEMA.

Exemplum IV. *Datis duobus lateribus vnum ipſorum ita producere, vt rectangulum contentum ſub compoſito ex dato, & adiuncto, & ſub adiuncto, ad quadratum alterius, itidem dati, datam habeat rationem.*

RESOLVTIO I.

DAtum ſit latus b, & oporteat illi adiungere aliud, at rectangulum ſub aggregato ex dato, & adiuncto, & ſub adiuncto, ad quadratum alterius lateris dati d, datam habeat rationem, vt b, ad r; Latus adiungendum eſto a, aggregatum erit $b + a$, rectangulum

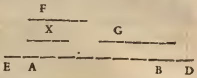
ſub

ſub hoc,& ſub a,eſt $b\,a \dagger a^2$;vt autẽ eſt b,ad r,ita debet eſſe $b\,a \dagger a^2$,ad d^2;multiplicatis extremis,& medijs fiet $r\,b\,a \dagger r\,a^2 = b\,d^2$; omnibuſque applieatis ad r, fiet $b\,a \dagger a^2 = \frac{bd^2}{r}$; tollatur fractio faciendo, vt r, ad b, ita d^2, ad z^2, & erit $b\,a \dagger a^2 = z^2$, quæ æquatio ad analogiſmum ſi reuocetur fiet vt $b \dagger a$, ad z, ita z, ad a. Hinc

PORISMA.

Fiat vt terminus conſequens ad terminum antecedentem data rationis, ita quadratum ſecundi lateris dati, ad quadratum aliud, cuius latere, tanquàm medio e tribus proportionalibus, & latere, cui debet fieri additio, tanquàm differentia extremorum laterum, reperiantur extrema latera; minus enim ex his quæſitam quantitatem repræſentabis.

COMPOSITIO.



Datum ſit latus A B, cui fieri debeat additio, ita vt rectangulum ſub aggregato, ex latere A B, & addito,& ſub addito ad quadratum dati lateris F, rationem habeat vt A B ad X. Fiat vt X, ad A B, ita F quadratum, ad quadratum G;mox verò G, tanquàm medio, & A B, tanquàm differentia extremorum è tribus proportionalibus, reperiantur extrema E B, B D, quorum minus ſit B D. Dico rectangulum A D B ad quadratum F, eſſe vt A B ad X. Quoniam enim eſt, vt E B ad G, ita G ad B D, erit rectangulum E B D, ſeu A D B, hoc eſt rectangulum A B D, plus quadrato B D, æquale quadrato G; ſed vt eſt X ad A B, ita quadratum F, ad quadratum G, ex conſtructione; propterea quadratum G æquabitur rectangulo orto, ex applicatione ſolidi ſub A B, in quadratum F, ad magnitudinem X. ergo quadratum B D, vnà cum rectangulo A B D æquabitur plano prædicto; omnibus igitur ductis in X, ſolidum ſub X, in rectangulum A B D, vnà cum ſolido ex X, in quadratum B D, æquabitur ſolido ex A B in quadratum F; ergo erit vt A B ad X, ita rectangulum A B D, plus quadrato B D, hoc eſt rectangulum A D B, ad quadratum F.

Hæc tamen Compoſitio minus eſt commendabilis, quod per ſolidorum comparationem procedat repetitis Analyſeos veſtigijs; longè autem melius, ſaltem clariùs eadem effectio ſic demonſtrabitur.

Quoniam igitur eſt vt X ad A B ex conſtructione, ita quadratum F ad quadratum G; ergo conuertendo erit vt AB ad X, ita quadratum G ad quadratum F, ſed quadrato G æquale eſt rectangulum E B D, ſeu A D B ex conſtructione; ergo erit vt A B ad X, ita rectangulum A D B, ad quadratum F; hæc tamen compoſitio ac demonſtratio, non procedit per Analyſeos veſtigia.

Alia igitur ineunda reſolutio hunc in modum;

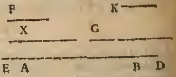
RESOLVTIO II.

Quoniam igitur eſt vt b, ad r, ita $b\,a \dagger a^2$ ad d^2; ſi igitur fiat vt b ad r, ita s, ad d, erit vt s, ad d, ita $b\,a \dagger a^2$, ad d^2; ſed vt s ad d, ita eſt rectangulum s d, ad d^2; ergo eadem eſt ratio $b\,a \dagger a^2$, ad d^2, quæ eſt s d, ad d^2; ergo s d æquabitur $b\,a \dagger a^2$; ergo vt $b \dagger a$, ad d, ita s, ad a; reperiatur media inter d, & s, datas quantitates, eaque ſit z. hinc

PORISMA.

Media iam inuenta ſit quoque media è tribus proportionalibus, extremorum autem differentia ſit latus cui fieri debet additio; reperiantur extrema latera, ex his enim minus, quæſitam repræſentabit quantitatem.

COMPOSITIO.



Datum ſit latus, cui fieri debet additio A B, & oporteat huic addere latus &c. ratio data ſit vt A B ad X, quam rectangulum ſub aggregato ex dato, & adiuncto, & ſub adiuncto, debet habere ad quadratum F; fiat vt X, ad A B, ita F ad aliam G; mox verò inter F, G, media ſit K, & hac, tanquàm medio, & A B, tanquàm differentia extremorum è tribus proportionalibus, reperiantur extrema latera, quorum minus ſit B D, maius autem E B. Dico rectangulum A D B, ad quadratum F, eſſe vt A B, ad X.

Quoniam enim ex conſtructione eſt, vt E B, ſeu A D, ad K, ita K ad B D; ſed K eſt media proportionalis inter F, & G; ergo erit vt A D ad F, ita G ad B D; ergo rectangulum ADB, æquabitur rectangulo ſub F, & G; ergo eadem eſt ratio rectanguli ſub F, & G ad quadratum F, quæ eſt rectanguli A D B, ad idem quadratum F; ſed rectangulum ſub F, & G, ad quadratum F eſt vt G ad F; ergo rectangulum A D B ad quadratem F, erit vt G ad F; ſed vt G ad F, ita eſt A B ad X; ergo vt A B ad X, ita erit rectangulum A D B, ad quadratũ F.

Problema.

Exemplum VII. *E tribus lateribus continuè proportionalibus, dato medio, inuenire extrema, vt maius, plus multiplici medio, ad minus, plus æquè multiplici medio, datam rationem obtineat.*

Datum ſit medium latus b, & ratio data ſit vt b, ad r, quam debet habere maius plus, exempli gratia, triplo medio, ad minus plus triplo medio.

RESOLVTIO.

Latus maius quæſitum eſto a; medium autem datum eſt b; propterea minus erit $\frac{bb}{a}$; ac verò maius plus triplo medio eſt a † 3 b; ſed minus plus triplo medio, ſeu quod idem eſt triplum medium plus minori eſt 3 b † $\frac{bb}{a}$. Quoniam igitur eſt vt b, ad r, ita a † 3 b, ad 3 b † $\frac{bb}{a}$; ergo permutando erit vt b, ad a † 3 b, ita r, ad 3 b † $\frac{bb}{a}$, & conuertendo, vt 3 b † $\frac{bb}{a}$ ad r; ita a ✱ 3 b ad b. Eſt autem vt a, ad b, ita b, ad $\frac{bb}{a}$; ac propterea, vt mox conſtabit, vt b † $\frac{3bb}{a}$, ad $\frac{bb}{a}$, ita a † 3 b, ad b; ergo vt 3 b † $\frac{bb}{a}$, ad r, ita b † $\frac{3bb}{a}$ ad $\frac{bb}{a}$; ergo triplatis conſequentibus erit vt 3 b † $\frac{bb}{a}$ ad 3 r, ita b † $\frac{3bb}{a}$ ad $\frac{3bb}{a}$; ergo diuidendo vt 3 b — 3 r † $\frac{bb}{a}$, ad 3 r, ita b, ad $\frac{3bb}{a}$. Claritatis gratia, loco ipſius 3 b — 3 r, ſubſtituatur m, perindeque ſit a c vt m † $\frac{bb}{a}$ ad 3 r, ita b, ad $\frac{3bb}{a}$; ergo ſubtriplatis conſequentibus erit vt m † $\frac{bb}{a}$, ad r, ita b, ad $\frac{bb}{a}$.

Vides igitur quatuor eſſe proportionales magnitudines, quarum extremæ m † $\frac{bb}{a}$, & $\frac{bb}{a}$, differunt per m; atque adeo per 3 b — 3 r datam magnitudinem; mediæ verò ſunt r, & b datæ, rectangulum ſub quibus ignorari non poteſt atque adeo recta, quæ illud poſſit. Hinc

PORISMA.

Recta, quæ poteſt rectangulum ſub terminis datæ rationis, tanquàm media è tribus proportionalibus, differentia verò inter triplos prædictos terminos, tanquàm differentia extremarum, reperiantur ipſa extrema; minor enim quæ oritur ſi applicetur quadratum termini antecedentis datæ rationis, quod erat medium è tribus lateribus ad latus maius, eſt latus minus quæſitum &c.

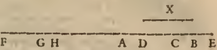
Lemma.

Quod autem ſi fuerit vt a, ad b, ita b, ad $\frac{bb}{a}$, debeat etiam eſſe vt b † $\frac{3bb}{a}$ ad $\frac{bb}{a}$, ita a † 3 b, ad b. ſic planum fiet. *Cùm enim fuerint tres magnitudines proportionales, fuerintque acceptæ duæ magnitudines in eadem ratione ad ſecundam & tertiam, erit vt prima plus magnitudine*

reſpi-

reſpiciente ſecundam ad ſecundam, ita ſecunda plus magnitudine reſpiciente tertiam ad tertiam; at verò a eſt prima: b, ſecunda: $\frac{b^2}{a}$ tertia; vtque eſt 3 b, ad b, ita $\frac{3b^2}{a}$ ad $\frac{b^2}{a}$; propterea, vt dicebamus quemadmodum eſt a † 3 b, ad b ita b † $\frac{3b^2}{a}$, ad $\frac{b^2}{a}$.

COMPOSITIO.



Datum ſit latus medium A B, dataque ſit ratio A B ad B C; erit autem vt patet maioris ad minus, & inter A B, B C, media ſit adinuenta proportionalis X, & B A protracta ad partes A in F, ita vt F B ſit multiplex ipſius A B, vt Problema requirit, nempè tripla. Deinde ex F B, ablata F H tripla ipſius C B, vt remaneat H B pro differentia, quæ eſt inter triplos terminos datæ rationis; mox verò recta X, tanquàm media, quæ fuit adinuenta potens rectangulum A B C, & H B, tanquàm differentia extremorum laterum, reperiantur extrema B G, G H; fiat autem A D æqualis ipſi G H, & fiat vt A D ad A B, ita A B ad A E. Dico eſſe, vt A E, plus tripla A B, ad A D, plus tripla A B, ita A B ad B C. *Erit G H. minor quàm A B, cum X ſit eadem A B minor.*

Quoniam igitur ex conſtructione vt eſt G B, hoc eſt B H, plus G H, ſeu plus A D, ad X, ita X ad G H, ſiue A D, erit rectangulum B G H æquale quadrato X; ſed eidem æquale eſt ex conſtructione rectangulum A B C; ergo rectangulum B G H æquabitur rectangulo A B C; ergo erit, vt B G, hoc eſt vt B H, plus H G, ad B C, ita A B, ad G H; ergo triplatis conſequentibus vt B H, plus G H, ad triplam C B, hoc eſt ad F H, ita A B, ad triplam G H, & componendo vt B H, plus tripla C B, hoc eſt plus F H, hoc eſt vt B F, plus G H, ſiue A D, ad F H; ita A B, plus tripla G H, ad triplam G H; ergo ſubtriplatis conſequentibus erit vt B F, nempe tripla A B, plus G H, ſiue A D, ad C B, ita A B, plus tripla G H, ſiue A D, ad ipſam G H, vel A D; cùmque ſit vt A E ad A B, ita A B ad A D; Id enim conuertendo ex conſtrutione; atque adeo vt A B plus tripla G H, ad G H, ſeu A D, ita A E, plus tripla A B ad AB; ergo vt tripla A B plus A D ad B C ita A E plus tripla A B ad A B. conuertendo propterea erit vt A B ad A E, plus tripla A B, nempè F B, ita C B ad triplam A B, ſeu ad F B, plus G H, vel A D; ergo permutando vt A B, ad C B, ita A E, plus F B, hoc eſt tripla A B, ad eadem F B, ſeu tripla A B, plus A D.

Quod autem diximus de multiplici ratione tripla, de alia quacunque multiplici ratione intellige. Imò poteſt Problema vniuerſaliùs concipi.

E tribus lateribus proportionalibus dato medio, extrema reperire latera vt maius cum medio, plus aliqua magnitudine, quæcunque huius ſit ratio ad medium, ſit ad minus, plus eadem magnitudine in data ratione.

Problema.

Dato vno ex lateribus trianguli, rectum angulum ambientibus, datoque aggregato ex reliquo latere, & baſi, reperire triangulum. Exemplum VIII.

RESOLVTIO.



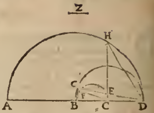
Datum ſit latus circa rectum d; reliquorum aggregatum ſit b. Oporteat &c. latus alterum circa rectum eſto a, baſis igitur erit b -- a. quadratum iſtius eſt b^2 -- 2 b a + a^2, illius autem quadratum eſt b^2 -- 2 b a; quod æquabitur d^2, & per antithesin 2 b a æquabitur b^2 -- d^2 quare fiet analogiſmus 2 b; ℞ (b^2 -- d^2) ; a, Hinc

PORISMA.

Vt duplum aggregati dati, ad rectam, quæ poteſt differentiam inter quadratum aggregati dati, & quadratum dati lateris, ita huiuſmodi linea ad aliud; hoc enim erit latus alterum circa rectum.

COM-

COMPOSITIO.



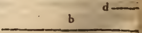
Datum ſit B D, aggregatum ex latere circa rectũ, & ex baſi. Datumque ſit z latus alterum circa rectum. Oporteat facere &c.

Supra B D deſcribatur ſemicirculus B G D, in quo accommodetur B G æqualis Z; ducaturque G D; duplicetur B D in A, & ſuper A D, deſcribatur ſemicirculus A H D; in quo accommodetur D H, æqualis D G, ex puncto autem H, cadat perpendicularis HC, ſecans A D in C. Mox autem ſupra B G deſcribatur ſemicirculus B F C in quo accommodetur C F, æqualis C D ducaturque B F. Dico triangulum B F C, Problemati ſatisfacere. Quandoquidem triangulum B F C, vtpote conſtitutum in ſemicirculo rectangulum eſt, & laterum B C, C F, aggregatum æquale eſt aggregato dato B D; ſiquidem B C communis eſt, & C F facta eſt æqualis C D. Supereſt, vt oſtendamus B F, latus alterum circa rectum æquale eſſe B G, ſiue Z lateri dato. Id autem ſic demonſtrabimus. Quoniam igitur eſt, vt A D, ad D H, ſeu D G, ita D G ad D C; erit rectangulum A D C, hoc eſt duplum rectangulum B D C, æquale quadrato G D, nempe differentiæ inter quadratum B D, & B G. vtrinque addito quadrato B G, fiet duplum rectangulum B D C, vna cum quadrato B G, æquale quadratis B G, G D, hoc eſt quadrato B D, vtrinque ſublato duplo rectangulo B D C remanebit quadratum B G, æquale quadrato B D minus duplo rectangulo B D C; at quadratum B D minus duplo rectangulo B D C æquale eſt differentiæ quadratorum B C, C D, hoc eſt B C, C F, differentia verò quadratorum B C, C F, eſt quadratum B F, ergo quadratum B G æquabitur quadrato B F, ergo B G æquabitur B F, atque dato Z. Dato igitur vno ex lateribus trianguli &c. triangulum adinuenimus. Quod facere oportebat &c.

Problema.

Exemplum VIII. *Datum latus ita diſpeſcere, vt rectangulum ſub toto, & parte, ad quadratum alterius partis ſit in ratione data.*

RESOLVTIO I.



Datum ſit latus b, diuidendum, vt rectangulum ſub toto, & parte, ad quadratum alterius partis ſit in ratione, vt b ad d. Pars vna eſto a, altera erit $b - a$, rectangulum ſub tota, & parte $b - a$ erit $b^2 - ba$; quadratum alterius partis eſt a^2; ergo vt b, ad d, ita $b^2 - ba$, ad a^2; multiplicatis extremis & medijs, fiet æquatio $ba^2 = db^2 - dba$; & per antitheſin $ba^2 + dba$ æquabitur db^2; omnibus applicatis ad b; $a^2 + da$ æquabitur db, huius æquationis radix eſt $\sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + bd)} - \frac{1}{2}d$. Hinc

PORISMA.

Ad quadratum dimidij termini conſequentis addatur rectangulum ſub eodem termino & latere diuidendo, ex aggregati latere ſubtrahatur dimidium ipſius termini. Vel

Fiant tria latera proportionalia, ita vt extremorum differentia ſit terminus conſequens, medium autem ſit id quod poteſt rectangulum ſub latere prædicto, & latere diuidendo; hoc eſt

Termino conſequente datæ rationis tanquam differentia extremorum & rectangulo ſub terminis ipſis tanquam rectangulo ſub extremis tria latera proportionalia reperiantur; minus enim extremum ignotam quantitatem exhibebit.

COM-

COMPOSITIO.



Datum ſit latus A B diuidendum, vt Problema requirit; ratio data ſit vt A B ad E A, ſuper rectam E B deſcribatur ſemicirculus E G B, & ex puncto A excitetur perpendicularis A G, quæ poteſt rectangulum E A B, comprehenſum ſub terminis E A, A B, datæ rationis; mox autem termino conſequente E A biſſecto quidem in D, agatur DG, & centro D, interuallo D G, deſcribatur ſemicirculus F G C ſecans A B, in C. Dico rectangulum A B C, ad quadratum A C eſſe, vt A B ad E A; Protrahatur B E ad partes F, donec occurrat circumferentiæ in F.

Quoniam igitur rectangulum F A C æquale eſt quadrato A G, cui æquale eſt rectangulum B A E; ergo rectangulum F A C æquabitur rectangulo B A E, quare vt F A, ad A E, ita B A ad A C; & diuidendo vt F E, ad E A, ita B C, ad C A; Eſt* autem F E æqualis A C; ergo vt C A ad A E, ita B C ad C A; ergo rectangulum ſub E A, & C B æquabitur quadrato A C; ob id rectangulum A B C ad quadratum A C eandem habebit rationem, quam habet ad rectangulum ſub E A, & C B; ſed rectangulum A B C, ad rectangulum ſub E A, & C B rationem habet vt A B, ad EA, ob eandem altitudinem C B; ergo rectangulum A B C, ad quadratum A C rationem habebit vt A B ad E A.

* Eſt enim D F, æqualis A D; & D F, æqualis D C, ergo F E æquabitur A C.

Hæc tamen Compoſitio non proceſſit per filium reſolutionis, cùm hæc ad ſolida aſcenderit. Longè igitur elegantiùs inſtitui poteſt reſolutio hunc in modum.

RESOLVTIO II.

Iiſdem ſuppoſitis nempe quod A B ſit b, & A E ſit d: A C erit a, & C B, erit b - a.

Quoniam igitur eſt vt b, ad d, ita b^2 - b a, ad a^2; ſed vt b, ad d, ob communem altitudinem b - a, ita eſt b^2 - b a, ad b d - d a; ergo eadem erit ratio b^2 - b a, ad a^2, & ad b d - d a; ergo b d - d a æquabitur a^2; ergo vt b - a, ad a, ita a, ad d; ergo componendo, vt b, ad a, ita a + d, ad d; & conuertendo vt d, ad d + a, ita a, ad b; At verò z poſſit b d, erit igitur vt d + a, ad z ita z, ad a, Hinc

PORISMA,

Termino conſequente rationis data, tanquàm differentia extremorum & recta quæ poteſt rectangulum ſub terminis data rationis tanquàm medio, reperiantur tria latera proportionalia; minus enim extremum ignotam quantitatem exhibebit.

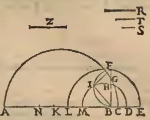
COMPOSITIO.

Eodem ſchemmate repetito, eademque conſtructione facta. Quoniam igitur eſt vt FA, ad A G, ita A G, ad A C; eſt autem A G potens rectangulum E A B; ergo erit vt EA, ad F A, ita A C ad A B; & conuertendo vt A B ad A C, ita F A, ad E A; ergo diuidendo vt B A, minus A C, ad A C, ita F E, ſeu A C ad E A; ergo rectangulum B A E, minus rectangulo E A C æquabitur quadrato A C; ergo, quæ ratio eſt quadrati A B, minus rectangulo B A C, ad quadratum A C, eadem erit ad rectangulum B A E, minus rectangulo E A C; ſed quadratum A B, minus rectangulo B A C, ad rectangulum B A E, minus rectangulo E A C, ob communem altitudinem A B, minus A C, hoc eſt ob communem altitudinem C B, eſt vt A B, ad A E; ergo vt A B ad A E, ita quadratum A B, minus rectangulo B A C, hoc eſt ita rectangulum A B C, ad quadratum A C.

Problema.

Propoſitum latus in duas partes diuidere vt harum vtriuſque, non tamen eadem data partes ſeco-

B E æqualis R, & L B ſit æqualis Z; ſuper L E deſcribatur peripheria L F E ſecans G B protractam in F; ſuper B F deſcribatur peripheria B I F, in qua aptetur B I æqualis BG; & agatur FI, cui fiat æqualis B H: mox ſit D E æqualis T, vt B D ſit differentia inter BE, & D E. puncto in A B tanquam centro deſcribatur peripheria tranſiens per puncta D, H, vt ſæpe dictum fuit ſecans A B in M, eritque B M particula habens ad ſuam partem proportionem, vt S, ad T; fiat igitur vt S ad T, ita B M, ad BK, & quidem B K erit pars, ſi itaque N K ſignetur æqualis L M, habebitur particula N K, quæ ad A K habebit



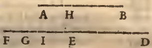
rationem vt S ad R, & cum M B conficiet magnitudinem L B ſeu Z. Hactenus effectio Geometrica. Demonſtratio ſic ſe habet.

Quoniam igitur M B oritur ex applicatione quadrati B F, minus quadrato ex B G, ſeu B I, hoc eſt quadrati F I, ſeu B H, ad B E, minus D E, hoc eſt ad B D, ſeu quod idem eſt ex applicatione rectanguli L B E, minus rectangulo A B C ad B E minus D E; fiet M B E rectangulum minus rectangulo ſub M B, in D E æquale rectangulo L B E, minus A B C rectangulo, atque adeo rectangulum L B E, minus rectangulo M B E, plus rectangulo M B in D E, æquabitur A B C rectangulo; applicatis autem omnibus ad B C fiet $\frac{LBE - MBE + MB\ in\ DE}{BC} = AB$, ſeu $\frac{LBE - MBE}{BC} + \frac{MB\ in\ DE}{BC}$, ſeu $\frac{LM\ in\ BE}{BC} + \frac{MB\ in\ DE}{BC} = AB$, hoc eſt ortiua magnitudo ex prædicta applicatione æqualis A B. magnitudo ortiua ex applicatione L B E minus M B E ad B C ſit Y. & ex applicatione M B in D E ad B C ſit Z; ſic enim hæc ad Geometricam phraſin erunt eleganter traducta; vnde Y plus Z æquabitur A B. Cumque ſit vt B C ad D E, ita M B, ad Z quod oritur ex applicatione M B in D E ad B C, factumq; ſit vt B C ad D E, ſeu vt S ad T, ita M B, ad K B, erit K B, id quod ex huiuſmodi applicatione oritur, nempe æqualis Z quod cum Y latere oriente ex applicatione L B E, minus M B E ad B C, efficiet A B, efficit autem A B ſi addatur ipſi A K; ergo A K erit quod ex huiuſmodi oritur applicatione, & æquabitur Y. Reliquum verò eſt, vt N K oſtendatur eſſe ad A K, ſeu Y vt B C ad B E, ſeu vt S ad R; nam cum M B facit magnitudinem æqualem L B, ſeu Z. Quoniam ergo eſt vt B C ad B E, ita L B, minus M B, hoc eſt L M, hoc eſt N K ad id quod oritur ex applicatione L B E, minus M B E, ad B C; ſed A K ſeu Y, eſt id, quod oritur ex huiuſmodi applicatione vt dictum eſt; ergo vt B C ad B E, ſeu vt S ad R, ita erit N K ad A K. Diuiſum eſt ergo latus A B in K, ita vt particula eius M B, ad quam K B eſt vt T ad S, vna cum N K particula, ad quam pars A K rationem habet vt R ad S, conficit datam magnitudinem Z. Quod facere oportebat.

SCHOLION.

SI ratio fuerit multiplex, hunc in modum ratiocinandum.

Latus diuidendum ſit A B; conficiendum verò F I. Sumatur F D ſextuplum ipſius F I, à quo ſubtrahatur E D æqualis A B; reſiduum F E diuidatur in quatuor partes; eiuſq; pars quarta ſit F G, hac enim erit quantitas quæſita; Si itaque in A B, ſignetur A H æqualis duplæ F G, erit quidem AH vna ex partibus, cuius dimidium, nempe F G, vna cum G I ſexta parte ipſius H B, conficiet F I.



Et quoniam F G, vna cum G I, conficit F I latus conficiendum; eſtque F G, dimidium ipſius A H ex conſtructione; ſupereſt oſtendendum G I; eſſe ſextam partem ipſius H B.

Quoniam igitur F G, quarta pars eſt ipſius F E; hoc eſt; quarta pars eſt rectæ F D, ſextupli, conficiendi lateris F I, minus E D, ſeu A B, latere diuidendo; propterea quadrupla F G, æquabitur ſextuplo F I minus E D; ergo per antitheſin F D, hoc eſt ſextuplum F I minus quadruplo F G, hoc eſt F E, æquabitur E D ſeu A B; Itaque pars vna ipſius A B, erit dupla F G nempe A H; altera, puta H B erit F D, nempe ſextuplum F I minus ſextuplo F G. Hunc enim in modum dupla F G, addita ipſi F D, nempe ſextuplo F I, minus ſextuplo F G, facit E D, ſeu A B, eſt autem

F I minus F G hoc eſt G I ſexta pars ſextupli F I minus ſextuplo F G. quod erat aquale H B. ergo G I erit ſexta pars ipſius H B. Quod erat opera pretium efficere.

Problema.

Exemplum IX.

Latus reperire, à quo ablatis duobus datis lateribus, reſidua conſtitutam inter ſe rationem habeant.

DAta ſint duo latera b, d, illud quidem maius hoc autem minus, ratio autem quam habere debet reſiduum maius ſit vt r, ad s; latus de quo quæritur eſto a, à quo ſi auferatur d, fiet reſiduum maius, ſi verò ab eodem auſeratur b; fiet reſiduum minus; vt autem eſt r ad s maius ad minus, ita debet eſſe a -- d; ad a -- b; reſoluto analogiſmo in æqualitatem, fiet æquatio s a -- s d = r a -- r b. & poſt debitas tranſpoſitiones, fiet demum r a — s a = r b -- s d; quod ſi æquatio magis per diuiſionem explicetur, fiet æquatio $\frac{rb - sd}{r - s}$ = a. qua reuocata ad analogiſmum, fiet r -- s. ad ℞ (r b -- s d) ita hoc ad a. Hinc

PORISMA.

Latus quadratum differentiæ duorum rectangulorum, ſeu quod idem eſt, recta quæ poteſt differentiam duorum rectangulorum, quorum vnum ſit ſub dato latere maiori, maiorique termino datæ rationis; aliud verò ſub dato latere minori, minorique termino rationis datæ, medio loco proportionalis eſt inter differentiam terminorum rationis datæ, & latus de quo quæritur.

COMPOSITIO.



a Nempe ſuper B H, deſcripto ſemicircu lo, erigatur perpendicularis E M

b Nempe ſuper C F deſcripto ſemicirculo &c.

DAta ſint duo latera B E, C E, ratio verò conſtituta ſit vt R ad S, protrahatur B E vſque ad H, & E H æqualis ſit ipſi R: at verò inter B E, E H, media reperiatur proportionalis E M; a ſignetur autem E F æqualis S, & inter C E, E F media reperiatur E N; b ſuper M E deſcribatur peripheria M K E; facto autem centro E, interuallo E N, deſcribatur arcus N K ſecans peripheriam M K E in K, ducaturque K M, cui fiat æqualis E L; at verò ſecetur G H æqualis E F, agaturque G L, quæ bifariã ſecetur in I. ducatur I D ad rectos angulos ſupra G L occurrens B E in D; centro autem D, interuallo D G deſcribatur peripheria, quæ neceſſario tranſibit per L, vt ex Elementis facile conſtare poteſt; ſecet autem E B protractam ad partes B in A; & factum erit quod Poriſma iubet. Dico latus quæſitum eſſe A E, ita vt reſiduum maius A C ad reſiduum minus A B ſit vt E H ad E F. Quoniam enim E G, E L, & A E, ſunt continuè proportionales, & E G eſt differentia inter E H, & E F, ita vt æqualis ſit ipſi E H, minus E F, & quadratum ex E L æquale eſt rectangulo B E H, minus rectangulo C E F; quadratum autem ex E L ſi applicetur ad E G, emergit A E; c rectangulum ergo A E H, minus rectangulo ſub G H, vel E F, & A E æquale erit rectangulo ſub E H, & B E, minus rectangulo ſub E F, & C E; proinde rectangulum A E F, minus rectangulo C E F, æquale erit rectangulo A E H, minus rectangulo B E H; propterea erit vt E H, ad E F, ſeu G H, ita A E, minus C E, hoc eſt A C ad A E, minus B E, hoc eſt ad A B; ſed E H, ad E F, vel G H, eſt vt R ad S, immò ſunt ipſemet R, & S; ergo vt R ad S, ita erit A C ad A B; inuentum eſt ergo latus A E, à quo ſi auferamus duo data quidem latera, B E, C E, reſidua nimirum A C, A B, ſunt in ratione vt R ad S.

c Ductis omnibus in E G, hoc eſt E H minus G H ſeu E F,

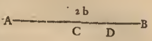
Problema.

Exemplum X.

Propoſitam rectam A B, biſariam ſectam in C, ſecare iterum in D, inter C, B, vt quadratum A D,

A D, ad aggregatum rectangulorum A C D, A D C, rationem habeat datam: Oportet autem rationem eſſe maioris ad minus, minorem tamen ſeſquitertia.

RESOLVTIO I.



VVlgus Analyſtarum ita procederet A B eſto 2 b: vnde A C erit b, quémadmodum & C B; at verò C D eſto a, vnde D B, erit b - a, & AD, erit $b + a$; ratio autem data ſit vt r ad s, maioris ad minus, minor tamen ratione ſeſquitertia. Cùm igitur A D ſit $b + a$, quadratum ipſius erit $b^2 + 2ba + a^2$; ſed rectangulum A C D, erit b a: at rectangulum A D C erit $ba + a^2$, horum aggregatum eſt $2ba + a^2$; vt igitur eſt r ad s, ita debet eſſe $b^2 + 2ba + a^2$ ad $2ba + a^2$, multiplicatis extremis, & medijs, $2rba + ra^2$ æquabitur $sb^2 + 2sba + sa^2$; & per antitheſin $2rba - 2sba + ra^2 - sa^2$, æquabitur sb^2, omnibus applicatis ad $r - s$, quantitas, in quam ducitur poteſtas, & $\frac{2rba - 2sba}{r - s} + a^2$, æquabitur $\frac{sb^2}{r-s}$; ad tollendam fractionem fiat, vt $r - s$, ad s, ita b^2, ad z^2. Dein de vt $r - s$, ad $r - s$, ita 2 b, ad 2 b; vnde $2ba + a^2$ æquabitur z^2, cuius radix eſt ℞ $(b^2 + z^2) - b$. Et hinc colligitur Poriſma &c.

Sed hæc reſoluendi ratio vt vulgaris eſt, ita minus inſtituto accommodata; non enim ſuppeditat viam ad componendum, niſi per obſcuram ſolidorum comparationem; longè tamen elegantius ſic procedere licebit, per proportionalia nimirum, diſcurrendo hunc in modum.

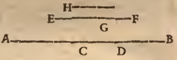
RESOLVTIO II.

QVoniam igitur eſt vt r ad s, ita $b^2 + 2ba + a^2$, ad $2ba + a^2$; ergo per conuerſionem rationis erit vt r, ad $r - s$, ita $b^2 + 2ba + a^2$, ad b^2, & conuertendo, vt $r - s$, ad r, ita b^2, ad $b^2 + 2ba + a^2$; ergo vt $r^2 - 2rs + s^2$, ad $r^2 - rs$, hoc eſt vt quadratum ex $r - s$, ad quadratum mediæ inter $r - s$, & r, ita b^2, ad $b^2 + 2ba + a^2$; ergo vt $r - s$, ad ℞ $(r^2 - rs)$ quæ breuitatis gratia nuncupetur g, ita erit b, ad $b + a$. Hinc

PORISMA.

Fiat vt differentia terminorum rationis datæ ad mediam proportionalem inter huiuſmodi differentiam, & terminum maiorem, ita dimidium lineæ diuidendæ ad aliam; huius enim exceſſus (excedet autem ſupra dimidium iam dictum) radicis valorem exhibebit.

COMPOSITIO.



PRopoſita ſit recta A B biſariam diuiſa in C, & ratio data ſit vt E F, ad F G, oporteat facere quod iniunctum eſt. Inter E G differentiam terminorum datæ rationis, & EF terminum maiorem ſit adinuenta quædam proportionalis media H; fiat autem iuxta Poriſma vt E G ad H, ita A C ad A D, erit enim C D radicis valor, ita vt quadratum ipſius AD, ad aggregatum rectangulorum A C D, A D C, ſit vt E F ad F G; hoc autem repetitis Analyſeos veſtigijs ſic demonſtrabimus.

Quoniam enim ex conſtructione eſt vt E G ad H, ita A C, ad A D; ergo eorum quadrata proportionalia erunt; vt igitur quadratum E G ad quadratum H, ita quadratum A C, ad quadratum A D; ergo vt E G ad E F, ita quadratum A C ad quadratum A D, & conuertendo: ergo vt E F, ad E G, ita quadratum A D, ad quadratum A C; & per conuerſionem rationis erit vt E F ad G F, ita quadratum A D, ad exceſſum, quo quadratum A D ſuperat quadratum A C; huiuſmodi autem exceſſus eſt duplum rectangulum A C D, plus quadrato C D, ſeu quod idem eſt rectangulum A C D, plus rectangulo A D C; ergo vt E F, ad G F, ita quadratum A D, ad aggregatum rectangulorum A C D, A D C. Propoſitam ergo rectam A B biſariam diuiſam in C, ſecuimus iterum in D, prout Problema requirit.

Vides igitur non ſatis eſſe calluiſſe Algebram, ſed oportet etiam in rebus Geometricis eius vſum nouiſſe.

Determinationis autem ratio ea eſt.

Lemma I.

Quod autem ratio debet eſſe maioris ad minus, minor verò ratione ſeſquitertia, ſic oſtenditur.

RESOLVTIO.

*Q*Voniam $2ba + a^2$*, minus eſt quam* $b^2 + 2b^2$*; eſt autem* b^2 *tertia pars illius aggregati* $b^2 + 2b^2$*, hoc eſt* $3b^2$*; ergo tertia pars aggregati* $2ba + a^2$ *minor erit quàm* b^2*; atque adeo* b^2 *maius erit quam tertia pars aggregati* $2ba + a^2$*; ergo componendo* $b^2 + 2ba + a^2$*, maius erit quam ſexquitertiũ* $2ba + a^2$*, ſed* $b^2 + 2ba + a^2$*, eſt quadratum ex* $b + a$*, & * $2ba + a^2$*, idem eſt quod aggregatum rectangulorum* ba*, &* $ba + a^2$ *quorum vnum ſcilicet continetur ſub b, & a, aliud verò ſub b + a, & a; ergo proportio data debet eſſe maioris ad minus, minor tamen, quàm ſexquitertia.*

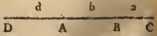
COMPOSITIO.

QVoniam aggregatum rectangulorum A C D, & A D C minus eſt aggregato rectangulorum A C B, & A B C, hoc eſt duplum rectangulum A C D plus quadrato C D, minus eſt triplo quadrato A C; ſed quadratum A C tertia eſt pars, vtpote ſubtriplum; ergo tertia pars rectanguli A C D plus quadrato C D minor eſt, quam quadratum A C; atque adeo quadratum A C maius erit prædicta tertia parte; ergo componendo quadratum A C, plus duplo rectangulo A C D, vnà cum quadrato C D, hoc eſt quadratum ex A D, maius erit quam ſexquitertium dupli rectanguli A C D, plus quadrato C D, ſeu maius erit quàm ſexquitertium aggregati rectangulorum A C D, & A D C, ergo &c.

Problema.

Exemplum XL. *Dato lateri vtcunque diuiſo vt multiplex pars vna plus multiplici aggregato ex altera parte & latere adiuncta ad multiplicem eandem partem plus aggregato tam dicto ſit in data ratione.*

RESOLVTIO I.



DAtum ſit latus D B vtcunque diuiſum in A, eique ſit opus addere B C, ea lege vt quadrupla D A plus tripla A C, ad duplam D A plus A C, ſit vt A B, ad B C.

Propoſitum latus A B ſit b; & D A, ſit d: at verò latus addendum eſto a; vt autem A B ad B C, hoc eſt vt b ad a, ita debeat eſſe quadrupla D A, plus tripla A C, hoc eſt $4d + 3b + 3a$, ad duplam D A plus A C, hoc eſt ad $2d + b + a$; factum igitur ſub extremis æquabitur facto ſub medijs; ac ob id $4da + 3ba + 3a^2$ æquabitur $2bd + b^2 + ba$; & per antitheſin $4da + 2ba + 3a^2$ æquabitur $2bd + b^2$; omnibus diuiſis per 3, fiet $\frac{4}{3}da + \frac{2}{3}ba + a^2 = \frac{2}{3}bd + \frac{1}{3}b^2$; loco autem ipſius $\frac{4}{3}d + \frac{2}{3}b$, ad confuſionem tollendam ſubſtituatur p; & loco $\frac{2}{3}bd + \frac{1}{3}b^2$, ſubſtituatur z^2; erit quidem æquatio $pa + a^2 = z^2$, cuius radix $\sqrt{\frac{1}{4}p^2 + z^2} - \frac{1}{2}p$. Hinc

PORISMA.

Sumatur dimidium aggregati ex quatuor tertijs partibus ipſius D A, & duabus tertijs partibus ipſius A B, cius autem quadratum addatur ad aggregatum è duabus tertijs partibus rectanguli D A B, tertiaque parte quadrati ex A B; aggregati verò latus multetur ſupradicto dimidio; quod enim ſupereſt erit quantitas quæſita B C; vnde quæſita quantitas B C data erit.

R E-

RESOLVTIO II.

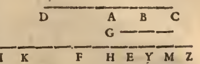
IDem quoque Poriſma colligeretur ita ratiocinando. Quoniam eſt vt b ad a; ita $4d + 3b + 3a$. ad $2d + b + a$. ergo per conuerſionem rationis vt b ad $b - a$, ita $4d + 3b + 3a$. ad $2d + 2b + 2a$, & permutando vt b ad $4d + 3b + 3a$, ita $b - a$ ad $ad + ab + 2a$; vnde fit æqualitas $2bd + 2b^2 + 2ba = 4bd + 3b^2 - 4da - 3a^2$ & per antitheſin $4da + 2ba + 3a^2 = 2bd + b^2$.

Omnibus autem diuiſis per 3; & $\frac{4}{3}da + \frac{2}{3}ba + a^2 = \frac{2}{3}bd + \frac{1}{3}b^2$. ſed elegantius hunc in modum.

RESOLVTIO III.

Quoniam eſt vt $4d + 3b + 3a$ ad $ad + b + a$; ita b ad a, ergo permutando vt $4d + 3b + 3a$ ad b, ita $ad + b + a$ ad a, ergo diuidendo vt $4d + 2b + 3a$ ad b ita $2d + b$ ad a ergo fiet æquatio $4da + 2ba + 3a^2 = 2bd + b^2$ ergo $\frac{4}{3}da + \frac{2}{3}ba + a^2 = \frac{2}{3}bd + \frac{1}{3}b^2$. Hinc idem Poriſma.

COMPOSITIO.



EXponatur Y Z æqualis A B & protrahatur in E, vt E Y ſit tertia pars ipſius Y Z, ſeu A B. Deinde Z E, ſic producatum in F, vt E F ſit duæ tertiæ partes ipſius D A; mox autem inter F Y, & Y Z media reperiatur proportionalis G; Deinde protrahatur Z F, ad partes F, & accipiatur Y H æqualis duplæ E Y, ſeu duabus tertijs partibus ipſius A B; item K H æqualis duplæ F E; ac propterea quatuor tertijs partibus ipſius D A; mox autem recta K Y tanquam differentia extremorum, & quadrato ex G, tanquam rectangulo ſub lateribus, è tribus lateribus proportionalibus reperiantur extrema latera I Y, Y M; producatur D B in C, ita vt B C ſit æqualis Y M. Dico D B productam eſſe vt Problema requirit.

Quoniam enim rectangulum I Y M æquale eſt quadrato ex G, cui æquale eſt rectangulum Y Z ergo rectangulum I Y M, ſeu K M Y [a] æquabitur rectangulo F Y Z, hoc eſt rectangulum ſub K H, nempe ſub quatuor tertijs partibus ipſius D A in Y M, plus rectangulo ſub H Y, nempe ſub duabus tertijs partibus ipſius A B, in Y M, vnà cum quadrato Y M æquabitur rectangulo ſub F E hoc eſt ſub duabus tertijs partibus ipſius D A in Y Z, ſeu A B plus rectangulo ſub E Y, hoc eſt tertia parte ipſius Y Z, ſeu A B, hoc eſt plus tertia parte quadrati ipſius Y Z, ſeu A B; ergo triplatis omnibus rectangulum ſub quadrupla D A, & Y M, ſeu B C plus rectangulo ſub dupla A B in B C plus triplo quadrato ipſius B C æquabitur rectangulo ſub dupla D A in A B plus quadrato A B, reuocata æqualitate ad proportionem, erit vt quadrupla D A, plus dupla A B, plus tripla B C, ad A B, ita dupla D A plus A B ad B C; ergo componendo vt quadrupla A D, plus tripla A B, plus tripla B C ad A B, ita dupla D A plus A B, plus B C ad B C; & permutando vt quadrupla D A, plus tripla A B, plus tripla B C, hoc eſt vt quadrupla D A plus tripla A C ad duplam D A, plus A B, plus B C, hoc eſt ad duplam D A plus A C, ita A B, ad B C.

[a] eſt enim IK, æqualis Y M.

Vſu quam ſæpiſſime accidit vt nos in reſoluendo viam ineamus, quæ quamuis feliciter ad finem conducat, tamen opus eſt eruditione multa cùm alioquin reſolutio poſſit inſtitui per viam magis obuiam, quod vt clariùs appareat, iuuabit exemplum afferre; nempè

Data perpendiculari, aggregate laterum trianguli, ac differentia ſegmentorum baſeos; reperire triangulum.

Hoc Problema proponit etiam Ghetaldus; viam tamen non adeò obuiam calcando; ſiquidem multas veritates ſupponit, atque adeò Theoremata demonſtrata, quorum cognitio fortaſſe non ſtatim incidit in mentem Analyſtæ; eſt tamen ea reſolutionis ratio regia profectò, quippequæ ea induſtria procedit, vt à quantitatibus ſolidis, & etiam imaginarijs declinet. In hac autem reſolutione ignota quantitas eſt baſis, & effectione comparata in

In huius Problematis reſolutione Ghetaldus, viam minus obuiã calcauit.

compo-

componendo: ſolùm ſupereſt oſtendendum conſtructi trianguli laterum aggregatum æquale eſſe magnitudini datæ.

Eſt autem & alia Reſolutionis forma, quæ facilè in cuiuſque mentem venire poteſt, in qua ignota quantitas baſeos ſegmentum minus ſupponitur, eamque Neotericus quidam adhibuit, quamuis in componendo aliqua ex parte defeciſſe videatur, quæ vt meliùs intelligantur, ſit ſupradictum.

PROBLEMA.

Exemplum XII. *Data perpendiculari, aggregato crurum trianguli, & differentia ſegmentorum baſeos; reperire triangulum.*

RESOLVTIO.

DAtum ſit crurum trianguli quidem aggtegatum b; perpendicularis verò c; differentia ſegmentorum baſeos d.

Et oporteat facere quod imperatum eſt.

Quoniam igitur eſt vt laterum aggregatum ad baſim, ita differentia ſegmentorum baſeos ad differentiam crurum; ſi ſupponamus baſim eſſe a, atque fecerimus, vt b, ad a, ita d, ad aliud, puta $\frac{da}{b}$; hoc plane erit differentia crurum; ſed quadratum aggregati crurum plus quadrato differentiæ eorundem, duplum eſt quadratorum ab ijſdem; propterea $b^2 + \frac{d^2a^2}{b^2}$ æquabitur duplo quadratorum à cruribus; ſed hoc æquale eſt duplo quadratorum à ſegmentis baſeos, plus quadruplo quadrato perpendicularis; ergo $b^2 + \frac{d^2a^2}{b^2}$ æquabitur duplo quadratorum à ſegmentis $+ 4c^2$; ſed duplum quadratorum à ſegmentis, æquale eſt quad. baſeos, plus quad. differentiæ ſegmentorum eiuſdem; ergo $b^2 + \frac{d^2a^2}{b^2}$ æquabitur $a^2 + d^2 + 4c^2$; Vt autem cognita ab incognitis ſeparentur, nequit vtrinque auferri a^2, & b^2, cùm a^2 vtpotè quadratum baſeos maius ſit quadrato differentiæ crurum; ſatis igitur eſt auferre $\frac{d^2a^2}{b^2}$; d^2, & $4c^2$: vnde $b^2 - d^2 - 4c^2$ æquabitur $a^2 - \frac{d^2a^2}{b^2}$, vel ducto a^2, in b^2, & $b^2 - d^2 - 4c^2$, æquabitur $\frac{b^2a^2 - d^2a^2}{b^2}$, vel loco illius fractionis hęc reponatur $\frac{b^2 - d^2}{b^2} a$; cui æquabitur illud idem $b^2 - d^2 - 4c^2$. Reſoluta autem fractione iam dicta in ſua membra, æqualitas in proportionem tranſmutabitur; vnde fiet vt $b^2 - d^2$, ad $b^2 - d^2 - 4c^2$, ita b^2, ad a^2; atque adeò eorum latera proportionalia erunt, nempè vt ℞$(b^2 - d^2)$ ad ℞$(b^2 - d^2 - 4c^2)$ ita b, ad a; Vnde.

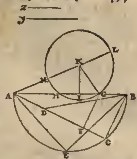
PORISMA.

Vt recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum aggregati crurum trianguli ſuperat quadratum differentiæ ſegmentorum baſeos, ad rectam, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum aggregati crurum ſuperat quadrata facta ex differentia ſegmentorum baſeos, & perpendiculari dupla; ita crurum aggregatum ad baſim.

Hinc autem diligenter eſt obſeruandum, quod ad innumeras reſolutiones contexendas conducit, non eſſe opus ſemper omnia ſpeciebus in reſolutione exhibere, in quo Tyrones plurimùm allucinantur; vides enim duplum quadratorum à cruribus characteribus non exprimi, quod fieri quidem poſſet; ſi namque baſis eſt a, differentia ſegmentorum verò d, ſegmentum maius foret $d + \frac{a-d}{2}$, ſegmentum minus eſſet $\frac{a-d}{2}$. Si igitur quadraticèduceretur $d + \frac{a-d}{2}$ fieret productum $d^2 + da - d^2 + \frac{a^2 - 2da + d^2}{4}$, cui addito c^2, fieret aggregatum, cuius latus eſſet crus maius: ſic de crure minori. Quia tamen hic nulla emergit vtilitas in reſoluendo; propterea ſuperuacaneum eſt characteribus exhibere quadrata crurum, & multò minùs ipſa crura; ſed ſatis ſit nominatim dicere quadrata crurum, duplum quadratorum à cruribus &c. Sic de ſegmentis baſeos eorumque quadratis.

COMPOSITIO.

DAtum ſit laterum aggregatum A B, perpendicularis Z, & differentia ſegmentorum baſeos Y: recta AB, tanquàm diametro, deſcripto ſemicirculo AEB, aptetur in eo B C æqualis Y: agatur C A: ſecetur C D æqualis duplæ Z, ducatur D B, cui æqualis in circulo aptetur B E; agatur A E, cui æqualis ſecetur A F; & per F ducatur F G parallela ipſi C B; erit autem A G trianguli quæſiti baſis; factum eſt enim quod Poriſma iubet; à quadrato ſiqui-



to ſiquidẽ aggregati laterum AB, ſubtractum eſt quadratum C B differentiæ ſegmentorum; itaque A C poteſt exceſſum quadrati aggregati laterum ſupra quadratum differentiæ ſegmentorum: & quoniam C D eſt æqualis duplæ Z perpendiculari, B D poterit, ob angulum rectum ad C, quadruplum quadratum perpendicularis, plus quadrato C B, differentiæ ſegmentorum; cùmque E B facta ſit æqualis D B, ipſa quidem A E, hoc eſt illi æqualis A F, poterit exceſſum, quo quadratum A B aggregati laterum ſuperat aggregatum ex quadruplo quadrato perpendicularis, & quadrato differentiæ ſegmentorum, ſeu aggregatum ex quadrato duplæ perpendicularis, & quadrato differentiæ ſegmentorum; factaque eſt F G parallela ipſi C B; quare vt C A ad A F, ita B A ad A G; vnde A G, iuxta Poriſma, erit baſis trianguli quæſiti. Secetur A H æqualis Y: biſſecetur H G in I excitetur perpendicularis I K, æqualis Z: ducatur K G, item A K; & erit triangulum: AKG, quod quæritur; nam ſegmentorum baſeos AI, IG, differentia eſt A H ex conſtructione æqualis Y, & perpendicularis I K ex conſtructione eſt æqualis Z. Supereſt oſtendendum crurum aggregatum A K, K G æquale eſſe datæ rectæ A B; quod ſic planum fiet.

Centro K, interuallo K G, deſcribatur circulus, qui neceſſariò tranſibit per H, ſecans A K in M, & eandem protractam in L.

Quoniam igitur quadratum A G, minus quadrato G F, æquale eſt quadrato A F, ſeu A E; at quadratum A E, eſt exceſſus, quo quadratum A B, ſuperat quadratum B E, ſeu B D, ſeu quadrata D C, C B; ergo quadratum A G, minus quadrato G F, æquabitur quadrato A B, minus quadratis D C, C B; vtrinque additis quadratis G F, B C, C D; ergo quadratum A G, plus quadrato B C, plus quadrato C D, æquabitur quadrato A B, plus quadrato G F; ſed quadratum B C æquale eſt quadrato A H, & quadratum C D quadruplum eſt quadrati I K, cùm C D ſit eius dupla; ergo quadratum A G plus quadrato A H, plus quadruplo quadrato I K, æquabitur quadrato A B, plus quadrato G F; quadratum autem A G, plus quadrato A H æquale eſt duplo quadratorum A I, I G; ergo duplum quadratorum A I, I G, plus quadruplo quadrato I K, æquabitur quadrato A B, plus quadrato G F; ſed duplum quadratorum A I, I G, plus quadruplo quadrato I K, æquale eſt duplo quadratorum A K, K G; ergo duplum quadratorum A K, K G, æquabitur quadrato A B, plus quadrato G F; ſed duplum quadratorum A K, K G, ſiue A K, K L, æquale eſt quadrato A L, plus quadrato A M; ergo quadrata A L, A M, quadratis A B, G F, erunt æqualia; Cùmque ſit ut A G ad G F, ità A B, ad B C, ſiue A H, rectangulum H A G, ſeu rectangulum M A L æquabitur rectangulo ſub A B, & G F; erant autem quadrata A L, A M æqualia quadratis A B, G F; ergo A M æquabitur G F, & A L æquabitur A B; ſed A L æqualis eſt aggregato crurum A K, K G; ergo A B æquabitur aggregato crurum A K, K G.

Superius autem Poriſma coincidit cum eo, quod potius Arithmeticum eſt, nimirum: *Quadratum aggregati crurum multiplicetur per quadratum aggregati crurum multatum quadruplo quadrato perpendicularis, & quadrato differentiæ ſegmentorum baſeos; productum verò diuidatur per differentiam quadrati aggregati crurum, & quadrati differentiæ ſegmentorum baſeos; quadratum enim inde baſeos trianguli quæſiti innoteſcet.* *Superius Poriſma cum alio coincidit.*

Proportionalia ſiquidem latera cùm fuerint quatuor, quatuor etiam erunt quadrata proportionalia, & contra; at analogiſmus æquipollet multiplicationi, ac diuiſioni.

Longè tamen eſt in promptu magis hæc alia Reſolutionis ratio.

Sit b, crurum aggregatum, & c, perpendicularis; at verò d differentia ſegmentorum baſeos. Segmentum verò minus eſto a, ſegmentum maius erit $a + d$, vnde tota baſis erit $2a + d$. Quoniam igitur eſt vt aggregatum crurum ad baſim, ità differentia ſegmentorum baſeos ad differentiam crurum; propterea ſi fiat vt b, ad $2a + d$, ita d, ad aliud, nempe $\frac{2ad + dd}{b}$; hæc erit differentia crurum; at verò ſi differentia addatur aggregato crurum fit duplum crus maius nempe $b + \frac{2ad + dd}{b}$, cuius dimidium $\frac{bb + 2ad + dd}{2b}$ erit crus maius; ſi eadem *Secunda Reſolutio.*

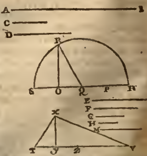
differen-

differentia ſubtrahatur fiet b $-\frac{d^2+2da}{b}$ duplum crus minus ac ob id $\frac{b^2-d^2-2da}{2b}$ erit ſimplum crus minus. Vtrumbibet autem poteſt adhiberi, ſed quia quantitas incognita fuit poſita ſegmentum minus, ob id adhibendam eſt crus minus, cuius quadratum eſt $\frac{b^4-2b^2d^2+d^4-4b^2da+4d^3a+4d^2a^2}{4b^2}$ quod æquabitur a^2+c^2, nempe aggregato quadratorum à ſegmento minori, & perpendiculari, tollatur fractio ductis omnibus ſcilicet in $4b^2$, & $4b^2a^2+4b^2c^2$ æquabitur $b^4-2b^2d^2+d^4+4b^2da+4d^3a+4d^2a^2$; & per antitheſin $4b^2a^2-4d^2a^2+4b^2da-4d^3a$, æquabitur $b^4+d^4-4b^2c^2-2b^2d^2$; omnibus autem applicatis ad $4b^2-4d^2$, & $a^2+\frac{4b^2d-4d^3}{4b^2-4d^2}a$, æquabitur $\frac{b^4+d^4-4b^2c^2-2b^2d^2}{4b^2-4d^2}$; tollantur fractiones, & fiat vt $4b^2-4d^2$, ad $4b^2-4d^2$, nempe plana denominatoris ad plana, quæ habentur in numeratore, ita d, ad aliud, & hoc erit idem d: vnde d a, idem erit quod $\frac{4b^2d-4d^3}{4b^2-4d^2}a$, deinde fiat vt $4b^2-4d^2$, ad b^2, ita b^2, ad aliud, illudque ſit K^2; mox vt $4b^2-4d^2$ ad d^2 ita d^2 ad aliud l^2 & ad $4b^2$, ita c^2, ad m^2, & inſuper vt $4b^2-4d^2$, ad $2b^2$, ita d^2 ad n^2; at aggregatum ex m^2, & n^2, ſubducatur ex K^2+l^2, reſiduumque ſit z^2, eritque æquatio illa ſuperior fractionibus implicata adhanc reuocata ſimpliciſſimam $a^2+da=z^2$, cuius radix eſt ℞ $(\frac{1}{4}d^2+z^2)-\frac{1}{2}d$. Hinc.

PORISMA.

Fiat vt exceſſus quo quadruplum quadratum aggregati crurum ſuperat quadruplum quadratum differentiæ ſegmentorum baſeos, ad quadratum aggregati crurum, ita hoc quadratum ad aliud, deinde vt idem ad quad. differentiæ ſegmentorum, ita hoc quadratum ad aliud, claritatis gratia, dictum illud ſit primum, & hoc ſecundum inuentum; mox vt idem exceſſus iam dictus ad quadruplum quadratum aggregati laterum, ita quad. perpendicularis ad aliud tertium inuentum, & vt idem exceſſus ad quadratum duplum aggregati laterum, ita quadratum differentiæ ſegmentorum ad quartum inuentum; ex primo & ſecundo quidem inuento ſubtrahantur tertium; & quartum, reſiduum autem addatur ad quadratum è dimidio differentiæ ſegmenoorum baſeos; ex aggregati autem latere ſubtrahatur dictum dimidium, quod enim ſupereſt erit ignota quantitas.

COMPOSITIO.



Datum ſit crurum aggregatum A B; differentia ſegmentorum baſeos D, perpendicularis autem C. Fiat quod Poriſma iubet, nimirum vt exceſſus quo quadruplum quadratum A B ſuperat quadruplum quadratum D ad quadratum A B, ita quadratum A B, ad quadratum E, primum inuentum. Mox vt idem exceſſus iam dictus ad quadratum D ita quadratum D ad quadratum F ſecundum inuentum; deinde vt idem exceſſus, ad quadruplum quadratum A B, ita quadratum C ad quadratum G, tertium inuentum, & vt idem exceſſus ad duplum quadratum A B, ita quadratum D ad quadratum H, quartum inuentum; ex quadrato autem E, plus quadrato F ſubductis quadratis G, & H remaneat quadratum M. Exponatur autem O P, æqualis D, & quidem ex O excitetur perpendicularis O R æqualis M, ducaturque Q R, & centro Q, interuallo Q R deſcribatur circulus vtrinque ſecans O P protractam in punctis S, & H, mox verò exponatur T Y æqualis S O; duplicatur in Z, & protrahatur in V, ita vt Z V ſit æqualis O P; ex Y excitetur Y X, æqualis C agantur T X, V X. Dico triangulum T X V eſſe quod quæritur; baſeos enim T V ſegmenta ſunt T Y, Y V, quorum differentia eſt Z V æqualis datæ D, ex conſtructione; & Y X perdendicularis æqualis eſt itidem ex conſtructione datæ rectæ C; ſupereſt demonſtrandum crurum TX, V X aggregatum æquale eſſe datæ rectæ A B.

Quoniam igitur rectangulum P S O æquale eſt rectangulo S O H; ſed rectangulum S O H æquale eſt quadrato O R; ergo rectangulum P S O æquabitur quadrato O R; ſed quadratum

dratum O R æquale eſt quadrato M; ergo rectangulum P S O æquabitur quadrato M; ſed quadratum M æquale eſt quadrato E primo inuento, plus quadrato F, ſecundo inuento minus quadrato G, tertio inuento, minus quadrato H, quarto inuento ex conſtructione; ergo rectangulum P S O æquabitur quadrato E, primo inuento, plus quadrato F, ſecundo inuento, minus quadrato G tertio inuento, minus quadrato H; quarto inuento; ſed rectangulum T Y V æquale eſt rectangulo P S O ex conſtructione; ergo rectangulum TYV æquabitur quadrato E, primo inuento, plus quadrato F, ſecundo inuento, minus quadrato G, tertio inuento, minus quadrato H quarto inuento; ſed id, nempè quadratum E, plus quadrato F, minus quadrato G, minus quadrato H, comparatum eſt mediantibus perpendiculari C, & differentia ſegmentorum D, hoc eſt perpendiculari X Y, & differentia ſegmentorum Z V, & recta A B iuxta præſcriptum Poriſmatis; ergo rectangulum T Y V, æquabitur quadrato E, primo inuento, plus quadrato F, ſecundo inuento, minus quadrato G, tertio inuento minus quadrato H, quarto inuento, quatenus hæc facta ſunt medijs X Y, Z V, & recta A B; ijs peractis adhibendo eaſdem X Y Z V; & loco ipſius A B, adhibendo aggregatum ex T X, X V idem rectangulum prouenit T Y V, vt alibi nos demonſtrauimus; ergo aggregatum crurum T X, X V datæ A B; crurum aggregato æquale erit; conſtituimus igitur triangulum vt quærebatur. Quod oportebat efficere.

Obſerua diligenter hanc demoſtrandi formam eam enim adhibere licebit in reſoluen- *Notandum.*
dis infinitis ferè Problematibus, & quidem difficillimis.

Cæterum hic notare licet ſuperius Poriſma coincidere cum illo, quod magis Arithmeticum, quàm Geometricum eſt, nimirum. *Quadrato quadratum aggregati crurum addatur quadrato quadrato differentiæ ſegmentorum baſeos; ſimiliter plano planum ex quadrato perpendicularis in quadratum aggregati crurum quadruplum, addatur duplo plano plano ex quadrato aggregati crurum in quadratum differentiæ ſegmentorum baſeos; poſterius autem aggregatum tollatur ex priore, reſiduum verò diuidatur per quadruplam differentiam quadrati aggregati crurum, & quadrati differentiæ ſegmentorum baſeos; quotiens autem addatur quadrato quod fit à ſemiſſe differentiæ eorundem ſegmentorum, huius namque aggregati quadrata radix multata ſupradicta ſemiſſe, minus ſegmentum baſeos exhibebit.* *Notanda quædam.*

Sed quamuis Reſolutio ſuperior idonea ſit, tamen eo nomine minus eſt commendabilis, quoniam eſt implicatior, atque adeo præſtat æqualitatem illam poſtremam hac animaduerſione ad aliam reuocare, quæ facile ad analogiſmum redigi poteſt. Conſiderandum eſt enim cùm fuerit æquatio $4b^2a^2 - 4d^2a^2 + 4b^2da - 4d^3a = b^4 + d^4 - 4b^2c^2 - 2b^2d^2$; per antitheſin ad hanc reuocari, quod eſt in huiuſmodi caſibus valde obſeruandum, videlicet $b^4 - 4b^2c^2 - b^2d^2 = b^2d^2 + 4b^2da + 4b^2a^2 - d^4 - 4d^3a - 4d^2a^2$; ſed huius æquationis vtrunq; membrum diuiſionem ſubire poteſt per communem diuiſorem $b^2 - d^2$; vnde fit æquatio huiuſmodi $\frac{b^4 - 4b^2c^2 - b^2d^2}{b^2 - d^2} = d^2 + 4da + 4a^2$; quoniam verò $b^4 - 4b^2c^2 - b^2d^2$ fit ducto $b^2 - 4c^2 - d^2$, in b^2; propterea æquatio illa in analogiſmum transformabitur, nempe vt $b^2 - d^2$ ad $b^2 - 4c^2 - d^2$, ita b^2 ad $d^2 + 4da + 4a^2$; atque horum etiam latera proportionalia erunt, nempe ℞$(b^2 - d^2)$ ℞$(b^2 - 4c^2 - d^2)$; b; $2a + d$; latus enim ipſius b^2 eſt b, & latus ipſius $d^2 + 4da + 4a^2$, eſt $2a + d$, nimirum baſis, vnde colligitur illud idem Poriſma, quod Ghetaldus ex ſua Reſolutione collegerat. *Inſtituitur noua & quidem expeditior reſolutio.*

PORISMA.

Vt recta cuius quadratum æquale eſt exceſſui quo quadratum aggregati crurum trianguli ſuperat quadratum differentiæ ſegmentorum baſeos ad rectam cuius quadratum æquale eſt exceſſus, quo quadratum aggregati crurum ſuperat quadrata, quæ fiunt ex differentiæ ſegmentorum baſeos, & perpendiculari dupla, ita eſt aggregatum crurum ad baſim.

Hoc tamen intereſt inter hanc, & eam, qua vſus eſt Ghetaldus Reſolutione, quod Compoſitio per illam perfici poteſt repetitis Analyſeos veſtigijs, ſecusautem per iſtam; Vnde cogimur quod Poriſma dictat ſuſcipere per modum Theorematis demonſtrandum.

Huic porro Reſolutioni reſpondentem compoſitionem non afferimus, nam ſupra eodem Poriſmate dictante compoſitionem adduximus per Analyſeos veſtigia procedentem.

Problema.

Exemplum XIII. *Data differentia crurum alicuius trianguli & perpendiculari, vna cum differentia ſegmentorum baſeos, reperire triangulum.*

RESOLVTIO I.

His ſuppoſitis; data ſit differentia crurum b, perpendicularis c differentia ſegmentorum baſeos d. Oporteat reperire triangulum. Trianguli baſis eſto a, & quia eſt vt b ad d, ita a, ad $\frac{da}{b}$, ob id aggregatum crurum erit $\frac{da}{b}$.

Quia verò quadratum aggregati crurũ; plus quadrato differentiæ eorundem duplum eſt quadratorum à cruribus; propterea $\frac{d^2a^2}{b^2}$ ✠ b^2, æquabitur duplo quadratorum à cruribus. At verò duplum quadratorum à cruribus æquale eſt duplo quadratorum à baſeos ſegmentis, plus quadruplo quadrato à perpendiculari; ergo $\frac{d^2a^2}{b^2}$ ✠ b^2 æquabitur a^2 ✠ d^2 ✠ $4c^2$.

Vtrinque auferatur a^2, & b^2; ergo $\frac{d^2a^2}{b^2} - a^2$ æquabitur $4c^2$ ✠ $d^2 - b^2$, hoc eſt $\frac{d^2a^2 - b^2a^2}{b^2} = 4c^2$ ✠ $d^2 - b^2$; nam $\frac{b^2a^2}{b^2}$ idem eſt quod a^2 vt patet, ſeu quod idem eſt $\frac{d^2a^2 - b^2a^2}{b^2}$ æquabitur $4c^2$ ✠ $d^2 - b^2$; reſoluatur fractio in ſua membra ita vt æqualitas in proportionem tranſmutetur &

$d^2 - b^2$; $4c^2$ ✠ $d^2 - b^2$; b^2; a^2 erunt proportionalia, &

℞ $(d^2 - b^2)$; ℞ $(4c^2$ ✠ $d^2 - b^2)$; b; a. Hinc

PORISMA.

Vt recta cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum differentiæ ſegmentorum baſeos trianguli ſuperat quadratum differentiæ crurum, ad rectam cuius quadratum æquale eſt quadrato perpendicularis duplæ, vnà cum prædicto quadratorum exceſſu, ita differentia crurum ad baſin.

COMPOSITIO.

Hvius Problematis compoſitionem repetitis Analyſeos veſtigijs, attulit Ghetaldus, &c.

RESOLVTIO II.

Data ſit differentia crurum b, perpendicularis c; & differentia ſegmentorum baſeos d reperire triangulum. Baſis eſto a, ergò $a - d$ erit duplum ſegmentum minus, quare ſimplum ſegmentum minus erit $\frac{a-d}{2}$ cuius quadratum $\frac{a^2 - 2da + d^2}{4}$ vna cùm c^2 nempe quadrato perpendicularis, æquabitur quadrato cruris minoris; ſed crus minus eſt etiam $\frac{da - b^2}{2b}$ cuius quadratum eſt $\frac{d^2a^2 - 2b^2da + b^4}{4b^2}$ & hoc æquabitur $\frac{a^2 - 2da + d^2 + 4c^2}{4}$. Per multiplicationem decuſſatim factam $4b^2a^2 - 8b^2da$ ✠ $4b^2d^2$ ✠ $16b^2c^2 = 4d^2a^2 - 8b^2da$ ✠ $4b^4$ & per antitheſin $4b^2a^2$ ✠ $4b^2d^2$ ✠ $16b^2c^2 = 4d^2a^2$ ✠ $4b^4$ omnibus verò diuiſis per 4 & b^2a^2 ✠ b^2d^2 ✠ $b^2c^2 = 4d^2a^2$ ✠ b^4 & per antitheſin $d^2a^2 - b^2a^2$ æquabitur b^2d^2 ✠ $4b^2c^2 - b^4$ ergo facto paraboliſmo; & a^2 æquabitur $\frac{b^2d^2 + 4b^2c^2 - b^4}{d^2 - b^2}$. fiat autem, vt b. ad d ita d. ad g. & a^2 æquabitur $\frac{gb^3 + 4b^2c^2 - b^4}{bg - b^2}$ omnibus applicatis ad b. quæ in fractione exiſtunt, & a^2 æquabitur $\frac{gb^2 + 4bc^2 - b^3}{g - b}$. Hinc.

PORISMA.

Fiat, vt differentia crurum ad differentiam ſegmentorum baſeos, ita hæc differentia, ad aliam magnitudinem, quæ dicitur g tertia proportionalis. Mox verò ad hanc magnitudinem minus differentia crurum applicetur exceſſus, quo ſolidum ex illa inuenta g tertia proportionali in quadratum differentia crurum plus ſolido à differentia crurum in quadruplum quadratum perpendicularis, ſuperat cubum differentia crurum; ſiquidem ortiua, magnitudo erit, quadratum à baſi quæſiti trianguli.

Coincidit autem cum illo.

Quadratum differentia ſegmentorum baſeos diuidatur per differentiam crurum, quotiens autem ducatur in quadratum differentia crurum, productum addatur ſolido ex quadruplo quadrato perpendicularis in differentiam crurum, ex aggregato tollatur cubus eiuſdem crurum differentia; reſiduum verò, diuidatur per internallum quotientis ſupradicti, & differentia crurum, & habebitur quadratum baſeos trianguli quaſiti.

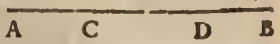
Huius autem reſolutionis Poriſmate dictante, Geometricam effectionem perficere licebit; eamque demonſtrare, methodo adhibita in ſuperiori Problemate.

In Analyticis quoque Compoſitio rationis locum habet, vnde ſequenti Problemate, rem illuſtrabimus; de hoc tamen eodem Problemate, Cap. ſequenti redibit ſermo;

PROBLEMA.

Datum latus, A B vtcunque ſectum in D, diuidere illud iterum in C inter A D, ita vt rectangulum B A C, ad rectangulum C D B datam habent rationem. Exemplum XIV.

RESOLVTIO.



Data ſit recta A B diuiſa quidem in partes A D, D B, quarum illa dicatur b, hæc autem d; proportio data ſit vt s, ad d; Pars A C eſto a, pars C D erit b -- a, tota A B erit b + d; rectangulum ſub tota & a eſt b a + d a, at rectangulum ſub C D, & D B eſt b d -- d a; quare erit vt s, ad d, ita b d + d a, ad b d -- d a; proportione autem ad æqualitatem reuocata fiet æquatio huiuſmodi d b a + d'a = s b d -- s d a; & per antitheſin fiet d b a + d'a + s d a = s b d. Omnibus autem applicatis ad d, fiet b a + d a + s a = s b; & æqualitate ad proportionem reuocata erit. Vt b † d † s, ad s, ita b, ad a. Hinc.

PORISMA.

Vt eſt aggregatum ex latere diuidendo, & ex priori termino data rationis ad terminum priorem, ita lateris diuidendi pars prior ad radicem quaſitam.

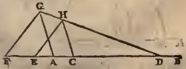
Potuiſſem etiã repetitis Analyſeos veſtigijs Compoſitionem per ſolidorum comparationem contexere, vel alio modo vt Capite ſequenti Reſolutione inſtituta declinato aſcenſu ad gradus altos, demonſtrationem perficere; lubet nihilominus hic per compoſitionem rationis id totum abſoluere.

COMPOSITIO.

Data ſit recta A B, ſecta quidem in D, oporteat iterum illam diuidere in C, vt rectangulum B A C ad rectangulum C D B, rationem habeat quam S, ad D B.

Protrahatur B A in F, ita vt F A ſit æqualis aggregato ex S, & D B, & quidem E A ſit æqualis D B, & F E, ſit æqualis S; mox verò ad punctum D, accomodata ſit quedam recta G D faciens angulum quemcunque G D F. Deinde ſumpto in G D quouis puncto H, agatur E H, cui fiat parallela F G; mox ducatur G A, cui ex H agatur parallela H C; & factũ erit quod Poriſma iubet. Dico rectam A B ſectam eſſe quidem in C, vt Problema requirit.

Rectangulum B A C, ad rectangulum C D B rationem habet compoſitam ex A B, ad D B, & ex A C ad C D; ſed vt A B, ad D B, ita E D, ad E A; proinde rectangulum B A C, ad rectangulum C D B rationem habet compoſitam ex ratione E D ad E A, & ex ratione A C, ad C D, hoc * eſt F E ad E D; ſed ratio F E ad E A compoſita eſt ex proportione F E ad E D, & ex E D, ad E A. Sumpto nimirum intermedio termino E D, vt patet; ergo rectangulum B A C ad rectangulum C D B rationem habet compoſitam ex ijs proportionibus, ex quibus componitur ratio F E ad E A, ſeu D B. Quamobrem vt F E, hoc eſt vt S ad D B, ita rectangulum B A C ad rectangulum C D B. Quod erat &c.



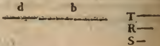
* eſt enim vt A C ad C D ita G H ad H D, & ita F E ad E D.

 Pro-

Problema.

Exemplum XV. *Duo latera reperire vt vtrunque ab altero datum ſegmentum accipiens ad reſiduum, conſtitutam habeat rationem.*

RESOLVTIO.



DAta ſint duo ſegmenta b, & d, illud maius, hoc verò minus. Oporteat duo reperire latera, vt ſi ex his primum accipiat à poſteriori ſegmentum d, ad reſiduum rationem habeat vt r, ad s, at verò ſecundum, ſiue poſterius ſi accipiat à primo, ſeu à priori ſegmentum b, ad reſiduum rationem habeat vt t ad s.

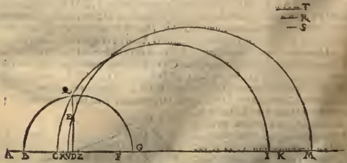
Poſterius latus quæſitum eſto a † d; ſic enim dando d lateri priori, remanebit a, vt autem eſt s, ad r, ita a reſiduum ſc. iam dictum ablato ſegmento d, ad $\frac{ra}{s}$; ergo $\frac{ra}{s}$ erit latus prius quæſitum, accepto ſegmento d, à poſteriori; itaque antequam reciperet ſegmentum illud erat $\frac{ra}{s}$ - d; reliquum eſt vt poſterius latus acquirendo ſegmentum b, à primo, ſit ad reſiduum in ratione vt t, ad s; Secundum autem latus erat a † d, quod accipiendo à priori ſegmẽtũ b, euadit a † d † b & ab ipſo priori latere nimirum $\frac{ra}{s}$ - d ſi auferatur ſegmẽtũ b, remanebit $\frac{ra}{s}$ -- d -- b; ergo vt t, ad s, ita debet eſſe a † d, † b ad $\frac{ra}{s}$ -- d -- b; reuocata autem analogia ad æqualitatem s a † s d † s b æquabitur $\frac{tra}{s}$ -- t d -- t b; reuocetur fractio illa $\frac{tra}{s}$ ad integram magnitudinem, faciendo nimirum vt s ad r, ita t, ad aliam magnitudinem g, erit enim g a idem quod $\frac{tra}{s}$; quamobrem s a † s d † s b, æquabitur g a -- t d -- t b; & per antitheſin g a -- s a æquabitur s d † s b † t d † t b; & æqualitate ad proportionem reuocata erit vt g -- s, ad s † t, ita b † d, ad a. Hinc.

PORISMA.

Vt eſt differentia terminorum, quorum vnus eſt terminus s, è tribus datæ rationis, alter verò eſt latus inuentum in tollenda fractione ad aggregatum terminorum s, & t, ita aggregatum duorum datorum ſegmentorum ad latus poſteris quæſitum multatu tamen eo ſegmento quo multandum eſt.

COMPOSITIO.

DAta ſint duo ſegmenta D F, F I, hoc maius, illud verò minus. Oporteat reperire latera, vt ſi prius accipiat à poſteriori ſegmentum D F, ad reſiduum habeat rationem vt r ad s, poſterius verò ſi accipiat à priori ſegmentum F I, ad reſiduum ſit vt t ad s. Protrahatur I D ad C, ita vt C D ſit æqualis aggregato terminorum T, & S.



Aggregatum autem datorum terminorum ſit D I, at verò inter C D, D I media reperiatur D Q id autem fit ſi ſuper C I, deſcribatur ſemicirculus, & ex puncto D erigatur perpendicularis D Q, cuius quadratum applicetur ad B D differentiam inter terminum quarto loco

to loco proportionalem ad S, R, T, inter hunc, inquam, terminum & terminum S, id autem fiet, ſi deſcribatur ſemicirculus cuius centrũ ſit in ipſa recta B I, & eius peripheria tranſeat per puncta B, Q itaut ſecet D I in G ottiua verò magnitudo ſit D G; protrahatur I C ad partes C in A, ita vt A D ſit æqualis D G. Dico A F conſtantem ex A D, D F eſſe poſterius latus è duobus quæſitis. Ad habendum autem primum quæſitum latus, ſecetur V D æqualis S, & X D æqualis R; fiat autem vt V D, ad D X, ita A D ad aliam, nempè D M; ſeu, quod idem eſt, ducatur A D, in X D, hoc eſt inter A D, X D media reperiatur proportionalis D E, cuius quadratum applicetur ad V D, & proueniat D M; erit enim F M latus prius è duobus quæſitis. Supereſt oſtendendum A I eſſe ad I M vt T, ad S. Fiat D Z æqualis V D, ſeu S; erit autem B Z quarta proportionalis ad S, R, T.

Quoniam igitur eſt, vt B Z minus D Z, hoc eſt B D, ad C D, ita D I, hoc eſt D F, plus F I, ad A D; ergo reuocata proportione ad æqualitatem, erit rectangulum ſub B Z, & A D, minus rectangulo ſub D Z, ſeu V D, & A D, hoc eſt minus rectangulo A D V, erit, inquam, æquale rectangulo V D F, plus rectangulo ſub V D, & F I, vnà cum rectangulo ſub C V, & D F, plus rectangulo ſub C V, & F I; & per antitheſin rectangulum A D V, plus rectang. V D F, vna cum rectangulo ſub V D, & F I, æquabitur rectangulo ſub B Z, & A D, minus rectangulo ſub C V, & D F minus rectangulo ſub C V, & F I. Quoniam autem erat, vt S ad R, ita T, ad G in reſolutione; hoc eſt in Compoſitione vt V D, ad D X, ita C V ad B Z; propterea reuocata æqualitate ad proportionem, erit vt C V ad D V, ſeu D Z, ita A D, plus D F, plus F I, ad D M, minus D F, minus F I; hoc eſt ad I M; ſed vt C V ad D V, ita T ad S; ergo vt T ad S, ita erit A I ad I M; ipſa autem D M reſpondet fractioni in reſolutione, [illegible], hoc eſt ipſa D M eſt, quæ oritur ex applicatione rectanguli A D X ad magnitudinem V D, cùm factum ſit, vt V D ad D X, ita A D ad D M: ergo ſi data ſunt duo ſegmenta D F, F I; prius latus è duobus quæſitis erit F M; & poſterius erit A F; cùm ſi F M accipiat D F, ab A F, fiat D M; quæ ad reſiduum A D; ſit in ratione vt R ad S, ex conſtructione; & A F, ſi accipiat ab F M, ſegmentum F I, datum fiat A I; quæ ad reſiduum I M; ex demonſtratis eſt, vt T ad S. Duo igitur latera nos adinuenimus &c. Quod facere operæ erat pretium.

Aduerte autem, rectangulum ſub B Z, & A D, æquale eſſe rectangulo ſub C V, & D M; vnde non immeritò hoc, loco illius ſubſtituitur in compoſitione. Æqualitas autem iam dicta ſic fit manifeſta; Vt enim eſt V D, ad D X, ex conſtructione ita A D, ad D M; ſed vt V D ad D X, pariter ex conſtructione, ita eſt C V ad B Z; ergo vt C V ad B Z, ita A D ad D M; ergo rectangulum ſub extremis C V, D M, æquabitur rectangulo ſub medijs B Z, A D.

Bily quoque hoc aſſumpſit Problema, reſoluendum, & componendum, ſed quid inter eius, & noſtram reſolutionem interſit, tu ipſe iudex videto.

Lemma.

Si ſint quatuor termini proportionales, eſt differentia primi & tertij ad differentiam primi, & quarti minus differentia inter primum & ſecundum vt eſt primus terminus ad ſecundum. Rurſus.

Si ſint quatuor termini proportionales, vt eſt primus ad tertium, ita interuallum inter primum & ſecundum ad differentiam primi & quarti multatam differentia inter primum, & tertium.

SInt quatuor termini proportionales A, B, C, D. Dico eſſe differentiam primi & tertij ad differentiam extremorũ minus &c. Quoniam enim vt eſt A, ad B, ita C, ad D, erit permutando vt A ad C, ita B ad D; & diuidendo, vt A minus C, ad C, ita B minus D, ad D, & rurſus permutando erit vt A minus C, ad B, minus D, ita C ad B; ſed C ad D eſt vt A ad B; ergo vt A ad B, ita erit A minus C ad B, minus D. Quoniam autem ſi ex A minus D differentia primi & quarti ſubtrahatur A, minus B differentia primi & ſecundi remanet B minus D differentia ſecundi & quarti; eſt autem A, minus C differentia primi & tertij ſuntque A, & B primus & ſecundus; ergo

A	B	C	D
A	C	B	D
A -- C	C	B -- D	D
A -- C	B -- D	C	D
A	B	A - C	B - D

erunt

erunt in quatuor proportionalibus terminis, vt primus ad ſecundum ita differentia primi & tertij ad differentiam primi & quarti multatam differentia primi & ſecundi.

Secunda pars permutando demonſtrabitur eodem modo &c.

Problema.

Exemplum XVI. *Propoſitum latus bis diuidere in duas partes ea lege vt maior pars è prima diuiſione ſit ad minorem ex ſecunda in data ratione maioris ad minus, & maior ex ſecunda ſit ad minorem ex prima in alia ratione quoque maioris ad minus.*

RESOLVTIO.

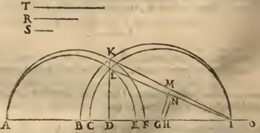
DAtum ſit b latus diuidendum bis in duas partes ea lege vt maior pars è prima diuiſione ad minorem ex ſecunda ſit in ratione vt r, ad s, maioris ad minus, at verò maior è ſecunda ad minorem è prima ſit pariter in ratione data maioris ad minus vt t ad s.

Minor è ſecunda diuiſione eſto a; hæc autem debet eſſe ad maiorem è prima vt s, ad r; maior igitur è prima diuiſione erit $\frac{ra}{s}$. proinde minor è prima diuiſione erit $b - \frac{ra}{s}$; Cùm autem vt eſt s ad t, ita debeat eſſe hæc pars ad maiorem è ſecunda diuiſione; ergo maior hæc è ſecunda diuiſione erit $\frac{bt}{s} - \frac{rta}{ss}$. Quoniam autem hæc pars vna cum minori parte è ſecunda diuiſione debet eſſe æqualis dato lateri b. proinde orietur æquatio huiuſmodi. $\frac{bt}{s} - \frac{rta}{ss} - a = b$. & per antitheſin $\frac{bt}{s} - b = \frac{rta}{ss} - a$. Literetur autem æquatio à fractionibus, & primo omnia multiplicentur per s, & erit $tb - sb = \frac{rta}{s} - sa$. Fiat igitur vt s, ad r, ita t ad aliud, illudque ſit g; erit proinde æquatio $tb - sb = ga - sa$, ſeu quod idem eſt $t - s\,(b = g - s)\,a$; ergo fiet analogiſmus $g - s;\ t - s;\ b;\ a$. Hinc.

PORISMA.

Fiat vt s ad t, ita r ad aliud quippiam illudque ſit g, a quo ſubtrahatur s, vt autem eſt hoc reſiduum, ad differentiam inter t, & s, ita latus diuidendum ad aliud, illudque erit minor pars è ſecunda diuiſione.

COMPOSITIO.



DAtum ſit latus diuidendum A D; proportiones verò ſint vt R ad S, & vt T ad S: Protrahatur A D ad E, vt D E ſit æqualis differentiæ duorum terminorum S & R; at verò inter A D D E media reperiatur proportionalis D L: deinde protracta A D vſque ad F, ita vt D F ſit æqualis differentiæ duorum terminorum S, & T; at verò inter A D, & D F, media reperiatur proportionalis, quæ ſit D K; mox verò vt S ad T, ita fiat R ad aliam quæ ſit D O, à qua obſcindatur I O, quæ ſit æqualis minori termino S; ad reſiduum autem D I, applicetur quadratum ex D K, nempe ducatur L I, quæ bifariam ſece-

tur

tur in N, & hinc ad rectos angulos ducatur N H &c. Deinde ducatur K I, quæ biſariam ſecetur in M &c. Centris autem inuentis H, G, & interuallis H I, G I, deſcribantur ſemicirculi I L C, I K B, qui neceſſario tranſibunt per puncta L, K. Dico A D ſectum eſſe quidem in punctis B, C, vt imperatum eſt, adeo vt A C, ſit ad D B, quemadmodum R ad S, & A B, ſit ad C D, vt T ad S. Quoniam enim rectangulum C D I, æquale eſt quadrato ex D L, eidem verò æquale eſt rectangulum A D E; proinde rectangulum C D I æquale erit rectangulo A D E; atque adeo vt D I ad A D, ita D E ad C D, & permutando vt D I, ad D E, ita erit A D ad C D, & diuidendo vt I E, ad E D, ita A C ad C D. Quia verò rectangulum I D B æquale eſt rectangulo A D F, erit vt I D ad A D, ita D F ad B D, vt autem I D ad A D, ita erat D E ad C D; ergo vt D F ad B D, ita D E ad CD; conuertendo, & permutando vt D E ad D F, ita C D ad B D; ſed erat vt I E ad E D, ita A C ad C D, vt ſupra diximus eſtque vt D E, ad D F, ita C D ad B D; ergo ex æquali erit vt I E ad D F, ita AC ad B D. Sed I E ad D F eſt vt R ad S; ergo vt R ad S, ita erit A C, ad B D. Suo modo pariter oſtendemus A B, eſſe ad C D, quemadmodum T ad S. *Ex Elementis*

Quod autem I E ſit ad D F vt R ad S ſic oſtenditur; vt enim eſt S a I T, ita fecimus R ad D O, at verò differentia inter S & D O facta eſt D I, a quà ſubtracta eſt D E differentia inter R & S; reliqua igitur E I, erit ad D F differentiam duorum terminorum S, & T, erit inquam vt R ad S conuertendo &c. per ea quæ in antecedenti Lemmate demonſtraui mus. Vnde liquet etiam I F eſſe ad D E, atque adeo A B ad C D, vt T, ad S. Diuiſimus igitur &c. Quod facere oportebat.

PROBLEMA.

Propoſitum latus in tres partes diſpeſcere, ea lege, vt alicuius extremarum aſſumpta media ad extremam reliquam conſtitutam rationem habeat. Exemplum XVII.

RESOLVTIO.

LAtus diuidendum datum ſit b; ratioque data, quam habere debet ſumma ex prima, & ſecunda parte, ad tertiam, ſit vt r ad s. at verò ratio quam habere debet aggregatum ex ſecunda, & tertia ad primam ſit vt t ad s.

Tertia pars eſto a; vt autem eſt s ad r; ita quidem eſt a, ad $\frac{ra}{s}$ ergo aggregatum ex prima, & ſecunda erit $\frac{ra}{s}$. quare omnium ſumma erit a ✠ $\frac{ra}{s}$, & hæc æquabitur b. omnibus autem ductis in s. fiet æquatio s a † r a ═ s b. & reuocata æquatione ad proportionem erunt proportionales termini r † s. s. b a. Hinc.

PORISMA.

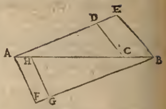
Vt aggregatum duorum terminorum prima data rationis ad terminum minorem ita latus diuidendum, ad tertiam partem quaſitam.

Deinde ponatur pars prima a; cum verò ſit vt s. ad t; ita a ad $\frac{ta}{s}$ proinde $\frac{ta}{s}$ erit tertia pars cum ſecunda; omneſque ſimul erunt a ✠ $\frac{ta}{s}$ & erit æquatio a ✠ $\frac{ta}{s}$ ═ b. omnibus ductis in s. fiet s a ✠ t a ═ s b. quæ quidem æquatio ſi ad proportionem reuocetur fiet analogiſmus huiuſmodi t † s. s. b. a. Hinc.

PORISMA.

Vt aggregatum terminorum data rationis, ad terminum minorem; ita latus diuidendum, ad primam partem; Secunda autem habebitur auferendo ſummam inuentam ex prima & tertia, à latere dato diuidendo, reſiduum enim erit ſecunda pars quaſita.

COMPOSITIO.



Datum ſit latus diuidendum A B ; ea lege in tres partes, vt prima pars cum ſecunda, ſit ad reſidúum vt R ad S ; at verò ſecunda cum tertia ad primam ſit vt T ad S. Agatur A D æqualis R, faciens ad A, quemcunque angulum D A B, cum recta A B ; & pretrahatur A D vſque ad E vt D E ſit æqualis S. ducaturque E B ; cui fiat D C, æquidiſtans. Deinde agatur B G. æqualis T. faciens ad B, quemcunque angulum cum A B nempe A B G. & protrahatur ad F. vt G F ſit æqualis S. ducatur F A. cui parallela agatur G H. Dico latus A B ; ſectum eſſe in tres partes A H, H C ; C B. vt Problema requirit ; itaut A H aſſumpta media H C ; ſit ad extremam reliquam C B, vt R ad S & C B, aſſumpta media H C ; ad A H ſit vt T ad S.

Quoniam igitur eſt, vt A D, plus D E, hoc eſt A E, ad D E, ita A B, ad C B. erit rectangulum ſub D E, & C B, plus rectangulo ſub A D, & C B, æquale rectangulo ſub A B, & D E. omnibus autem applicatis ad D E ; erit C B plus A C ; hoc enim reſponder fractioni [illegible] ; ſi namque rectangulum ſub C B, A D, applicetur ad D E. prouenit A C, erit inquam æqualis dato lateri A B. ergo pars vna erit C B ; alia A C ; at verò vt A D, ad D E, ita eſt A C ad C B ; & vt A D ad D E ita R ad S. ergo vt R ad S. ita eſt A C, ad C B. Non diſſimili modo demonſtrabimus eſſe B H. ad H A. vt T ad S. ergo ſi A H accipiat mediam H C ; erit aggregatum A C ad C B. vt R ad S; & ſi C B accipiat H C ; erit H B ad AH. vt T ad S. Diuiſimus igitur propoſitum latus in tres partes quemadmodum Problemarequirit.

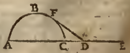
Ex reſolutione conſtat Problema indigere determinatione.

PROBLEMA.

Exemplum XVIII. *In ſemicirculo A B C, eſt diameter A C, protracta vſque ad E, itaut A E, ſit æqualis aggregato ex tangente ducta ab aliquo puncto externi ſegmenti C E, & ex ſegmento ab A ; vſque ad punctum prædictum ; reperire partes C D ; D E.*

RESOLVTIO.

Diameter producta A E, ſit b ; at diameter ipſa A C ſit d. Oporteat &c. Segmentum A D eſto a ; ergo reliqua D E ſiue tangens erit b — a ; at verò Interceptum ſegmentum C D, erit a — d. proueniet igitur æquatio $a^2 - da = b^2 - 2ba + a^2$ & per antitheſin $2ba - da$ æquabitur b^2. vnde fiet analogiſmus vt $2b - d$. ad b. ita b. ad a. Hinc.



PORISMA.

Vt eſt dupla diameter producta minus ſimpla ad diametrum ipſam productam, ita hæc eadem, ad ſegmentum A D.

COMPOSITIO.

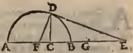


QVoniam igitur eſt, vt dupla A E diameter producta minus A C ad A E, ita A E ad A D; erit rectangulum ſub dupla A E, & A D, minus rectangulo ſub A C & A D, æquale quadrato A E; vtrinque addito quadrato A D, erit quadratum A D plus rectangulo ſub dupla A E, & A D, minus rectangulo ſub A C, & A D æquale quadrato A E, plus quadrato A D: vtrinque ſublato rectangulo ſub dupla A E, in A D, quadratum A D, minus rectangulo ex A C in A D, æquabitur quadrato A E, minus rectangulo ſub dupla A E, in A D, plus quadrato A D; at verò quadratum A D, minus rectangulo ex A C in A D, hoc eſt minus rectangulo D A C, idem eſt, quod rectangulum A D C; quadratum autem A E, minus rectangulo ſub dupla A E, & A D, hoc eſt minus duplo rectangulo E A D, plus quadrato A D, idem eſt, quod quadratum D E; ergo rectangulum A D C æquabitur quadrato D E; ſed rectangulum A D C, æquale eſt quadrato tangentis D F, ergo tangens D F æqualis erit ipſi D E. In ſemicirculo igitur A B C &c. quod facere oportebat.

Problema.

Dati ſemicirculi diametrum producere eouſque vt ab huius extremo ducta tangente, & à puncto contactus perpendiculari cadente, rectangulum comprehenſum ſub tangente & huiuſmodi perpendiculari ad rectangulum ſub diametro, & ſegmento minori ipſius, è duobus factis à perpendiculari cadente, datam rationem obtineat. Exemplum XIX.

RESOLVTIO.

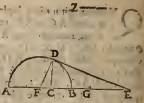


DIameter A B ſit 2 d, eius dimidium A F, vel F B erit d, ratio autem data ſit vt d, ad s. Oporteat facere quod imperatum eſt. Segmentum interceptum F C eſto a; ergo A C erit d + a, ſegmentum C B erit d − a, & F E erit $\frac{dd}{a}$ propter triangulorum ſimilitudinem &c. inſuper C E erit $\frac{dd}{a} - a$. Recta verò potens rectangulum A C B erit ℞ $(d^2 - a^2)$ & recta potens quadratum C E, plus quadrato C D, ſeu rectangulo A C B erit quidem ℞ $(\frac{d^4 - 2ddaa + a^4}{aa} + d^2 - a^2)$ Quoniam igitur eſt vt d, ad s, ita rectangulum ſub ℞ $(\frac{d^4 - 2ddaa + a^4}{aa} + d^2 - a^2)$ & ℞ $(d^2 - a^2)$ ad rectangulum ſub tota diametro A B, & ſegmento C B, nempe $2d^2 - 2da$, ob ſimilitudinem triangulorum vt ſupra diximus, erit, vt conſtat ex Elementis quemadmodum ℞ $(\frac{d^4 - 2ddaa + a^4}{aa} + d^2 - a^2)$ ad $\frac{dd}{a} - a$, ita d ad ℞ $(d^2 - a^2)$ ergo rectangulum ſub ℞ $(\frac{d^4 - 2ddaa + a^4}{aa} + d^2 - a^2)$ & ℞ $(d^2 - a^2)$ æquale erit rectangulo ſub $\frac{dd}{a} - a$, & d; vt igitur d ad s, ita rectangulum ſub $\frac{dd}{a} - a$, & d, ad $2d^2 - 2da$; eſt autem rectangulum ſub $\frac{dd}{a} - a$, & d, æquale rectangulo ſub 2 d, & $\frac{1}{2}\frac{dd}{a} - \frac{1}{2}a$; at verò vt $\frac{1}{2}\frac{dd}{a} - \frac{1}{2}a$, ad d − a, ita ſumpta communi altitudine 2 d, rectangulum ſub $\frac{1}{2}\frac{dd}{a} - \frac{1}{2}a$, & 2 d, ad rectangulum $2d^2 - 2da$; ergo erit vt $\frac{1}{2}\frac{dd}{a} - \frac{1}{2}a$, ad d − a, ita d, ad s; duplatis autem antecedentibus erit vt $\frac{dd}{a} - a$, ad d − a, ita 2 d, ad s; ſed vt $\frac{dd}{a} - a$, ad d − a, ita d + a, ad a; ergo vt 2 d, ad s, ita d + a ad a; quamobrem diuidendo erit vt 2 d − s, ad s, ita d, ad a. Hinc

PORISMA.

Vt exceſſus, quo diameter, quæ eſt duplum vnius termini datæ rationis ſuperat alium terminum, ita ſemidiameter, quæ eſt ſimplex terminus, ad interceptum ſegmentum quæſitum.

COMPOSITIO.



DAta ſit AB diameter ſemicirculi ADB protrahenda quidem ad partes B &c. proportio verò data ſit vt A F, vel F B ad Z. Fiat vt differentia inter A B, & Z, ad Z, ita F B ad F C. Deinde ex puncto C erigatur perpendicularis C D occurrens peripheriæ in D, ducaturque F D, in qua recta D E, angulum rectum efficiat; ipſi verò D E occurrat A B protracta in E. Dico rectangulum ſub E D, D C, ad rectangulum A B C, rationem habere quam habet F B ad Z. Diuidatur C E biſariam in G. Quoniam igitur eſt vt A B, minus Z, ad Z, ita F B ſeu A F, ad F C; erit componendo vt A B ad Z, ita A F, plus F C, ad F C; eſt autem vt A F plus F C, ad F C, ita C E ad C B, *a* ob id erit vt C E, ad C B, ita A B ad Z, & ſubduplatis antecedentibus erit vt C G ad C B, ita F B ad Z. Vt autem C G ad C B, ita rectangulum ſub C G, & A B, ad rectangulum A B C; eſt autem rectangulum ſub C G, & A B æquale rectangulo ſub C E, & F B; ergo vt F B ad Z, ita rectangulum ſub C E, & F B ad rectangulum A B C. Rectangulum autem ſub D E, & recta D C æquale eſt rectangulo ſub C E, & F B; propterea vt F B ad Z, ita rectangulum ſub D E, & D C ad rectangulum A B C.

a Et demonſtrantis ab Auctore.

SCHOLION.

Si ducatur D B, rectangulum A B C, æquabitur quadrato D B, proinde ſolutum erit & illud, quod ſcilicet rectangulum ex D E in D C ad quadratum D B, rationem habeat datam.

Problema.

Exemplum X X. *Dato aggregato quatuor quantitatum continuè proportionalium, & aggregato quadratorum ab extremis, ſingulas diſtinguere.*

RESOLVTIO.

AGgregatum quatuor continuè proportionalium ſit b, aggregatū quadratorum ſit d. Mediorum ſumma eſto a; ergo ſumma extremorum erit b − a, cuius quadratum eſt $b^2 - 2ba + a^2$, ex quo ſi dempſeris d^2 nimirum aggregatum quadratorum ab extremis, remanebit $b^2 - 2ba + a^2 - d^2$, quod erit duplum productum ſub medijs vel extremis, vnde productum ſimplum erit $\frac{b^2 - 2ba + a^2 - d^2}{2}$ quod æquabitur $\frac{a^3}{b + 2a}$ ſiquidem cubus aggregati mediorum ſi diuidatur per aggregatum extremorum plus triplo aggregato mediorum, comparabitur productum ſub medijs, vel extremis; erat autem ſumma mediorum a, cuius cubus eſt a^3 & erat ſumma extremorum b − a, cui ſi addatur 3 a, nempe triplum ſummæ mediorum fit b + 2 a, per quod diuidi debet a^3, vt proueniat ſimplum productum ſub medijs, vel extremis; decuſſatim autem facta multiplicatione $b^3 - 3ba^2 - bd^2$ $2a^3 - 2d^2a = 2a^3$; & per antitheſim $3ba^2 + 2d^2a$ æquabitur $b^3 - bd^2$; omnibus autem applicatis ad 3 b, & $a^2 + \frac{2d^2a}{3b}$ æquabitur $\frac{b^3 - bd^2}{3b}$. Huius æquationis radix extrahatur tollantur igitur fractiones, nempe fiat vt 3 b, ad rectam, quæ poſſit $2d^2$, nempe duplum aggregatum quadratorum ab extremis, ita hæc ad aliam K. Deinde vt 3 b, ad b, ita $b^2 - d^2$, ad aliud z^2, & æquatio proueniet $a^2 + Ka = z^2$; & extrahatur radix iuxta præcepta. Vnde.

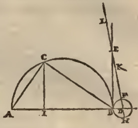
PORISMA.

Fiat vt triplum aggregati laterum ad rectam quæ poteſt duplum aggregatum quadratorum ab extremis, ita hæc ad aliam, ad cuius dimidij quadratum. Vel ſi placet, fiat vt triplum aggregati laterum, ad rectam quæ poteſt aggregatum quadratorum ab extremis, ita hæc ad aliam, & ad huius quadratum addatur planum, ad quod, ita ſe habet differentia inter quadratum

aggre-

aggregati quantitatum quatuor continuè proportionalium, & aggregatum quadratorum ab extremis, vt ſe habet triplum aggregatum proportionalium, ad aggregatum ipſum, hoc eſt planum, quod eſt ſubtriplum differentiæ prædictorum quadratorum; additione facta, ſumatur aggregati latus; hoc ſiquidem multatum prædicto dimidio, quantitatem ignotam exhibebit.

COMPOSITIO.



Recta quidem A B ſit aggregatum quatuor laterum continuè proportionalium; recta verò A C poſſit aggregatum quadratorum ab extremis; ſuper A B deſcriptus ſit ſemicirculus, in quo ſit aptata prædicta A C; ductaque CB: cadat deinde C I perpendicularis ad A B; protrahatur A B ad D, vt B D ſit tertia pars ipſius A I; mox verò ſumpta BE media proportionali inter A B, & trientem ipſius I B, ſit ex B excitata perpendicularis; centro autem D, interuallo D B, deſcripto circulo B F H, agatur E D vſque ad H, occurrens circuli peripheriæ in punctis F, & H: factumque erit quod Poriſma iubet; ſiquidem triangula A C B, & A C I ſunt α æquiangula, atque ſimilia, ac ob id vt A B ad A C, ita erit β A C ad A I; ergo rectangulum B A I æquabitur γ quadrato A C; At verò ſi fiat vt tripla A B ad A B, ita AI ad aliam B D, facta erit applicatio rectanguli B A I ad triplam A B, & ortiua magnitudo erit BD, vt itaque AB triens eſt triplæ AB, ſic ortiua magnitudo BD triēs eſt ipſius A I; cùm igitur BD facta ſit triens ipſius A I, hæc ipſa erit ortiua magnitudo iam dicta; ſumendo igitur huiuſmodi trientem, perinde eſt ac rectangulum BAI applicaſſe ad triplam A B, ſeu feciſſe, vt triplum aggregati laterum ad rectam, quæ poteſt &c. α 8. ſexti. β 4. ſexti. γ 16. ſexti.

Non diſſimili ratiocinio demonſtrabimus rectangulum A B I æquari quadrato C B, quod eſt differentia inter quadratum A B, ſummæ omnium laterum, & quadratum A C aggregatum quadratorum ab extremis; at verò ſi fiat vt tripla A B, ad A B, ita rectangulum A B I ad aliud, nempè rectangulum ſub A B, & triente BI erit huiuſmodi rectangulum ortiua magnitudo ex applicatione ſolidi ſub rectangulo A B I in A B, ad triplam A B; eſt autem rectangulum ex A B I, & triente B I triens rectanguli A B I, ſeu quod idem eſt quadratum rectæ B E mediæ proportionalis inter A B, & trientem B I; perinde igitur eſt ſumere B E mediam proportionalem inter A B, & trientem B I, ac ſolidum ſub rectangulo A B I, in A B, applicaſſe ad triplam A B; ſeu feciſſe, vt triplum aggregati laterum, ad latus ipſum, ita differentia quadratorum &c. Deinde verò quadratum B E additum fuit quadrato B D, factumque fuit quadratum D E, cuius latus D E multatum F D, nempe dimidio F H exhibuit F E.

Supereſt itaque demonſtradum rectam F E fore mediarum duarum aggregatum continuè proportionalium è quibus omnibus aggregatum ſit data A B; & aggregatum quadratorum ab extremis ſit quadratum A C.

Effectionem hanc demonſtrauit Bily oſtendendo mediarum ſummam non poſſe eſſe minorem quam F E, vt F K, neque maiorem, vt F L. *Idem per analyſeos regreſſum adhibita ſolidorum cõparatione oſtendi poteſt.*

Exponitur ὑποταγματικὴ, ſeu Subſidiaria Coefficiens quantitas, quam Auctor adinuenit, & quam adhibere conſueuit.

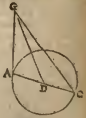
Subſidiaria coefficiens quantitas explicatur.

Mirum eſt, quantam vtilitatem afferat ea, de qua loquimur, quantitas à nobis excogitata; eius enim beneficio feliciter analyſis intra planorum fines inſtituitur, quos alioquin omninò prætergreſſa fuiſſet; eſt porrò quantitas prædicta, quæ aſſumitur, vt eius ductu, in aliam datam quantitatem, fiat planum æquale dato; perinde enim eſt, ac planum hoc ad datam quantitatem applicaſſe, & ortiuam magnitudinem aſſumpſiſſe. hoc autem artificio, vitatur multiplicatio, vnde quantitatum aſcenſus ad altos gradus; ac ob id in analogiſmo licet perſiſtere, donec accerſito paraboliſmo, in ſimplicioribus magnitudinibus analogiſmo facto, ad æqualitatem inter plana deuentum ſit, cuius explicatione quantitas ignota perſpecta fiat.

Problema.

Exemplum XXXI.

Datus ſit circulus A B C, & in eo quæratur punctum A, ita conſtitutum vt linea ab ipſo per centrum D, ad alteram vſque partem puta C, duo puncta deſignet A, C, à quibus ad punctum datum G, ductæ rectæ G A, G D, G C, ſint proportionales.



Problema iſtud iucundum admodum, vt vides, nobis Florentiam tranſmiſſum Antuerpia reſoluendum cum alijs quibuſdam fuit; & quidem non niſi paucis diebus, proponenti ſatisfecimus;

Triplex caſus

In primis illud eſt aduertendum, nimirum triplicem poſſe dari caſum; nam, vel D G, potentia eſt ſeſquialtera ad A D, vel maiorem, vel minorem rationem habet; in primo quidem caſu, recta G D, tangit circulum in A, cadens ad rectos angulos ſuper A C; in ſecundo eſt in clinata, ad partes excernas; in tertio, ad partes internas.

Primus caſus reſoluitur.

In primo igitur caſu ſatis erit ex puncto G, ducere tangentem tem circulum in A; ex A per D ducere A C, itemque G D, G C, erunt enim G A, G D, G C. in continua ratione. Si enim G D, quadratum eſt in ſexquialtera ratione ad quadratum A D, ſi quadratum A D valet 2, quadratum G D valebit 3, quadratum A C valebit 8, & quadratum G A valebit 1; quoniam verò quadratum A C valet 8, quadratum G A valet 1, quadratum G C valebit 9; itáque quadrata ipſarum G C, G D, G A, erunt proportionalia; eſt enim G C potentia nonupla G A; ergo tripla magnitudine. Et quoniam G D tripla eſt potentia G A; ergo G D potentia ad G A, vt G C potentia ad G D; ergo G C ad G A magnitudine vt G C ad G D potentia; ergo G C, G D, G A erunt proportionales.



Iuxta primam poſitionem Secundi Caſus.

RESOLVTIO I.

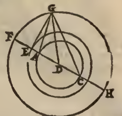
HActenùs de primo caſu; ad ſecundum quod attinet; cum ſcilicet recta cadens ex puncto G perpendicularis ſuper diametrũ A C, vtrinque protractam; procedendum, vt hic à latere. Supponatur iam factam. Quoniam igitur G A, G D, G C, ſunt proportionales, etiam & earum quadrata proportionalia erunt. Intelligatur ex puncto G cadens perpendicularis ſuper diametrum A C vtrinque protractã, & quidem in ſecundo caſu, vt dicebamus

$AD = b.$
$AC = 2b.$
FD ſeu $GD = d$
$FH = 2d$
$FA = d - b.$
$FE = a$
$ED = d - a.$
$EA = d - b - a.$
$EC = d + b - a.$
$EH = 2d - a$

$$\begin{array}{r} d - b - a \\ d - b - a \\ \hline - da + ba + a^2 \\ - bd + b^2 + ba \\ d^2 - bd - da \\ \hline d^2 - 2bd - 2da + b^2 + 2ba + a^2 \\ + 2da \qquad - a^2 \\ \hline d^2 - 2bd + b^2 + 2ba \end{array}$$

$$\begin{array}{r} d + b - a \\ d + b - a \\ \hline - da - ba + a^2 \\ + bd + b^2 - ba \\ d^2 + bd - da \\ \hline d^2 + 2bd - 2da + b^2 - 2ba + a^2 \\ + 2da \qquad - a^2 \\ \hline d^2 + 2bd + b^2 - 2ba \end{array}$$

$$\frac{d^2 + 2bd + b^2 - 2ba}{2} \times \frac{d^4}{d^2 - 2bd + b^2 + 2ba}$$



ęcbamus huiuſmodi perpendicularis, eadet extra circulum, facta vero poſitione, vt à latere cernitur, iuxta hanc poſitionem E A eſt $d - b - a$, eius quadratum erit $d^2 - 2bd - 2da + b^2 + 2ba + a^2$, cui ſi addideris quadratum perpendicularis G E nempè rectangulum F E H, quod eſt $2da - a^2$, proueniet $d^2 - 2bd + b^2 + 2ba$, quadratum ex A G; At E C cùm ſit $d + b - a$, eius quadratum eſt $d^2 + 2bd - 2da + b^2 - 2ba + a^2$, cui ſi addideris $2da - a^2$,

$$d^2 + 2bd + b^2 - 2ba \text{ quadratum } GC$$
$$d^2 - 2bd + b^2 + 2ba \text{ quadratum } GA$$

$$2bd^2a + 4b^2da + 2b^3a - 4b^2a^2$$
$$+ b^2d^2 + 2b^3d + b^4 - 2b^3a.$$
$$- 2bd^3 - 4b^2d^2 - 2b^3d + 4b^2da.$$
$$d^4 + 2bd^3 + b^2d^2 - 2bd^2a$$

$$d^4 - 2b^2d^2 + 8b^2da + b^4 - 4b^2a^2 = d^4$$
$$d^4 + 8b^2da + b^4 = d^4 + 2b^2d^2 + 4b^2a^2.$$
$$8b^2da + b^4 = 2b^2d^2 + 4b^2a^2$$
$$8b^2da - 4b^2a^2 = 2b^2d^2 - b^4$$
$$8da - 4a^2 = 2d^2 - b^2$$
$$2da - a^2 = \tfrac{1}{2}d^2 - \tfrac{1}{4}b^2.$$
$$d - ℞\left(d^2 - \tfrac{2d^2 - b^2}{4}\right) = a.$$

nempe quadratum perpendicularis E G, proueniet $d^2 + 2bd + b^2 - 2ba$, pro quadrato ipſius G C, ergo tria hæc quadrata $d^2 - 2bd + b^2 + 2ba$; d^2; $d^2 + 2bd + b^2 - 2ba$, erunt proportionalia; ergo factum ſub extremis æquabitur quadrato medij; itaque $d^4 - 2b^2d^2 + 8b^2da + b^4 - 4b^2a^2$, æquabitur d^4, & operando ſecundum Artem, reperiemus tandem $2da - a^2$, æquari $\frac{1}{2}d^2 - \frac{1}{4}b^2$, cuius æquationis radix eſt $d - ℞(d^2 - \frac{2d^2 - b^2}{4}) = a$.

Hæc tamen Analyſis vtpote, quæ aſcendit ad quantitates imaginarias viam non ſuppeditat Analyſtæ ad componendum idoneam niſi opitulante vſu vnitatis, de quo in Geometra Promoto, cumulate diſputabo.

Præſtat igitur hanc aliam inire viam. Iiſdem enim ſuppoſitis; cùm quadratum G C, ſit $d^2 + 2bd + b^2 - 2ba$, & quadratum G A ſit $d^2 - 2bd + b^2 + 2ba$; ergo vt $d^2 + 2bd + b^2 - 2ba$, ad d^2, ita d^2 ad $d^2 - 2bd + b^2 + 2ba$; ergo diuidendo vt $2bd + b^2 - 2ba$, ad d^2, ita $2bd - b^2 - 2ba$, ad $d^2 - 2bd + b^2 + 2ba$; & permutando, vt $2bd + b^2 - 2ba$, ad $2bd - b^2 - 2ba$, ita d^2, ad $d^2 - 2bd + b^2 + 2ba$; & rurſus diuidendo, vt $2b^2$, ad $2bd - b^2 - 2ba$, ita $2bd - b^2 - 2ba$, ad $d^2 - 2bd + b^2 + 2ba$; fiat autem vt b, ad d, ita d, ad r, hæc autem eſt quantitas, quam coefficientem ſubſidiariam appello; erit enim r quantitas coefficiens ſubſidiaria: vnde br, æquabitur d^2; quare vt $2b^2$, ad $2bd - b^2 - 2ba$, ita $2bd - b^2 - 2ba$, ad $br - 2bd + b^2 + 2ba$. Facto igitur Paraboliſmo per omnium applicationem ad magnitudinem b, erit vt $2b$, ad $2d - b - 2a$, ita $2d - b - 2a$, ad $r - 2d + b + 2a$; ergo factũ ſub extremis æquabitur facto ſub medijs; proinde $4d^2 - 4bd - 8da + b^2 + 4ba + 4a^2$, æquabitur $2br - 4bd + 2b^2 + 4ba$; vtrinq; ſublatis $+ 4ba$, & additis $- 4bd$, remanebit $4d^2 - 8da + b^2 + 4a^2 = 2br + 2b^2$; vtrinque ſublato b^2, remanebit $4d^2 - 8da + 4a^2$, quod æquabitur $2br + b^2$; & rurſus per antitheſin $4d^2 - 2br - b^2$, æquabitur $8da - 4a^2$, ſeu quod idem eſt $8da - 4a^2$ æquabitur $4d^2 - 2br - b^2$; ſed $2br$ æquatur $2d^2$, cùm br æquetur ſimplo d^2; ergo per interpretationem $4d^2 - 2br$, idem erit quod $2d^2$, quare $8da - 4a^2$ æquabitur $2d^2 - b^2$; diuiſis omnibus per 4, $2da - a^2$ æquabitur $\frac{1}{2}d^2 - \frac{1}{4}b^2$; vnde $d - ℞(d^2 - \frac{2d^2 - b^2}{4})$ æquabitur a. Hinc.

Quantitas coefficiens ſubſidiaria, quã Auctor adinuenit, quæ ſit & eius vſus.

vai-

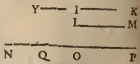
PORISMA.

Ex quadrato rectæ F D, ſubtrahatur $\frac{1}{4}$ differentiæ inter duplum quadratum F D, & quadratum A D, reſidui verò latus ſubtrahatur ex F D, quod enim remanet, erit æqualis quantitati quæſitæ F E. datur igitur F E quæſita.

Fiat, vt A D, ad F D, ita F D ad aliam Y.

COMPOSITIO.

Fiat I K æqualis A D, & exponatur N O æqualis ipſi F D, & ex quadrato ipſius N O intelligatur ſubtractum quadratum L M, quod eſt æquale quartæ parti differentiæ inter quadratum duplum N O, & quadratum I k; reſiduum verò ſit quadratum, cuius latus Q O.



Dico N Q eſſe quantitatem quæſitam; adeo vt ſi in ſuperiori figura ex F D ſubtrahatur F E æqualis ipſi N Q; & centro D, interuallo D E deſcribatur circulus & ex puncto G, cadat G E tangens eundem, & per puncta E, & D agatur F H occurrens circunferentiæ circuli A B C in punctis A, & C, & ex his ducantur A G, C G, & ex D ipſa D G, ſint A G, C G, D G in continua ratione.

Protrahatur N O in P, vt O P; ſit æqualis N O.

Quoniam igitur N P diuiſa eſt bifariam in O, & non bifariam in Q; ergo rectangulum P Q N, plus quadrato Q O æquabitur quadrato N O; vtrinque ſubtracto quadrato Q O; ergo rectangulum P Q N æquabitur quadrato N O, minus quadrato Q O. Sed quadratum N O, minus quadrato Q O, æquale eſt quadrato L M ex conſtructione; ergo rectangulum P Q N æquabitur quadrato L M; ſed rectangulum P Q N æquale eſt rectangulo P N Q, minus quadrato Q N; ergo rectangulum P N Q minus quadrato Q N æquabitur quadrato L M; ſed quadratum L M æquale eſt quartæ parti differentiæ inter duplum quadratum N O, & quadratum I K; ergo rectangulum P N Q minus quadrato N Q æquabitur quartæ parti differentiæ inter duplum quadratum N O, & quadratum I K; hoc eſt æquabitur dimidio quadrati N O, minus quarta parte quadrati ipſius I K. Sed rectangulum P N Q idem eſt quod duplum rectangulum O N Q; ergo duplum rectangulum O N Q minus quadrato N Q æquabitur dimidio quadrati N O, minus quarta parte quadrati I K; omnibuſque ductis in 4; octuplum rectangulum O N Q minus quadruplo quadrato N Q æquabitur duplo quadrato N O, minus quadrato I K. Et quoniam factum fuit vt A D in ſuperiori figura, hoc eſt I K ad N O, ita N O ad aliam Y, erit productum ex Y in I K æquale quadrato N O; vt igitur ſimplum eſt æquale ſimplo, ita duplum duplo; propterea duplum rectangulum ſub I K, & Y, æquabitur duplo quadrato N O; quare quadruplum quadratum N O, minus duplo rectangulo ſub I K, & Y, idem erit quod duplum quadratum N O; quare octuplum rectangulum O N Q minus quadruplo quadrato N Q, æquabitur quadruplo quadrato N O, minus duplo rectangulo ex I K in Y, minus quadrato I K, ſeu quod idem eſt quadruplum quadratum N O, minus duplo rectangulo ab I K in Y, minus quadrato I K æquabitur octuplo rectangulo O N Q minus quadruplo quadrato N Q. Et rurſus per antitheſin quadruplum quadratum O N, minus octuplo rectangulo O N Q, plus quadruplo quadrato N Q, æquabitur duplo rectangulo ab I K in Y, plus quadrato I K; vtrinque addito quadrato I K; & quadruplum quadratum O N, minus octuplo rectangulo O N Q, plus quadrato I K, plus quadruplo quadrato N Q æquabitur duplo rectangulo ab I K in Y, plus duplo quadrato I K; vtrinque addito quadruplo rectangulo ſub I K in N Q, & ſubtrac. quadruplo rectangulo ſub I K & O N, & quadruplum quad. O N, minus quadruplo rectangulo ab I K in O N, minus octuplo rectangulo O N Q, plus quadrato I K, vna cum quadruplo rectangulo ab I K in N Q plus quadruplo quadrato N Q æquabitur duplo rectangulo ab I K in Y, minus quadruplo rectangulo ab I K in O N, plus duplo quadrato I K, plus quadruplo rectangulo ab I K in N Q; ergo erit vt dupla I K ad duplam O N, minus I K, minus dupla N Q, ita dupla O N, minus I K, minus dupla N Q ad Y,

minus

minus dupla O N, plus I K plus dupla N Q; omnibuſque ductis in I K, erit vt duplum quadratum I K, ad duplum rectangulum ex I K in O N, minus quadrato I K, minus duplo rectangulo ex I K, in N Q, ita duplum rectangulum ex I K in O N, minus quadrato I K, minus duplo rectangulo ex I K in N Q, ad rectangulum ex I K in Y, minus duplo rectangulo ex I K in O N, plus quadrato I K, vna cum duplo rectangulo ex I K in N Q; loco autem rectanguli ex I K in Y, ſubſtituatur ei æquale quadratum O N; ergo vt duplum quadratum I K, ad duplum rectangulnm ex I K in O N, minus quadrato I K, minus duplo rectangulo ex I K in N Q, ita duplum rectangulum ex I K in O N, minus quadrato I K, minus duplo rectangulo ex I K in N Q ad quadratum O N, minus duplo rectangulo ex I K in O N, plus quadrato I k, plus duplo rectangulo ex I K in N Q; Et componendo vt duplum rectangulum ex I k in O N, plus quadrato I K, minus duplo rectangulo ex I K in N Q ad duplum rectangulum ex I K in O N, minus quadrato I K, minus rectangulo ex I K in N Q, ita quadratum O N, ad quadratum O N, minus duplo rectangulo ex I K in O N, plus quadrato I K, plus duplo rectangulo ex I k in N Q; & permutando vt duplum rectangulum ex I K in O N, plus quadrato I K, minus duplo rectangulo ex I K in N Q, ad quadratum O N, ita duplum rectangulum ex I k in O N, minus quadrato I K, minus duplo rectangulo ex I K in N Q, ad quadratum O N, minus duplo rectangulo ex I K in O N, plus quadrato I K plus duplo rectangulo ex I K in N Q; ergo componendo erit vt quadratum O N, plus duplo rectangulo ex I K in O N plus quadrato I K, minus duplo rectangulo ex I K in N Q, ad quadratum O N, ita quadratum O N, ad quadratum O N, minus duplo rectangulo ex I K in O N, plus quadrato I k, plus duplo rectangulo ex I K in N Q; hoc eſt vt quadratum G C in ſuperiori figura ad quadratum G D, ita quadratum G D ad quadratum G A; loco enim ipſius I K intelligi debet A D; vel D C; quadratum enim G C, cùm F E facta ſit æqualis N Q, idem eſt quod quad. O N vel D G, plus duplo rectangulo A D F, vel A D G, ſeu A D H, plus quadrato A D, minus duplo rectangulo ſub A D, & FE; quadratum verò G A idem eſt quod quadratum D F, vel D G, minus duplo rectangulo A D F, vel A D G, ſeu A D H, plus quadrato A D, plus duplo rectangulo ſub A D, & F E; quare, & eorum latera proportionalia erunt; vnde, vt G C, ad G D, ita G D ad G A. Quod oportebat &c.

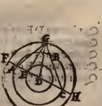
Iuxta primam Poſitionem, tertij Caſus.

RESOLVTIO I.

IN præſenti autem tertio caſu; ſi poſitio fieret, ſic vt ignota quantitas eſſet F E, vt in præcedenti, incideremus in æquationem altioris gradus, & nimia affectione laborantem; vnde præſtat ipſam poſitionem inſtituere vt hic à latere cernitur; Iuxta ſiquidem hanc hypotheſin colligemus æquationem puram, in qua ſcilicet a^2 æquatur $\frac{1}{2} d^2 + \frac{1}{4} b^2$.

$GD = d$
AD vel $DC = b$.
$AC = 2b$.
$ED = a$.
$AE = b - a$.
$EC = b + a$.
$EG = \text{R}(d^2 - a^2)$

$$d^2 + b^2 - 2ba$$
$$d^2 + b^2 + 2ba$$
$$+ b d^2 + 2 b^3 a - 4 b^2 a^2$$
$$+ b^2 d^2 + b^4 - 2 b^3 a$$
$$d^4 + b^2 d^2 - 2 b d^2 a$$
$$d^4 + 2 b^2 d^2 + b^4 - 4 b^2 a^2 = d^4$$
$$d^4 + 2 b d^2 + b^4 = d^4 + 2 b^2 a^2$$
$$2 b^2 d^2 + b^4 = 4 b^2 a^2$$
$$4 b^2 a^2 = 2 b d^2 + b^4$$
$$4 a^2 = 2 d^2 + b^2$$
$$a^2 = \frac{1}{2} d^2 + \frac{1}{4} b^2.$$



Iuxta

Iuxta ſecundam Poſitionem ſecundi caſus.

RESOLVTIO I.

Quadratum D E eſt $a^2 + 2\,b\,a + b^2$ — $AD = b$

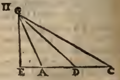
Quadratum G E eſt $d^2 - 2\,b\,a - b^2 - a^2$ — $DC = b$

Quadratum G A eſt $d^2 - 2\,b\,a - b^2$ — $DG = d$

Quadratum C E eſt $a^2 + 4\,b\,a + 4\,b^2$ — $AC = 2\,b$.

Quadratum G C eſt $d^2 + 2\,b\,a + 3\,b^2$. — $AE = a$

Igitur eſt vt $d^2 + 2\,b\,a + 3\,b^2$, ad d^2, ita d^2, ad $d^2 - 2\,b\,a - b^2$; ergo productum ab extremis æquabitur quadrato medij; proinde fiat multiplicatio, vt hìc à latere cernitur: & productum, ſcilicet $d^4 + 2\,b^2\,d^2 - 4\,b^2\,a^2 - 8\,b^3\,a - 3\,b^4$, æquabitur d^4; & per repetitam antitheſin, & per paraboliſmum factum ex applicatione omnium ad b^2, & omnibus diuiſis per 4, proueniet æquatio $a^2 + 2\,b\,a = \frac{1}{2}\,d^2 - \frac{3}{4}\,b^2$. & Hinc Poriſma &c.



$$d^2 + 2\,b\,a + 3\,b^2$$
$$d^2 - 2\,b\,a - b^2$$

$$- b^2\,d^2 - 2\,b^3\,a - 3\,b^4$$
$$- 2\,b\,d^2 - 4\,b^2\,a^2 - 6\,b^3\,a.$$
$$d^4 + 2\,b\,d^2\,a + 3\,b^2\,d^2$$

$$d^4 + 2\,b^2\,d^2 - 4\,b^2\,a^2 - 8\,b^3\,a - 3\,b^4 = d^4$$
$$d^4 + 2\,b^2\,d^2 - 3\,b^4 = d^4 + 4\,b^2\,a^2 + 8\,b^3\,a$$
$$2\,b^2\,d^2 - 3\,b^4 = 4\,b^2\,a^2 + 8\,b^3\,a.$$
$$4\,b^2\,a^2 + 8\,b^3\,a = 2\,b^2\,d^2 - 3\,b^4$$
$$4\,a^2 + 8\,b\,a = 2\,d^2 - 3\,b^2$$
$$a^2 + 2\,b\,a = \tfrac{1}{2}\,d^2 - \tfrac{3}{4}\,b^2.$$

SCHOLION.

Verùm tametſi æquatio hæc ſit per circulum, & lineam rectam explicabilis, vt ſupra tradidimus, demonſtratio tamen contexi non poteſt repetendo reſolutionis veſtigia niſi beneficio vnitatis, qua de re in meo Promoto Geometra; quoniam nimirum factus eſt aſcenſus ad imaginarias quantitates, ob id opera pretium eſt minus ſalebroſam calcare viam ſequentem.

Iuxta ſecundam Poſitionem ſecundi caſus.

RESOLVTIO II.

Quadratum D E eſt $a^2 + 2\,b\,a + b^2$ — $AD = b$

Quadratum G E eſt $d^2 - 2\,b\,a - b^2 - a^2$ — $DC = b$

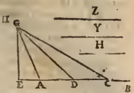
Quadratum G A eſt $d^2 - 2\,b\,a - b^2$ — $DG = d$

Quadratum C E eſt $a^2 + 4\,b\,a + 4\,b^2$ — $AC = 2\,b$.

Quadratum G C eſt $d^2 + 2\,b\,a + 3\,b^2$. — $AE = a$

Quo-

Quoniam igitur eſt vt $d^2 + 2ba + 3b^2$, ad d^2, ita d^2, ad $d^2 - ba - b^2$; ergo diuidendo vt $2ba + 3b^2$, ad d^2, ita $2ba + b^2$, ad $d^2 - 2ba - b$; ergo permutando, vt $2ba + 3b^2$, ad $2ba + b^2$, ita d^2, ad $d^2 - 2ba - b^2$; ergo diuidendo, vt $2b^2$, ad $2ba + b^2$, ita $2ba + b^2$, ad $d^2 - 2ba - b^2$; fiat autem vt b, ad d, ita d, ad r; ergo b r, æquabitur d^2; ergo vt b^2, ad $2ba + b^2$, ita $2ba + b^2$, ad $br - 2ba - b^2$; ergo omnibus applicatis ad b, vt 2 b, ad $2a + b$, ita $2a + b$, ad $r - 2a - b$; ergo factum ſub extremis æquabitur facto ſub medijs; quare $2br - 4ba - 2b^2$, æquabitur $4a^2 + 4ba + b^2$; & per antitheſin $2br - 4ba - 3b^2$, æquabitur $4a^2 + ba$; ergo $2br - 3b^2 = 4a^2 + 8ba$; ergo $\frac{1}{2}br - \frac{3}{4}b^2 = a^2 + 2ba$, ſeu $a^2 + 2ba = \frac{1}{2}br - \frac{3}{4}b^2$. Cùm autem b r æquetur d^2, idem erit $\frac{1}{2}br$, ac $\frac{1}{2}d^2$ Hinc extrahitur Radix iuxta Artis præcepta, & ea quidem erit



$℞(b^2 + \frac{1}{2}d^2 - \frac{3}{4}b^2) - b = a.$ ſeu erunt proportionalia

$a + 2b.$ $℞(\frac{1}{2}d^2 - \frac{3}{4}b^2).$ $a.$

Hinc.

PORISMA.

Ad quadratum dimidiæ coefficientis addatur comparationis homogeneum, & reſidui latus multetur ipſo dimidio; hoc eſt ad quadratum dimidiæ baſeos addatur differentia inter dimidium quadratum rectæ datæ à puncto externo ad biſſectionis punctum baſeos, & tres quartas partes quadrati dimidij eiuſdem baſeos; huius enim aggregati latus multatum dimidio baſeos, quæſitam Radicem exhibebit. Seu

Sumatur recta, quæ poſſit interuallum, inter dimidium quadratum rectæ à vertice, ad baſeos biſſectionis punctum, & tres quartas partes quadrati è dimidio baſeos; & hoc, tanquàm rectangulo ſub lateribus, & baſi, tanquàm differentia laterum è tribus proportionalibus; reperiantur extrema; nam minus ex his ignotam quantitatem exhibebit.

COMPOSITIO.

Recta quæ à vertice trianguli ad baſeos biſſectionis punctum data, ſit Y, factumque ſit vt A D ad Y, Ita Y ad Z, ita vt rectangulum ſub Z, & A D æquale ſit quadrato Y; mox autem fiat H, quæ poſſit differentiam inter dimidium quadratum ipſius Y, hoc eſt inter dimidiũ rectangulũ ex Z in A D, & tres quartas partes quadrati ipſius A D; quadrato autem H, tanquàm rectangulo ſub extremis, & A C differentia extremorum è tribus lateribus proportionalibus, reperiantur extrema latera A E, A B; ex E, excitetur recta perpendicularis in infinitum, & inter hanc, & E D aptetur D G æqualis Y: agantur A G, C G; Dico C G, D G, A G, eſſe continuè proportionales.

Quoniam enim A C eſt differentia laterum E A, A B; ergo E A æquabitur C B; ergo rectangulum E A B æquabitur rectangulo A E C, ſed rectangulum E A B æquale eſt quadrato H; ergo rectangulum A E C æquabitur quadrato H; ſed quadratum H æquale eſt dimidio rectangulo ex A D in Z, minus tribus quartis partibus quadrati A D; ergo rectangulum A E C, hoc eſt quadratum E A plus rectangulo E A C æquabitur dimidio rectangulo ex A D in Z, minus tribus quartis partibus quadrati A D; ſeu quod idem eſt dimidium rectangulum ex A D in Z, minus tribus quartis partibus quadrati A D, æquabitur quadrato E A, plus rectangulo E A C; omnibus autem quadruplatis, duplum rectangulum ex A D in Z, minus triplo quadrato A D, æquabitur quadruplo quadrato E A, plus octuplo rectangulo E A D; & per antitheſin duplum rectangulum ex A D in Z, minus quadruplo rectangulo E A D minus triplo quadrato A D, æquabitur quadruplo quadrato E A, plus rectangulo E A D; ergo duplum rectangulum ex A D in Z, minus quadruplo rectangulo E A D, minus duplo quadrato A D, æquabitur quadruplo quadrato E A, plus quadruplo rectangulo E A D, plus quadrato A D; ergo reuocata æqualitate in proportionem, erit, vt dupla A D, ad duplam E A, plus A D, ita dupla E A, plus A D ad Z, minus dupla E A, minus A D; omnibus autem ductis in A D, erit vt duplum quadratum A D ad duplum rectangulum E A D, plus quadrato A D, ita duplum rectangulum E A D, plus

quadrato A D ad rectangulũ ex A D in Z, minus duplo rectangulo E A D, minus quadrato A D; Et quoniam factum eſt vt A D ad Y, ita Y, ad Z, ac propterea rectangulum ex A D in Z, æquale eſt quadrato Y; loco igitur rectanguli ex A D in Z ſubſtituatur quadratum Y; ergo vt duplum quadratum A D ad duplum rectangulum E A D, plus quadrato A D, ita duplum rectangulum E A D, plus quadrato A D, ad quadratum Y, minus duplo rectangulo E A D, minus quadrato A D; ergo componendo vt duplum rectangulum E A D plus triplo quadrato A D, ad duplum rectangulum E A D plus quadrato A D, ita quadratum Y, ad quadratum Y, minus duplo rectangulo E A D, minus quadrato A D; ergo permutando vt duplum rectangulum E A D, plus triplo quadrato A D, ad quadratum Y, ita duplum rectangulum E A D, plus quadrato A D ad quadratum Y, minus duplo rectangulo E A D, minus quadrato A D; ergo componendo vt quadratum Y, plus duplo rectangulo E A D, plus triplo quadrato A D, ad quadratum Y, ita quadratum Y, ad quadratum Y, minus duplo rectangulo E A D, minus quadrato A D; Sed quadratum Y plus duplo rectangulo E A D, ſiue ſimplo E A C, plus triplo quadrato A D, idem eſt quod quadratum G C, & quadratum Y minus duplo rectangulo E A D, ſeu ſimplo E A C, minus quadrato A D, idem eſt quod quadratum G A; & quadratum Y eſt idem, quod quadratum G D; ergo vt quadratum G C ad quadratum G D, ita quadratum G D, ad quadratum G A; ergo & eorum latera proportionalia erunt; quare vt G C, ad G D, ita G D, ad G A.

Eſt enim G D facta æqualis Y.

Iuxtà ſecundam Poſitionem; tertij Caſus.

RESOLVTIO I.

Quadratum G E $= d^2 - a^2$
Quadratum A E $= b^2 - 2ba + a^2$
Quadratum G A $= d^2 + b^2 - 2ba$
Quadratum C E $= b^2 - 2ba + a^2$
Quadratum G C $= d^2 + b^2 + 2ba$; ergo
Vt $d^2 + b^2 + 2ba$, ad d^2, ita d^2, ad $d^2 + b^2 - 2ba$

G D $= d$
A D $= b$
A C $= 2b$.
E D $= a$
A E $= b - a$

$$d^2 + b^2 - 2ba$$
$$d^2 + b^2 + 2ba$$
$$+ bd^2a + 2b^3a - 4b^2a^2$$
$$+ b^2d^2 + b^4 - 2b^3a$$
$$d^4 + b^2d^2 - 2bd^2a$$

$$d^4 + 2b^2d^2 + b^4 - 4b^2a^2 = d^4$$
$$d^4 + 2b^2d^2 + b^4 = d^4 + 4b^2a^2$$
$$2b^2d^2 + b^4 = 4b^2a^2$$
$$4b^2a^2 = 2b^2d^2 + b^4$$
$$4a^2 = 2d^2 + b^2$$
$$a^2 = \frac{1}{2}d^2 + \frac{1}{4}b^2.$$

III



Hinc.

PORISMA.

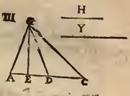
Sumatur dimidium quadrati rectæ à vertice ad punctum biſectionis, cui addatur ¼ quadrati à dimidio data recta. Huius enim aggregati latus, quæſitam radicem repræſentabit.

Iuxta ſecundam Poſitionem tertij caſus.

RESOLVTIO II.

Quadratum G E $= d^2 - a^2$
Quadratum A E $= b^2 - 2ba + a^2$
Quadratum G A $= d^2 + b^2 - 2ba$
Quadratum C E $= b^2 + 2ba + a^2$
Quadratum G C $= d^2 + b^2 + 2ba$.

G D $= d$
A D $= b$
A G $= 2b$
E D $= a$
A E $= b - a$



Quoniam igitur eſt vt $d^2 + b^2 + 2ba$, ad d^2, ita d^2, ad $d^2 + b^2 - 2ba$; ergo diuidendo vt $b^2 + 2ba$ ad d^2, ita $2ba - b^2$, ad $d^2 + b^2 - 2ba$; & permutando vt $b^2 + 2ba$, ad $2ba - b^2$, ita d^2, ad $d^2 + b^2 - 2ba$; & diuidendo vt $2b^2$, ad $2ba - b^2$, ita $2ba - b^2$, ad $d^2 + b^2 - 2ba$; fiat vt b, ad d, ita d, ad r; ergo $br = d^2$; ergo vt $2b^2$, ad $2ba - b^2$, ita $2ba - b^2$, ad $br + b^2 - 2ba$; omnibus applicatis ad b; ergo vt $2b$, ad $2a - b$, ita $2a - b$ ad $r + b - 2a$; ergo factum ſub medijs æquabitur facto ſub extremis; quare $2br + 2b^2 - 4ba = 4a^2 - 4ba + b^2$, ergo $2br + b^2 - 4ba = 4a^2 - 4ba$; ergo $2br + b^2 = 4a^2$; ergo $\frac{1}{2}br + \frac{1}{4}b^2 = a^2$. Hinc Poriſma &c.

COMPOSITIO.

DAta ſit A C trianguli baſis, circulique diameter & Y recta quidem à vertice ad biſ- ſectionis punctum ipſius baſeos diuiſæ bifariam in D, & vt A D ad Y, ita Y fiat ad H; erit autem rectangulum ex A D in H æquale quadrato Y; ſumatur autem dimidium rectanguli ex A D in H, eique addatur quarta pars quadrati A D, aggregati ſumatur latus, hoc enim erit quod quæritur, nimirum E D. Ex puncto igitur E excitetur perpendicularis inter quam & E D aptetur G D æqualis Y: ducantur G A, G C. Dico eſſe vt G C ad G D, ita G D, ad G A.

Quoniam igitur E D æqualis eſt rectæ quæ poteſt dimidium rectanguli ex A D in H, plus quarta parte quadrati A D; ergo dimidium rectanguli ex A D in H, plus quarta parte quadrati A D æquabitur quadrato E D; ergo omnibus quadruplatis duplum rectangulum ex A D in H plus quadrato AD æquabitur quadruplo quadrato E D; vtrinque ſubtracto quadruplo rectangulo ex A D in E D, duplum rectangulum ex A D in H, plus quadrato A D, minus quadruplo rectangulo ex A D in E D, æquabitur quadruplo quadrato E D, minus quadruplo rectangulo ex A D in E D; vtrinque addito quadrato A D; ergo duplum rectangulum ex A D in H, plus duplo quadrato A D, minus quadruplo rectangulo ex A D in E D æquabitur quadruplo quadrato E D, minus quadruplo rectangulo ex A D in E D plus quadrato A D; ergo vt dupla A D ad duplam E D minus A D, ita dupla E D minus A D, ad H plus A D, minus dupla E D; omnibus autem ductis in A D; ergo vt duplum quadratum A D ad duplum rectangulum ex A D in E D, minus quadrato A D, ita duplum rectangulum ex A D in E D, minus quad. AD ad rectangulũ ex A D in H, plus quad. A D, minus duplo rectangulo ex A D in E D. Et quoniam factum eſt vt A D ad Y, ita Y ad H, atque adeo rectangulum ex A D in H æquale eſt quadrato Y; ſubſtituatur Y quadratum loco rectanguli ex A D in H; ergo vt duplum quadratum A D, ad duplum rectangulum ex A D in E D, minus quadrato A D, ita duplum rectangulum ex A D in E D minus quadrato A D ad quadratum Y, plus quadrato A D, minus duplo rectangulo ex A D in E D; ergo componendo vt duplum quadratum A D, plus duplo rectangulo ex A D in E D ad duplum rectangulum ex A D in E D, minus quadrato A D, ita quadratum Y, ad Y quadratum, plus quadrato A D, minus duplo rectangulo ex A D in E D; & permutando vt quadratum A D, plus duplo rectangulo ex A D in E D ad quadratum Y, ita duplum rectangulum ex A D in E D, minus quadrato A D, ad quadratum Y, plus quadrato A D minus duplo rectangulo ex A D in E D; ergo componendo vt quadratum Y, plus quad. A D, plus duplo rectangulo ex A D in E D, ad quadratum Y, ita

quadratum Y ad quadratum Y plus quadrato A D minus duplo rectangulo ex A D in E D.

Eſt autem quadratum Y idem quod G D quadratum, cùm G D facta ſit æqualis Y; ergo vt G D quadratum, plus A D quad. plus duplo rectangulo ex A D in E D ad G D quadratum, ita G D quadratum ad G D quadratum, plus A D quadrato, minus duplo rectangulo ex A D in E D; ergo & eorum latera proportionalia erunt; eſt autem ipſius G D quadrati, plus A D quadrato, plus duplo rectangulo ex A D in E D, latus quidem G C, ipſius vero G D quadrati latus eſt G D, at ipſius G D quadrati, plus A D quadrato, minus duplo rectangulo ex A D in E D, latus eſt G A; ergo vt G C ad G D, ita G D, ad G A.

PROBLEMA.

Exemplum XXII. *Datum latus ita ſecare, vt differentia quadratorum partium ad rectangulum ſub partibus datam habeat rationem.*

RESOLVTIO.

Datum ſit latus diuidendum b; at verò data ſit proportio vt r ad s, ſeu vt b ad d, & oporteat facere, quod imperatum eſt.

Differentia partium eſto a, vt ſumma partium ſit b. quamobrem b † a erit duplum maioris, & b -- a erit duplum minoris, quapropter ipſæ partes erunt $\frac{1}{2}$ b † $\frac{1}{2}$ a. & $\frac{1}{2}$ b -- $\frac{1}{2}$ a; differentia proinde quadratorum ab ipſis partibus erit b a; at verò rectangulum ſub ipſis partibus eſt $\frac{b^2 - a^2}{4}$ & eſt æquale quadrato medij, proinde b a; ad $\frac{b^2 - a^2}{4}$ eſſe debet vt b ad d in ratione data; quamobrem b d a æquabitur $\frac{b^3 - b a^2}{4}$, atque adeo 4 b d a; æquabitur $b^3 - b a^2$; omnibus autem applicatis ad b. Fiet 4 d a = $b^2 - a^2$, & per antitheſin 4 d a † a^2 æquabitur b^2, quæ quidem æquatio ſi explicetur ℞ (4 d^2 † b^2) -- 2 d. æquabitur a. Hinc.

PORISMA.

Quadruplum quadratum termini poſterioris addatur quadrato prioris, huius enim ſummæ radix multata duplo termini poſterioris, partium differentiam exhibebit exiſtente earundem ſumma priori termino data rationis.

COMPOSITIO.

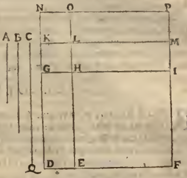
Datum ſit latus diuidendum A B; & ratio vt r ad s. ſeu vt A B ad B C; coniungantur ad rectos angulos, & producatur B C vſque ad D, itaut C D, B C ſint æquales, centro autem D, interuallo D B, deſcribatur circulus; connectatur A D, quæ protrahatur ad peripheriam in F, itaut recta A F, ſecet peripheriam in duobus punctis E, F, & factum erit quod Poriſma iubet; quandoquidem B D, dupla eſt ipſius B C; ob id quadratum B D quadruplum erit quadrati B C; at verò quadratum B D additur quadrato A B; fitque quadratum A D à cuius latere A D ſubtrahitur E D; hoc eſt dupla B C & remanet A E, Dico ipſam A E differentiam eſſe partium quæſitarum; habita verò differentia partium, & earundem A B aggregato, partes ipſæ non latebunt, ſubtracta enim AE ſeu A G ex A B, reſiduum G B diuidi debet biſariam in H, nam H B vna ex ipſis erit pars minor, & eadem plus ipſa A E, nempe reliqua A H erit pars maior.



Quoniam enim A B perpendicularis eſt ad B D, circulum tangit; ob id quadratum ipſius eſt æquale rectangulo F A E; ſeu quadrato A E; plus rectangulo A E F; hoc eſt plus quadruplo rectangulo ſub A E, B C; ſed quadratum idem A B, æquale eſt quadrato ex

to ex A E, tanquam differentia partium, quarum ſumma ſit A B; plus quadruplo rectangulo ſub ipſis partibus, ergo quadruplum rectangulum ſub A E, B C, æquale erit quadruplo rectangulo ſub ipſis partibus, ergo ſimplum rectangulum ſub A E, B C, æquabitur rectangulo ſub ipſis partibus; ſed ob communem altitudinem A E, vt A B, ad B C, ita rectangulum B A E, ad rectangulum ſub A E, B C rectangulum verò ſub B A, aggregato partium, & A E differentia earundem, æquale eſt interuallo quadratorum ipſarum partium, vt mox conſtabit; ergo vt A B ad B C, ita interuallum quadratorum ipſarum partium, ad rectangulum ſub partibus, hoc eſt ita rectangulum B A G, ſeu interuallum quadratorum partium A H, H B, ad rectangulum A H B ſub ipſis partibus. Diuiſimus igitur datum latus A B &c. Quod facere oportebat.

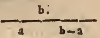
Lemma.



Quod autem ſuperiùs aſſumpſimus, nimirum rectangulum ſub A E differentia partium, & B A earundem ſumma æquetur interuallo quadratorum ab ipſis partibus facilè quidem oſtendemus, ſi per partes nos intelligamus extremas lineas ex tribus in continua ratione, quarum media ſit differentia earundem. Sint A, B, C quatuor latera proportionalia, & K D, æqualis C, at K N æqualis A, aggregatum ſit D N. ſecta K D, in G vt G K, ſit æqualis K N. erit G D differentia partium, conſtituto rectangulo D N P F ſub aggregato DN; & D F, latere maiori, per K agatur K M parallela ipſi D F vel N P ſecta N P in O, quæ ſit æqualis K N. per O agatur O E parallela ipſi D N vel P F. ſecans K M in L & per G agatur G I parallela &c. ſecans O E in H; rectangulum E P. continetur ſub aggregato extremorum atque adeo ſub aggregato partium, & ſub E F differentia earundem partium, æquale eſt quadrato E I plus rectangulo H M vna cum rectangulo L P ſeu D H, conſtat autem quadratum E I plus rectangulo H M vna cum rectangulo D H, eſſe interuallum quadratorum D M, G L, ſeu K O, ſcilicet à partibus.

SCHOLION.

Elegantius ita alicui videbitur.



Propoſitum ſit latus diuidendum b; & ratio, quam habere debet rectangulum ſub partibus, ad differentiam quadrat. ex iiſdem ſit vt r ad t. Sit iam factum adeo vt pars vna ſit a, alia erit b – a; rectangulum ſub partibus eſt $b a - a^2$; differentia verò quadratorum à partibus eſt $b^2 - 2 b a$; quoniam autem eſt vt r ad t ita $b a - a^2$ ad $b^2 - 2 b a$; eſt autem vt r ad t ita r^2 ad s^2; ſi nā media ſit inter r & t; ergo vt r^2 ad s^2; ita $b a - a^2$ ad $b^2 - 2 b a$; quare vt r ad s, ita ℞ ($b a - a^2$) ad ℞ ($b^2 - 2 b a$) fiat autem r media proportionalis inter duas magnitudines k & l adeo tamen vt quadratum ex k ſuperet quadratum ex l hoc interuallo nimirum s^2 quadrato ex s ſed rem non abſoluit.

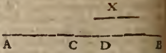
PROBLEMA.

Datum latus A B biſariam diuiſum in C, ſit iniunctum iterum illud diuidere in D, inter C, B, vt rectangulum A B D, ad rectangulum A D C, plus rectangulo ex A B, in C D, ſit in ratione data. Exemplum XXIII.

Data quidem ſit ratio A B ad X.

RESO-

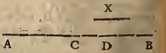
RESOLVTIO I.



VVlgus Algebriſtarum hunc in modum propoſiti Problematis Analyſin inſtitueret; recta A B ſit 2 b, ita vt tam A C quam B C ſit b; at verò C D ſit a, vnde D B ſit b – a, & A D ſit b + a; rectangulum A B D erit $2b^2 - 2ba$, rectangulum A D C erit $ba + a^2$ & rectangulum ex A B in C D erit 2 b a; atque adeo horum aggregatum erit $3ba + a^2$; ſi itaque X dicatur r, erit vt 2 b ad r, ita $2b^2 - 2ba$, ad $3ba + a^2$; Itaque multiplicatis extremis ac medijs $2b^2r - 2bra$ æquabitur $6b^2a + 2ba^2$; & per antitheſin $2ba^2 + 6b^2a + 2bra$, æquabitur $2b^2r$. Inſtituto paraboliſmo per applicationem omnium ad d, & rurſus omnibus diuiſis per 2, peruenitur ad æquationem, cuius radix extrahitur ſecundum Artem.

Hæc autem reſolutionis ratio in Geometricis quidem nimis oneroſa eſt, & Arithmeticis potius, quàm Geometricis, accomodata; ſiquidem non licet inhærere veſtigijs Analyſeos in componendo, niſi quiſpiam adſciſcat vel vnitatem in Geometria, vel demonſtrarionem contexere per comparationem ſolidorum velit; itaque longè quidem elegantius Problema reſoluetur & componetur ad eum, qui ſequitur modum.

RESOLVTIO II.



REcta A B ſit 2 b, adeo vt tam A B, quam A C ſit b; at verò C D eſto a: vnde D B erit b – a, vt A D erit b + a; rectangulum A B D erit $2b^2 - 2ba$; at verò rectangulum A D C erit $ba + a^2$, cui quidem addito rectangulo ex A B in C D, nempe 2 b a, fiet aggregatum $3ba + a^2$, ad quod $2b^2 - 2ba$, nempe rectangulum A B D debeat eſſe vt 2 b, ad r.

Quoniam igitur eſt vt 2 b ad r, ita $2b^2 - 2ba$, ad $3ba + a^2$, ſed $3ba + a^2$ æquale eſt rectangulo ex $3b + a$, in a; ergo, vt 2 b, ad r, ita $2b^2 - 2ba$, ad rectangulum ex $3b + a$, in a; & ſubduplatis antecedentibus erit vt b, ad r, ita $b^2 - ba$, ad rectangulum ex $3b + a$, in a; ſed vt b, ad r, ita eſt $b^2 - ba$, ad $br - ra$; ergo rectangulum ex $3b + a$, in a, æquabitur rectangulo $br - ra$; quamobrem erit vt $3b + a$, ad r, ita $b - a$, ad a; ergo componendo erit vt $3b + r + a$, ad r, ita b, ad a.

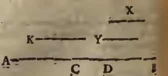
Eo autem deducta res eſt, vt dato r b rectangulo ſub lateribus, & $3b + r$, differentia extremorum, reperiantur extrema latera. Hinc,

PORISMA.

Reperiatur recta ſeſquialtera ad lineam diuidendam, cui addatur terminus alter rationis, & hoc aggregato tanquam differentia extremorum data, datoque rectangulo ſub dimidio lineæ diuidendæ, & altero rationis extremo, reperiantur extrema, minus enim extremum quæſitum radicem repræſentabit.

Vides enim in reſolutione, extremarum differentiam eſſe $3b + r$ datam, at rectangulum ſub r & b notum eſſe.

COMPOSITIO.

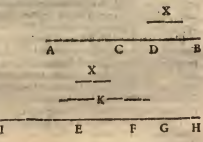


SIt data recta A B diuiſa biſariam in C oporteat illam iterum diuidere in D, ita vt rectangulum A B D ad aggregatum rectangulorum, quorum vnum A D C, aliud verò ex A B in C D, rationem habeat, vt A B ad X. Fiat recta K potens rectangulum ſub A C, vel C B, & X, & hac tan-

quam media trium proportionalium, quarum extremæ differant per triplam A C, plus X, reperiantur extremæ, quarum minor ſit Y; maior enim erit tripla A C plus X, plus Y. Fiat C D in ſegmento A B æqualis Y.

Quoniam igitur eſt vt tripla A C plus X, plus Y, ad K, ita K ad Y; at verò K poteſt ex conſtructione rectangulum ſub A C, & X; ergo erit vt tripla A C plus X, plus Y ad X, ita A C ad Y; ergo diuidendo erit vt tripla A C plus Y, ad X, ita A C minus Y, ad Y; ergo factum ſub extremis æquabitur facto ſub medijs; quamobrem rectangulum ſub tripla A C, plus Y, & Y, æquabitur rectangulo ſub A C, minus Y, & X; ſed vt A C ad X, ita eſt A C quadratum minus rectangulo ſub A C, & Y, ad rectangulum ſub A C, & X, minus rectangulo ſub X, & Y; ergo vt A C ad X, ita erit A C quadratum minus rectangulo ſub A C, & Y, ad rectangnlum ſub tripla A C, & Y, in eandem Y; & duplatis antecedentibus erit vt dupla A C ad X, ita duplum quadratum A C, minus duplo rectangulo ex A C in Y, ad rectangulum ex tripla A C, plus Y, in Y; ſed rectangulum ex tripla A C in Y, plus quadrato ipſius Y, idem eſt quod rectangulum ſub tripla A C, plus Y, in Y; ergo erit, vt dupla A C ad X, ita duplum quadratum A C, minus duplo rectangulo ex A C in Y, ad triplum rectangulum ex A C in Y, minus quadrato eiuſdem Y, hoc eſt vt A B ad X, ita rectangulum A B D, ad aggregatum rectangulorum quorum vnum eſt A D C, aliud verò rectangulum ex A B in C D; duplum enim quadratum A C, minus duplo rectangulo ex A C in Y, idem eſt quod rectangulum A B D; rectangulum verò ex A C in Y plus quadrato ipſius Y idem eſt quod rectangulum A D C, & rectangulum duplum ex A C in Y, idem eſt quod rectangulum ſub A B, & C D: vnde prædictum rectangulorum aggregatum erit idem quòd rectangulum A D C, plus rectangulo ex A B in C D. Vel clariùs ſic.

Sit expoſita E F æqualis A C, & protrahatur ad partes E, in I, ita vt I F, ſit tripla ipſius E F; mox verò protrahatur I F ad partes F, ita vt F G ſit æqualis ipſi X; deinde reperiatur K, quæ poſſit rectangulum ſub E F, & X: mox autem recta K tanquam media, & I G tanquam differentia extremarum reperiantur extremæ I H, G H. In recta verò A B, ſecetur C D æqualis ipſi G H, quæ minor eſt, quàm C B. Dico A B ſectam eſſe in D, vt Problema requirit ita vt rectangulum A B D ad rectangulum ex A B in C D, plus rectangulo A D C, ſit vt A B, ad X. *Clarior demonſtratio.*



Quoniã igitur eſt vt I H ad K ita K ad G H; eſt autem rectangulum ex E F & X per conſtructionem æquale quadrato K; propterea erit rectangulum I H G æquale rectangulo ex X, in E F; ergo erit vt I H ad X, ita E F ad G H, hoc eſt vt tripla A C, plus X, plus C D, ad X, ita A C, vel C B, ad C D; ergo diuidendo erit, vt tripla A C, plus C D, ad X, ita A C vel C B, minus C D, hoc eſt D B, ad C D; ergo rectangulum ex tripla A C, plus C D, in C D, æquabitur rectangulo ex A C, vel C B in X, minus rectangulo ex C D in X, hoc eſt rectangulo ex B D in X; ſed vt A C vel C B, ad X, ita eſt C B quadratum, minus rectangulo B C D, hoc eſt rectangulum C B D, ad rectangulum ex C B in X, minus rectangulo ex C D in X; hoc eſt ad rectangulum ex D B in X; ergo vt C B ad X, ita C B quadratum minus rectangulo B C D, hoc eſt rectangulum C B D, ad rectangulum ex tripla A C, plus C D in C D; ergo duplatis antecedentibus, vt dupla C B, hoc eſt A B ad X, ita duplum quadratum C B, minus duplo rectangulo B C D, hoc eſt duplum rectangulum C B D, hoc eſt ſimplum rectangulum A B D, ad rectangulum ex tripla A C, plus C D in C D; ſed triplum rectangulum B C D, plus quadrato C D, hoc eſt rectangulum ſub A B in C D, vnà cum rectangulo A D C, æquale eſt rectangulo ex tripla A C plus C D, in C D; ergo vt A B ad X, ita rectangulum A B D, ad rectangulum ex A B, in C D, vna cum rectangulo A D C.

Quoniam

Quoniam verò infinities contingit, vt reſolutiones modo iam dicto per proportionalia procedẽtes non declinẽt à ſolidis, vel plano planis; propterea coacti ſumus Artem adinuenire, qua etiamſi reſolutio aſcenderit ad altiores gradus, demonſtrationem Geometricam expeditè contexere valeamus; de quo in ſequenti Capite.

Auctoris Noua, eaque Methodus Abſolutiſsima, qua demonſtrantur omnium Problematum effectiones ex ijs deductæ Reſolutionibus, quarum veſtigia, vel non licet, vel non placet in componendo repetere; vbi quod Algebricum eſt ad Geometricam φράσιν traducitur. Caput X.

Quid maximè vexauerit Analyſtarum ingenia.

VT nihil eſt quod magis Analyſtarum ingenia torſerit, quàm Analyſi quidem ad finem perducta, etſi ad altiores gradus aſcenderit, Effectionem à Poriſmate præſcriptam Geometricè demonſtrare, ijs neglectis veſtigijs, quæ nos in reſoluendo impreſſimus; ita ſanè nil magis expetendum videtur quàm artificium quoddam, quo id facile præſtare valeamus; Et certè hucuſque tam Veteres, quàm Recentiores Analyſtæ quamuis effectiones induſtrioſè, & methodicè comparauerint, firmam tamen, ac ſtabilẽ differendi rationem ad illas demonſtrandas, videntur ignoraſſe, cùm caſu potius in earum demonſtrationibus proceſſerint; Multum enim differt, quod Poriſma præſcripſit artificioſè demonſtrandum ſuſcipere, vel non ita, ſed id caſu præſtare; Illud eſt opus Artis, hoc autem Fortunæ.

Admonitio ad Lectorem.

Iuuat igitur in hoc præſenti Capite viam hanc aperire, per quam ſi quiſpiam inceſſerit fiet voti compos; de hoc tamen monitum Lectorem volumus quòd duobus modis explicari poſſunt ea, quæ in Poriſmatibus occurrunt, vel Arithemetico more dicendo videlicet; planum diuidi per latus, vel ſolidum per latus, aut planum; vel magis Geometricè dicendo, quòd planum applicetur lateri, vel ſolidum lateri; Aut plano factis applicationibus per analogiſmos, vt ſi planum fuerit quadratum dicendo; fiat vt latus, ad quod applicatur quadratum, ad quadrati latus, ita hoc ad aliud; quod enim prouenit erit magnitudo ex applicatione ortiua, & ſi planum fuerit altera parte longius, vt eſt latus ad quod fit applicatio, ad latus vnum rectanguli, ita latus alterum ad aliud; quod enim prouenit erit ex applicatione magnitudo ortiua.

Illud idem de ſolidis ſuo modo intelligendum. Vt ſi cubus ſit applicandus lateri propoſito; fiat vt huiuſmodi latus, ad cubi latus, ita eiuſdem baſis ad aliud planum; quod enim prouenit erit magnitudo ex applicatione ortiua; ſic ſi fuerit parallelepipedum &c. ab his enim hic ſuperſedendum, quoniam iterum fuſiori calamo ſcribendum de his erit in poſterum, cùm de vſu Veteris Algebræ ad Geometricè Problemata reſoluenda tractauerimus. Præmonuiſſe tamen hæc non fuit abs re, quoniam in proximis reſolutionibus dum fractiones occurrunt reſoluendæ ad integras magnitudines, hæc præcognouiſſe oportet.

In quo conſiſtat artificiũ de quo diſſeritur.

Totum autem Artificium in eo poſitum eſt, vt cùm nos non poſſumus ſiſtere intra planorum fines in reſoluendo, ſed cogimur ad ſolida, vel plano plana &c. aſcendere, neque Analyſis ſuppeditat nobis veſtigia, per quæ intra planorum fines regrediendo, demonſtrationes, Analyſeos veſtigijs inſiſtendo, contexere valeamus, quod paſſim contingit, & mentem Artificis vexat; Artificium, inquam, in eo poſitum eſt, vt quod Poriſma præſcripſit, tanquam Theorema demonſtrandum ſuſcipiamus, ad eum prorſus modum, quo id fieri debere de Theorematum reſolutionibus tractantes, explicuimus.

Plerunque verò quod Poriſma docet, eſt tantummodò generale quoddam Theorema; tunc autem vel deductione ad incommodum, illud oſtendi poteſt, quod erit Geometricam effectionem demonſtraſſe, vel directè beneficio Analyſeos idem oſtendere; ſiue id Antiqua, ſiue Noua Methodo perficiatur; hæc tamen omnia idoneis exemplis paulò infra nos explicare tentabimus.

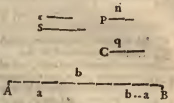
Proble-

PROBLEMA.

Datum latus ita diuidere, vt quadratum vnius partis datum planum aſſumens ad rectangulum ſub toto & altera parte ſibi, ijſdem datum planum adſciſcens, propoſitam rationem obtineat. Exemplum 1.

Aduertendum porrò nihil referre, num aſſumendum planum ſit idem vtrobique; vtro enim modo ſe habeat, eadem perpetuo ſequitur Reſolutio.

RESOLVTIO.



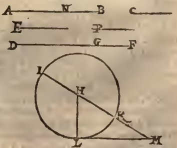
SIt iam factum, & quidem datum latus diuidendum A B ſit b, ita vt quadratum vnius partis, ipſius, plus quadrato datæ rectæ C, quæ ſit q, ad rectangulum ſub toto & altera parte, plus quadrato datæ rectæ P, quæ ſit n, datam habeat rationem, vt r, ad s, ſiue ex constructione vt A B, ad E, ſeu vt b, ad d. Pars vna eſto a: altera erit b − a; quadratum illius eſt a^2, cui addito q^2, fiet $a^2 + q^2$. Deinde rectangulum ſub tota b, & altera parte b − a, eſt $b^2 - ba$, cui addito n^2, fit $b^2 - ba + n^2$; vt autem eſt b, ad d, ita quidem eſſe debet $a^2 + q^2$, ad $b^2 - ba + n^2$; multiplicatis extremis & medijs inter ſe, fit $da^2 + dq^2 = b^3 - b^2a + bn^2$; & per antitheſin $da^2 = b^3 - b^2a + bn^2 - dq^2$; & rurſus $da^2 + b^2a = b^3 + bn^2 - dq^2$; omnibuſque applicatis ad d; $a^2 + \frac{b^2}{d}$ æquabitur $\frac{b^3 + bn^2}{d} - q^2$. Fiat vt d, ad b, ita b, ad f, & erit $a^2 + fa = \frac{b^3 + bn^2}{d} - q^2$; fiat vt d ad b, ita $b^2 + n^2$, ad g^2, & $a^2 + fa$, æquabitur $g^2 - q^2$. Hinc radix ℞Q$(\frac{1}{4} f^2 - g^2 + q^2) - \frac{1}{2} f$: Hinc.

PORISMA.

Fiat vt r, ad s, ita b latus diuidendum ad aliam magnitudinem d; mox vt d, ad b, ita $b^2 +$ n^2*, ad* g^2*, & vt d ad b, ita b, ad f. Deinde ad quartam partem quadrati ipſius f addatur* $g^2 -$ q^2*; aggregati autem latus multetur dimidio ipſius f; reſiduum enim quæſitæ radicis valorem exhibebit, ſeu*

Fiat vt r, ad s, ita A B ad E; mox vt E ad A B, ita A B quadratum, plus quadrato P, ad aliud quadratum D F, & vt E, ad A B, ita A B, ad I K. Deinde ad quartam partem quadrati ipſius I K, addatur D F quadratum, minus quadrato C, aggregati autem latus multetur dimidio ipſius I K, reſiduum enim quæſitæ quantitatis valorem exhibebit. Vnde. *Vide ſchema ſubſequens.*

Effectio Geometrica.



DAta ſit recta A B diuidenda in puncto, vt quadratum partis, vnà cum quadrato datæ rectæ C, ad rectangulum ſub tota nimirum & altera parte, vnà cum quadrato datæ rectæ P, ſit vt A B, ad datam E.

Aduertendum eſt autem, quod hic A B reſpondet b in reſolutione, & A N reſpondet ipſi a; & recta C reſpondet ipſi q, & recta P reſpondet rectæ n; inſuper E reſpondet in reſolutione ipſi d.

Fiat autem vt E ad A B, ita quadratum rectæ A B, vnà cum quadrato datæ rectæ P, ad quadratum rectæ D F ex eius quadrato auferatur

Quoniam verò infinities contingit, vt reſolutiones modo iam dicto per proportionalis procedẽtes non declinẽt à ſolidis, vel plano planis; propterea coacti ſumus Artem adinuenire, qua etiamſi reſolutio aſcenderit ad altiores gradus, demonſtrationem Geometricam expeditè contexere valeamus; de quo in ſequenti Capite.

Auctoris Noua, eaque Methodus Abſolutiſsima, qua demonſtrantur omnium Problematum effectiones ex ijs deductæ Reſolutionibus, quarum veſtigia, vel non licet, vel non placet in componendo repetere; vbi quod Algebricum eſt ad Geometricam φράσιν traducitur. Caput X.

Quid maximè vexauerit Analyſtarum ingenia.

VT nihil eſt quod magis Analyſtarum ingenia torſerit, quàm Analyſi quidem ad finem perducta, etſi ad altiores gradus aſcenderit, Effectionem à Poriſmate præſcriptam Geometricè demonſtrare, ijs neglectis veſtigijs, quæ nos in reſoluendo impreſſimus; ita ſanè nil magis expetendum videtur quàm artificium quoddam, quo id facile præſtare valeamus; Et certè hucuſque tam Veteres, quàm Recentiores Analyſtæ quamuis effectiones induſtriosè, & methodicè comparauerint, firmam tamen, ac ſtabilẽ differendi rationem ad illas demonſtrandas, videntur ignoraſſe, cùm caſu potius in earum demonſtrationibus proceſſerint; Multum enim differt, quod Poriſma præſcripſit artificiosè demonſtrandum ſuſcipere, vel non ita, ſed id caſu præſtare; Illud eſt opus Artis, hoc autem Fortunæ.

Admonitio ad Lectorem.

Iuuat igitur in hoc præſenti Capite viam hanc aperire, per quam ſi quiſpiam inceſſerit fiet voti compos; de hoc tamen monitum Lectorem volumus quòd duobus modis explicari poſſunt ea, quæ in Poriſmatibus occurrunt, vel Arithemetico more dicendo videlicet; planum diuidi per latus, vel ſolidum per latus, aut planum; vel magis Geometricè dicendo, quòd planum applicetur lateri, vel ſolidum lateri; Aut plano factis applicationibus per analogiſmos, vt ſi planum fuerit quadratnm dicendo; fiat vt latus, ad quod applicatur quadratum, ad quadrati latus, ita hoc ad aliud; quod enim prouenit erit magnitudo ex applicatione ortiua, & ſi planum fuerit altera parte longius, vt eſt latus ad quod fit applicatio, ad latus vnum rectanguli, ita latus alterum ad aliud; quod enim prouenit erit ex applicatione magnitudo ortiua.

Illud idem de ſolidis ſuo modo intelligendum. Vt ſi cubus ſit applicandus lateri propoſito; fiat vt huiuſmodi latus, ad cubi latus, ita eiuſdem baſis ad aliud planum; quod enim prouenit erit magnitudo ex applicatione ortiua; ſic ſi fuerit parallelepipedum &c. ab his enim hic ſuperſedendum, quonim iterum fuſiori calamo ſcribendum de his erit in poſterum, cùm de vſu Veteris Algebræ ad Geometricè Problemata reſoluenda tractauerimus. Præmonuiſſe tamen hæc non fuit abs re, quoniam in proximis reſolutionibus dum fractiones occurrunt reſoluendæ ad integras magnitudines, hæc præcognouiſſẽ oportet.

In quo conſiſtat artificiũ de quo differitur.

Totum autem Artificium in eo poſitum eſt, vt cùm nos non poſſumus ſiſtere intra planorum fines in reſoluendo, ſed cogimur ad ſolida, vel plano plana &c. aſcendere, neque Analyſis ſuppeditat nobis veſtigia, per quæ intra planorum fines regrediendo, demonſtrationes, Analyſeòs veſtigijs inſiſtendo, contexere valeamus, quod paſſim contingit, & mentem Artificis vexat; Artificium, inquam, in eo poſitum eſt, vt quod Poriſma præſcripſit, tanquam Theorema demonſtrandum ſuſcipiamus, ad eum prorſus modum, quo id fieri debere de Theorematum reſolutionibus tractantes, explicuimus.

Plerunque verò quod Poriſma docet, eſt tantummodò generale quoddam Theorema; tunc autem vel deductione ad incommodum, illud oſtendi poteſt, quod erit Geometricam effectionem demonſtraſſe, vel directè beneficio Analyſeos idem oſtendere; ſiue id Antiqua, ſiue Noua Methodo perficiatur; hæc tamen omnia idoneis exemplis paulò infra nos explicare tentabimus.

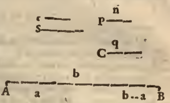
Proble-

PROBLEMA.

Datum latus ita diuidere, vt quadratum vnius partis datum planum aſſumens ad rectangulum ſub toto & altera parte ſibi, itidem datum planum adſciſcens, propoſitam rationem obtineat. Exemplum 1.

Aduertendum porrò nihil referre, num aſſumendum planum ſit idem vtrobique; vtro enim modo ſe habeat, eadem perpetuò ſequitur Reſolutio.

RESOLVTIO.



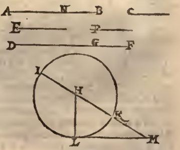
Sit iam factum, & quidem datum latus diuidendum A B ſit b, ita vt quadratum vnius partis, ipſius, plus quadrato datæ rectæ C, quæ ſit q, ad rectangulum ſub toto & altera parte, plus quadrato datæ rectæ P, quæ ſit n, datam habeat rationem, vt r, ad s, ſiue ex conſtructione vt A B, ad E, ſeu vt b, ad d. Pars vna eſto a: altera erit $b - a$; quadratum illius eſt a^2, cui addito q^2, fiet $a^2 + q^2$. Deinde rectangulum ſub tota b, & altera parte $b - a$, eſt $b^2 - ba$, cui addito n^2, fit $b^2 - ba + n^2$; vt autem eſt b, ad d, ita quidem eſſe debet $a^2 + q^2$, ad $b^2 - ba + n^2$; multiplicatis extremis & medijs inter ſe, fit $d a^2 + d q^2 = b^3 - b^2 a + b n^2$; & per antitheſin $d a^2 = b^3 - b^2 a + b n^2 - d q^2$; & rurſus $d a^2 + b^2 a = b^3 + b n^2 - d q^2$; omnibuſque applicatis ad d; $a^2 + \frac{b^2}{d}$ æquabitur $\frac{b^3 + b n^2}{d} - q^2$. Fiat vt d, ad b, ita b, ad f, & erit $a^2 + fa = \frac{b^3 + b n^2}{d} - q^2$; fiat vt d ad b, ita $b^2 + n^2$, ad g^2, & $a^2 + fa$, æquabitur $g^2 - q^2$. Hinc radix $\sqrt{Q}\,(\frac{1}{4} f^2 - g^2 + q^2) - \frac{1}{2} f$: Hinc.

PORISMA.

Fiat vt r, ad s, ita b latus diuidendum ad aliam magnitudinem d; mox vt d, ad b, ita $b^2 +$ n^2, ad g^2, & vt d ad b, ita b, ad f. Deinde ad quartam partem quadrati ipſius f addatur $g^2 -$ q^2; aggregati autem latus multetur dimidio ipſius f; reſiduum enim quæſitæ radicis valorem exhibebit, ſeu

Fiat vt r, ad s, ita A B ad E; mox vt E ad A B, ita A B quadratum, plus quadrato P, ad aliud quadratum D F, & vt E, ad A B, ita A B, ad I K. Deinde ad quartam partem quadrati ipſius I K, addatur D F quadratum, minus quadrato C, aggregati autem latus multetur dimidio ipſius I K, reſiduum enim quæſitæ quantitatis valorem exhibebit. Vnde. *Vide ſchema ſubſequens.*

Effectio Geometrica.



Data ſit recta A B diuidenda in puncto, vt quadratum partis, vnà cum quadrato datæ rectæ C, ad rectangulum ſub tota nimirum & altera parte, vnà cum quadrato datæ rectæ P, ſit vt A B, ad datam E.

Aduertendum eſt autem, quod hic A B reſpondet b in reſolutione, & A N reſpondet ipſi a; & recta C reſpondet ipſi q, & recta P reſpondet rectæ n; inſuper E reſpondet in reſolutione ipſi d.

Fiat autem vt E ad A B, ita quadratum rectæ A B, vnà cum quadrato datæ rectæ P, ad quadratum rectæ D F ex eius quadrato auferatur

quadratum datæ rectæ C, vt reliquum ſit quadratum ſegmenti D G. Deinde fiat vt E ad A B, ita A B, ad I K, cuius dimidium H K, vel H I, ſit ſemidiameter circuli H I L K; ſitque recta L M, quæ circulum tangat in puncto L, æqualis facta ipſi D G, & per centrum H, agatur M I, occurrens circuli circumferentiæ in K; ſecetur A B, in N, ita vt A N, ſit æqualis N K. Dico quadratum A N, plus quadrato C, ad rectangulum A B N, plus quadrato P, eſſe vt A B ad E. Ducatur H L.

PROPOSITIO.

Datis ijs, quæ Poriſma dictat, num quadratum A N plus quadrato C ad rectangulum A B N, plus quadrato P ſit in ratione A B ad E, inquirere.

RESOLVTIO.

EAdem retenta poſitione vt ſupra, A B ſit b; E ſit d; C ſit q. P ſit n; D F ſit g, & I K ſit f; inſuper M K, ſiue A N, ſit a.

Quoniam igitur eſt vt d ad b, ita b ad f, & vt b ad f, ita b a ad f a, ergo vt d, ad b, ita b a, ad f a; ſed vt d ad b, ex conſtructione, ita $b^2 + n^2$, ad g^2; ergo vt $b^2 + n^2$, ad g^2, ita b a, ad f a; & permutando vt $b^2 + n^2$, ad b a, ita g^2, ad f a; & per conuerſionē rationis vt $b^2 + n^2$, ad $b^2 + n^2 - ba$, ita g^2, ad $g^2 - fa$, & permutando, vt $b^2 + n^2$ ad g^2, ita $b^2 + n^2 - ba$, ad $g^2 - fa$; ſed erat ex conſtructione vt d ad b, ita $b^2 + n^2$ ad g^2; ergo vt d ad b, ita $b^2 + n^2 - ba$, ad $g^2 - fa$; eſt autem $g^2 - fa = a^2 + q^2$, vt mox oſtendam; ergo vt d, ad b, ita $b^2 + n^2 - ba$, ad $a^2 + q^2$; & conuertendo vt b, ad d, ita $a^2 + q^2$, ad $b^2 + n^2 - ba$.

Quod autem $g^2 - fa$, æquale ſit $a^2 + q^2$, conſtat. Eſt enim $a^2 + fa = g^2 - q^2$; ergo $a^2 + q^2$ æquabitur $g^2 - fa$. Hinc.

THEOREMA.

Data ſit recta A B, ita vt E ad A B ſit vt quadratum rectæ A B, plus quadrato P, ad quadratum rectæ D F, ex quo ablatum ſit quadratum rectæ C, vt reliquum ſit factum quadratum ſegmenti D G. Deinde ſit factum vt E ad A B, ita A B ad I K, cuius dimidium H I, vel H K ſit ſemidiameter circuli I L K, quem tangat recta quidem L M æqualis ipſi D G; ſitque per centrum H ducta M I, occurrens peripheriæ in K; factaque ſit A N æqualis M K. Dico eam eſſe rationem quadrati A N, plus quadrato C, ad rectangulum A B N plus quadrato P, vt A B ad E.

COMPOSITIO.

QVoniam igitur; vt E ad A B, ita A B ad I K ex conſtructione; & vt A B ad I K, ita rectangulum ex M K in A B, ad rectangulum M K I; ergo vt E ad A B, ita rectangulum ex M K in A B, ad rectangulum M K I; ſed vt E ad A B, ita quadratum A B plus quadrato P, ad quadratum D F; ergo vt rectangulum ex M K in A B, ad rectangulum M K I, ita quadratum A B, plus quadrato P, ad quadratum D F, ſeu vt quadratum A B, plus quadrato P, ad quadratum D F, ita rectangulum ex M K in A B, ad rectangulum M K I; & permutando vt quadratum A B plus quadrato P, ad rectangulum ex M K in A B, ita quadratum D F, ad rectangulum M K I; & per conuerſionem rationis vt quadratum A B, plus quadrato P, ad quadratum A B, plus quadrato P, minus rectangulo ex M K in A B, ita quadratum D F, ad quadratum D F, minus rectangulo M K I; & permutando vt quadratum A B plus quadrato P, ad quadratum D F, ita quadratum A B plus quadrato P, minus rectangulo ex M K in A B, ad quadratum D F minus rectangulo M K I. Sed ex conſtructione vt E ad A B, ita eſt quadratum A B, plus quadrato P, ad quadratum D F; ergo vt E ad A B, ita quadratum A B, plus quadrato P, minus rectangulo ex M K in A B, ad quadratum D F, minus rectangulo M K I; hoc eſt ita quadratum A B, plus quadrato P, minus rectangulo B A N (fecimus enim A N æqualem ipſi M K) ſeu quod idem eſt, ita rectangulum A B N (quadratum enim A B minus rectangulo B A N, idem eſt quod rectangulum A B N) plus quadrato P, ad quadratum D F, minus

rectan-

rectangulo M K I; Eſt autem quadratum D F, minus rectangnlo M K I æquale quadrato M K, ſeu quadrato A N, plus quadrato C, vt mox conſtabit; ergo vt E ad A B, ita erit rectangulum A B N plus quadrato P, ad quadratum A N plus quadrato C, & conuertendo vt A B ad E, hoc eſt vt r, ad s, ita quadratum A N, plus quadrato C, ad rectangulum A B N, plus quadrato P.

Quod autem quadratum M K, plus quadrato C, æquetur quadrato D F, minus rectangulo M K I, ſic oſtenditur. Quadratum M K æquatur quadrato M H, minus rectangulo M K I, minus quadrato H I; hoc eſt quadratum M K æquatur quadrato L M, minus rectangulo M K I; hoc eſt quadrato D F minus quadrato C, minus rectangulo M K I; vtrinque addito quadrato C; ergo quadratum M K, plus quadrato C, æquabitur quadrato D F, minus rectangulo M K I. Datum igitur latus ita diuiſimus, vt quadratum vnius partis datum planum aſſumens &c. Quod facere oportebat.

Valde refert, quo nam pacto concipiatur Problema, & pro eius ſolutione hæc, vel illa inſtituatur poſitio; hinc enim pendet in primis Reſolutionis ratio, itaut facilis admodum futura ſit, ſi opportunè ſupradicta tractentur: quod vt clarius fiat, ſit in exemplum. *Aduertenda quædam.*

P R O B L E M A.

Propoſitum latus ita producere, vt quadratum compoſiti ex dato cum producto, ſit ad exceſſum ipſius ſupra quadratum dati in præſcripta ratione. Exemplum I I.

Niſi quis paulò diligentius rem introſpexerit, ſtatim ſequentem reſolutionem inſtituet. Datum ſit latus b; & ratio data ſit vt r, ad s, pro qua ſubſtituatur b, ad d; at verò pars adiungenda eſto a; ergo totum aggregatum erit $b + a$, cuius quadratum eſt $b^2 + 2ba + a^2$, exceſſus huius ſupra b^2, nempe ſupra quadratum lateris dati eſt $2ba + a^2$; vt igitur b, ad d, ita debet eſſe $b^2 + 2ba + a^2$, ad $2ba + a^2$; multiplicatis extremis & medijs $2bba + ba^2$ æquabitur $db^2 + 2dba + da^2$; & per antitheſin $ba^2 - da^2 + 2bba - 2dba$; æquabitur db^2; omnibus applicatis ad $b - d$, & $a^2 + 2ba$ æquabitur $\frac{db^2}{b-d}$, tollatur fractio, nempe fiat ut $b - d$, ad d, ita b, ad aliud, & inter b, & hoc inuentum, exempligratia, k media reperiatur proportionalis z, & $a^2 + 2ba$ æquabitur z^2, cuius radix erui poteſt iuxta Artis præcepta, & inde etiam deducitur Poriſma, Problematis effectionem dictans.

Verum enim uerò, ad Compoſitionem inſtituendam, atque adeò effectionem demonſtrandam, opus erit Poriſma ipſum per modum Theorematis aſſumere demonſtrandum Arte iam explicata, quod exigui laboris non eſt.

Sed ſi Problema aliter concipiatur, res facilius eueniet in idem recidens: Vnde.

Problema.

Latus adinuenire, cuius quadratum ad exceſſum, quo idem ſuperat dati lateris quadratum, ſit in ratione data.

R E S O L V T I O.

Datum ſit latus b, & quæratur latus, cuius quadratum ad exceſſum quo hoc idem quadratum ſuperat quadratum dati lateris b, ſit in ratione data ut r, ad s. Oportet autem rationem datam eſſe maioris ad minus.

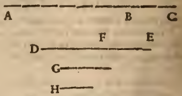
Quæſitum latus eſto a, cuius quadratum eſt a^2; huius autem exceſſus ſupra b^2 eſt $a^2 - b^2$; ut igitur eſt r, ad s, ita debet eſſe a^2, ad $a^2 - b^2$.

Quoniam igitur eſt ut r, ad s, ita a^2, ad $a^2 - b^2$; ergo per conuerſionem rationis erit ut r, ad $r - s$, ita a^2, ad b^2, & conuertendo, ut $r - s$ ad r, ita b^2, ad a^2; ſed ſi fiat ut r ad $r - s$ ita b ad f conuertendo etiam erit ut $r - s$, ad r ita f ad b, ſed ut $r - s$, ad r ita erat b^2, ad a^2, ergo ut f, ad b, ita b^2 ad a^2; ergo ſi fiat d, media proportionalis inter f, & b, erit ut d ad b ita b ad a. Hinc.

PORISMA.

Fiat vt terminus maior datæ rationis, ad exceſſum, quo is ſuperat minorem, ità latus datum ad aliud, & inter hoc latuſque datum medium reperiatur proportionale; deinde fiat vt hoc proportionale medium inuentum ad latus datum, ita hoc ad aliud; hoc enim erit latus quæſitum, cuius quadratum ad exceſſum, quo ſuperat quadratum dati lateris erit in ratione data.

COMPOSITIO.



Datum ſit latus A B, ratioque data ſit ut D E ad E F, & oporteat reperire latus, cuius quadratum ad exceſſum, quo huiuſmodi quadratum ſuperat quadratum A B, ſit in ratione vt D E, ad E F.

Fiat vt D E ad D F, ita A B ad G, & inter A B, & G, media reperiatur proportionalis H; mox uerò ut H, ad A B, ita A B fiat ad A C; hæc enim Poriſma iubet. Dico A C eſſe latus quæſitum, ita vt quadratum A C ad exceſſum, quo idem quadratum ſuperat quadratum A B, ſit in ratione vt D E ad E F.

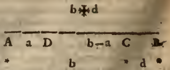
Quoniam enim eſt vt G, ad H, ita H ad A B; ergo vt G, ad A B, ita quadratum H ad quad. A B; ſed vt D E ad DF, ita A B, ad G; & conuertendo vt D F ad D E, ita G, ad A B; ergo etiam vt D F ad D E, ita quadratum H ad quadratum A B; quoniam verò eſt vt H ad A B, ita A B, ad A C, erit etiam vt quadratum H ad quadratum A B, ita quadratum A B, ad quadratum A C; ergo etiam vt D F ad D E, ita quadratum A B, ad quadratum A C; ergo conuertendo vt D E ad D F, ita quadratum A C ad quadratum A B, & per conuerſionem rationis vt D E ad E F, ita quadratum A C ad quadratum A C, minus quadrato A B, hoc eſt ad exceſſum, quo idem quadratum A C ſuperat quadratum A B. Inuenimus igitur latus &c. quod erat operæ pretium efficere.

Vides igitur ex allato exemplo quanti momenti ſit Problematis formam vno, vel alio modo concipere, & vno vel alio modo poſitionem inſtituere; ſecundum enim priorem formam fuiſſet opus aſſumere Poriſma tanquam theorema demonſtrandum, vt præſcripta conſtructio Geometricè confirmaretur, nullaque ſuppeteret via repetitis Analyſeos veſtigijs ad Compoſitionem perficiendam, ſecus autem per hanc, quam attulimus.

Problema.

Exemplum III. *Datum latus A B vteunque diuiſum in C, diuidere illud iterum in D, vt rectangulum D A B ad rectangulum D C B, datam habeat rationem.*

RESOLVTIO.



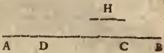
Propoſiti lateris diuidendi ſegmentum A C ſit b, ſegmentum alterum C B ſit d, totum itaque latus erit b + d; ſegmentum A D eſto a; reliquum igitur D C erit b - a; rectangulum B A D erit b a + d a: rectangulum vero D C B, erit b d - d a; Vt autem eſt s, ad d, ita debet eſſe rectangulum B A D, nempe b a + d a ad rectangulum D C B, ſcilicet b d - d a; quamobrem multiplicatis extremis & medijs b d a + d a æquabitur s b d - s d a: ac proinde per antitheſin b d a + d a + s d a æquabitur s b d; omnibus autem applicatis ad d, & b a + d a + s a æquabitur s b; quamobrem proportionales erunt magnitudines vt b + d + s, ad s, ita b, ad a. Hinc,

PORISMA.

Vt eſt aggregatum ex omnibus notis quantitatibus ad terminum antecedentem ita ſegmentum diuidendum ad aliam quantitatem, hac enim quaſitam ignotam quantitatem repraſentabit.

Si quis regrediatur per Analyſeos filum, demonſtrationem contexet per ſolidorum comparationem, à qua, ſi placet abſtinere, poteſt alio modo perfici demonſtratio.

COMPOSITIO.



SIt recta A B diuiſa in C vtcunque, & oporteat eam iterum diuidere in D, vt Problema iubet. Data autem ſit ratio, vt H, ad C B; Fiat igitur vt aggregatum ex A B, & H ad H, ita A C, ad aliam, quæ ſit A D. Dico rectangulum B A D, ad rectangulum D C B eſſe, vt H, ad C B.

Quoniam enim factum eſt vt A B, plus H, ad H, hoc eſt vt A C, plus C B, plus H, ad H, ita A C, ad A D; ergo rectangulum ſub A C, & A D, plus rectangulo ſub C B, & A D, vnà cum rectangulo ex H, & A D, æquabitur rectangulo ſub A C, & H; vtrinque ſubtracto rectangulo ſub A D, & H, remanebit rectangulum ſub A C, & A D, plus rectangulo ſub C B, & A D, quod æquabitur rectangulo ſub A C, & H; minus rectangulo ſub A D, & H; ergo eadem erit ratio rectanguli ſub A C, & H, minus rectangulo ſub A D, & H, ad rectangulum ſub A C, & C B, minus rectangulo ſub C B, & A D, quæ eſt rectanguli ſub A C, & A D, plus rectangulo ſub C B, & A D, ad rectangulum ſub A C, & B C, minus rectangulo ſub C B, & A D. Sed rectangulum ſub A C, & H, minus rectangulo ſub A D, & H, ad rectangulum ſub A C, & C B, minus rectangulo ſub A D, & C B eſt vt H ad C B; ergo etiam vt H ad C B, ita erit rectangulum ſub A C, & A D, plus rectangulo ſub C B, & A D, hoc eſt rectangulum B A D, ad rectangulum ſub A C, & C B, minus rectangulo ſub C B, & A D, hoc eſt ad rectangulum D C B.

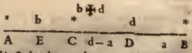
Problema.

Propoſitum latus A B, vtcunque ſectum in C, iterum diuidere in D inter C, B, vt rectangulum A D C, ad quadratum D B, conſtitutam habeat rationem. Exemplum IV.

Ratio vel eſt æqualitatis, vel maioris, vel minoris inæqualitatis. Si primum; perinde erit ac dicere quod rectangulum A D C ſit æquale quadrato D B.

RESOLVTIO.

Primi Caſus.



TVncque ſic procedendum ſegmentum A C ſit b; at C B ſit d: ſegmentum D B eſto a; ſegmentum C D erit $d - a$; itaque rectangulum A D C, erit $bd + d^2 - ba - 2da + a^2$; quadratum vero D B erit a^2; itaque $db + d^2 - ba - 2da + a^2$, æquabitur a^2; & per antitheſin $bd + d^2$ æquabitur $ba + 2da$; ergo vt $b + 2d$, ad ℞($bd + d^2$) ita hæc ad a. Hinc.

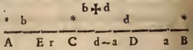
PORISMA.

Fiat vt totum latus diuidendum plus parte in qua debet cadere noua diuiſio ad rectam, quæ poteſt rectangulum ſub toto latere diuidendo, & parte iam dicta, ita hac eadem recta ad aliam magnitudinem; hac enim ignotam quantitatem de qua quæritur, exhibebit.

RE-

RESOLVTIO.

Secundi Caſus.



SI proportio maioris inæqualitatis extiterit, eaque ſit vt A C ad C E, ipſaque C E dicatur r; atque adeo ratio data ſit vt b, ad r, ſic procedendum.

Quoniam igitur eſt vt b, ad r, ita b d † d^2 -- b a -- 2 d a † a^2, ad a^2; multiplicatis extremis & medijs b a^2 æquabitur r b d † r d^2 -- r b a -- 2 r d a † r a^2; & per antitheſin b a^2 -- r a^2 † r b a † 2 r d a æquabitur r b d † r d^2; omnibuſque applicatis ad b -- r, & a^2 † $\frac{rb + 2rd}{b - r}$ a, æquabitur $\frac{rbd + rd^2}{b - r}$; ad tollendas fractiones, fiat vt b -- r, ad r, ita b † 2 d, ad k; eritque k idem quod $\frac{rb + 2rd}{b - r}$. Deinde fiat g media proportionalis inter b † d, & d; mox autem vt b -- r, ad r, ita fiat g, ad f, & inter g, & f, media ſit proportionalis z, erit enim z^2 idem quod $\frac{rbd + rd^2}{b - r}$; hoc autem perinde eſt ac ſi fieret vt b -- r ad r, ita b d † d^2, ad aliud; illud enim foret z^2; æquatio igitur illa a^2 † $\frac{rb + 2rd}{b - r}$ a = $\frac{rbd + rd^2}{b - r}$, ad hanc reuocabitur a^2 † k a = z^2, cuius æquationis radix eſt ℞ ($\frac{1}{4}$ k^2 † z^2) -- $\frac{1}{2}$ k. Hinc.

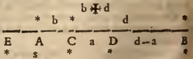
PORISMA.

Fiat vt b -- r ad r ſeu AC minus CE, hoc eſt AE ad EC, ita b † d ſeu AC plus dupla CB, hoc eſt AB plus CB ad K. Deinde fiat g media proport. inter b † d & d ſeu A C, plus C B, hoc eſt A B & C B; mox autem vt b -- r ad r ſeu A E ad E C, ita fiat g, ad f, inter g, & f, media ſit proport. z; deinde verò ſumatur dimidium ipſius K, & ad eius quadratum addatur quadratum z; aggregati latus multetur eodem dimidio K, reſiduum enim quæſitam quantitatem exhibebit. Vel

Iiſdem peractis recta K tanquam differentia extremorum è tribus lateribus proportionalibus, & quadrato z tanquam rectangulo ſub lateribus reperiantur extrema latera, minus enim quæſitam quantitatem exhibebit.

RESOLVTIO.

Tertij Caſus.



RAtio data ſit minoris ad maius vt A C, ad C E, ſegmentum A C ſit b: & CB ſit d: ſegmentum autem C D eſto a; vnde D B erit d -- a; at verò E C ſit s; vt igitur b, ad s, ita debet eſſe rectangulum A D C nempe b a † a^2, ad quadratum D B, ſcilicet d^2 -- 2 d a † a^2; multiplicatis extremis & medijs, s b a † s a^2 æquabitur b d^2 -- 2 b d a † b a^2; & per antitheſin s b a † 2 b d a † s a^2 -- b a^2, æquabitur b d^2; omnibus applicatis ad s -- b, & $\frac{sb + 2bd}{s - b}$ a † a^2, æquabitur $\frac{bd^2}{s - b}$; ad tollendas fractiones, fiat vt s -- b, ad b, ita 2 d, ad K, & vt s -- b, ad b, ita s, ad l, itaq; k † l idem erit quod $\frac{sb + 2bd}{s - b}$, & ad confuſionem tollendam loco ipſius K † l, ſubſtituatur p; itaque p a idem erit quod $\frac{sb + 2bd}{s - b}$ a; Deinde fiat vt s -- b, ad b, ita d^2, ad aliud, nempè z^2, ſeu quod idem eſt fiat vt s -- b, ad b, ita d, ad f, & inter b, f, media reperiatur z; erit enim z^2 idem quod $\frac{bd^2}{s - b}$; Æquatio igitur illa $\frac{sb + 2bd}{s - b}$ a † a^2 = $\frac{bd^2}{s - b}$, reuocabitur ad hanc p a † a^2 = z^2, cuius æquationis radix erit ℞ ($\frac{1}{4}$ p^2 ✠ z^2) -- $\frac{1}{2}$ p. Hinc.

PORISMA.

Fiat vt s -- b, ad b, hoc eſt E A ad A C, ita 2 d ad K, hoc eſt dupla C B ad K, & vt s -- b ad b, ita s ad l, hoc eſt E A ad E C, ita A C ad A; deinde fiat vt s -- b, ad b, ita d, ad f, hoc eſt vt E A ad A C, ita C B ad f; & inter d, & f, hoc eſt C B, & f, media reperiatur z; mox autem K plus l, tanquàm differentia extremorum è tribus lateribus proportionalibus, & z^2 tan-

quàm

quàm rectangulo ſub lateribus extrema reperiantur latera; ex his enim minus propoſito ſatiſfacies.

COMPOSITIO.

Primi Caſus.

DAta ſit recta A B vtcunque diuiſa in C, oporteat iterum illam diuidere in D, inter C, B, vt rectangulum A C B æquale ſit quadrato D B. Fiat quod Poriſma iubet, nempe vt A C plus dupla C B, ſeu vt A B plus B C ad rectam, quæ poſſit rectangulum A C B plus quadrato C B, ſeu rectangulum A B C, ita hæc ad aliam, cui fiat æqualis D B. Dico rectangulum A D C æquale eſſe quadrato D B.

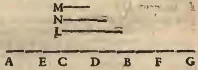
Quoniam igitur eſt vt A B, plus C B hoc eſt A C, plus dupla C B, ad rectam quæ poteſt rectangulum A C B, plus quadrato C B, ita hæc recta ad D B; ergo rectangulum ex A C in D B, plus duplo rectangulo C B D æquabitur rectangulo A B C; hoc eſt rectangulo A C B plus quadrato C B; vtrinque addito quadrato D B, rectangulum A C B, plus quadrato C B, plus quadrato D B æquabitur rectangulo ex A C in D B, plus duplo rectangulo C B D, vna cum quadrato D B; & per



Antitheſin rectangulum A B C, ſeu rectangulum A C B plus quadrato C B, minus rectangulo ex A C in B D, minus duplo rectangulo C B D, plus quadrato D B, æquabitur quadrato D B; Eſt autem rectangulum A C B, plus quadrato C B, minus rectangulo ex A C in D B, minus duplo rectangulo C B D, vna cum quadrato D B, idem quod rectangulum A D C, factum ſcilicet ex A D, in C D; ergo diuiſa eſt A D, iterum in D, inter C B, vt rectangulum A D C æquale ſit quadrato D B.

Secundi Caſus affectio Geometrica.

DAta ſit recta A B vtcunque ſecta in C iterum eam diuidere in D inter C, B, vt rectangulum A D C, ſit ad quadratum D B, in ratione maioris inæqualitatis A C, ad C E.



Fiat vt A C minus C E, hoc eſt A E, ad E C, ita A C plus dupla C B, hoc eſt A B plus C B, ad aliam B G ſibi in directum. Deinde fiat L, media proportionalis inter A B, & C B; mox vt A E ad E C, ita L ad M; at inter L, & M, fiat media proportionalis N, & ad quadratum ex dimidio B G addatur quadratum N, aggregati latus multetur dimidio ipſius B G, nempe ſit illud D F, vnde reſiduum fiat D B. Dico rectam A B, ſectam in C, eſſe nunc diuiſam in D inter C, B, quemadmodum Problema requirit. Infra verò conſtabit punctum D cadere deberet inter C, B.

PROPOSITIO.

Datis ijs, quæ Poriſma dictat &c. veritatem inquirere.

RESOLVTIO.

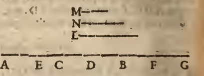
QVoniam igitur quadratum B F plus quadrato N, hoc eſt $\frac{1}{4}$ K² † z² æquale eſt quadrato D F (eſt enim D F facta æqualis rectæ quæ poteſt quadratum B F, plus quadrato N) propterea quadratum D F erit $\frac{1}{4}$ K² † z²; ſed quadratum D F æquale eſt quadrato D B, plus quadrato B F, plus duplo rectangulo D B F, ſeu ſimplo D B G; ergo neceſſariò conſequitur, quod $\frac{1}{4}$ K² † z² æquetur quadrato D B, plus quadrato B F, plus rectangulo D B G, hoc eſt a² † $\frac{1}{4}$ k² † K a; vtrinque ſubtracto $\frac{1}{4}$ K²; ergo z², ſeu g f (fecimus enim z, mediam proportionalem inter g, & f), æquabitur a² † K a; Et quoniam fecimus vt b — r, ad r, ita g, ad f, & vt g ad f, ita g² ad g f, ob communem altitudinem g; eſtque g² æquale ex conſtructione ipſi b d † d² (fecimus enim g mediam proportio-

portionalem inter b † d, & d) & g oſtendimus æquari a^2 † K a; eſtque vt b -- r, ad r, ita b † 2 d, ad K, vtque b † 2 d, ad K, ſumpta communi altitudine a, ita eſt b a † 2 d a, ad k a, hoc eſt ita eſt b a, vnà cum 2 d a, ad K a; ergo vt b d † d^2 ad a^2 † K a, ita b a † 2 d a, ad K a. Cum itaque ſit vt totum ad totum, nempe b d † d^2, ad a^2 † K a, ſic ablatum ad ablatum, nimirum b a † 2 d a, ad K a; ergo vt totum ad totum, nempe b d † d^2, ad a^2 † K a; ſic reliquum ad reliquum, ſcilicet b d † d^2 -- b a -- 2 d a, ad a^2; ſed vt b d † d^2, ad a^2 † k a, ita erat b -- r, ad r; ergo vt b -- r, ad r, ſic b d † d^2 -- b a -- 2 d a; hoc eſt exceſſus quo b d † d^2 ſuperat b a † 2 d a, ad a^2; ergo componendo vt b, ad r, ſic prædictus exceſſus, nimirum b d † d^2 -- b a -- 2 d a, vnà cum a^2, ad a^2; ſed prædictus exceſſus b d † d^2 -- b a -- 2 d a, vnà cum a^2, nempe b d † d^2 -- b a -- 2 d a † a^2 idem eſt quod rectangulum ex b † d -- a in d -- a; eſt enim huiuſmodi rectangulum b d † d^2 -- b a -- 2 d a † a^2; ergo vt b, ad r, ita b d † d^2 -- b a -- 2 d a † a^2, ad a^2. Hinc.

THEOREMA.

Si ſit vt A E ad E C, ita A B, plus C B, ad B G, ſitque L media proportionalis inter A B, & B C; & vt A E ad E C, ita L ad M; & inter L, M media ſit proportionalis N; ſitque B G biſſecta in F; & ad quadratum B F additum ſit quadratum N, aggregati latus ſit D F. Dico rectangulum A D C ad quadratum D B eſſe, vt A C ad C E.

COMPOSITIO.



QVoniam igitur ex conſtructione quadratum B F plus quadrato N æquale eſt quadrato D F, ſed quadratum DF æquale eſt quadrato DB plus quadrato B F, vna cum duplo rectangulo D B F, ſeu ſimplo D B G; ergo quadratum B F plus quadrato N quabitur quadrato D B plus quadrato B F, plus rectangulo D B G; utrinque ſubtracto quadrato B F; ergo quadratum N, ſeu rectangulum ſub L & M illi æquale (facta eſt enim N media proportionalis inter L & M) æquabitur quadrato D B plus rectangulo D B G; factum eſt autem ſupra ut A E ad E C, ſic L ad M, & ut L ad M, ſic quadratum L, ad ractangulum ſub L & M; eſt q: quadratum L ex conſtructione æquale rectangulo A B C; rectangulum uerò ſub L & M oſtenſum eſt æquale quadrato D B, plus rectangulo D B G ergo ut A E ad E C, ità rectangulum A B C, ad quadratum D B plus rectangulo D B G; Eſt autem ex conſtructione ut A E ad E C, ita A B plus B C ad B G; ut uerò A B, plus B C ad B G, ſumpta communi altitudine B D, ſic rectangulum ex A B plus B C, in D B, ad rectangulum D B G; eſtque rectangulum ex A B plus B C, in B D conſtans rectangulo duplici C B D, & rectangulo ex A C in B D; ergo ut rectangulum A B C ad quadratum D B, plus rectangulo D B G, ita rectangulum ex A C in D B, plus duplici rectangulo C B D, ad rectangulum D B G. Cùm igitur ſit vt totum ad totum, nempe rectangulum A B C, ad quadratum D B, plus rectangulo D B G, ſic ablatum ad ablatum, nimirum rectangulum ex A C in D B, cum duplici rectangulo C B D ad rectangulum D B G; ergo vt totum ad totum ſcilicet rectangulum A B C ad quadratum D B plus rectangulo D B G, ſic reliquum ad reliquum, nempe rectangulum A B C, minus rectangulo ex A C in D B, minus duplici rectangulo C B D, exceſſus quo rectangulum A C B plus quadrato C B ſeu rectangulum A B C ſuperat rectangulum A C D B plus duplici rectangulo C B D, ad quadratum D B; ſed totum ad totum, nempe rectangulum A C B plus quadrato C B ſeu rectangulum A B C, ad quadratum D B, plus rectangulo D B G, erat vt A E, ad E C; ergo vt A E ad E C, ita erit reliquum ad reliquum, nempe rectangulum A C B plus quadrato C B ſeu rectangulum A B C minus rectangulo ex A C, in B D, minus duplici rectangulo C B D ad quadratum D B; ergo componendo vt A C ad E C, ita prædictus exceſſus rectangulum A C A, plus quadrato C B, minus rectangulo ex A C in B D minus duplici rectangulo C B D, vna cum quadrato D B, ad quadratum D B: ſed prædictus exceſſus, vna cum quadrato D B idem eſt quod rectangulum A D C (rectangulum

gulum

gulum enim A D C ſit ex A C, plus C D in C D, ex quorum ductu ſit etiam rectangulum A C B, plus quadrato C B, minus rectangulo ex A C in D B, minus duplici rectangulo C B D, vnà cum quadrato D B) ergo vt A C ad E C, ſic rectangulum A D C, ad quadratum D B.

Quod autem punctum D, cadat inter C, B, ſic ſiet manifeſtum. Non enim cadere poteſt in C; Oſtenſum eſt enim vt A E ad E C, ſic rectangulum A B C, ad quadratum D B, plus rectangulo D B G, ſeu rectangulum G D B, & ex hypotheſi ad rectangulum G C B; cùmque ſit vt rectangulum A B C, ad rectangulum G C B, ita A B ad G C, erit vt A E ad E C, ita A B, ad C G; eſt autem factum vt A E ad E C, ita A B, plus B C, ad B G; ergo deberet eſſe vt A B ad C G, ita A B, plus B C, ad B G minorem, quàm C G; quod eſt inconueniens; maius ſequeretur incommodum, ſi punctum D, caderet vltra C; non igitur in C, non vltra ergo inter C B.

Tertij Caſus effectio Geometrica.

Data ſit recta A B diuiſa vtcunque in C, oporteat &c. Data ſit ratio A C ad E C; ſiat vt E A ad A C, ita dupla C B ad B G, & ita etiam E C ad G M; deinde ſiat vt E A, ad A C, ita C B, ad B H; erit autem B H dimidia ipſius B G, quoniam C B dimidia eſt duplæ C B; at verò inter C B, & B H media reperiatur proportionalis P: mox autem B M, tanquàm differentia extremorum laterum è tribus proportionalibus, & quadrato P, tanquàm rectangulo ſub lateribus, reperiantur extrema latera, quorum minus ſit D B, cui ſiat æqualis C F. Dico rectam A B diuiſam vtcunque in C, iterum eſſe diuiſam in F, inter C, B, vt rectangulum A F C ad quadratum F B, ſit in ratione A C ad E C.

PROPOSITIO.

Datis ijs, quæ Poriſma dictat &c. veritatem inquirere.

RESOLVTIO:

QVoniam igitur $a^2 \ast \overline{K \dagger l}\, a$ æquale eſt z^2; ſed z^2 æquale eſt d f; facta eſt enim z media proportionalis inter d, & f; ergo d f æquabitur $a^2 \ast \overline{K \dagger l}\, a$; & quoniam eſt factum vt s—b ad b, ita 2 d, ad K, & ut s—b, ad b, ita d ad f, vtque d, ad f, ita d^2 ad f d, ſeu ad $a^2 \ast \overline{K \dagger l}\, a$, cùm hoc illi ſit æquale; vtrunque enim eſt æquale z^2; vt vidimus; ergo vt s—b, ad b, ita d^2 ad $a^2 \ast \overline{K \dagger l}\, a$.

Deinde quoniam factum eſt vt s—b, ad b, ita s, ad l, & ita 2 d, ad k; ergo vt s—b, ad b, ita ambo antecedentia ad ambo conſequentia, nempe, ita s † 2 d ad K † l; ſed vt s † 2 d, ad K † l, ſumpta communi altitudine a, ita s a † 2 d a, ad $\overline{K \dagger l}\, a$; ergo vt d^2 ad $a^2 \ast \overline{K \dagger l}\, a$, ita s a † 2 d a, ad $\overline{K \dagger l}\, a$.

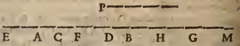
Quoniam igitur eſt ut totum ad totum ſcilicet d^2, ad $a^2 \ast \overline{K \dagger l}\, a$, ita ablatum ad ablatum, nimirum s a † 2 d a, ad $\overline{K \dagger l}\, a$; ergo reliquum ad reliquum, nempe d^2 — s a — 2 d a ad a^2, erit vt totum ad totum, videlicet vt d^2, ad $a^2 \ast \overline{K \dagger l}\, a$; ſed vt totum ad totum, ſcilicet d^2, ad $a^2 \ast \overline{K \dagger l}\, a$, ita erat s—b, ad b; ergo vt s—b, ad b, ita erit d^2 — s a — 2 d a, ad a^2; ergo componendo vt s, ad b, ita d^2 — s a — 2 d a $\ast$ a^2, ad a^2; & conuertendo vt b, ad s, ita a^2, ad d^2 — s a — 2 d a † a^2; ſed vt b, ad s, ita b a, ad s a; ergo vt b, ad s, ita ambo antecedentia ad ambo conſequentia, nempe b a $\ast$ a^2, ad d^2 — 2 d a $\ast$ a^2. Hinc.

THEOREMA.

Si fuerit vt E A, ad A C, ita dupla C B ad B G, & ita E C ad G M; deinde ſit vt E A ad A C, ita C B ad B H, & inter C B, B H, media proportionalis P, ſitque B M differentia extremorum laterum, ſub quibus contineatur rectangulum æquale quadrato P, minuſque extremum ſit D B, cui æquetur C F. Dico rectam A B, vtcunque diuiſam in C, iterum eſſe diuiſam in F inter C, B, vt rectangulum A F C, ad quadratum F B, ſit in ratione A C ad E C.

COMPOSITIO.

Quoniam enim rectangulum M D B, ſeu, quod idem eſt, quadratum D B, plus rectangulo D B M æquale eſt quadrato P; ſed quadratum P eſt æquale rectangulo C B H; fecimus enim P mediam inter C B & B H; ergo rectangulum C B H æquabitur quadrato D B, vnà cum rectangulo D B M.



Et quoniam factum eſt, vt E A, ad A C, ſic dupla C B, ad B G, ſeu ſimpla B C ad B H; vt autem B C ad B H, ita quadratum C B, ad rectangulum C B H, ſeu ad quadratum D B, plus rectangulo D B M, illi æquale; ergo vt E A ad A C, ita quadratum B C ad quadratum B D, plus rectangulo D B M.

Deinde quoniam factum eſt ſupra, vt E A, ad A C, ita E C ad G M, & dupla B C ad B G; ergo erit vt E A ad A C, ita ambo antecedentia ad ambo conſequentia, nimirum E C, plus dupla C B ad totam B M; ſed vt E C, plus dupla B C ad B M, ſumpta communi quidem altitudine D B, ita rectangulum ſub E C in D B, plus duplo rectangulo C B D, ad rectangulum D B M; ergo vt quadratum B C, ad quadratum D B, plus rectangulo D B M, ita rectangulum ex E C in D B, plus duplo rectangulo C B D, ad rectangulum D B M.

Quoniam igitur eſt ut totum ad totum, nempè quadratum C B, ad quadratum D B, plus rectangulo D B M, ita ablatum ad ablatum, nempè rectangulum ex E C in D B, plus duplo rectangulo C B D ad rectangulum D B M; ergo ita reliquum ad reliquum, nempè quadratum C B, minus rectangulo ex E C in D B, minus duplo rectangulo C B D, ad quadratum D B; ſed vt totum ad totum, ita erat E A ad A C, ergo vt E A, ad A C, ita quadratum C B, minus rectangulo ex E C, in D B, minus duplo rectangulo C B D, ad quadratum B D; ergo componendo erit, vt E C, ad A C, ita quadratum C B, minus rectangulo ex E C, in D B, minus duplo rectangulo C B D, plus quad. D B, ad quadratum D B; & conuertendo vt A C, ad E C, ita quadratum D B, ad quadratum C B, minus rectangulo ex E C in D B, minus duplo rectangulo C B D, plus quadrato D B; ſed vt A C ad E C, ita rectangulum ex A C in D B, ad rectangulum ex E C in D B; ergo vt A C ad E C, ita ambo antecedentia ad ambo conſequentia; nempè rectangulum ex A C in D B, hoc eſt rectangulum A C F, plus quadrato D B, ſeu quadrato C F, hoc eſt rectangulum A F C, ad quadratum C B, minus duplo rectangulo C B D, plus quadrato D B, hoc eſt minus duplo rectangulo B C F, plus quadrato C F; ſed quadratum C B, minus duplo rectangulo B C F, plus quadrato C F; æquale eſt quadrato F B; ergo vt A C ad E C, ita erit rectangulum A F C, ad quadratum F B.

Datum igitur latus A B utcunque diuiſum in C, diuiſimus iterum in F inter C, B; &c. Quod facere oportebat.

Solum oſtendendum ſupereſt punctum D, neceſſariò debere cadere inter C, B; quod ſic planum fiet. Non enim punctum D cadere poteſt in C; oſtendimus enim eſſe vt E A ad A C, ita quadratum C B, ad rectangulum M D B; & quidem in huiuſmodi caſu ad rectangulum M C B, cumque vt quadratum B C, ad rectangnlum M C B, ita B C ad M C. foret vt E A ad A C, ita C B ad C M, quod eſt inconueniens; factum eſt enim ſupra vt E A ad A C ita C B ad ſolam B H. Multoque maius foret abſurdum, ſi diceretur punctum D, cadere vltra punctum C; ergo neceſſariò cadet inter C, D. Quod &c.

Multum ſanè refert, num ratio data in propoſito aliquo Problemate ſit multiplex, vel ſubmultiplex, an verò quæcunque comprehendens etiam rationem ineffabilem; longè ſiquidem facilius eſt Problemati ſatisfacere, cùm ratio data fuerit multiplex; quod ex adiūcto Problemate perſpicuum fiet.

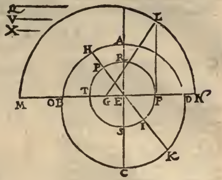
Notandum. Aduerte, quod C F, hic reſpondet in reſolutione ipſi C D, & F B reſpondet ipſi D B.

PROBLEMA.

Exemplum V. *Datis duobus circulis circa diametrum eandem; quorum vnus intra alium exiſtat, ſiue ſe tangant, ſiue non, per minoris centrum aptare rectam in maiori, vt inter circulorum peri-*

peripheriàs interceptum ſegmentum vnum ad aliud ſit in data ratione multiplici.

RESOLVTIO.



CVm igitur data fuerit ratio multiplex ſit propoſitus circulus A B C D, cuius diameter A C, circa quam circulus alter R T S F, cuius centrum E, ſiue eum tangat ſiue non: oporteat autem per E ducere H K occurrens circumferentiæ R T S F in punctis P, & I, ita vt interceptum ſegmentum K I duplum ſit intercepti P H; ducatur B N, per E, faciens in E cum recta A C angulos rectos; atque E I ſit b: E D ſit K, & I K eſto a: itaque E K erit b + a; at verò P H erit dimidium ipſius I K; atque adeo erit $\frac{1}{2}$ a. Cumque P E ſit b, & ipſa quidem E H erit b + $\frac{1}{2}$ a. quoniam verò rectangulum K E H ex circuli natura æquale eſt rectangulo B E D, atque adeo quadrato E D, cùm B E, & E D ſint æquales; propterea ducatur b + a, in b + $\frac{1}{2}$ a, nam productum b² + 1 $\frac{1}{2}$ b a + $\frac{1}{2}$ a², æquabitur k²; & per antitheſin 1 $\frac{1}{2}$ b a + $\frac{1}{2}$ a² æquabitur k² -- b²; omnibuſque duplatis, vt poteſtas integra remaneat 3 b a + a² æquabitur 2 k² -- 2 b²; ac proinde ſi placet æquationem ſic explicare per analogiſmum, erit ut 3 b + a, ad ℞ (2 k² -- 2 b²) ita ℞ (2 k² -- 2 b²) ad a. Vnde.

PORISMA.

Sumatur duplum quadratum ipſius E D, ex quo ſubtrahatur duplum quadratum rectæ E I, ſeu E F, & hac differentia, quam poſſit, exempligratia X, tanquam rectangulo ſub extremis & tripla E I, ſeu E F tanquam differentia extremorum, tria reperiantur latera proportionalia; ex his enim minus erit I K, cuius dimidium erit P H.

Fiat igitur ut Poriſma præſcribit.

Quoniam enim fecimus ut tripla E I, plus I K, ad rectam X, quæ poteſt differentiam inter duplum quadratum E D, & duplum quad. E I, ſeu E F; ita X ad IK, ergo triplum rectãgulum E I K plus quadrato I K, æquabitur duplo quadrato E D, minus duplo quadrato E I; ergo omnibus dimidiatis 1 $\frac{1}{2}$ rectanguli E I K plus $\frac{1}{2}$ quadrati I K æquabitur quadrato E D, minus quadrato E I; ergo per antitheſin quadratum E I plus 1 $\frac{1}{2}$ rectanguli E I K, plus $\frac{1}{2}$ quadrati I K æquabitur quadrato E D; eſt autem quadratum E I, plus 1 $\frac{1}{2}$ rectanguli E I K plus $\frac{1}{2}$ quadrati I K factum ex E I plus I K, in E P plus $\frac{1}{2}$ I K; ergo rectangulum ex E I plus I K in E P plus $\frac{1}{2}$ I K æquabitur quadrato E D; ſed quadrato E D æquale eſt rectangulum H E K; ergo rectangulum ſub E I plus I K in E P plus $\frac{1}{2}$ I K æquabitur rectangulo H E K; ſed E I plus I K æquatur E K; ergo E P plus $\frac{1}{2}$ I K æquabitur E H; ſed E P eſt utrique communis; ergo P H æquabitur $\frac{1}{2}$ I K.

Quod propoſitum erat efficere.

Problema.

Datis duobus circulis circa diametrum eandem, quorum vnus intra alium exiſtat, per minoris centrum aptare rectam in maiori, vt intercepta ſegmenta inter circulorum peripherias datam inter ſe rationem obtineant. Exemplum VI.

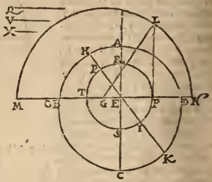
Datus ſit circulus A B C D, cuius diameter A C, circa quam ſit circulus alter R T S F, cuius centrum E, per quod ſit iniunctum ducere H K occurrentem circuli peripheriæ in

 pun-

punctis P, & I, ut interceptum ſegmentum I K, ad interceptum P H, ſit in ratione, quam habet E S, uel E I, vel E F &c. ad X.

Aut circuli ſunt concentrici, aut eccentrici; in illis non admittitur niſi æqualitatis ratio, cùm omnis linea ducta per centrum Problemati ſatisfaciat; intercepta ſiquidem ſegmenta ſemper obtinent æqualitatis rationem. Si uerò fuerint eccentrici, uel ſe intus tangunt, uel non; utcumque ſe res habeat, idem eſt Reſolutionis modus.

RESOLVTIO.



Sit iam factum, & ſemidiameter minoris circuli exempligratia E F ſit b; at uerò X, dicatur d, intelligatur ducta per E recta B D ad rectos angulos in E; eritque B E æqualis E D, alterutra ipſarum dicatur K; ſegmentum I K eſto a; ergo E K erit $b \ast a$. Sed quoniam I K, ad P H debet eſſe ut b, ad d, proinde fiet ut b, ad d, ita a, ad $\frac{da}{b}$; quare P H erit $\frac{da}{b}$; quamobrem E H erit $b + \frac{da}{b}$. Quia uerò ex circuli natura rectangulum K E H æquale eſt rectangulo B E D, ſeu quadrato E D; proinde ducatur $b \ast \frac{da}{b}$ in $b + a$, & fiet productum $b^2 + ba \ast da + \frac{da^2}{b}$, quod æquabitur k^2; omnibus ductis in b, fiet $b^3 + b^2 a \ast bda \ast da^2 = bk^2$; & per antitheſin $b^2 a \ast bda \ast da^2$, æquabitur $bk^2 - b^3$; omnibus applicatis ad d, & $\frac{b^2}{d} a \ast ba + a^2$, æquabitur $\frac{bk^2 - b^3}{d}$. Ad tollendas fractiones fiat, ut d ad b, ita b, ad r, & erit r idem quod $\frac{b^2}{d}$: unde r a, erit idem quod $\frac{b^2}{d} a$. Deinde fiat ut d, ad b, ita differentia k^2 & b^2, quæ appelletur q^2, ad aliud; uel quod in idem recidit ex hypotheſi quod q^2 ſit differentia inter k^2, & b^2, fiat ut d ad b, ita q, ad aliam s, & inter q, & s media reperiatur z; nam z^2 idem erit quod $\frac{bk^2 - b^3}{d}$: unde æquatio illa ad hanc erit reuocata $ra + ba + a^2 = z^2$; loco autem ipſius $r + b$, ad confuſionem tollendam ſubſtituatur p; eritque $pa + a^2 = z^2$, cuius æquationis radix eſt $R\left(\frac{1}{4}p^2 + z^2\right) - \frac{1}{2}p$. Hinc.

PORISMA.

Tollantur fractiones vt dictum eſt, nempe fiat vt d ad b, ita b, ad r, deinde fiat vt d, ad b, ita q, ad s, & inter q & s, media ſit z: modo aggregatum ex r, & b, nempe p ſumatur, ad cuius quadrati quartam partem addatur quadratum ex z; aggregati autem latus multetur dimidio ipſius p; nam reſiduum, quæſitam quantitatem exhibebit.

Non licet autem Analyſeos veſtigia repetere, niſi quis velit per comparationem ſolidorum incedere, vel vnitatem in Geometriam inuehere; propterea iuuat Poriſma tanquam Theorema ſuſcipere demonſtrandum.

Effectio Geometrica.

Sit circulus ABCD, cuius diameter AC, circa quam ſit circulus alter RTSF, cuius centrum E, per quod BD ducta ſit ad rectos angulos in E, factumque ſit vt X ad ES, ita ES, ad EO, atque OF diuiſa ſit bifariam in G; factumque etiam ſit vt X ad E S, ita Q potens differentiam quadratorum ED, E F, ad aliam V; media autem inuenta inter Q, & V, ſit ea, cui æqualis eſt F L perpendicularis facta in puncto F. Ex G ducta GL, centro G, interuallo G L, deſcripto circulo MLN, cui occurrat recta BD vtrinque protracta, & centro E, interuallo EN, deſcripto arcu NK, occurrente circuli peripheriæ ABCD, in K; & per K & E ducta K H, occurrente peripheriæ circuli in punctis I, & P, factum erit quod oportet. Vel clarius.

Sit

Sit circulus A B C D, cuius diameter A C, circa quam ſit circulus alter R T S F, cuius centrum E, ſit autem iniunctum ducere per E, rectam K H, occurrentem peripheriæ minoris circuli in punctis I, & P, ita vt interceptum ſegmentum K I ad interceptum P H, ſit in ratione ſemidiametri minoris circuli, puta E S, vel E I &c. ad X. Per punctum E tranſeat ad rectos angulos cum A C recta B D, ſecans circumferentiam circuli minoris in punctis T, & F; mox verò exponatur recta Q, quæ poſſit differentiam quadratorum E F, E D, ita vt Q quadratum æquale ſit quadrato E D, minus quadrato E F; id enim Poriſma iubet. Deinde fiat vt X, ad E S, ita Q quadratum ad aliud, vel, quod in idem recidit, ex hypotheſi quod Q poſſit differentiam quadratorum E D, E F, fiat vt X ad E S, ita Q ad V, & inter Q & V media reperiatur proportionalis F L, quæ ad rectos angulos eſt excitanda ex puncto F; fiat autem vt X, ad E S, ita E S, ad O E; biſſecetur autem O F in puncto G, iunctaque G L, centro G, interuallo G L, deſcribatur circulus M L N; deinde centro E, interuallo E N deſcribatur arcus N K occurrens (occurret autem, vt facilè conſtabit) circuli A B C D peripheriæ in puncto K; ex K, per E agatur K H occurrens circuli peripheriæ in punctis I, & P. Et factum erit, quod oportet.

PROPOSITIO.

Datis ijs, quæ Poriſma dictat; num ea ſit ratio intercepti ſegmenti K I, ad interceptum P H, relata ad ſemidiametrum circuli T S F, nempè quæ E S, vel E I, &c. ad X, inquirere.

RESOLVTIO.

Iiſdem ſuppoſitis characteribus ad eaſdē quantitates deſignãdas, nempe E F, vel E I, &c. ſit b, & X ſit d, F N, uel I K eſto a; & P H erit $\frac{da}{b}$: O E erit r; F L erit z; inſuper E D erit k: O F erit p, nempe aggregatum ex b, & r.

Quoniam igitur $pa + a^2$ æquale eſt z^2; ſed z^2 æquale eſt ex conſtructione qs; ergo $pa + a^2$ æquabitur qs quoniam verò p, æquatur $b + r$, propterea $ra + ba + a^2$, æquabitur qs. fecimus autem vt d ad b, ita q, ad s, & vt q, ad s, ſumpta communi altitudine q, ita eſt q^2 ad qs; erat autem qs æquale $ra + ba + a^2$; ergo vt d ad b, ita q^2, ad $ra + ba + a^2$.

Rurſus cum factum ſit vt d, ad b, ita b, ad r; vtque b, ad r, ſumpta communi altitudine a, ita eſt ba, ad ra; ergo vt d, ad b, ita ba, ad ra; ſed vt d, ad b, ita erat q^2, ad $ra + ba + a^2$; ergo vt q^2, ad $ra + ba + a^2$, ita ba ad ra.

Quoniam igitur eſt vt totum q^2, ad totum $ra + ba + a^2$, ita ablatum ba, ad ablatum ra; erit etiam ut totum q^2 ad totum $ra + ba + a^2$, ita reliquum $q^2 - ba$, ad reliquum $ba + a^2$; ſed vt q^2, ad $ra + ba + a^2$, ita d, ad b; ergo vt d ad b, ita $q^2 - ba$, ad $ba + a^2$; ſed q^2 eſt æquale $k^2 - b^2$; ergo vt d, ad b, ita $k^2 - b^2 - ba$, ad $ba + a^2$; ſed k^2 æquale eſt $b^2 + ba + da + \frac{da}{b}$; atque adeo $k^2 - b^2 - ba$ æquale eſt $b^2 + ba + da + \frac{da}{b} - b^2 - ba$, nimirum æquale eſt ipſi $da + \frac{da}{b}$; ergo vt d, ad b, ita erit $da + \frac{da}{b}$ ad $ba + a^2$; ſed vt $da + \frac{da}{b}$ ad $ba + a^2$, ob communem altitudinem $b + a$, ita eſt $\frac{da}{b}$ ad a; ergo vt d, ad b, ita $\frac{da}{b}$ ad a; & conuertendo vt b, ad d, ita a, ad $\frac{da}{b}$. Hinc.

THEOREMA.

Sit circulus A B C D, cuius diameter A C; circa quam ſit circulus alter R T S F; cuius centrum E per quod B D, ducta ſit ad rectos angulos in E; factumq; ſit vt X ad E S, ita E S, ad E O; atque O F, diuiſa ſit bifariam in G, factumque etiam ſit vt X ad E S ita Q potens differentiam quadratorum E D, E F, ad aliam V, media autem inuenta inter Q, & V, ſit ea, cui æqualis eſt F L, perpendicularis facta in puncto F, ex G ducta G L, centro G, interuallo G L deſcripto ſemicirculo M L N, cui occurrat recta B D, vtrinque protracta, & centro E, interuallo E N, deſcripto arcu N K, occurrente circuli peripheriæ A B C D, in K, & per K & E, ducta H K, occurrente circuli peripheriæ in punctis I, & P. Dico interceptum ſegmentum K I, ad interceptum P H, eſſe vt E S ad X.

Quo-

COMPOSITIO.

Quoniam enim O G æqualis eſt G F, & M G æqualis eſt G N; ergo reliqua M O æquabitur reliquæ F N, ergo rectangulum M F N æquabitur rectangulo O N F; ſed rectangulum M F N æquale eſt quadrato F L; ergo rectangulum O N F æquabitur quadrato F L; ſed ex conſtructione quadratum F L æquale eſt rectangulo ſub Q, & V; ergo rectangulum O N F, æquabitur rectangulo ſub Q, & V; fecimus autem vt X ad E S, ita Q ad V, & vt Q ad V, ſumpta communi altitudine Q, ita eſt quadratum ex Q, ad rectangulum ſub Q, & V, & erat rectangulum ſub Q & V æquale rectangulo O N F; ergo erit vt X ad E S, ita quadratum ex Q ad rectangulum O N F.

Rurſus quoniam factum fuit vt X ad E S, ita E S ad O E, vtque E S ad O E, ſumpta communi altitudine F N, ita eſt rectangulum ſub E S, ſeu E F, & F N, hoc eſt rectangulum E F N, ad rectangulum ſub O E, & F N; ergo vt X, ad E S, ita rectangulum E F N, ad rectangulum ſub O E, & F N; erat autem vt X ad E S, ita quadratum ex Q, ad rectangulum O N F; ergo erit vt quadratum ex Q, ad rectangulum O N F, ita rectangulum E F N, ad rectangulum ſub O E, & F N.

Cùm itaque ſit vt totum quadratum ex Q, ad totum rectangulum O N F, hoc eſt rectangulum ex O E, & F N, plus rectangulo ex E F, & F N, vna cùm quadrato F N, quemadmodum ablatum rectangulum E F N, ad ablatum ex O E in F N; ergo reliquum nempè quadratum ex Q, minus rectangulo E F N, ad reliquum ſcilicet rectangulum E F N, plus quadrato F N, hoc eſt ad rectangulum E N F, erit vt totum ſcilicet quadratum ex Q, ad totum nempe rectangulum ſub O E, & F N plus rectangulo ſub E F, & F N, vna cum quadrato F N. Sed quadratum ex Q ad rectangulum ex O E in F N, plus rectangulo ex E F in F N, vna cum quadrato F N, erat vt X ad E S; ergo erit ut X ad E S, ita quadratum ex Q, minus rectangulo E F N, ad rectangulum E F N, plus quadrato F N, hoc eſt ad rectangulum E N F. Eſt autem quadratum ex Q idem quod quadratum E D, minus quadrato E F; ergo erit vt X ad E S, ita quadratum E D, minus quadrato E F, minus rectangulo E F N, ad rectangulum E F N, plus quadrato F N. Sed quadratum E D æquale eſt rectangulo K E H, hoc eſt quadrato E I plus rectangulo E I K plus rectangulo ſub E I & H P, plus rectangulo ſub I K & H P, atque adeò pro E F, F N, (deinceps ſubſtituantur E I, I K) quadratum E D minus quadrato E I, minus rectangulo E I K æqualibus hinc inde ſubtractis æquabitur rectangulo ſub E I & H P, plus rectangulo ſub I K & H P, ergo vt X ad E I ita erit rectangulum ſub E I & H P plus rectangulo ſub I K & H P ad rectangulum E K I; ſed vt rectangulum ſub E I & H P plus rectangulo ſub I K, & H P, ad rectangulum E K I, ob communem altitudinem E K ita eſt H P ad I K, ergo vt X ad E I ita H P ad I K, & conuertendo vt E I ad X ita I K ad H P.

Aduerte rectangulum ex E I in H P æquari rectāgulo ex X in I K quod in reſolutione reſpondet d a, & rectangulum ex I K in H P reſpōdet in reſolutione ipſi $\frac{d\,m}{b}$

Quod verò F N, & I K ſint æquales patet; nam E N, & E k ſunt æquales velut ab eodem centro ad eandem circumferentiam, quemadmodum E F, & E I æquales ſunt, ob id F N, I K erunt æquales.

Datis igitur duobus circulis circa diametrum eandem, quorum vnus intra alium exiſtat per minoris centrum aptauimus rectam &c. Quod facere oportebat.

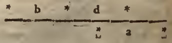
Quanto ſit operoſior reſolutio, cum de terminis proportionalibus generatim ſecundum quamcumque rationem, quàm ſi proponatur iuxta terminos rationis multiplicis; facile ex hactenus dictis deprehendes.

Problema.

Exemplum VII.

Propoſito lateri latus adiungere vt quadratum dati, plus duplo rectangulo ſub dato, & adiuncto, ad quadratum adiuncti datam habeat rationem.

Datum ſit latus b, cui oporteat latus addere ut quadratum ipſius b, plus duplo rectangulo ſub eodem b, & adiuncto, ad quadratum adiuncti, rationem habeat vt b, ad d.



Vulgaris Reſolutio ſe haberet ut ſequitur.

RESOLVTIO I.

LAtus addendum eſto a, rectangulum autem ſub dato & adiuncto erit $b a$, cuius duplum $2 b a$, aggregatum ex hoc, & quadrato dati erit $b^2 + 2 b a$ quadratum adiuncti erit a^2; ergo erit vt b, ad d, ita $b^2 + 2 b a$, ad a^2; quamobrem multiplicatis extremis & medijs $b a^2$ æquabitur $b^2 d + 2 b d a$; & per antitheſin $b a^2 - 2 b d a$ æquabitur $b^2 d$; omnibus applicatis ad b, & $a^2 - 2 d a$ æquabitur $b d$, & media repecta proportionali inter b, & d quæ ſit z, erit vt $a - d$, ad z, ita z, ad a. Hinc.

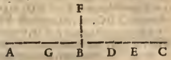
PORISMA.

Dato rectangulo ſub extremis, quod ſcilicet continetur ſub terminis datæ rationis; dataque differentia extremorum è tribus proportionalibus, quæ ſit conſequens rationis datæ, extrema reperiantur &c.

Effectio Geometrica.

Datū ſit latus A B, quod oporteat taliter producere in C, vt quadratum A B plus duplo rectangulo A B C, ſit ad quadratum B C, in ratione A B ad B D; Super diametrum A D, deſcribatur ſemicirculus, factaque ſit B E dupla ipſius B D, ex B excitetur perpendicularis B F, vſque ad circumferentiā in F, iunctaque D F, centro D, interuallo D F, deſcribatur ſemicirculus ſecans B E productam in C; & A B in G; erit enim B C latus adiungendum.

COMPOSITIO.



CVm hæc Reſolutio proceſſerit per ſolidorum comparationem, haud licebit regreſſum facere componendo repetitis Analyſeos veſtigijs, niſi in componendo ſolidis vti velimus; propterea iuuabit aſſumere demonſtrandum Poriſma tanquam Theorema, ad eum qui ſequitur modum.

PROPOSITIO.

Suppoſitis ijs, quæ Poriſma dictat &c. veritatem inquirere.

RESOLVTIO.

QVoniam igitur eſt vt $a - 2 d$, ad z, ita z ad a; ergo $a^2 - 2 d a$ æquabitur z^2; ſed z^2 æquatur $b d$ ex conſtructione; ergo $a^2 - 2 d a$ æquabitur $b d$; communi addito $2 d a$; ergo a^2 æquabitur $b d + 2 d a$.

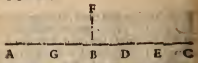
Deinde quoniam eſt vt b ad d, ſumpta communi altitudine b, ita b^2 ad $b d$, & vt b ad d, ſumpta communi altitudine a, ita $b a$, ad $d a$ atque vnum ad vnum ſeu vt ſimplum ad ſimplum ita duo ad duo, ſeu ita duplum ad duplum; atque adeo vt b, ad d, ita $2 b a$, ad $2 d a$; erat autem vt b ad d, ita b^2, ad $b d$ modo verò vt b ad d, ita $b a$, ad $2 d a$; ergo erit vt vnum antecedens ad vnum conſequens, nempe vt b^2 ad $b d$, vel vt $2 b a$, ad $2 d a$ ita ambo antecedentia ad ambo conſequentia, nempe $b^2 + 2 b a$, ad $b d + 2 d a$; ſed vnum antecedens ad vnum conſequens erat vt b ad d; ergo vt b, ad d, ita $b^2 + 2 b a$, ad $b d + 2 d a$; erat autem a^2 æquale; $b d \dagger 2 d a$; ergo ut b, ad d, ita $b^2 \dagger 2 b a$, ad a^2. Hinc.

THEOREMA.

Si ſit latus A D diuiſum in B ſuper A D deſcripto ſemicirculo, ſitque B F erecta perpendicularis &c. vt duplum B D, nempe B E tanquam differentia extremorum, & B F tanquam media reperta ſint extrema latera G B, B C. Dico eſſe vt A B ad B D, ita quadratum A B plus duplo rectangulo A B C ad quadratum B C.

CO M-

COMPOSITIO.



QVoniam igitur G D eſt æqualis D C, & & B D æqualis D E; ergo G B æquabitur E C; ergo rectangulum G B C æquabitur rectangulo B C E; ſed rectangulum G B C æquale eſt quadrato B F; ergo rectangulum B C E, æquabitur quadrato B F; ſed quadrato B F æquale eſt rectangulum A B D; ergo rectangulum B C E æquabitur rectangulo A B D; ſed rectangulum B C E æquale eſt quadrato B C, minus rectangulo C B E; ergo quadratum B C, minus rectangulo C B E æquabitur rectangulo A B D; communi addito rectangulo C B E; ergo rectangulum A B D, plus rectangulo C B E æquabitur quadrato B C.

Deinde quoniam eſt, ut A B, ad B D, ſumpta communi altitudine A B, ita quadratum A B ad rectangulum A B D; & ut A B ad B D, ſumpta communi altitudine B C, ita rectangulum A B C ad rectangulum C B D; ergo ut quadratum A B ad ractangulum A B D, ita rectangulum A B C ad rectangulum C B D; & vt unum ad unum, ita duo ad duo; ergo ut A B ad B D, ita duplum rectangulum A B C, ad duplum rectangulum C B D, ſeu ad ſimplum C B E. Erat autem ut A B, ad B D, ita quadratum A B ad rectangulum A B D; modò autem vt A B, ad B D, ita duplum rectangulum A B C ad rectangulum C B E; ergo vt unum antecedens ad unum conſequens, A B quadratum, ad rectangulum A B D, vel duplum rectangulum A B C ad rectangulum C B E, ita ambo antecedentia ad ambo conſequentia; nempè quadratum A B, plus duplo rectangulo A B C, ad rectangulum A B D, plus rectangulo C B E; Sed vnum antecedens ad vnum conſequens erat, ut A B, ad B D; ergo ut A B ad B D, ita quadratum A B, plus duplo rectangulo A B C, ad rectangulum A B D, plus rectangulo C B E; Sed quadratum B C erat æquale rectangulo A B D, plus duplo rectangulo C B D, ſiue ſimplo C B E; ergo vt A B, ad B D, ita quadratum A B, plus duplo rectangulo A B C ad quadratum B C.

Propoſitio igitur lateri latus adinuenimus &c. Quod facere oportebat;

Elegantiùs tamen hunc in modum inſtituetur Reſolutio.

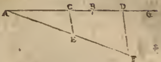
RESOLVTIO II.

IIſdem poſitis: quoniam igitur eſt ut b, ad d, ita $b^2 + 2ba$, ad a^2; ergo componendo erit ut $b + d$, ad d, ita $b^2 + 2ba + a^2$, ad a^2; inter $b + d$, & d, media ſit proportionalis s: ergo ut quadratum ex $b + d$, ad quadratum ex s, ita $b^2 + 2ba + a^2$, ad a^2; ergo eorum latera proportionalia erunt; quare vt $b + d$, ad s, ita $b + a$, ad a; ergo diuidendo vt b ✠ $d - s$, ad s, ita b, ad a; ſit z media proportionalis inter s, & b, erit ut b ✠ $d - s$, ad z, ita z, ad a. Hinc.

PORISMA.

Inter aggregatum terminorum datæ rationis, & terminum conſequentem eiuſdem ſumatur medium; deinde fiat vt aggreg. terminorum prædictum, minus medio proportionali adiuncto, ad hoc idem medium, ita terminus antecedens rationis datæ ad aliud; ſeu quod idem eſt, inter medium iam dictum proportionale, & terminum antecedentem datæ rationis media quædam exhibeatur proportionalis, & fiat vt aggregatum iam dictum minus priori medio proportionali, ita hac ad aliud &c,

COMPOSITIO.



DAtum ſit latus A B, cui fieri debet additio ita vt quadratum ipſius plus duplo rectangulo ſub eodem, & adiuncto, ad quadratum adiuncti rationem habeat ut A B ad B D; inter A D aggregatum ex A B, B D, & ipſam B D, media reperiatur proportionalis C D; mox autem hac ſubtracta ex A D, remaneat A C; vt autem A C ad C D, ita fiat A B, ad aliam, quæ ſit B G; nimirùm aptetur A F in quocunque angulo cum A D, & in ipſa ſecetur A E æqualis A B; agatur C E, cui fiat parallela D F, ipſi E F fiat æqualis B G. Quoniam igitur eſt vt A C ad C D, ita A E ad E F; ergo componendo erit vt A D ad C D, ita A F ad E F; ergo vt quadratum A D ad quadratum C D, ita quadratum A F, ad quadratum E F; eſt autem vt quadratum A D ad quadratum C D, ita A D ad B D, cùm C D facta ſit media proportionalis inter A D, B D; ergo erit vt A D ad B D, ita quadratum A F ad quadratum E F; ergo diuidendo erit vt A B ad B D, ita quadratum A F, minus quadrato E F, hoc eſt quadratum A E plus duplo rectangulo A E F, ad quadratum E F; ſed A E eſt æqualis A B, & E F eſt æqualis B G ex conſtructione; ergo vt A B ad B D, ita quadratum A B, plus duplo rectangulo A B G ad quadratum B G. Idem igitur elegantiùs præſtitimus. Quod facere oportebat.

PROBLEMA.

Data ratione interualli quadratorum à medio & minori ad aggregatum quadratorum à medio & maiori, tria latera proportionalia adinuenire. Exemplum VIII.

RESOLVTIO.

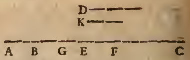
DAta ſit ratio vt r ad s, extremum autem maius eſto a: ſumptoque r priori termino datæ rationis pro extremo minori ſic procedendum. Ducatur hoc, nimirum r, in a, extremum maius, vt fiat r a, quod æquabitur quadrato ex medio.

Quoniam autem rectang. ſub extremis minus quad. minoris extremi æquale eſt differentiæ quadratorum medij & minoris; propterea differentia quadratorum medij & minoris erit $r\,a - r^2$; at verò aggregatum quadratorum medii & maioris erit $r\,a + a^2$; igitur vt r, ad s, ita debebit eſſe $r\,a - r^2$, ad $r\,a + a^2$; vnde productum ſub extremis æquabitur producto ſub medijs; ac propterea $r\,s\,a - r^2 s$, æquabitur $r^2 a + r\,a^2$, & per antitheſin $r\,s\,a - r^2 a - r\,a^2$ æquâbitur $r^2 s$; omnibus autem applicatis ad r, erit $\overline{r - s}\,a - a^2$ æquale r s. Hinc.

PORISMA.

Ex quadrato è dimidia differentia duorum terminorum datæ rationis auferatur productum ſub iiſdem terminis, reſidui namque latus quadratum detractum ſupradicto dimidio, vel eidem additum exhibebit maius extremum priori termino rationis datæ exiſtente minori, è tribus lateribus proportionalibus.

Effectio Geometrica.



DAta ſit ratio A B ad A C: recta verò potens rectangulum C A B ſit D, & hac tanquàm medio è tribus lateribus proportionalibus, & differentia terminorum datæ rationis tanquam extremorum aggregato, reperiantur latera: nempè B C diuidatur biſariam in F, & ex quadrato B F ſubtracto quadrato rectæ D, quæ poteſt rectangulum C A B, reſiduiq; latus ſit E F, quo addito ad F C, fit E C, & ſubtracto abs B F æquali ipſi F C, remaneat B E, eritque tam B E, quàm E C quantitas quæſita, ita vt ſi reperiatur K media proportionalis inter A B, & B E, tria ſint latera proportionalia A B; K; B E, ſintque latera, quæ propoſito ſatisfaciant &c.

PROPOSITIO.

Datis ÿs, quæ Poriſma dictat &c. veritatem inquirere.

RESOLVTIO.

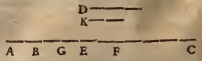
SVppoſitis ijſdem, quod nimirum A C ſit s, & A B ſit r, erit B C idem quod $s - r$; at B E, vel E C erit a; ſed recta D potens rectangulum C A B, erit z; at inter A B, & B E, ſit media proportionalis k.

Quoniam igitur r s (ita enim hìc ratiocinandum) æquale eſt z^2; ſed z^2 æquale eſt $sa - ra - a^2$; ergo $sa - ra - a^2$ æquabitur rs; ergo reciproce erit, vt tota s, ad totam a, ita ablata $s - r - a$, ad ablatam r; ergo vt reliqua $r + a$, ad reliquam $a - r$, erit vt tota s, ad totam a; ergo permutando erit vt $r + a$, ad s, ita $a - r$, ad a & inuertendo vt s ad $r + a$, ita a, ad $a - r$; ſed s ad r; accepta $r + a$ tanquam intermedia rationem habet compoſitam ex s, ad $r + a$, & ex $r + a$, ad r; erat autem vt s, ad $r + a$, ita a, ad $a - r$; ergo ratio s, ad r, erit quoque compoſita ex ratione a, ad $a - r$, & ex ratione $r + a$, ad r; ſed ratio $ra + a^2$, ad $ra - r^2$, compoſita quoque eſt ex ijſdem rationibus, nimirum a, ad $a - r$, & $r + a$ ad r; ergo vt s, ad r, ita erit $ra + a^2$, ad $ra - r^2$ ſed $ra + a^2$ æquale eſt $a^2 + k^2$, nempè quadrato maioris extremis plus quadrato medij, & $ra - r^2$ eſt differentia quadratorum medij & minoris extremi; ergo aggregatum quadratorum medij & maioris extremi ad differentiam quadratorum medij & minori extremi è tribus proportionalibus r, k, a, minori exiſtente r, eſt in ratione data ut s, ad r; & conuertendo &c. Hinc.

THEOREMA.

Si fuerit quadratum è dimidia differentia duorum terminorum datæ rationis multatum rectangulo ſub yſdem terminis, reſidui verò latus additum ſit prædicto dimidio, vel ab eodem ſubtractum. Dico aggregatum vel reſiduum eſſe maius è tribus proportionalibus extremum, ita vt interuallum quadratorum medÿ, & minoris, ad aggregatum quadratorum medÿ & maioris ſit in ratione data.

COMPOSITIO.



SIt ratio data, quæ AB ad AC, vt ſupra, ſitque D recta quæ poſſit rectang. CAB; biſſecta autem B C in F, & ex quad. BF ablatũ ſit quadr. D, & remaneat quadratũ cuius latus E F. Dico B E, vel E C propoſito ſatisfacere, ita vt ſi K media fuerit proportionalis inter A B, & B E, differentia quadratorum ex A B, & k, ad aggregatum quadratorum ex K, & B E ſit in ratione vt A B ad AC. Non diſſimiliter de E C &c. ſecetur B G æqualis A B.

Quoniam enim quadratum D æquale eſt rectangulo C A B; ſed quadratum D æquale eſt rectangulo ſub A C, & B E, minus rectangulo A B E, minus quadrato B E; ergo rectangulum ſub A B, & A C, æquabitur rectangulo ſub A C, & B E, minus rectangulo A BE, minus quadrato BE; ergo reciprocè vt tota AC, ad totam BE, ſic ablata AC, minus AB, minus B E, ad ablatā BG, ſeu A B; ergo reliqua A B, plus B E, hoc eſt A E, ad reliquam B E, minus AB hoc eſt ad GE erit vt tota AC ad totam B; & permutando vt AE ad AC, ita BE, minus A B, hoc eſt ita G E, ad B E, & inuertendo vt A C, ad A B, plus B E, hoc eſt ad A E, ita B E, ad B E, minus B G, hoc eſt ad G E; ſed A C ad A B, ſumpta intermedia A B, plus B E, ſeu A E, rationem habet compoſitam ex ratione A C, ad A B, plus B E, ſeu ad A E, & ex ratione huius ad A B; Erat autem vt AC ad A B, plus BE, ſeu ad AE, ita BE ad B E, minus A B, ſeu ad G E; ergo ratio A C ad A B, compoſita erit ex ratione B E ad BE, minus A B, hoc eſt ad G E, & ex ratione A B, plus B E, hoc eſt A E ad A B; Sed rectangulum A B E, plus quadrato B E nempè rectangulum A E B, ad rectangulum A B E, minus quadrato A B, rationem habet compoſitam ex iiſdem rationibus; ergo rectangulum A B E, plus quadrato B E, ad rectangulum A B E, minus quadrato A B, erit vt A C ad A B, ſed rectangulum A B E æquale eſt ex conſtructione quadrato K; vnde rectangulum A B E, plus quadrato B E, idem erit quod quadratum B E, plus quadrato K, quod minori exiſtente A B, & K, media inter A B, B E erit aggregatum quadratorum medij, & maioris extremi, & rectangulum A B E, minus quadrato A B, eſt differentia quadratorum medij, & minoris extremi, ergo A B, K, & B E, ſunt tria latera continuè proportionalia, ita vt aggregatum quadratorum medij & maioris extremi, ad differentiam quadratorum medij & minoris extremi, ſit vt A C ad A B; & conuertendo, vt A B, ad A C, ita differentia quadratorum medij & minoris extremi ad aggregatum quadratorum medij, & maioris extremi.

Data igitur ratione interualli, ſeu differentiæ quadratorum mediæ, & minoris extremi, ad aggregatum &c. tria latera proportionalia nos adinuenimus. Quod facere oportebat.

Contingit aliquando vt etiamſi in reſoluendo non ſit factus aſcenſus ſupra plana, expediat nihilominus Poriſma per modum Theorematis aſſumere demonſtrandum. Eſto exemplum.

Problema.

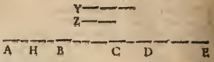
Quantitatem adinuenire, cui ſi addantur, & detrahantur datæ quantitates, ſumma ad reſiduum datam habeat rationem. Exemplum XIV.

Due datæ ſint quantitates b, & c, & oporteat adinuenire quantitatem cui ſi addideris b, atque detraxeris c, ſumma ad reſiduum ſit in ratione vt r, ad s, Quoniam vero r, s, & b, ſunt magnitudines datæ nihil prohibet fieri vt r, ad s, ita b, ad aliam, quæ vocetur d; idque facilitatis gratia, ratioque ſit data vt b, ad d, quia tamen poſſet fieri æquiuocatio in colligendo Poriſmate præſtat ob id prædictos terminos retinere. Quæſita ſit quantitas a; ergo iuxta tenorem Problematis erit vt a + b, ad a -- c, ita r, ad s; multiplicatis autem extremis, & medijs s a + b s, æquabitur r a -- r c; & per repetitam antitheſin r a -- s a, æquabitur s b + r c vnde $\frac{sb+rc}{r-s}$ æquabitur a, vel erunt proportionales r -- s; ℞ (s b + r c); a. Hinc.

PORISMA.

Quantitas addenda ducatur in poſteriorem terminum datæ rationis, item & terminus antecedens in quantitatem auferendam, aggregatum autem productorum applicetur ad differentiam terminorum datæ rationis; magnitudo enim orta erit quantitas quæſita.

COMPOSITIO.



SIt recta quidem A B, quæ addenda ſit quæſitæ quantitati, & B C ſit auferenda ab eadem, ita vt aggregatum ad reſiduum ſit in ratione Y, ad Z.

Fiat vt Y ad Z, ita A B ad A H; mox verò ipſi B C addatur C D, quæ ſit æqualis A H; & vt H B differentia terminorum ad A B quantitatem addendam, terminumq; maiorem, ita fiat B D ad B E. Dico B E ſatisfacere.

Manifeſtum eſt autem factum eſſe, quod Poriſma iubet; factum eſt enim vt Y ad Z, ita A B ad A H, ſeu C D; vnde rectangulum ſub A B, & A H erit quod continetur, nempe ſub quantitate addenda, & minori termino datæ rationis; eſt enim ob analogiſmum rectangulum, quemadmodum nunc nos dicebamus; rectangulum verò ſub A B, & B D, erit quod continetur ſub A B maiori termino, & ſub B C quantitate auferenda, vnà cum rectangulo ex A H minori termino in ipſam A B, quantitatem addendam; quæ quidem ſatis de ſe manifeſta, atque conſpicua ſunt. Vnde cum factum ſit vt H B, id eſt differentia inter A B, & A H ad A B, ita B D ad B E, applicuimus aggrematum rectangulorum prædictorum, nempe rectangulum A B D, ad A B minus A H, quæ Poriſma dictabat.

Quoniam igitur eſt vt H B, hoc eſt vt A B, minus A H, ad A B, ita B D, hoc eſt B C, plus C D, ad B E; ergo rectangulum A B E, minus rectangulo ſub A H, & B E, æquabitur rectangulo A B C plus rectangulo B A H; & per antitheſin rectangulum ex A H in B E plus rectangulo B A H, vnà cum rectangulo A B C, æquabitur rectangulo A B E; & rurſus rectangulum ex A H in B E, plus rectangulo B A H, æquabitur rectangulo A B E, minus rectangulo A B C; æqualitate autem ad proportionem reuocata erit, vt A B, plus B E, hoc eſt A E, ad B E, minus B C, hoc eſt ad C E, ita A B ad A H; ſeu vt Y ad Z.

Elegantiùs tamen hunc in modum.

PROPOSITIO.

Datis ijs, quæ Poriſma dictauit veritatem inquirere.

Recta A B ſit b & B C ſit c; cumque vt Y ad Z ita ſit r, ad s, factumque ſit vt Y ad Z ita A B ad A H, ſeu C D quæ ſit d; vnde ſit vt r ad s ita b ad d & quia factum eſt, vt H B ad A B ita B D ad B E, ipſa B E ſit a vnde ſit vt r -- s ad r, ita c † d ad a. Eſt enim factum vt Y ad Z, ſeu vt r, ad s, ita A B, ad A H vnde erit A B minus A H, hoc eſt H B, ad A B, vt r -- s ad r, quare, vt H B ad A B ita B D ad B E non diſsimiliter, ut r -- s ad r ita c † d ad a.

RESOLVTIO.

QVoniam igitur eſt vt r -- s, ad r, ita c † d, ad a, ergo inuertendo erit vt r, ad r -- s, ita a, ad c † d; & per conuerſionem rationis, vt r, ad s, ita a, ad a -- c -- d; ſed ex conſtructione eſt vt r, ad s, ita b ad d; ergo vt b, ad d, ita a, ad a -- c -- d, & permutando vt b, ad a, ita d, ad a -- c -- d; & componendo vt b † a, ad a, ita a -- c, ad a -- c -- d; & permutando vt a † b, ad a -- c, ita a, ad a -- c -- d; erat autem vt a, ad a -- c -- d, ita b, ad d, & vt b, ad d, ita r, ad s; ergo vt r ad s, ita a † b, ad a -- c. Hinc.

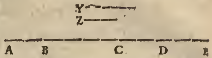
THEOREMA.

Si quantitas addenda ducta fuerit in poſteriorem terminorum datæ rationis, & terminus antecedens in quantitatem auferendam, productorum aggregatum applicatum fuerit ad differentiam terminorum datæ rationis. Dico magnitudinem ortiuam, Problemati ſatisfacere.

Fiat vt Y ad Z, ita A B, ad A H, ſeu C D; & vt Y, minus Z, ad Y, ſeu vt A B, minus A H ad A B, ita B D ad B E.

COM-

COMPOSITIO.



QVoniam igitur eſt vt Y minus Z, ad Y, ita B D, ad B E; ergo inuertendo erit vt Y ad Y minus Z, ita B E, ad B D, & per conuerſionem rationis vt Y ad Z, ita B E ad D E; ſed ex conſtructione eſt vt Y ad Z, ita A B, ad CD; ergo vt A B ad C D, ita B E ad DE; & permutando vt A B ad B E, ita C D ad D E; & componendo vt A E, ad B E, ita C E ad D E; & permutando vt A E ad C E, ita B E ad D E; erat autem vt B E ad D E, ita A B ad C D, & vt A B, ad C D, ita Y, ad Z; ergo vt Y ad Z, ita erit A B ad C E.

Iam ſuperiori libro Deductionem, quam Græci dicunt Ἐπαγωγὴν explicuimus, & quatenus ea vtitur Veterum Analyſtarum Ars patefecimus; nunc non pigebit quadam ſubijcere in gratiam nouæ Artis reſolutricis; demonſtrabimus autem Analyſtam de hoc valde ſollicitum eſſe debere, quoniam Problema alioquin implicatum deductionis præſidio facilè reſoluet. Sit igitur. *Deductio quid, & eius vſus.*

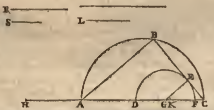
De Deductione, quam Græci Ἐπαγωγὴν appellant. Caput XI.

PROBLEMA.

Semicirculo poſitione dato A B C, & dato puncto D; deſcribere per D, ſemicirculum, qualis eſt D E F, ita vt ſi ducatur contingens B C, fiat A D, ipſi B E æqualis. *Problema ex Pappo libr. 7. Prop. 85.*

Proponit Pappus hoc Problema Prop. 85, lib. 7. quod vt ipſe ait deducitur ad determinatam ſectionem; Alijs autem modis; idem proponi poterit, vt inferiùs manifeſtum fiet. Interim, deducemus cum eodem Auctore Problema ipſum; & poſtea, ſectionem perficiemus beneficio Analyſeos. Ipſe autem, hunc ferè in modum ratiocinatur.

Reſolutio iuxta Veteres.



SIt iam factum. Quoniam A D, eſt æqualis B E; erit vt B E ad E C; ita A D, ad E C; ſed vt B E, ad E C, ita A G ad G C; ergo vt A G, ad G C, ita A D, ad E C.

Quare vt quadratum A G ad quadratum G C; ita quadratum A D, ad quadratum E C, ſeu ad quad. G C, minus quadrato G E, ſeu D G; facta ſit H A æqualis A D & D C, bifariam in K diuiſa. Vt igitur totum ad totum, ſic ablatum ad ablatum; hoc eſt totum quadratum A G, ad totum quadratum G C, ita ablatum quadratum A D, ad ablatum quadratum E C; erit reliquum rectangulum H G D ad reliquum quadratum D G, vt totum quadratum A G, ad totum quadratum G C; & ob id, vt ablatum quadratum A D, ad ablatum exceſſum E C, hoc eſt ad exceſſum quadrati G C, ſupra quadratum D G, ergo, vt H G, ad D G, ita quadratum A D, ad exceſſum prædictum. Loco autem quadrati A D, intelligatur duplum rectangulum D C, L; loco verò exceſſus, intelligatur rectangulum D C F; ſeu duplum rectangulum D C in G K, ergo vt H G ad D G, ita duplum rectangulum D C in L ad duplum rectangulum D C, in G K; atque adeò vt ſimplum, ad ſimplum; ob id vt baſis, ad baſim, cum ſint eiuſdem altitudinis D C; nempè vt L ad G K. Quare ſunt quatuor proportionales H G, D G, L, & G K.

Sunt.

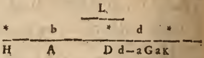
Suntque datæ tres lineæ H D, D K, L; ergo deductum eſt ad determinatam ſectionem; Reliquum igitur eſt; vt illud ſoluamus,

Problema deductum;

Datum latus H K, diuiſum quidem in D; Oportext iterum in G illud diuidere inter D, K; ea lege, vt rectangulum comprehenſum ſub H G; G K, aquale ſit rectangulo comprehenſo ſub intermedia ſectione D G, & quouis dato latere L.

RESOLVTIO,

PArs H D, dicatur b; at verò D K, dicatur d. Pars autem G K, eſto a; ergo D G, erit $d - a$. Quare rectangulum H G K; erit $ba + da - a^2$ rectangulum verò ſub D G & L, erit $ld - la$. Proinde erit æquatio $ld - la = ba + da - a^2$ & per antitheſin fiet $ba + la + da - a^2 = ld$ ſeu $\overline{b + l + d}\,a - a^2 = ld$. Claritatis gratia loco $b + l + d$ intelligatur K, & erit $Ka - a^2 = ld$. Huius autem æquationis radix eſt $\frac{1}{2}K - \text{R}(\frac{1}{4}K^2 - ld)$ Hinc.

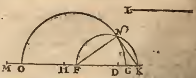


$b + d - a$
a
$ld - la = ba + da - a^2$

PORISMA.

Ab aggregatum ex H D, & L, audd utur DK, aggregati ſumatur dimidium, ex cuius quadrato auferatur rectangulum ſub D K, & L, reſidui ſumatur latus; hoc enim ſublatum ex dimidio iam dicto, relinquit partem G K.

COMPOSITIO.



DAtum ſit latus H K, diuiſum in D, oporteat iterum illud diuidere in G inter D, K; vt rectangulum H G K, æquale ſit rectangulo ſub L, & D G. Rectæ datæ H K, addatur MH; æqualis L; aggregatum verò M K, ex M H ſcilicet, & ex H K, bifariam quidem diuidatur in puncto F & ſuper dimidium F K, deſcribatur ſemicirculus in quo apretur NK, æqualis rectæ, quæ poſſit rectangulum ſub D K, & L, agatur F N, ad interuallum F N ex centro F, deſcribatur circulus, cuius diameter O G. Dico factum eſſe, quod Problema requirit adeo vt rectangulum H G K, æquale ſit rectangulo ſub D G & L.

Quandoquidem rectangulum O K G, æquale eſt quadrato N K, rectangulum autem O K G æquale eſt rectangulo M G K. Et rectangulum M G K, æquale eſt rectangulo M K G, minus quadrato G K. Proinde rectangulum M K G, minus quadrato G K, æquale erit quadrato N K. hoc eſt rectangulo ſub D K, & L. Et quoniam M K, æqualis eſt aggregato ex H D, & M H, plus D K; Proinde rectangulum ſub M H, ſeu L, & G K, plus rectangulo ſub H D, & G K, plus rectangulo ſub D K, & G K, minus quadrato G K, erit æquale rectangulo ſub L, & D K, & per antitheſin fiet rectangulum ſub L & D K, minus rectangulo ſub L, & G K, æquale rectangulo ſub H D, & G K, plus rectangulo ſub D K & G K, minus quadrato G K; Hoc eſt rectangulum ſub L, & D K, minus G K, hoc eſt ſub L & D G, æquale erit rectangulo ſub H D, & G K, plus rectangulo ſub D K, & G K, minus quadrato G K, hoc eſt rectangulo ſub H K, minus G K, & G K, hoc eſt rectangulo H G K, Quod oportebat &c.

Problematis propoſiti Demonſtratio.

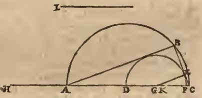
Quoniam igitur ſic eſt diuiſum propoſitum latus; vt rectanguli H G K, ad rectangulum ſub L, & D G, ratio, ſit æqualis, ad æquale; fiat quidem circa centrum G, ſemicirculus D E F; Dico ſemicirculum D E F, Problema efficere. Ducatur enim B C ſemicirculum contingens; erit A D, ipſi B E, æqualis. Fiat quod bis continetur ſub D C & quapiam recta L, æquale quadrato A D.

Nam cum rectangulum H G K, æquale ſit rectangulo ex L, & G D, vt H G ad G D, ita erit L, ad G K; Sed vt H G, ad G D, ita eſt rectangulum H G D, ad quadratum ex G D; Hoc eſt exceſſus quadratorum, ex G A, A D, ad quadratum G D, vt autem L ad G K, ita id quod bis continetur L & D C; ad contentum bis D C, G K, hoc eſt quadratum A D; factum eſt enim, quod bis continetur ſub L & D C, æquale quadrato A D, ad exceſſum quadratorum G D, G C; Vt igitur quadratorum G A, A D, exceſſus ad quadratum G D, ita eſt quadratum A D, ad exceſſum quadratorum G D, G C; ergo vt quadratum A G, ad quadratum G C, ita quadratum A D, ad exceſſum quadratorum ex D G, G C; cum enim ſit vt quadratum G A, minus quadrato A D, ad quadratum D G, ita quadratum A D ad quadratum G C minus quadrato G D; omnia ſimul antecedentia faciunt quad. G A, omnia ſimul conſequentia faciunt quad. G C, ergo per 12. quinti vt G A, quadratum, ad quadratum G C, ita A D quadratum ſcilicet vnum ex antecedentibus, ad quadratum G C, minus quadrato G D, vnum ex conſequentibus, hoc eſt ad exceſſum quadratorum ex C G, G E, hoc eſt ad quadratum ex E C; Vt igitur quadratum A G, ad quadratum G C, ita quadratum A D, ad quadratum E C, ſed vt quadratum A G, ad quadratum G C, ita eſt quadratum B E, ad quadratum E C; ergo vt quadratum B E, ad quadratum E C, ita quadratum A D, ad id, quod ex E C quadratum. Quadratum igitur ex A D æquale eſt quadrato ex B E, Ideoque recta linea A D; ipſi B C, eſt æqualis.

Idem autem abſoluere ſecundum rationem inæqualitatis.

Duobus modis intelligi poteſt ratio data inæqualitatis, vel enim eſt effabilis, vel non ſit primùm effabilis, dataque ſit dupla, quam habere debet A D, ad B E.

Reſolutio iuxta Veteres.



Sit iam factum, atque adeo A D, dupla ſit ipſius B E; factaque ſit H A æqualis A D.

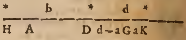
Quoniam igitur A D, dupla eſt ipſius B E. Proinde vt B E, ad E C; ita quidem dimidia A D, ad E C; ſed vt B E, ad E C, ita A G ad G C; Proinde vt A G ad G C, ita dimidia A D, ad E C; propterea, vt quadratum A G ad quadratum G C, ita quadratum dimidij A D, hoc eſt $\frac{1}{4}$ quadrati A D. ad quadratnm E C; ſed quadratum E C eſt exceſſus, quo quadratum G C, ſuperat quadratum G E, ſeu quadratum D G; ergo vt quadratum A G ad quadratum G C; ita $\frac{1}{4}$ quadrati A D, ad exceſſum quo quadratum G C, ſuperat quadratum G E; Vt autem totum ad totum, ſic ablatum ad ablatum, proinde, & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum ſe habebit; Si verò ex quadrato A G, auferatur quadratum dimidij A D ſeu quarta pars quadrati A D, remanent rectangulum H G D plus tribus quartis partibus quadrati A D. Si autem ex quadrato G C, auferatur exceſſus iam dictus cuiuſmodi eſt quadratum E C, remanebit quadratum G E ſeu D G, Proinde rectangulum H G D plus $\frac{3}{4}$ quadrati A D, ad quadratum D G, rationem habebit, vt quadratum A G ad quadratum G C, & vt quadratum dimidii A D, ſeu $\frac{1}{4}$ quadrati A D, ad prædictum exceſſum; loco autem $\frac{1}{4}$ quadrati A D, intelligatur rectangulum ſub L, & dupla D C, loco verò ipſius exceſſus intelligatur rectangulum D C F, ſeu quod idem eſt duplum rectangulum ſub D C & G K; (cum enim D C, ſit bifariam in K diuiſa, & D F, bifariam diuiſa in G, erit F C, dupla ipſius G K; quare rectangulum D C F erit æquale

æquale duplo rectangulo ſub D C & G K) ergo erit vt rectangulnm H G D plus $\frac{1}{4}$ quadrati A D ad quadrarum D G, ita rectangulum ſub dupla D C & L, ad rectangulum ſub dupla D C & G K; Quare etiam ita rectangulum ſub L, & ſimpla D C ad rectangulum ſub G K & ſimpla D C; ſed rectangulum L, D C, ad rectangulum G k, D C eſt vt L, ad GK; ergo erit vt rectangulum HGD plus $\frac{1}{4}$ quadrati AD, ad quadratum DG, ita L ad GK.

Deductum eſt igitur Problema ad determinatam ſectionem. Itaut ſuperſit ſoluendum illud..

Problema deductum.

Propoſitũ ſit latus H K; diuiſum in D, vtcunque & oporteat iterum ſecare in G, inter D, K, vt rectangulum H G D plus $\frac{1}{4}$ quadrati A D, ad quadratum D G habeat rationem, quam L ad G K.



Deducti Problematis.

RESOLVTIO.

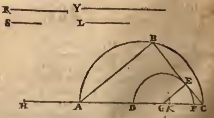
PArs H D ſit b, at D k, ſit d. Pars G K, eſto a, ergo reliqua D G erit d − a; at verò recta z poſſit $\frac{1}{4}$ quadrati A D, ſuppoſita ratione data, ſic procedendum erit, vt l, ad a, ita debet eſſe $bd + d^2 - ba - 2da + a^2 + z^2$ ad $d^2 - 2da + a^2$; vnde ratione ad æquationem reuocata fiet

$$bda + d^2a - ba^2 - 2da^2 + a^3 + z^2a = ld^2 - 2lda + la^2$$ & per antitheſin

$$\left.\begin{matrix} bda + d^2 \\ + 2ld^2 \\ + z^2 \end{matrix}\right\} a \quad \left.\begin{matrix} -b \\ -2d \\ -l \end{matrix}\right\} a^2 + a^3 = ld^2.$$

Quod ſi fuerit ineſabilis data ratio, adhuc Problema ſoluemus.
Data ſit igitur ratio vt R ad S, quam habere deber A D, ad B E.

Reſolutio iuxta Veteres.



SIt iam factum.

Quoniam igitur A D ad B E, debet eſſe vt R ad S, recta quidem, ad quam ipſa quidem A D, ſit vt R ad S rationem eandem habebit ad E C, quàm ad eandem E C habet B E erit illa æqualis B E ſit autem Y, ad quam A D, ſit vt R ad S. Proinde vt B E ad E C ita Y ad E C. Sed vt B E ad E C ita quidem A G ad G C: proinde vt A G ad G C ita Y ad E C, atque adeo vt quadratum A G ad quadratum G C, ita quadratum Y, ad quadratum E C, hoc eſt ad differentiam inter quadratum G C & G E ſeu D G. Vt autem totum ad totum, ſic ablatum ad ablatum; erit reliquum ad reliquum vt totum ad totum, & vt ablatum; ad ablatum. Quare ſi Y quadratum auferatur ex A G, quadrato, remaneat Z quadratum. Si ex G C, quadrato auferatur E C quadratum remanebit quadratum G E ſeu D G. Proinde, vt quadratum A G, ad quadratum G C ita quadratum Z ad quadratum D G, & ita Y quadratum ad quadratum E C. Loco autem quadrat Y, ſubſtituatur duplum rectangulum ſub D C, & L, & loco prædictl E C, quadrati ſubſtituatur duplum rectangulum ſub D C & Gk; ergo vt Z quadratum ad D G, quadratum, ita duplum rectangulum ſub D C & L, ad duplum rectangulum ſub D C, & G K; ergo ita ſimplum, ad ſimplum; atque adeò vt L ad G K vt igitur L ad G k, ita Z quadratum ad D G; quadratum.

Deductum eſt itaque Problema ad determinatam ſectionem. Supereſt igitur oſtendendum.

Pro-

Problema deductum.

Sit latus propoſitum A K, diuiſum in D, diuidere iterum in G inter D, K, vt quadratum illud, quod eſt differentia inter quadratum A D, & quadratum, ad quod quadratum A D eſt in ratione R ad S; quadratum, inquam, illud appellatum Z quadratum, ad quadratum D G, rationem habeat, vt L ad G K.

RESOLVTIO.

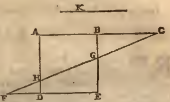
HÆc reſolutio, quemadmodum ei compoſitio reſpondens, antecedentium imitatione perfici poteſt.

PROBLEMA.

Dato quouis parallelogrammo A B E D, datoque puncto F in D E producta; ducere F H G C occurentem B A productæ in C, vt trapetium A H G B ad triangulum C B G ſit in data ratione A B, ad K.

Auctoris Methodo per implicitum datorum vſum Problema reſoluitur.

RESOLVTIO.



SIt iam factum. Quoniam trapetium AHGB ad triangulum CBG, eſt vt A B ad K; ergo componendo trapetium A H G B, plus triangulo C B G, hoc eſt triangulum C A H, ad triangulum C B G, erit vt A B plus K ad K; ſed vt triangulum C A H, ad triangulum C B G, ita quadratum A C ad quadratum B C; ergo vt A B, plus K, ad K, ita quadratum A C ad quadratum B C; ergo diuidendo vt A B ad K, ita quadratum A C, minus quadrato B C, ad quadratum B C. Quod fieri poteſt &c.

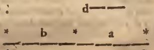
Huc igitur deducendum eſt, vt reſoluamus.

Problema deductum.

Protrahere A B in C, vt exceſſus quadrati A C ſupra quadratum B C, hoc eſt vt quadratum A B, plus duplo rectangulo ABC, ad quadratum B C, ſit in data ratione A B ad K.

Deducti Problematis

RESOLVTIO.



PRopoſitum latus A B, ſit b, & ratio data ſit vt b, ad d; pars B C eſto a; aggregati A C quadratum erit $b^2 + 2ba + a^2$, exceſſus huiuſmodi quadrati ſupra quadratum partis B C, quæ ſupponitur a, erit $b^2 + 2ba$; ergo vt b ad d, ita debet eſſe $b^2 + 2ba$ ad a^2; multiplicatis autem extremis & medijs $db^2 + 2dba$ æquâbitur ba^2; & per antitheſin $ba^2 - 2dba$ æquabitur db^2; omnibus ad b quidem applicatis $a^2 - 2da$ æquabitur b d; ergo ℞ $(d^2 + bd) + d$ æquabitur a. Hinc.

PORISMA.

Ad quadratum termini conſequentis addatur rectangulum ſub iiſdem terminis, aggregati verò lateri terminus idem conſequens addatur; huiuſmodi ſiquidem aggregatum radicem quaſitam exhibebit.

Potuiſſet etiam reuocari illa æquatio $a^2 - 2\,d\,a = b\,d$ ad proportionem vt $a - 2\,d$, ad b, ita d ad a, &aliud colligi Poriſma, ſed in idem redit.

Quamuis autem Poriſma optime dictet effectionem, reſolutio tamen vnde deductum eſt illud, non ſuppeditat veſtigia, quæ liceat in componendo repetere; propterea ad modum Theorematis debet Poriſma ipſum demonſtrandum aſſumi.

Effectio Geometrica.

Data ſit recta A B, quam oportet taliter producere in C, vt quadratum A B, plus duplo rectangulo A B C ſit ad quadratum B C, in ratione A B, ad B D; ſuper diametrum A D, deſcribatur ſemicirculus, & ex B excitetur perpendicularis B F, iuncta que D F, centro D, interuallo D F, deſcribatur ſemicirculus ſecans B E protractam in C; erit enim B C, latus adiungendum.

Vide in ſrabo-ſitum Schema.

PROPOSITIO.

Datis iis, quæ Poriſma dictat &c. veritatem inquirere.

RESOLVTIO.

REcta quæ poſſit rectangulum b d ſit z. Quoniam igitur eſt vt $a - 2\,d$ ad z, ita z, ad a; ergo $a^2 - 2\,d\,a$ æquabitur z^2; ſed z^2 æquatur b d ex conſtructione; ergo $a^2 - 2\,d\,a$ æquabitur b d; communi addito 2 d a, ergo a^2 æquabitur $b\,d + 2\,d\,a$; Sed quoniam eſt vt b ad d, ſumpta communi altitudine b, ita b^2 ad b d, & vt b, ad d, ſumpta communi altitudine a, ita b a, ad d a, vtque vnum ad vnum, hoc eſt vt ſimplum ad ſimplum ita duplum ad duplum; ergo vt b, ad d, ita 2 b a, ad 2 d a; erat autem vt b, ad d, ita b^2 ad b d; modo vero vt b ad d, ita 2 b a, ad 2 d a; ergo erit vt vnum antecedens, ad vnũ conſequens nempè vt b^2 ad b d, vel vt 2 b a ad 2 d a, ita ambo antecedentia ad ambo conſequentia, nimirum $b^2 + 2\,b\,a$ ad $b\,d + 2\,d\,a$. Sed vnum antecedens ad vnum conſequens erat vt b ad d; ergo vt b, ad d, ita $b^2 + 2\,b\,a$, ad $b\,d + 2\,d\,a$; erat autem a^2 æquale $b\,d + 2\,d\,a$; ergo vt b, ad d, ita $b^2 + 2\,b\,a$, ad a^2. Hinc.

THEOREMA.

Si ſit latus A B, & ei in directum adiuncta B D, & ſuper A D deſcripto ſemicirculo, ex B verò erecta perpendiculari B F, ductaque F D, centro D, interuallo D F, deſcripto ſemicirculo G F C ſecante A D protractam ad partes D in C. Dico eſſe vt A B ad B D, ita quadratum A B, plus duplo rectangulo A B C, ad quadratum B C.

COMPOSITIO.

DIco igitur rectam A B eſſe productam in C vt quadratum A B, vna cum duplo rectangulo A B C ſit ad quadratum B C, vt A B ad B D. Fiat B E dupla ipſius B D.



Quoniam enim rectangulum G B C æquale eſt quadrato B F, cui pariter æquale eſt rectangulum A B D, propterea rectangulum G B C æquabitur rectangulo A B D eſt autem rectangulum G B C æquale rectangulo B C E duabus

bus

bus G B, E C æqualibus exiſtentibus; ergo rectangulum A B D æquabitur rectangulo B C E; vtrinque addito communi rectangulo C B E; ergo rectangulum A B D, plus rectanlo C B E, æquabitur rectangulo B C E, vnà cum rectangulo C B E; hoc eſt quadrato B C. Vt autem eſt A B, ad B D, ſumpta communi altitudine A B, ita quadratum A B ad rectangulum A B D; præterea vt A B ad B D, ſumpta communi altitudine BC, ita eſt rectangulum A B C ad rectangulum C B D; vtque ſimplum ad ſimplum, ita duplum ad duplum; ergo vt A B ad B D, ita duplum rectangulum A B C, ad duplum rectangulum C B D; hoc eſt ad rectangulum C B E. Oſtenſum eſt autem vt A B ad B D, ita tàm quadratum A B ad rectangulum A B D, quàm duplum rectangulum A B C. ad rectangulum C B E; ergo vt A B ad B D, ita ambo antecedentia, ad ambo conſequentia; nimirùm quadratum A B, plus duplo rectangulo A B C, ad rectangulum A B D, vna cum rectangulo C B E. Demonſtratum eſt autem ſupra hæc æqualia eſſe quadrato B C; ergo vt A B ad BD, ita quadratum A B, plus duplo rectangulo A B C ad quadratum B C. Quod oportebat &c.

Problematis initio propoſiti Demonſtratio.

Quoniam igitur eſt vt A B ad K, ita exceſſus quadrati A C ſupra quad. B C ad quad. B C; ergo componendo vt AB, plus K ad K, ita quad. AC ad quad. B C; ſed vt quad. AC, ad quad. B C, ita triangulum AHC ad triangulum BGC; ergo vt A B, plus K ad K, ita triang. AHC, ad triang. BGC; ergo diuidendo, vt A B ad K, ita triang. A H C, minus triangulo B G C, ad triangulum B G C. Sed triangulum A H C, minus triangulo B G C, idem eſt quod trapetium A H G B; ergo vt A B ad K ita trapetium A H G B, ad triangulum B G C. Ex puncto igitur F duximus rectam F H G C, vt Problema requirit &c.

De Methodo depromendi Geometricas effectiones, ex Algebra veteri: ſiuè vſus veteris Algebræ, ad Geometricè Problemata reſoluenda. Caput XII.

HIc perſpicuum fiet, quantum perſpicere coiectura poſſum, quod ſuperius inſinuatum fuit; nempè parui faciendam non eſſe imitatione Ghetaldi veterem Logiſticen. Quandoquidem ad Problemata Geometricè enodanda apprimè conducit, & vtiliſſima quidem eſt, vt videbimus. Verum antequam Methodum aperiamus nobis incumbit onus explicandi quonam pacto operationes illas quatuor, quæ quidem in numeris exercentur quantitati etiam continuæ nos accommodare poſſimus. Primum ergo dicendum eſt de arte, qua videlicet quatuor operationes nimirùm Additionem, Subtractionem, Multiplicationem, atque diuiſionem Geometricè perficere valeamus.

Pulcra eſt Methodus illa, qua ex veteri logiſtica depromuntur Geometrica effectiones.

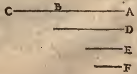
Additio quantitatum continuarum Operatio prima.

Cum opus eſt addere quantitatem continuam alteri quantitati continuæ aduertendum eſt, vt ſuperiùs monuimus additionem fieri non poſſe inter quantitates heterogeneas; hoc eſt quantitates diuerſæ naturæ; non enim longitudo puta linea poteſt addi plano, neque planum ſolido. Sed longitudo longitudini planum plano, ſolidum ſolido, addi debet.

Additio quantitatum arte inſtituatur inter quantitates continuas.

Inſtitui debent inter quantitates homogeneas &c.

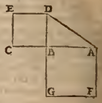
Si opus ſit longitudini latitudinem addere; vt lineæ A B, ſit addenda D protrahatur A B, vſque ad C, eà conditione, vt B C ſit æqualis D, & factum erit quod oportet.



At verò ſi plures eſſent lineæ addendæ quàm duæ, putà D, E, F, &c. eodem pacto procedendum eſt; nempè connectendo illas indirectum; hoc eſt facta additione vnius ad alteram; huic quoque aggregato addenda eſt altera ex reliquis modo eodem; & ita procedendum deinceps perpetuo, atque conſtanti ordine, quouſque ſupererint magnitudines addendæ; eadem ſemper eſt enim ratio, compoſitum verò ex illis omnibus lineis, eſt longitudo, ſiue linea conſurgens ex linearum propoſitarum additione. Ita Vieta in libello, cui titulum fecit; Effectionum Geometricarum canonica recenſio,

Quando plano opus eſt addere planum qua arte ſit inſtituenda additio, & primo quãdo plana ſunt quadrata.

Si verò ſit iniunctum plano addere planum; oportet planorum conditionem aduertere. Si namque omnia plana ſint quadrata; qua arte ſit inſtituenda additio oſtendit Euclides lib. 1. Prop. 47. Vt ſi ſint duo quadrata addenda inter ſe A B G F; & B C E D; conſtituantur ſic, vt latera ipſorum puta D B, B A efficiant angulum rectum D B A, ſiuè, C B, B A, rectam lineam conficiant, & agatur A D, huius enim quadratum erit aggregatum ex quadratis A B G F, & B C E D; & ita deinceps non diſſimili modo procedendum erit, ſi plura quidem extiterint quadrata, quàm duo.



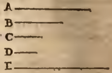
Hoc autem modo, nedum quadratum poſſumus addere quadrato, ſed etiam quamlibet recti lineam figuram, alteri addere poterimus, dummodo ſint ſimiles, ſimiliterque deſcriptæ, vt oſtendit Euclides lib. ſex. Prop. 31. Elementorum.

Quãdo plana non ſunt quadrata. Ars tranſmutandi figuras quaſcumque in quadrata alibi explicatur ab Auctore.

At verò ſi plana non fuerint quadrata, ſed rectangula, vel triangula non ſimilia, trapetia, &c. In huiuſmodi caſibus, reducendæ ſunt dictæ figuræ ad quadrata, & eodem modo procedendum, vt ſupra. Hanc autem tranſmutandi artem, præter quam quod docet eam Euclides Prop. 35. lib. 1. & 17. ſexti, nos explicuimus in Geometria Practica; Ita pariter, ſi quadrato foret circulus addendus; vel addere deberemus Ellipſim, aut Parabolam, reducendæ eſſent hæ figuræ in quadrata; qua de re loco citato.

Additio inter ſolida qua arte fiat, primo cum addendus eſt cubus, cubo.

Si verò ſit inſtituenda additio inter ſolida, hæc autem ſint cubi; hunc in modum operatio perficietur. Cubo ex C, addendus ſit cubus ex B; hinc inde reperiantur tertiæ proportionales A, D; ita vt ad C, B, tertia ſit A; & ad B, C, tertia ſit D, & A, D, addantur inter ſe; vt ſupra docuimus, & fiat aggregatum E; ſolidum factum ſub B, C, E, erit æquale cubis ex B, & C ſimul ſumptis. Demonſtratio ſic ſe habet. Quoniam ſolidum B C D, parallelepipedum rectangulum eſt



a 36. undec.

a æquale cubo ex C, & ſolidum C B A, æquale eſt cubo ex B, huiuſmodi autem ſolidis eadem eſt baſis ſub B, & C; ob id ſolida erunt vt altitudines. Quamobrem ex his aggregatum ſolidum B C E, quidem erit; atque adeò, ſolidum B C E, æquale erit aggregato cuborum ex B, & C.

Quando ſunt plures cubi quàm duo.

At ſi cubi addendi plures eſſent quàm duo, Non diſſimili modo foret procedendum; facta namque additione vnius ad alterum huiuſmodi aggregato addendus eſt tertius; quo facto oporteret huic aggregato addere quartum, & ita deinceps.

Quando, corpora non ſunt cubica quid agendum. Tranſmutatio corporum ab Auctore alibi declaratur.

At verò ſi corpora addenda cubo, non eſſent cubi; oporteret prius illa in cubos tranſmutare, mox procedendum foret, vt ſupra. Huiuſmodi verò tranſmutandi ratio in Geometria Practica explicatur.

Subtractio quantitatum continuarum.
Operatio ſecunda.

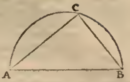
Quot modis accidere poſſit ſubtracti inter quantitates continuas. Subtractio inter lineas quomodo fiat.

QVot in Additione, tot in Subtractione caſus accidere poſſunt; aut enim ſubtractio fieri debet inter longitudines; ita vt longitudo longitudini ſit ſubducenda, vel inter plana, vel inter ſolida.

Planum, à plano quo pacto ſubtrahatur. Quãdo plana ſunt quadrata.

Si ſit à linea ſubducenda linea; fiat iuxta doctrinam Euclidis libr. 1. Propoſitione tertia; docet enim ibi, qua arte datis duabus lineis inæqualibus, poſſimus minorem à maiori ſubtrahere, quæ quidem doctrina applicari poteſt ſubtractioni, & ſi lineæ plures ſint, quàm duæ.

At



At verò ſi oporteat ſubtrahere planum à plano; aduertere opus eſt, planorum conditionem, atque naturam; ſi plana fuerint quadrata facilè abſoluetur ſubtractio; nimirum conſtituendo ſemicirculum ſupra latus maioris quadrati; & in ipſo ſemicirculo inſcribendo latus quadrati minoris; etenim ab interſecatione, cum peripheria ſi ad aliud extremum diametri ducatur linea, hæc erit latus quadrati, quo præſtat quadratum datum maius quadrato minori. Exempligratia ſit quadrato, cuius latus eſt A B, ſubtrahendum quadratum, cuius latus eſt B C, deſcibatur peripheria A B C, & latus B C, inſcribatur, vt vides, deinde ducta C A; Dico quadratum ex A C, eſſe illud per quod differt quadratum ex A B, à quadrato ex B C; quod facilè poteſt demonſtrari ex ijs, quæ docet Euclides loco citato; eodem pacto ſi fuerint aliæ figuræ ſimiles tamen, ſimiliterque deſcriptæ; Ita ſi fuerint circuli &c, & non diſſimili artificio agendum eſt in ſubtractione, cum fuerint plura quadrata, quàm duo.

Verum ſi plana non eſſent quadrata, ſed alterius ſpeciei, verbigratia, Rectangula, Rombi, Pentagona, Trapetia &c. Oportet plana hæc ad quadrata reuocare, & fiet ſubtractio, vt ſupra; hanc autem figurarum transformationem, vel permutationem docet Euclides; & ita ſi planorum aliqua fuerint rectilinea, aliqua curuilinea, ipſa reductione facta, nempè ad quadrata, abſoluetur ſubtractio.

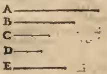
14 ſec.

Quādo plana non ſunt quadrata lib. 1. Prop. 35. & 42 & li. 6. Pr. 17.

Demum ſi imperetur ſubtractionem ſolidorum inſtituere, oportet eorum naturam conſiderare, namque ſi ſit ſubtrahendus cubus, à cubo tali modo inſtituetur ſubtractio. Sit cubus à C, ſubducendus à cubo ex B; hinc inde reperiantur tertiæ proportionales A, D, & ſubtracta D, ab A, remaneat E; Dico ſolidum B C E, fore differentiam cuborum.

Subtractio inter ſol. qua arte ſit inſtituenda & primo qua cubus, à cubo ſubtrahi debet

Etenim cubo ex C, æquale $^{\alpha}$ eſt ſolidum B C D, & cubo ex B, æquale eſt ſolidum A B C, ſed hæc ſolida habent eandem baſim ſub B, & C, ergo $^{\beta}$ erunt in ratione, vt altitudines; ob id ſolidum ſub differentia altitudinum A, & D, nimirum E, & plano ſub C, & B, erit differentia cuborum; Hinc patet, quid ſit agendum, cum plures fuerint cubi ſubtrahendi ab vno; Arte enim ſuperiùs explicata, in vnam ſummam colligendi ſunt cubi ſubtrahendi; mox inſtituenda eſt ſubtractio inter hoc aggregatum, & cubum, à quo ſubductio fieri debet.

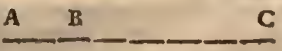


α 36 Vndec.
β 32 Vndec.
Quādo plures cubi ſubtrahendi ſunt ab vno quomodo ſiat. Si corpora propoſita non ſint cubi quid agēdum.

Si proponantur corpora alterius naturæ oportet ea in cubos transmutare, & mox procedendum, vt ſupra.

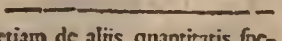
Multiplicatio quantitatum continuarum
Operatio Tertia.

HÆc multiplicatio dupliciter contingere poteſt; Aut enim continuam quantitatem ducere volumus in quantitatem continuam, vel in quantitatem diſcretam, nimirum numerum; Si hoc ſecundum proponatur agendum id expediemus additione; exempli gratia; Si linea quædam puta A B, deberet multiplicari per 6, protrahatur A B, vſque ad C, ſic vt A C, ſextupla ſit ipſius A B, & factum erit, quod oportet, & hæc de numero integro.



Multiplicatio dupliciter poteſt accidere, vel enim quātitas continua ducenda eſt in continuā, vel in diſcretam.

At ſi quantitas continua multiplicanda ſit per numerum fractum, nempè A B, duci debeat in $\frac{2}{3}$, ſumenda eſt A C, dupla ipſius A B, prout numerator 2, indicat, & mox ipſius A C, ſumere oportet trientem A D, prout indicatur à Denominatore 3, & factum erit quod oportet; & hæc intelligenda ſunt etiam de alijs quantitatis ſpeciebus.



Rurſus ſi indiſcretam, vel in numerū integrum, vel in fractum.

Si verò quantitatem continuam ducere debeamus in continuam, ſic multiplicatio inſtituetur, & primò ſi proponatur linea, in lineam ducenda, hoc fiet erigendo ad angulos rectos

Quando ducendo eſt quātitas continua in quantitatem continuā.

ctos vnam ex quantitatibus ſupra alteram, ita vt fiat quoddam parallelogrammum rectangulum; hoc enim eſt productum ex multiplicatione duarum linearum inter ſe.

Inuentio mediæ proportionalis ad hoc præcipuè conducit. Quo modo planum ducatur in planum.

Hoc verò nos aſſequemur elegantiùs inueniendo mediam proportionalem inter illas duas lineas, quæ inter ſe multiplicari debent; quadratum enim ipſius erit productum ex ductu illarum duarum linearum, vt patet ex Elementis, nempè 17. ſexti Elementorum Euclidis.

Vt verò planum ducamus in planum, diſponenda ſunt plana ipſa ad angulos rectos, ita vt vnum alteri perpendiculariter inſiſtat; nam ſolidum factum erit productum quæſitum, & hoc ſi conuertatur in cubum hìc etiam erit id, quod producitur. Cæterum ſi ſuperficies, quæ inter ſe multiplicari debent, non ſint rectangulæ; ad rectangula reduci poſſunt, & poſtea fieri debet, vt ſupra dictum eſt. Si detur ſuperficies per lineam multiplicanda; coniungatur linea ad rectos angulos, & fiat ſolidum, illud enim erit productum; præſtat tamen ſuperficiem ad quadratum prius reducere.

Applicatio, ſeu Diuiſio quantitatum continuarum Operatio quarta.

Diuiſio quantitatis continuæ dupliciter poteſt accidere.

Quantitatis continuæ diuiſio dupliciter accidere poteſt; vel enim diuidenda eſt quantitas continua per numerum, vel per quantitatem continuam.

Diuiſio quantitatis continuæ per numerum integrũ.

Diuiſio quantitatis continuæ per numerum, fit per ſubtractionem, ſi numerus fuerit integer; Vt ſi diuidenda ſit linea quædam per 4, ſumenda erit quarta pars ipſius lineæ, & factum erit quod oportet. At ſi numerus fractus extiterit, beneficio ſubtractionis, & additionis ſimul, totum id expediemus; Vt ſi diuidere deberemus lineam per $\frac{2}{3}$, primò ſumatur triplum ipſis lineæ, prout indicat numerus denominator; mox verò diuidatur in duas partes, prout indicatur à numeratore, & factum erit, quod oportebat.

Diuiſio quantitatis continuæ per numerum fractum.

Diuiſio quantitatis continuæ per quantitatem continuam.

Si verò quantitas continua diuidenda ſit per quantitatem continuam; aduertendum eſt, quod ſi ſuperficies applicetur lineæ, reſtituit lineam, & ſolidum applicatum ſuperficiei facit lineam, & applicam lineæ facit ſuperficiem.

Quadratum diuidens, per lineam.

Sic quadratum lateri applicatum reſtituit latus; Cubus verò applicatus lateri reſtituit latus, & applicatus lateri reſtituit quadratum eiuſdem lateris; ſed de his iam ſuperius loquuti ſumus.

a 11 ſexti Elementorum.

Quando ſit diuidendum rectangulum cuius latera ſunt inæqualia circa rectum, quid agendũ quando figura diuidendo fuerint Trapezia &c.

Si ſit iniunctum quadratum diuidere per lineam, fiat a prout linea data diuidens, ſeu partiens, nempè illa cui ſit applicatio, ad latus quadrati diuidendi, ita latus ad aliam lineam, & tertia linea inuenta erit Quotiens applicationis, ſeu diuiſionis. Cuius ratio eſt, quia per Quotientem nil aliud intelligimus, quàm illam quantitatem, quæ ducta in diuidentem facit quantitatem diuidendam, vt eſt in propoſito, nam rectangulum ſub diuidente, & inuenta, æquale eſt quadrato diuidendo.

Cæterum rectangulum, cuius latera ſunt inæqualia circa rectum dupliciter poſſumus per quamcunque lineam diuidere. Primò illud reducendo ad quadratum deinde procedendo, vt ſupra. Secundò ſine huiuſmodi reductione, faciendo; vt linea diuidens ad latus vnum rectanguli, ita latus aliud ad aliam lineam, & quarta proportionalis inuenta erit quotiens diuiſionis inſtituta; eſt a enim rectangulum ſub extremis, æquale rectangulo ſub medijs.

a 17. ſexti. Quãdo cubus diuidendum eſt per quadratum.

Quod ſi diuidere oporteret alias figuras nempè Triangulum, Quadratum, Rombum, Circulum &c. Prius eiuſmodi figuræ reducendæ ſunt ad quadrata, & poſtea procedendum, vt prius.

Si Cubus diuidendus eſt per quadratum, fiat, vt quadratum diuidens, ad quadratum, quod eſt baſis cubi; Ita latus cubi ad aliam lineam; nam hæc inuenta linea, erit quotiens diuiſionis; Ratio eſt, quia quadratum diuidens in lineam inuentam b facit ſolidum æquale cubo diuidendo.

b 34. vndec. Elementorum. Quando cubus diuidi debet per lineã.

Si verò Cubus diuidi debet per lineam, fiat, vt linea ad latus cubi; Ita quadratum, quod eſt baſis cubi ad aliud quadratum; Nam quadratum inuentum erit quotiens diuiſionis.

Si parallelepipedum diuidere libet per quadratum, vel quod libet aliud planum; fiat, vt quadratum, aut aliud planum diuidens ad baſim Parallelepipedi rectanguli; Ita eius alti-

altitudo ad aliam lineam; nam hæc erit quotiens.

Quod ſi parallelepipedum diuidi debeat per lineam, fiat, vt linea diuidens, ad altitudinem parallelepipedi; ita illius baſis ad aliud planum; nam planum inuentum erit quotiens diuiſionis. Sed de his hactenus, & ad propoſitum redeamus. *Quando parallele bipedum rectangulum diuidi debet per quadrata quid faciendum ſit.*

Proponuntur nonnulla Problemata, quibus Geometricè ſit ſatis Algebræ veteris præſidio.

Propoſitum ſit.

PROBLEMA.

Datam rectam lineam in duas partes ita diuidere, vt partium quadrata, dato quadrato differant; Oportet autem dati quadrati latus minus eſſe data ſecanda. Exemplum I. *Quid agendũ quum parallele bipedum diuidi debet per lineam.*

Proponatur linea ſecanda 18, in duas partes, vt maioris quadratum ſuperet quadratum minoris quadrato ex 6, nempe 36.

Differentia partium eſto 1 R, ergo 18 + 1 R erit dupla pars maior; Ideò ſimpla pars maior erit $9 + \frac{1}{2}$ R, & ſimpla pars minor erit $9 - \frac{1}{2}$ R; quadratum autem partis maioris eſt 81 + 9 R + $\frac{1}{4}$ Q, & quadratum partis minoris eſt 81 − 9 R + $\frac{1}{4}$ Q; horum autem differentia eſt 18 R, æquabitur 36, quadrato ex data differentia, nempè 6, Diuiſione inſtituta, fit 1 R, valor 2; Hinc deducitur.

$$9 + \tfrac{1}{2}R$$
$$9 + \tfrac{1}{2}R$$
$$4\tfrac{1}{2}R + \tfrac{1}{4}Q$$
$$81 + 4\tfrac{1}{2}R$$
$$81 + 9R + \tfrac{1}{4}Q$$

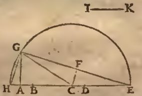
$$9 - \tfrac{1}{2}R$$
$$9 - \tfrac{1}{2}R$$
$$-4\tfrac{1}{2}R + \tfrac{1}{4}Q$$
$$81 - 4\tfrac{1}{2}R$$
$$81 - 9R + \tfrac{1}{4}Q$$

$$81 + 9R + \tfrac{1}{4}Q$$
$$81 - 9R + \tfrac{1}{4}Q$$

PORISMA.

Quadratum datum pro differẽtia applicetur ad lineam diuidendam, nam quotiens differentiam partium exhibebit. Data autem differentia partium, & aggregato earundem dantur partes.

Recta data ſit diuidenda A E, in duas partes, vt partium quadrata differant quadrato rectæ I K, erigatur perpendicularis A G, æqualis rectæ lineæ I K, & ducatur G E, quæ biſariam, ſecetur in F, ducatur ex puncto F, ad angulos rectos F C, ſuper G E, ſecans A E in C, neceſſario concurret, vt alibi diximus, agatur C G deinde interuallo C E, vel C G, deſcribatur peripheria H G E, mox verò ß ab A E, abſcindatur A B, ſegmentum æquale rectæ H A, deinde verò B E, ſecetur γ in D, biſariam, & factum eſt, quod Poriſma iubet; nempè inuenta eſt A H, tertia proportionalis, quæ eſt quotiens proueniens ex diuiſione quadrati rectæ A G, hoc eſt I K, per datam rectam diuidendam A E; & eſt differentia partium A D, D E; nam hæ differunt interuallo A B, quæ facta eſt æqualis ipſi A H; Dico quadrata partium A D, D E, differre per quadratum ex I K; Quoniam enim E A, A G, A H, ſunt proportionales; erit rectangulum H A E, æquale quadrato ex A G, ſed A B ex conſtructione æquatur ipſi A H, ergo rectangulum E A B, æquabitur quadrato ex A G; ſed inter quadrata partium A D, D E, differentia eſt rectangulum



α 10. primi.
ß 3. primi.
γ 10. primi.

ſub

Ex Analyſio huius Problematis. ſub E A tota, & A B, differentia ipſarum partium. Ergo & eorundem quadratorum differentia erit quadratum ex A G; At quadratum ex A G eſt æquale quadrato datæ rectæ I K ex conſtructione; ſunt enim æquales A G, I K; ergo quadrata partium A D, D E, differunt dato quadrato ex I K; Itaque ſecta eſt recta A E, vt Problema poſtulat &c.

SCHOLION.

Conſideratio circa veterem Logiſticem. *Vide igitur, quo pacto Diophantæa Logiſtice ad Problematum Geometricam ſolutionem conducat. Nemo enim credebat id eius præſidio fieri poſſe, cum numeros tractet mutationi quidem obnoxios; oppoſitam quiſque tamen experietur. Si verò huic per Analyſeos veſtigia in demonſtrando regredi liceret, nulla ratio ſuppeteret cur, ei recens præferatur. Sufficit nihilominus, vt nobis Geometricam dictet effectionem; deinde facile eſt ex Elementis eius demonſtrationem depromere.*

Cæterum hoc idem Problema poſſet ſic enunciari.

Data ſumma duorum laterum, dataque differentia quadratorum ex ipſis, diſtinguere latera.

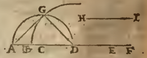
Propanatur rurſus.

Exemplum II. *Data ſumma duorum laterum, & rectangulo ſub ipſis, reperire latera.*

Duorum laterum ſumma data ſit 12, & rectangulum ſub ipſis comprehenſum ſit 20. Oporteat diſtinguere latera. Latus vnum eſto 1 R, aliud erit 12 — 1 R; rectangulum ſub his eſt 12 R — 1 Q, ergo neceſſario 12 R — 1 Q, æquabuntur 20. Extrahatur æquationis radix, quæ duplex eſt; quoniam æquatio eſt amphibola, & radices ipſæ erunt 2, & 10. Hinc deducitur.

PORISMA.

Sume dimidium aggregati laterum, & ab eius quadrato ſubtrahe rectangulum datum: reſidui enim latus ſi addideris dimidio aggregati laterum, habebis partem maiorem; ſi verò ſubtraxeris, habebis minorem.



Laterum aggregatum datum ſit A F; ſub his rectangulum ſit æquale quadrato rectæ H I; diuidatur A F, bifariam in D; & ſupra A D, deſcribatur ſemicirculus A G D, in quo accommodetur A G, æqualis H I; ducatur D G, & centro D; ac interuallo D G, deſcribatur peripheria G B, ſecans A D, in B; factumque erit, quod Poriſma iubet; Diuiſimus enim laterum aggregatum in duas partes æquales, & à quadrato dimidij, nempè A D, ſubtraximus quadratum ex A G, hoc eſt ex H I, & reſidui latus D G, addidimus ipſi D F, dimidio totius A F & facta eſt B F, & ab A D dimidio totius A F ſubtraximus idem reſidui latus, & facta eſt A B, Vel addidimus D G, ipſi A D; dimidio totius A F, & fecimus A E &c. Deo laterum aggregatum A F, ſectum eſſe in B, vt petitur; ita vt rectangulum A B F, æquale ſit quadrato ex H I.

Recta B D, duplicetur in E, erit E F, æqualis A B; Quoniam igitur recta A D, ſecta eſt vtcunque in B, erit quadratum a ex A D, æquale rectangulo bis A B D, vna cum quadratis partium A B, B D; ſed quadrato ex A D, æqualia ſunt quadrata ex A G, G D; ergo quadrata ex A G, G D, ſunt æqualia bis rectangulo A B D, vna cum quadratis ex A B, B D; ſed rectangulum bis A B D, æquatur rectangulo A B E; ergo quadrata rectarum A G, G D, æqualia ſunt rectangulo A B E, vna cum quadratis, ex A B, B D; atquoniam E F, æqualis eſt ipſi A B, quadratum ex E F, æquabitur quadrato ex A B; ergo quadrata ex A G, G D, æquabuntur quadrato ex B D, vna cum rectangulo A B E, plus quadrato ex E F; ſed rectangulo A B E, plus quadrato ex E F, eſt æquale rectangulum A B F; ergo quadrata ex A G, G D, æquabuntur quadrato ex B D, vna cum rectangulo A B F; vtrinque auferantur quadrata B D, D G; quadratum ex A G, æquabitur rectangulo A B F; ſed quadratum ex A G, ex conſtructione eſt æquale quadrato ex H I; atque adeò dato rectangulo; ergo rectangulum A B F, eſt æquale dato rectangulo; itaque diſtinximus latera A B, B F; quorum ſumma data eſt A F, & rectangulum ſub ipſis æquale eſt dato rectangulo. Quod facere oportebat.

a 4. ſecundi.

SCHOLION.

Hinc rurſus perſpicuum fit, qua arte Geometricas effectiones ex Algebra veteri deducere valeamus, & hinc etiam conſtat omnia Problemata, quæ beneficio veteris reſolutionis poſſunt enodari, poſſe hac methodo quoque Geometricè reſolui. Animaduerſio circa veterem Logiſticen.

Cæterum Problema etiam hoc modo poterat enunciari.

Datum latus in duas partes diuidere, ita vt rectangulum ſub partibus dato plano ſit æquale.

Proponatur rurſus.

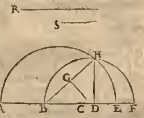
Dato lateri latus adiungere ea lege, vt datum cum adiuncto, ad adiunctum datam habeat rationem. Oportet autem rationem datam eſſe maioris ad minus. Exemplum III.

Latus, cui debet fieri additio ſit 12; proportio verò maioris ad minus, vt 5, ad 1.

Latus addendũ eſto 1 R, totum igitur aggregatum ex dato, & addendo erit 12 + 1 R, vt autem eſt 5 ad 1, ita debet eſſe 12 + 1 R, ad 1 R; qua propter reuocata proportione ad æqualitatem 12 + 1 R, æquabuntur 5 R, vtrinque auferatur 1 R, & remanebit æquatio huiuſmodi 4 R = 12. Diuiſione autem inſtituta fit vnius radicis valor 3, & latus addendum quæſitum. Hinc deducitur.

PORISMA.

Latus, cui fieri debet additio, ducatur in terminum minorem datæ rationis; & productum ad ipſam differentiam terminorum datæ rationis applicetur; nam quotiens erit latus addendum.



Latus, cui fieri debet additio, ſit A D; proportio verò ſit vt R ad S; latus A D protrahatur ad E, vt D E ſit æqualis minori termino datæ rationis, nimirùm S; & E B abſcindatur æqualis maiori termino R. Super A E deſcribatur ſemicirculus A H E, & à puncto D ipſi A E ducatur perpendicularis H D, quæ ſecet circumferentiam in H; ducatur deinde B H, quæ bifariam diuidatur in G; cui fiat G C perpendicularis; quæ, cum duo anguli C G B, C B G ſint minores duobus rectis, rectam A E quidem ſecabit. Sectio verò ſit punctum C, quo centro, & interuallo C B, deſcribatur ſemicirculus B H F, qui neceſſariò tranſibit α per H, cum ducta C H ſit æqualis C B, & ſecet B E, protractam in F; & factum erit quod Poriſma iubet. Quandoquidem rectangulum ſub A D, latere, cui fieri debet additio, & D E, termino minori datæ rationis, æquale eſt β quadrato ex D H; cumque ad B D, differentiam terminorum, & D H, ſit adinuenta D F, tertia proportionalis; applicuimus quadratum ex D H, hoc eſt rectangulum A D E, ad B D, terminorum differentiam; & inuenimus quotientem D F. Dico D F eſſe latus addendum, ita vt A F ſit ad D F, vt R ad S. Quoniam enim quadrato ex D H æquale eſt, γ tàm rectangulum A D E, quàm B D F rectangulum, erit δ A D, ad B D, vt eſt D F, ad D E; atque adeò erit ε A D, ad D F, vt B D, ad D E; ergo componendo erit, ζ vt A F, ad D F, ita B E, ad D E; ſed B E, ad D E eſt, vt R ad S, immò ſunt ipſamet R, & S; ergo erit, vt R ad S, ita A F, ad D F. Quod facere oportebat.

α 4. primi. β Corol. 8 ſex. & 17. eiuſdē. γ Corol. 8. ſex. & 17. eiuſdē. δ 16. ſex. ε 16. quinti. ζ 17. quinti.

Proponatur.

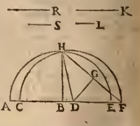
Datum latus ita diuidere, vt partium quadrata datam rationem habeant. Exemplum IV.

Datum ſit latus diuidendum 20, dataque ſit proportio, vt 9 ad 1, ſumatur quicunque numerus verbi gratia 16, & fiat vt 9, ad 1, ita 16 ad alium nempè $\frac{16}{9}$; ſumantur radices quadratæ, & erunt 4, & $\frac{4}{3}$; Modo ſit pars vna 1 R, altera erit 20 — 1 R, fiat vt 4 ad $\frac{4}{3}$, ita 1 R ad 20. — 1 R, & reuocata proportione ad æqualitatem $\frac{4}{3}$ R, æquabitur 80 — 4 R, & per Antitheſin $\frac{16}{3}$ R æquabitur 80. Diuiſis 80, per $\frac{16}{3}$ R, fiet quotiens 15, & 1 R pretium, & pars maior, alia erit 5. Hinc deducitur.

PORISMA.

Vt eſt terminus primus ad ſecundum, ſic fiat quadratum aliquod ad aliud, deinde latus diuidendum ducatur in latus maioris quadrati, & productum applicetur ad aggregatum laterum ipſorum quadratorum, & orietur pars maior; vnde minor non latebit. Eodem pacto potuiſſet procedi indagando prius partem minorem.

Ratio data ſit, vt R ad S, & vt R ad S, ita fiat quadratum, cuius latus eſt K, ad aliud, cuius latus eſt L; deinde recta diuidenda A B, protrahatur ad E, vt B E ſit æqualis ipſi K, & ſuper A E, deſcripto ſemicirculo A H E, erit recta B H, ex B, ducta perpendicularis ipſi A E, media inter A B, B E. Protrahatur etiam A E ad F, vt E F, ſit æqualis ipſi L, & erit B F æqualis ipſarum K, L, aggregato; Ducatur H F, quæ ſecetur bifariam in G, & ipſi H F, à puncto G, ducatur perpendicularis G D, quæ ſecabit A F, cum anguli D F G, D G F, ſint minores duobus rectis; ſitque ſectio in puncto D, quo centro, & interuallo D F, deſcribatur ſemicirculus C H F, qui neceſſariò tranſibit per H, cum ducta D H, ſit æqualis D F, & factum eſt quod Poriſma iubet; Siquidem, vt terminus primus R, ad terminum ſecundum S, fecimus quadratum ex K, ad quadratum ex L, & latus diuidendum, putà A B, duximus in B E, hoc eſt K, latus maioris quadrati, & productũ quad. BH, applicuimus ad BF, aggregatum ipſorum laterum K, & L; Dico A B, ſectam eſſe in C, ſic, vt quadratum ex C B, ad quadratum ex A C, ſit vt quadratum ex K, ad quadr. ex L, atq; adeò, vt R ad S; Quoniam enim B H, eſt media proportionalis inter A B, latus diuidendum, & B E, hoc eſt K, latus maioris quadrati; & inter CB, BF, erit tàm rectangulum A B E, quàm C B F, æquale quadrato ex B H, ergo rectangulum A B E, erit æquale rectangulo C B F; quare vt eſt A B, ad C B, ita erit B F, ad B E; ſeu vt C B, ad A B, ita B E, ad B F *; & diuidendo vt C B, ad A C, ita B E, ad E F; & vt E F, ad B E, ita erit A C, ad C B; ſed E F, eſt ad B E, vt L, ad K; ergo vt L, ad K, erit A C, ad C B; & vt quadratum ex L, ad quadratum ex K, ita quadratum ex A C, ad quadratum ex C B; at quadratum ex L, ad quadratum ex K eſt, vt S, ad R, ergo vt S ad R, ita quadratum A C, ad quadratum C B; ergo vt R ad S, ita quadratum ex C B, ad quadratum ex A C. Quod faciendum erat.



*Breuius & diuidendo, vt C B ad A C, ita BE ad EF; ergo vt quadratum B E ad quadratum E F, ſeu quadratum K, ad quadratum L, ita quadratum CB ad quadratum A C; ſed quadratum K, ad quadratum L, eſt vt R ad S; ergo vt R ad S, ita quadratum CB, ad quadratum A C.

Poſſet etiam alio modo huius Problematis reſolutio inſtitui.

Pars vna eſto 1 R, alia erit 20 -- 1 R, vt verò eſt 9 ad 1, ita debet eſſe 1 Q ad 400 -- 40 R ✠ 1 Q, reuocetur proportio ad æqualitatem, & 1 Q æquabitur 3600 -- 360 R ✠ 9 Q, factaque debita reductione 360 R -- 8 Q, æquabitur 3600, omnibus diuiſis per 8, fiet æquatio huiuſmodi 45 R -- 1 Q = 450; cuius ℞ eſt 15; & eſt vnius radicis valor, & pars maior, vnde minor non latebit. Hinc Poriſma deduci poteſt, vt cuicunque cognoſcere licet &c.

Exemplum V. *Datum latus in duas partes diuidere, vt rectangulum ſub ipſis æquale ſit dato plano.*

SCHOLION.

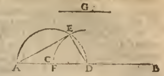
Hoc Problema non differt ab eo, quod ſuperius reſoluimus, nempè Data ſumma duorum laterum, & rectangulo ſub ipſis, reperire latera. Placet nihilominus hic rurſus idem reſoluere, vt diuerſam tamen demonſtrationem afferamus.

Datum ſit latus diuidendum 16, & planum 48. Pars vna eſto 1 R, alia erit 16 -- 1 R rectangulum ſub his eſt 16 R -- 1 Q, quod æquabitur 48, & explicata æquatione reperiemus partem vnam eſſe 4, nempè radicis valorem, & alteram eſſe 12, Hinc verò deducitur.

PORISMA.

A quadrato dimidij lateris diuidendendi ſubtrahatur datum planum, reſidui verò radix quadrata

quadrata ſi auferatur à prædicto dimidio remanet 1 R pretium & pars vna; Si verò addatur eidem dimidio fit pars altera.



Latus diuidendum ſit A B, linea verò potens planum ſit G ſumatur dimidium ipſius A B, ſitque A D, ſupra quod conſtituatur ſemicirculus A E D, ac in ipſo æqualis ipſi G, accommodetur recta A E, agatur D E, & centro D, ac interuallo D E, deſcribatur peripheria E C F, ſecans A D, in C, & factum eſt quod Poriſma iubet; etenim ex quadrato dimidij A B, nempè ipſius A D, ſubtractum fuit quadratum ex A E, atque adeò ex G, & reſidui latus quadratum, nempè D E, ablatum fuit ab ipſo dimidio A D, & remanſit A C. Dico A C, partem eſſe minorem; ita vt rectangulum A C B, ſit æquale quadrato ex G; Quoniam A B ſecta eſt per æqualia in D, & per inæqualia in C, erit rectangulum A C B, vna cum quadrato ex C D, æquale quadrato ex A D, ſed quadrato ex A D, æqualia ſunt quadrata ſimul ex A E, E D, ergo rectangulum A C B, vna cum quadrato ex C D, æquale erit quadratis ex A E, E D, quare demptis æqualibus quadratis ex E D, C D, remanebit rectangulum A C B, æquale quadrato ex A E, hoc eſt G, cui recta A E, eſt æqualis; ergo A B, ſecta eſt in C, vt Problema iubet &c.

Datum latus in duas partes diuidere, vt differentia quadratorum partium, datam habeat rationem ad rectangulum ſub partibus. Exemplum VI.

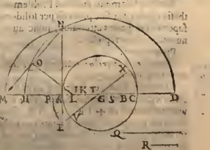
Datum ſit latus diuidendum 12; & proportio, quam debet habere differentia quadratorum partium ad rectangulum ſub ipſis partibus, ſit, vt 3, ad 2; Pars vna nempè maior eſto 1 R, alia erit 12 — 1 R; Quadrata partium ſunt 1 Q, & 144 — 24 R ✱ 1 Q, quorum differentia eſt 24 R — 144; vt verò eſt 3 ad 2, ſic debet eſſe 24 R — 144, ad 12 R — 1 Q rectangulum ſub partibus; Reuocetur proportio ad æqualitatem, 36 R — 3 Q, æquabuntur 48 R — 288, & poſt debitam reductionem 3 Q ✱ 12 R, æquabuntur 288. Inſtituatur Paraboliſmus; & 1 Q ✱ 4 R, æquabitur 96, explicetur æquatio, & reperietur 1 R, valere 8. Hinc Poriſma &c.

Quoniam autem ex hac Analyſi deducitur prolixa effectio Geometrica, placet alio modo idem Problema reſoluere.

Pars vna eſto 6 ✱ 2 R, alia erit 6 — 1 R quadrata partium differunt per 24 R, & rectangulum ſub partibus eſt 36 — 1 Q, vt verò eſt 3 ad 2, ita debent eſſe 24 R ad 36 — 1 Q. Proindè 48 R, æquabuntur 108 — 3 Q; vtrinque addatur 3 Q, & erit æquatio 3 Q ✱ 48 R = 108; Inſtituatur Paraboliſmus; & 1 Q ✱ 16 R, æquabitur 36; explicetur æquatio, & reperietur 1 R, valere 2, & eſt dimidia differentia partium; itaque tota differentia eſt 4. Hinc,

PORISMA.

Duplum lateris diuidendi ducatur in terminum ſecundum datæ rationis, productum verò applicetur, ad terminum primum. Quotiens autem ſeruetur; mox quadratum dimidij lateris diuidendi addatur quadrato ex dimidio quotientis iam ſuperius ſeruati; & ab aggregati latere hoc idem dimidium ſubtrahatur, nam reſiduum duplum erit differentia partium: vnde partes non latebunt.



Latus ſit latum diuidendum A B, in inæquales partes, vt Problema poſtulat. Proportio data ſit, vt Q, ad R, producatur B A, ad M, ita vt A M, ſit æqualis ipſi Q, ſumaturque A H, æqualis ipſi R; ad partes B, producatur A B, ad D; vt B D, ſit æqualis ipſi A B, & B D, deſcribatur peripheria H N D, agaturque perpendicularis A N, & à puncto N, ducatur N M, quæ bifariam ſecetur in O, & ad angulos rectos ducatur O I, & centro I, ac interuallo I M, deſcribatur peripheria M N C,

quæ neceſſario tranſibit per N, mox verò diuidatur A C, in G, biſariam, & producatur N A, ad E, vt A E; ſit æqualis ipſi A T, nempè dimidio lateris diuidendi, agaturq; E G, & centro G, interuallo G E, deſcribatur peripheria E P, & eodem centro fiat circulus A X C, ſumaturq; A L æqualis ipſi P A cuius dupla ſit A k, & reliqua k B, ſecetur biſar. in S, & factũ eſt, quod Poriſma iubet; latus enim A D, duplum lateris diuidendi A B, duximus in terminum ſecundum R, nempè H A, & productum quad. ex A N, applicauimus ad M A, atq; adeò ad terminum primum Q. Quotiens autem emergens A L, diuiſus eſt biſariam in G, & ad eius quad. additum eſt quadratum ex A E, ſeu ex A T, dimidio lateris diuidendi, & ab aggregati latere E G, nempè P G, ſubtractum eſt dimidium illud A G, & reſidui dupla facta eſt A K, reliqua magnitudo k B, ſecta eſt biſariam in S; itaque partium A S, S B, erit differentia A K; Dico latus A B, ſectum eſſe in S, vt Problema poſtulat; ita vt differentia quadratorum partium A S, S B, ſit ad rectangulum ſub eiſdem partibus, vt Q ad R, ſeu, vt M A, ad H A; Quoniam G P, G E, ſunt æquales, vt etiam G A, G V, erunt P A, E V, æquales; at verò A C eſt æqualis ipſi V X; erit proindè C A P, rectangulum, æquale rectangulo X V E, & inſuper C P A, æquale erit ipſi X E V; ſed rectangulum X E V, eſt æquale quadrato ex A E, erit itaque huic æquale rectangulum C P A; cum ergo rectangulum C P A, ſeu quod idem eſt, quadratum ex A L, plus rectangnlo C A L, ſit æquale quadrato ex A E; proinde ſolidum factum ſub M A, & quadrato ex A L, vna cum ſolido comprehenſo ſub M A, & rectangulo P A C, ſeu C A L, æquale erit ſolido facto ſub M A, & quadrato ex A E; ſeu A T, atque adeò ſolidum factum ſub C A L, & M A, erit æquale ſolido facto ſub M A, & quadrato ex A T; minus ſolido comprehenſo ſub M A, & quadrato ex A L; ſed eidem ſolido ſub C A L, & M A, æquale eſt ſolidum comprehenſum, ſub D A L, & H A, ergo ſolidum comprehenſum, ſub M A, & quadrato ex A T, minus

apud Auctor. Li. de analyſi problematum.

ſolido ſub quadrato ex A L, & eadem M A, erit æquale ſolido contento ſub D A L, & H A; Quamobrem, vt eſt M A, ad H A, ita erit D A L, ſeu quod idem eſt B A K, ad quadratum ex A T; minus quadrato ex A L; at verò rectangulum B A K, eſt æquale differentiæ quadratorum partium A S, S B, & quadrarum ex A T, minus quadrato ex A L, æquale eſt rectangulo A S B; ſub ipſis partibus; ergo, vt M A, ad H A, ita eſt differentia quadratorum ex partibus A S, S B, ad rectangulum ſub eiſdem partibus; Sectum eſt ergo latus A B in S, vt Problemata iubet. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

Animaduerſio circa ſuperiorem reſolutionum.

Non me latet fore, vt aliquis hanc reſpuat demonſtrationem, quod nimirùm per ſolidorum comparationem procedat, vt inueſtiget, oſtendatque proportionem in quatuor illis terminis; Verum hic Ariſtarchus aduertas in demonſtratione ſolùm attendendam eſſe veritatem; licet enim in demonſtrationibus claritas in minimis haberi non debeat; nihilominus ſuboſcura, veriſſimæ tamen, parui facienda non ſunt, quales profectò ſunt iſta, quæ comparationem ſolidorum inuoluunt; ſunt enim in Geometria minus vſitatæ quidem, cum hæc ſcientia in planorum contemplatione ſit occupata, Stereometriæ ſolidorum conſiderationem relinquens; non ob id ergo, quod hæ ſint ſubobſcuræ, de medio tollendæ ſunt; ſed potiùs cum per rationem procedant, quod caput eſt, non mediocriter ipſas debemos commendare &c.

Poteſt nihilominus eiuſdem Problematis Analyſis inſtitui, cuius veſtigijs repetitis Syntheſis conficiatur ſine proceſſu per ſolidorum æqualitatem. Analyſis autem ea eſt, quam ſuperiùs perſpecies attulimus; nunc autem altera illi conſimilis, ſiue potius eadem numeris exhiberi poſſet.

Proponatur.

Exemplum VII.

Dato vno ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus, datoque alterno baſeos ſegmento, reperire triangulum.

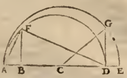
Datum ſit vnum ex lateribus circa rectum 15, alterum verò baſeos ſegmentum ſit 16. Dico ſegmentum alterum baſeos eſſe 1 R; tota itaque baſis erit 16 ✠ 1 R; erunt autem proportionales 16 ✠ 1 R. 15. 1 R, atque adeò 16 R ✠ 1 Q æquabuntur 225; Quamobrem extrahatur huius æquationis radix, quæ reperietur 9; erit igitur ſegmentum alterum 9; propterea quod numerus radicum eſt 8, cuius quadratum 64, additum 225 numero abſoluto facit 289; cuius radix quadrata eſt 17, à qua, ſi dematur 8 dimidium numeri radicum, remanet 9. Hinc.

P o-

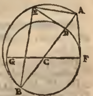
PORISMA.

Quadratum ex dimidio alterni baſeos ſegmenti dati, addatur quadrato ex latere dato circa rectum; aggregati enim latus multatum dimidio ipſius ſegmenti dati, exhibebit ſegmentum alterum.

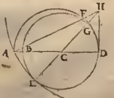
Datum ſit D G, vnum ex lateribus, circa rectum; ſitque B D, alternum baſeos ſegmentum; oporteat reperire triangulum; Super B D, excitetur D G, ad rectos angulos; diuidaturque B D, biſariam in C, centro C, interuallo C G, ducta nimirum à C, ad G, deſcribatur ſemicirculus A G E, ſecans B D, vtrinque productam in A, & E; Deinde ſuper A D ſemicirculus deſcribatur, excitetur B F, perpendicularis, & agatur A F, & ducatur F D; & factum erit quod Poriſma iubet, Dico triangulum A F D, eſſe quod quæritur; eſt enim triangulum A F D, rectangulum, cum habeat angulum A F D, in ſemicirculo; & quia F B, perpendicularis eſt ad A D, erit B D, alternum ſegmentum ad latus A F, eſt autem B D, id quod datur ſegmentum alternum, aliud ſegmentum verò eſt A B; ſupereſt oſtendendum latus A F, eſſe æquale dato lateri D G; Quoniam enim rectangulum A D E, æquale eſt quadrato D G; erunt proportionales A D, D G, D E, ita vt D G, ſit media inter A D, D E; at verò rectangulum A D E, eſt æquale rectangulo D A B; ſiquidem A B, D E, ſunt æquales; nam C A, C E, ſunt æquales; Itemque C B, C D, ergo A B, D E, erunt æquales; eadem eſt autem A D, ac B E; ſed rectangulum A D E, eſt æquale quadrato ex D G; vt & rectangulum D A B, æquale eſt quadrato A F, ergo quadratum ex A F, æquale erit quadrato ex D G, ergo rectæ A F, D G, erunt æquales; igitur conſtructum eſt triangulum rectangulum, in quo latus vnum circa rectum eſt datum D G; & datum alternum baſeos ſegmentum B D; Quod facere oportebat.



Poſſet etiam inſtitui conſtructio hunc in modum. Datum ſit alternum ſegmentum G F, ſitque datum vnum ex lateribus circa rectum F A; conſtituatur F A ſuper G F, ad rectos angulos in puncto F; ſeceturque G F, biſariam in C, ducatur autem A C; & centro quidem C, interuallo C G, vel C F, deſcribatur circulus, ſecans C A, in D, & productam ſecet in B; factum erit autem quod Poriſma iubet. Super A B, deſcribatur ſemicirculus B E A, & agatur D E, perpendicularis, iunganturque B E, E A, & factum erit triangulum quod quæritur, nimirum B E A. Nam angulus B E A, eſt rectus, quod in ſemicirculo ſit; & quia E D, eſt perpendicularis, erit B D, ſegmentum vnum, nempè datum, aliud verò D A. Supereſt, vt oſtendamus A E, æqualem eſſe rectæ F A. Quoniam enim F A, tangit circulum in F, rectangulum B A D, æquale eſt quadrato F A; erit F A, media inter B A, & D A, media quoque eſt E A; ergo F A, eſt æqualis E A.



Aliter etiam inſtitui poteſt conſtructio, ſcilicet hunc in modum. Datum ſit alternum ſegmentum baſeos B D, ſitque D H, latus vnum circa rectum; inclinetur autem D H, ſuper B D, ad rectos angulos, ad punctum nimirum D: Diuidatur verò B D, biſariam in C, & centro C deſcribatur circulus B G D E; agatur H E tranſiens per punctum C; fiat centro H, interuallo H E, arcus ſecans D B, protractam in A, agatur A H, & ſuper A D, deſcribatur ſemicirculus A F D, ſecans A H, in F. Dico triangulum A D H, eſſe quæſitum; angulus enim A D H, eſt rectus; eſtque D H, latus circa rectum datum: eſt etiam A F, ſegmentum alternum, cum D F, ſit perpendicularis ad A H; reliquum eſt, vt oſtendamus A F, æqualem eſſe ipſi B D. Quoniam E H G, eſt rectangulum æquale quadrato ex D H; ergo media erit D H, inter E H, H G; ſed eadem



In ſchemate intelligatur ducta F D.

[it]em media eſt inter A H, & H F, & A H, æqualis eſt ex conſtructione ipſi H E, ergo F H, æquabitur H G, ergo A F, E G, hoc eſt A F, B D, æquales erunt, repertum eſt igitur triangulum &c. Quod facere oportebat.

Proponatur,

Exemplum VIII. *Propoſitum latus bis diuidere in duas partes ea lege, vt maior pars à prima diuiſione, ſit ad minorem è ſecunda in ratione data: at vero maior è ſecunda diuiſione ad minorem è prima ſit in ratione pariter data.*

Hoc ſupra ſolutum eſt pag. 464. Datus ſit numerus 130 diuidendus &c. ſit autem maior è prima diuiſione, ad minorem è ſecunda in ratione tripla: ſed maior, è ſecunda, ad minorem è prima in ratione quadrupla,

Minor è ſecunda diuiſione ſit 1 R, ergo maior è prima erit 3 R; ob id minor è prima habebitur ſubtrahendo hanc partem à 130; & erit 130 — 3 R; ad hanc autem cum maior è ſecunda; debeat eſſe quadrupla, ob id erit 520 — 12 R maior, è ſecunda; oportet autem ambas partes, è ſecunda diuiſione conficere 130 numerum datum diuidendum; ſed efficiunt 520 — 11 R, ergo 520 — 11 R, æquabuntur 130. vtrinque addatur defectus, & fiet æquatio 520 = 130 + 11 R, vtrinque auferantur 130, && remanebit æquatio 11 R = 390; diuiſione inſtituta fiet 1 R, pretium $35\frac{5}{11}$.

Pars poſita 1 R, erit $35\frac{5}{11}$; quæ poſita eſt 3 R, erit $106\frac{4}{11}$. at quæ ponebatur 520 — 12 R, erit $94\frac{6}{11}$; & ſatisfaciunt Problemati,

Nam $106\frac{4}{11}$ maior pars è prima diuiſione ad $35\frac{5}{11}$ minorem partem è ſecunda eſt in ratione tripla, At verò $94\frac{6}{11}$ maior è ſecunda, ad $23\frac{7}{11}$ minorem è prima eſt in ratione quadrupla.

Hinc,

PORISMA.

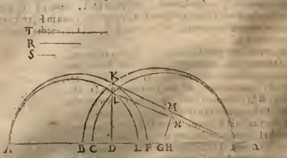
Denominator vtriuſque rationis, vnitate multatus, ducatur ſigillatim in datum numerum, & producti numeri diuidantur ſeorſim per numerum, qui fit ex mutua multiplicatione denominatorum vnitate multatum, & orientur partes minores vtriuſque diuiſionis.

Lemma.

Si ſint quatuor termini proportionales; vt eſt primus ad ſecundum, ita differentia primi, & tertij, ad differentiam extremorum, minus differentia inter primum, & ſecundum &c.

Hoc ſupra demonſtratum eſt. Secunda enim pars inſeruit, conuertendo, &c. vt ibi &c.

Latus diuidendum ſit A D; proportiones autem, vt R ad S, & vt T ad S; protrahatur A D, ad E, ita vt D E, ſit æqualis differentiæ duorum terminorum S, & R; & inter A D, D E, media reperiatur D L; deinde protracta A D, ad F, vt D F, ſit æqualis differentiæ duorum terminorum S & T; at verò inter A D, & D F, reperiatur media D K mox, vt



S, ad T, ita fiat R ad aliam D O à qua abſcindatur I O, æqualis minori termino S; & ad reſiduum D I applicetur quadratum ex D L, & etiam ex D K; nempe ducatur L I, quæ biſariam

biſariam ſecetur in N, & hinc ad rectos angulos ducatur N H; item ducatur K I, quæ biſariam ſecetur in M, & hinc ad angulos rectos ducatur M G &c. & centris H, G, interuallis autem H I, G I, deſcribantur ſemicirculi I L C, & I K B; qui neceſſario tranſibunt per puncta L, K; vt ſæpè dictum eſt; & factum erit quod Poriſma iubet. Dico latus A D, ſectum eſſe in duobus punctis B, C, quemadmodum Problema requirit. Adeò vt A C, ſit ad B D, vt R ad S, & A B, ad C D, vt T ad S; Quoniam enim C D I, rectangulum eſt æquale quadrato ex D L; & eidem æquale eſt rectangulum A D E, ergo rectangulum C D I æquabitur rectangulo A D E; ergo vt D I, ad A D, ita D E, ad C D, & permutando, vt D I, ad D E, ita A D, ad C D, & diuidendo, vt I E, ad E D, ita A C, ad C D, atque adeò a vt I E, ad D F, ita A C, ad B D, ſed I E, ad D F, eſt vt R ad S; ergo vt R, ad S, ita erit A C, ad B D, Non aliter oſtendemus eſſe A B, ad C D, vt eſt T, ad S. a Ex Elemen- m.

Quod autem I E, ſit ad D F, vt R ad S, oſtenditur ex eo quia, vt eſt S, ad T, ita facta fuit R, ad D O; At verò differentia inter S, & D O, facta eſt D I, à qua ſubtracta eſt D E, differentia inter R, & S, & relinquitur E I, vt ſit ad D F differentiam duorum terminorum S, & T, vt R ad S; Quod docuit præmiſſum Lemma; ex quo liquet etiam I F, eſſe ad DE, atque adeò A B, ad C D, vt T, ad S.

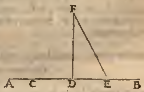
Datum latus in duas partes diuidere; vt ſi rectangulo ſub partibus addatur planum datum aggregatum ipſum æquale ſit quadrato partis maioris. Oportet autem datum planum minus eſſe quadrato lateris diuidendi. Exemplum IX.

Datum ſit latus diuidendum 12; ea lege, vt ſi producto ſub partibus addatur 80, fiat quadratum partis maioris.

Pars vna eſto 1 R, nempè maior; minor autem erit $12 - 1\,R$; Si ducatur $12 - 1\,R$, in $1\,R$, fit $12\,R - 1\,Q$, huic autem producto ſi addatur 80, fit $12\,R - 1\,Q + 80$, & hoc æquale debet eſſe quadrato partis maioris, & ordinata æquatione fiet $1\,Q - 6\,R = 40$. Dimidium numeri radicum eſt 3, cuius quadratum ſi addatur 40, fit 49 cuius radix quadrata eſt 7, cui ſi addatur 3, dimidium numeri radicum fit 10; Hinc,

PORISMA.

Sumatur dimidium dati plani; & ei addatur quadratum quartæ partis lateris diuidendi, mox autem, ſi huius aggregati lateri addatur dimidium numeri radicum, ſeu quod idem eſt, quarta pars lateris diuidendi habebitur pars maior; vnde minor non latebit.



Datum ſit latus A B diuidendum, & recta D F, poſſit dimidium dati plani &c. Diuidatur D B, biſariam in E, hoc modo E B, erit quarta pars totius A B; ad punctum D, ſit excitata perpendicularis F D; agatur E F, & centro E, interuallo E F, deſcribatur circulus ſecans A B, in C; Et factum erit quod Poriſma iubet. Dico A B ſectam eſſe in C, prout Problema requirit nempè, vt rectangulum A C B, plus duplo quadrato ex D F, atque adeò plus dato plano, æquale ſit quadrato maioris ſegmenti C B; Quoniam enim D B, ſecta eſt biſariam in E, & ei addita eſt C D, erit rectangulum B C D, vna cum quadrato ex D E, æquale quadrato ex C E, hoc eſt ex F E, hoc eſt quadratis ex D F, D E; ablato communi quadrato ex D E remanebit rectangulum B C D, æquale quadrato ex D F, atque adeò quadratum ex C B, minus rectangulo C B D, æquale erit quadrato ex D F, ergo duplum quadratum ex C B, minus duplo rectangulo C B D, æquabitur duplo quadrato ex D F; ac proinde dato plano, cuius dimidium poteſt recta D F; quamobrem duplum quadrati ex C B, æquabitur duplo rectangulo C B D; hoc eſt rectangulo A B C, plus duplo quadrato ex D F; ergo quadratum ex C B, æquabitur rectangulo A B C, plus duplo quadrato ex D F, minus quadrato ex C B; eſt autem rectangulum A B C, minus quadrato ex C B, idem quod rectangulum A C B; ergo quadratum ex C B æquatur rectangulo A C B, plus duplo quadrato ex DF, ſeu plus dato plano. Sectum eſt ergo latus A B, quemadmodum imperatur.

Datum latus in duas partes diuidere ea lege, vt quadratum vnius partis æquale ſit quadrato alterius, plus dato plano. Exemplum X.

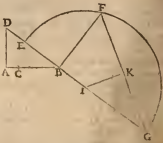
Datum

Datum ſit latus diuidendum 12; ita vt quadratum partis maioris, æquale ſit quadrato minoris partis, plus 96.

Pars vna eſto 1 R, alia erit 12 − 1 R; quadratum illius eſt 1 Q; at verò quadratum alterius partis; nempè minoris 12 − 1 R, eſt 144 − 24 R + 1 Q, cui ſi addatur 96, fit 240 − 24 R + 1 Q, huic autem eſt æquale 1 Q, nempè quadratum partis maioris, & ordinata æquatione fiet æquatio 24 R = 240; diuiſione inſtituta fit 1 R, pretium 10; Itaque pars vna erit 10, alia ex neceſſitate erit 2. Hinc.

PORISMA.

Quadrato ex latere diuidendo, addatur planum datum, & aggregatum applicetur ad duplum ipſius lateris diuidendi; ſic enim orietur pars maior.



Datum ſit latus diuidendum A B; ſitque A D, quæ poſſit planum datum; Hæc porrò conſtituatur ad punctum A, faciens angulum rectum D A B, agaturque B D, cui quidem fiat æqualis B F, excitata ad rectos angulos in puncto B, mox autem protrahatur D B, vſque ad G; adeò vt B G ſit dupla dati lateris diuidendi A B; ducatur F G, quæ biſariam ſecetur in K, & agatur K I, ad rectos angulos inſiſtens ipſi F G; modo centro I, interuallo autem I G deſcribatur circulus, qui neceſſariò tranſibit per F, & ſecabit B D, in E; ipſi autem B E, fiat æqualis B C. Dico A B, ſectam eſſe in C, quemadmodum Problema requirit. Quoniam enim rectangulum G B E, æquale eſt quadrato ex B F, ſeu ex B D, hoc eſt quadratis ex A B, A D; vtrinque addito quadrato ex E B, ſeu ex C B; erit quadratum ex E B, ſeu ex C B, vna cum rectangulo E B G, æquale quadratis ex D A, A B, vna cum quadrato ex E B, vel C B; ſi verò vtrinque auferatur rectangulum E B G, erit quadratum ex C B (non eſt cur amplius fiat mentio de quadrato ex E B) æquale quadrato ex A D, plus quadratis ex A B, C B, minus rectangulo E B G; ſed quadratum ex A B, plus quadrato ex C B, minus duplo rectangulo A B C, quod eſt æquale ſimplo E B G, cum B G, dupla ſit ipſius A B, æquale eſt quadrato ex A C; ergo quadratum ex A C; plus quadrato ex A D, æquale eſt quadrato ex C B. Sectum eſt ergo latus datum A B in puncto, quemadmodum Problema requirit.

Secabit autem, vt facile oſtendi poteſt.

Auctor oſtendit haud bene pleroſque Analyſtas exiſtimaſſe Problemata nonnulla ſub Algebram non cadere. Caput XII.

Immeritò putarunt aliqui nonnulla Problemata ſub Algebram non cadere.

Problemata, quæ per angulorum comparationem demonſtrantur, poſſunt ad genus Problematum reuocari huiuſmodi, vt ſub Algebram cadant.

Angulus eſt heterogeneus lineis, &c.

Hæc de re tractandum vt ſus erit exquiſitius in Problematum Analyſi.

NOnnulli Analyſtæ credidere quædam Problemata ſub Algebram non cadere, qualia ſunt illa, quæ per angulorum comparationem demonſtrantur; adeò vt huius artis præſidio problemata ſupradicta reſoluere nequeamus. Decipiuntur tamen, quatenus mihi licet animo complecti; quandoquidem, etſi huiuſmodi Problemata per ſe eo modo vſurpata, quo proferuntur, & enunciantur, nequeant reſolui, neque componi noua reſoluendi ratione, ſed antiquam potius Analyſeos, & Syntheſeos methodum requirant; nihilominus ſi res diligentiùs perpendatur, quodcunque Problema ad talem reuocabitur naturam, quæ neque nouam Analyſin, neque Syntheſin reſpuat. Vt ſi detur angulus alicuius trianguli, ad angulorum comparationem euitandam recta linea ſubſtitui debet, quæ quidem eiuſdem anguli vicem gerat; quandoquidem, quicquid Algebra inquirit, vt plurimum æqualitatis ope id facit; æqualitas verò inter homogenea verſatur; ſiquidem, vt ſupra docuimus, non poteſt comparatio inter heterogenea inſtitui, hoc eſt inter ea, quæ natura differunt; manifeſtum eſt autem, angulum eſſe lineis heterogeneum; ob id hæ magnitudines heterogeneæ debent in homogeneas conuerti. Vt quia angulus minimè in æquatione comparari poteſt lineæ rectæ, vtpotè heterogeneæ; proinde beneficio eiuſdem anguli

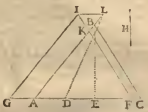
reperiri debet recta linea quæ in æquatione ipſius munere fungatur eiuſdemque vicemgerat. Fateor tamen multum laboris in huius generis æquationibus requiri; ſiquidem in his non exigua quidem ad inquirendam veritatem περιεργία eſt opus, huius autem generis Analyſin paulò breuius explicuimus, ita vt potius videamur Analyſeos περιττῶς attigiſſe, quàm exactam explicationem; Verum enim verò in Problematum Analyſeos doctrina omnia hæc nos accuratè tractabimus. Interim hic Lectorem monitum volumus, ne ſibi perſuadeat, quod alij credidere, huius generis Problemata ſub Algebram non cadere; idque vt hic aliquo modo conſtet aliquibus exemplis confirmare tentabimus.

Igitur vt oſtendamus non bene à quibuſdã aliqua Problemata, in eorũ genere collocata fuiſſe, ad quorum ſolutionem Analyſtarum induſtria non conducat. Iuuabit hic Exempla, quædam in medium afferre, ex quibus facile quiſque poterit intelligere nulla ratione quidem eos in hanc ſententiam abiiſſe. Primum autem, vnum, vel alterum afferemus Problema, de quibus etiam alij, in hunc eundem finem, attulerunt.

PROBLEMA.

Datum Triangulum, per rectam à puncto extra Triangulum datum eductam; data ratione diuidere. Exemplum I.

Datum ſit triangulum A B C; punctumque datum extra illud ſit I. Ratio verò data ſit vt A E, ad E C. Oporteat diuidere triangulum A B C, in duas partes, per rectam lineam ductam ex puncto I; ita vt ſit portio A K F, ad portionem K B C F, in ratione, vt A E, ad E C. Ex puncto I ducatur I G parallela rectæ A B, Ipſa verò A B protrahatur donec in L, occurrat rectæ I L, quæ ducta ſit parallela ipſi A C; protrahatur autem C A, vſque ad G, & fiat vt A L, ad A B, ita A E, ad A D; ducaturque D L,



Supponamus rectam A L, vel G I eſſe b; & ſegmentum A D eſſe d; at verò G A eſſe f.

Recta A F eſto a. Si triangulum igitur A F K foret æquale triangulo A D L, vel A E B, certè foret, vt A F, ad A D, ita A L, ad A K. Hæc eadem proportio per ſpecies erit explicanda; vnde fiet Analogiſmus huiuſmodi, vt a, ad d, ita b ad $\frac{bd}{a}$. Et quoniam eſt; vt G F, ad G I, ita A F, ad A K; proinde erit, vt a ✠ f, ad b, ita a ad $\frac{ba}{a+f}$; quamobrem eadem A K erit $\frac{bd}{a}$, & $\frac{ba}{a+f}$; quamobrem fiet æquatio $\frac{bd}{a} = \frac{ba}{a+f}$. Inſtituto paraboliſmo fiet æquatio $\frac{d}{a} = \frac{a}{a+f}$. Reuocata autem fratione, per Iſomœriam, ad integras magnitudines fiet æquatio $da + df = a^2$, & per antitheſin $a^2 - da = df$; quæ quidem æquatio facile quidem explicabitur, vel per radicis extractionem, vel per analogiſmum.

Primo modo proueniet radicis valor $\frac{1}{2}d + \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + df)}$ & hinc deduci poſſet.

PORISMA.

Ad quadratum ex dimidio coefficientis addito comparationis homogeneo, ſit aggregatum, cuius latus quadratum additum dimidio coefficientis, exhibet radicis pretium.

Si per analogiſmum, hic erit a − d. $\sqrt{(df)}$. a.

PORISMA.

Inter G A, & A D media quædam proportionalis inueniatur H, hac igitur habita; tanquam media proportionali & A D tanquam differentia extremarum, reperiatur A F maior extrema. Hæc enim erit radicis valor.

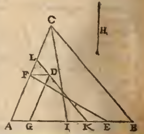
Operando igitur iuxta ſecundum Poriſma; Quoniam factum eſt, vt A F, minus A D, ad H; ita H ad A F; erit quadratum H æquale quadrato A F, minus rectangulo ſub A D, & A F. At verò quadratum H, ex conſtructione æquale eſt rectangulo G A D; ergo rectangulum G A D æquale erit quadrato A F; minus rectangulo ſub A D, & A F; ergo rectangulum G A D, plus rectangulo D A F, æquale erit quadrato A F; quamobrem re-

ctangulum ſub A D, & G F æquale erit quadrato A F; quare, vt G F, ad A F, ita A F, ad A D; ſed vt G F, ad A F, ita G I, ad A K, ergo vt A F, ad A D, ita G I, vel A L, ad A K proinde triangulum A F K æquale erit triangulo A D L. Sed triangulum A D L æquale eſt triangulo A E B (fecimus enim, vt A L, ad A B, ita A E, ad A D) ergo triangulum A F K æquale erit triangulo A E B, & quia triangulum A B E, vna cum triangulo B E C æquale eſt triangulo A B C, & eidem triangulo A B C, æquale eſt triangulum A K F, vna cum trapetio K F C B, ergo triangulum A E B, plus triangulo B E C æquabitur triangulo A K F, vna cum trapetio K F C B; ſed oſtenſum ſuperius eſt triangulum A K F, æquale triangulo A B E, ergo trapetium K F C B, æquabitur triangulo B E C; ſed triangulum A k F, ad triangulum B E C eſt vt A E ad E C; ergo triangulum A k F, ad trapetium KFCB erit vt A E ad E C, quod oportebat &c.

PROBLEMA.

Exemplum II. *Datum Triangulum per punctum intra datum, data ratione diuidere.*

Sit triangulum A B C; punctumque datum ſit D, ratio data ſit vt A I, ad I B, & oporteat facere vt triangulum A K L, ad trapetium L K B C, ſit in ratione A I ad I B. Ducatur D G, parallela rectæ C A; & D F, parallela rectæ A G, deinde fiat, vt A F, ad A C ita A I ad A E; erit enim triangulum A E F æquale triangulo A I C; aganturC I; F E, & quidem A E, dicatur b; & A G ſit f, item A F, vel G D ſit d, ſupponamus triangulum A K L, æquale triangulo A E F, vel A I C, & A K eſto a; cum ſit vt A K ad A E, ita A F ad A L, erit vt a ad b ita d ad $\frac{bd}{a}$, quare A L erit $\frac{bd}{a}$ eſt autem vt G K ad G D, ita A K ad A L; ob id vt a − f, ad d, ita a, ad $\frac{da}{a-f}$; quare A L erit $\frac{da}{a-f}$; ſed erat $\frac{bd}{a}$, ergo $\frac{bd}{a}$, æquabitur $\frac{da}{a-f}$, ergo facto paraboliſmo $\frac{b}{a}$ æquabitur $\frac{a}{a-f}$, & per iſomoeriam b a − b f æquabitur a^2, & per antitheſin b a æquabitur a^2 + b f & rurſus b a − a^2 æquabitur b f, ergo fiet analogiſmus b − a. ℞ b f. a. Hinc.



PORISMA.

Reperiatur recta media proportionalis inter A E, & A G, quæ ſit H, & hac, tanquam media è tribus proportionalibus, è quibus aggregatum extremarum ſit A E, reperiantur extremæ, nam maior, vel extrema A K erit lateris valor, ſiue pretium.

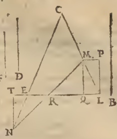
Fiat H media proportionalis inter A E, A G, atque adeò quadratum H, æquale ſit rectangulo E A G, deinde vt A E, minus A K ad H ita H ad A K; agatur K D L.

Quoniam igitur A E, minus A K, eſt ad H, vt H, ad A K; ergo rectangulum A K, in A E, minus quadrato A K, æquabitur quadrato H. Sed rectangulum ex A E in A G æquale erat quadrato H; ergo rectangulum ſub A K, & A E, minus quadrato A K æquabitur rectangulo ſub A E, & A G; & per antitheſin rectangulum ſub A K, & A E, æquabitur rectangulo ſub A E, & A G, plus quadrato A K; ergo rectangulum ſub A E in A K, minus rectangulo ex A E in G A, æquabitur quadrato A K; ergo rectangulum ſub G K, & A E, æquabitur quadrato A K; ergo vt G K, ad A K, ita A K, ad A E; ſed vt G K, ad A K, ita G D ad A L; ergo vt A K ad A E, ita G D, vel A F, ad A L; ergo triangulum A K L, æquabitur triangulo A E F; at triangulum A E F, æquale eſt triangulo A I C; ergo triangulum A k L æquabitur triangulo A I C. Et quia triangulum A C I, vna cum triangulo C I B æquale eſt triangulo A C B, & eidem triangulo A C B, æquale eſt triangulum A K L, plus trapetio L K B C; ergo triangulum A K L, plus trapetio L K B C æquabitur triangulo A I C, plus triangulo C I B; ſed oſtenſum eſt triangulum A K L, æquale triangulo A I C; ergo trapetium L k B C, æquabitur triangulo I B C. Sed triangulum A I C, ad triangulum I B C, eſt vt A I, ad I B; ergo triangulum A k L, ad trapetium L K B C, erit, vt A I, ad I B. Quod oportebat &c.

PROBLEMA.

Exemplum III. *Data baſe trianguli, aggregato laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.*

Pro-



Problema iſtud beneficio ſpecioſæ logiſtices ſoluit etiam Herigonius, ſequenti operatione. Solutio ſic ſe habet. Sit Triangulum iam factum N C M. Protrahatur minus latus C M, & centro C, intervallo, quod ſit æquale B dimidio rectæ, quæ ſit laterum aggregatum; ſecentur C E, C L ducaturque L E. Laterum aggregatum ſit 2 b, ita vt eius dimidium ſit b, erunt igitur C L, C E, b inter ſe æquales, cadat ex N perpendicularis N T, ſuper LT, & inſuper ex M cadat M Q perpendicularis itidem, ad L T. At ex L exeitata ſit L P, ductaque M P, quæ ſit parallela ipſi T L. Facilè demonſtrabimus N T æqualem eſſe QM, & T E æqualem QL; inſuper T R æqualem R Q, & N R æqualem R M; atque T Q æqualem E L. Eſt autem f, vel R Q æqualis dimidio baſeos E L. Recta QM eſto a. Dimidia N M ſit d.

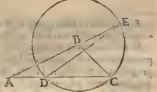
Quoniam igitur d, æqualis eſt dimidio ipſius N M, & propterea æqualis eſt R M, & eſt f æqualis R Q; propterea $a^2 \ast f^2$ æquabitur d^2. Quamobrem a^2 æquabitur $d^2 - f^2$; quare & a æquabitur ℞$(d^2 - f^2)$ Oportet autem 2 d, non eſſe minorem recta E L.

Protrahatur C E fiat autem quad. L P æquale quad. D, minus quad. F, ducaturq; PM parallela ipſi E L; & fiat E N, æqualis L M, ducatur M N. Dico triangulum N C M Problemati ſatisfacere, adeò vt aggregatum ex NC, CM &c. Quoniã igitur EN æqualis eſt LM, erit N C, plus CM æqualis E C, plus C L; eſt autem per conſtructionem 2 B æqualis E C plus C L: propterea N C, plus C M, æqualis erit 2 B. Eſt vero QM æqualis L P, vt & R Q æqualis F; propterea quadratum L P, vel Q M, vna cum quadrato F, vel R Q æquale erit quadrato D, ſed quadratum QM plus quadrato R Q æquale eſt quadrato R M; propterea quadratum R M æquabitur quadrato D, atque adeò R M æquabitur D. Quare, & N M, quæ dupla eſt ipſius R M æqualis erit 2 D.

Ad ſuperiorem Analyſin inſtituendam, quamuis operoſa præparatio, commendabilis tamen eſt. Cæterum oſtendemus Problema cadere etiam poſſe ſub ſpecioſæ Ligiſtices artificium, ſi præter dictum angulum ad verticem, alterum quoque angulum datum ſupponemus ad puncto A.

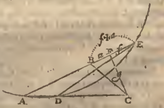
PROBLEMA.

Iiſdem datis, & angulo ad A, reperire Triangulum. Exemplum IV.



Sit igitur triangulum iam factum A B C, & centro B, interuallo B C, deſcripto circulo; protrahatur A B, ad E ductaque D E; Dato angulo A B C, datur C B E, reliquus ad duos rectos, quare, & eius dimidium C D E, vnde, & A D E reliquus ad duos rectos.

In figura igitur reſolutionis ſuper A E laterum aggregatum datum in deſcripto circuli ſegmento, quod capiat angulum æqualem cognito angulo A D E; accomodetur; in angulo E A D, recta AD, protracta ad C, vt AC, ſit baſi datæ æqualis, ex C ſuper A E eadat perpendicularis C F. Oportet diuidere AE in B, ita vt quad. ſegmẽti BE æquale ſit quadrato intercepti ſegmenti B F, vna cum quadrato perpendicularis C F. Segmentum F E ſit f, perpendicularis C F ſit g. Segmentum B F eſto a ergo B E erit a ✱ f; huius quadratum eſt a^2 ✱ 2 f a ✱ f^2, quod æquabitur a^2 ✱ g^2; & per antitheſin fiet æquatio huiuſmodi $2\,fa = g^2 - f^2$. Reuocata æquatione, ad analogiam, fiet huiuſmodi analogiſmus.



2 f ℞$(g^2 - f^2)$ a Hinc.

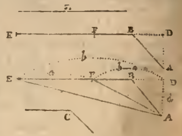
PORISMA.

Vt 2 f ad latus quod poteſt differentiam quadratorum, quorum vnum eſt g, aliud verò f, ita huiuſmodi latus, ad aliud hoc enim erit radicis pretium, & interceptum ſegmentum B F.

PROBLEMA.

Exemplum V. *Dato vno ex lateribus trianguli datum verticis angulum ambientibus; datoque aggregato reliqui lateris, & baſeos, inuenire triangulum.*

Vel angulus verticis eſt rectus, vel obtuſus, vel accutus; in primo caſu res facilis eſt: vnde primò ſit obtuſus.



Datum ſit A B vnum è lateribus trianguli obtuſum angulum verticis ambientibus; aggregatum verò ex reliquo latere, & baſi ſit z; angulus ad verticem datus ſit C; oportеat reperire triangulum. Fiat E B æqualis z; inflectantur autem E B, A B, ita vt angulus E B A æqualis ſit angulo C; protrahatur E B, ad partes B; & in protractam cadat AD, ad rectos angulos in D. Hac autem præparatione eò deducta res eſt, vt diuidatur E B, in puncto F, ita vt quadratum ex parte D F, vna cum quadrato perpendicularis A D, æquale ſit quadrato reliquæ partis E F.

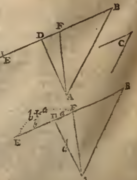
Ad inſtituendam Analyſin recta ED ſit b, perpendicularis autem AD ſit d. Oportet igitur diuidere b, in duas partes, vt dictum eſt. Pars vna eſto a; nimirùm illa, quæ baſi debet eſſe æqualis; pars altera erit $b - a$. Quadratum iſtius eſt $b^2 - 2ba + a^2$; quadratum perpendicularis erit d^2, quadratum ipſius $b - a$ erat $b^2 - 2ba + a^2$, quo addito, ad d^2, fiet $d^2 + b^2 - 2ba + a^2$; quod æquari debet a^2; nimirùm quadrato alterius partis ipſius b; & per antitheſin fiet æquatio $2ba = d^2 + b^2$. Reuocata autem æquatione ad analogiam, fiet analogiſmus huiuſmodi, vt 2 b, ad ℞ $(d^2 + b^2)$ ita ℞ $(d^2 + b^2)$, ad a & erunt proportionalia.

2 b ℞ $(d^2 + b^2)$ a

Hinc deducetur Poriſma.

PORISMA.

Fiat vt 2 b, ad latus, quod poteſt aggregatum quadratorum ex d, & b, ita huiuſmodi latus ad aliud; nam illud erit baſis quæſita.



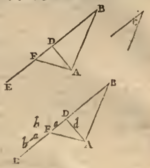
Si verò angulus verticis fuerit acutus, aliter procedendum eſt. Datum ſit igitur latus A B, aggregatum verò reliqui lateris, & baſeos ſit B E; angulus datus, ad verticem ſit æqualis C. Inflectantur A B, E B, ad punctum B, ita vt contineant angulum E B A æqualem angulo C, ex puncto A ſuper E B cadat A D, ad rectos angulos. Diuidendum eſt igitur ſegmentum D B in puncto F, ita vt quadratum ex E F æquale ſit aggregato quadratorum A D, D F.

Segmentum E D, ſit b, & A D ſit d; exceſſus autem D F eſto a, tota igitur E F erit $b + a$; & hæc erit Trianguli baſis quæſita. Quadratum ipſius $b + a$ eſt $b^2 + 2ba + a^2$. Quadratum verò ex a eſt a^2, cui addito quadrato ex d, nempe d^2, fiet $a^2 + d^2$, cui æquabitur $b^2 + 2ba + a^2$; & per antitheſin fiet æquatio $b^2 + 2ba = d^2$; & rurſus $2ba = d^2 \sim b^2$; æquatione autem ad analogiam reuocata, fiet analogiſmus 2 b ℞ $(d^2 \sim b^2)$ a Hinc.

PO-

PORISMA.

Vt eſt 2 b, ad latus quod poteſt differentiam quadratorum, quorum vnum eſt d^2 aliud verò b^2, ita huiuſmodi latus, ad aliud; quod erit exceſſus baſeos ſupra ſegmentum notum E D.



Quod ſi exiſtente angulo acuto, latus datum ſit minus incognito latere, quod eueniet quando perpendicularis A D, ita cadet, in E B, vt ſecet partem ipſius E B partem inquam, quæ æqualis eſt lateri incognito. Tunc ſegmentum F D eſto a, ergo reliqua pars E F erit b — a ſuppoſito nimirum quod E D ſit b.

Itidem ſupponamus A D eſſe d; itaque quadratum ex E F, ſeu $b - a^2$, quod eſt $b^2 - 2ba + a^2$ æquabitur $a^2 + d^2$, & per antitheſin 2 b a æquabitur $b^2 \backsim d^2$. Reuocata æquatione ad analogiam fiet hic analogiſmus.

2 b ℞$(b^2 \backsim d^2)$ a Hinc.

PORISMA.

Vt eſt duplum b, ad latus quod poteſt differentiam quadratorum, quorum vnum eſt b^2 aliud verò d^2 ita huiuſmodi latus, ad aliud. Hoc enim erit radicis pretium.

ADMONITIO.

Quandocunque E D fuerit minor perpendiculari A D, punctum F cadet inter B, D, ſi verò fuerit maior cadet inter E, D.

PROBLEMA.

Data baſe Trianguli differentia laterum, & angulo verticis inuenire triangulum. Exemplum VI.

Si Triangulum fuerit rectangulum, facile Problemati ſatisfiet.

Data ſit baſis b, differentia verò laterum data ſit d. Oporteat reperire Triangulum rectangulum. Latus minus eſto a, maius igitur erit d + a. Quadratum illius eſt a^2 iſtius verò eſt $d^2 + 2da + a^2$. Horum aggregatum eſt $d^2 + 2da + 2a^2$ quod æquabitur b^2, nempè quadrato baſeos; & per antitheſin fiet æquatio $2da + 2a^2 = b^2 - d^2$; omnibuſque ſubduplatis, fiet æquatio $da + a^2 = \frac{b^2 - d^2}{2}$. Huius porrò æquationis radix elicietur facilè obſeruatis Artis præceptis. Claritatis gratia, ſubſtituatur z^2 loco illius comparationis homogenei $\frac{b^2 - d^2}{2}$ vt fiat æquatio $da + a^2 = z^2$. Dimidium coefficientis eſt $\frac{1}{2}$ d, cuius quadratum eſt $\frac{1}{4} d^2$, quo addito, ad z^2 fiet $z^2 + \frac{1}{4} d^2$, cuius latus quadratum eſt ℞$(z^2 + \frac{1}{4} d^2)$ $\frac{1}{2}$, à quo ſi dempſeris $\frac{1}{2}$ d coefficientis dimidium, remanebit ℞$(z^2 + \frac{1}{4} d^2) - \frac{1}{2}$d pro radicis pretio. Hinc.

PORISMA.

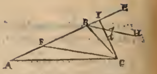
Ad dimidium differentiæ quadratorum; quorum vnum eſt baſeos quadratum; aliud verò quadratum datæ differentiæ, addatur quadratum dimidij ipſius differentiæ datæ, & ex aggregati latere auferatur dimidium ipſius differentiæ; quod enim ſupereſt, erit radicis pretium.

Potuiſſet etiam æquatio ad analogiam reuocari.

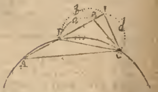
A:

At verò ſi triangulum non fuerit rectangulum, Habeat ad verticem primo Angulum obtuſum.

Sit iam factum Triangulum A B C cuius angulus A B C, ad verticem datus ſit obtuſus, quare C B E reliquus, ad duas rectos, datus erit; atque adeo eius dimidium C B H erit datum quare, & angulus A B H datus erit.



Laterum exceſſus ſit A F, ducta F C, cum B F, B C ſint æquales, angulus E B C duplus erit anguli B F C quippequi externus æqualis eſt duobus æqualibus B F C, B C F, quare dimidium E B H æquale erit angulo B F C; proinde reliquus angulus A B H æqualis erit reliquo A F C.



In figura igitur reſolutionis ſuper baſim datam A C deſcribatur Circuli portio capiens angulum æqualem dato angulo A F C. Et in ea a puncto A, aptetur recta æqualis datæ differentiæ laterum A F protrahatur, ad partes F in infinitum; ex puncto verò C cadat perpendicularis C I. Superest vt diuidamus F I in duas partes, in puncto B; itaut aggregatum quadratorum B I, I C æquale ſit quadrato alterius partis F B.

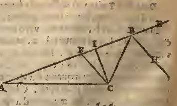
Intercepta F I ſit b, pars autem F B eſto a, reliqua igitur B I erit $b - a$; at verò perpendicularis I C ſit d, quadratum ipſius a eſt a^2, quadratum verò reliquæ partis $b - a$ eſt $b^2 - 2ba + a^2$ huic ſi addatur d^2 fiet $d^2 + b^2 - 2ba + a^2$, quod æquabitur a^2; & per antitheſin fiet æquatio $d^2 + b^2 + a^2 = a^2 + 2ba$; & rurſus $2ba = d^2 + b^2$; atque adeò reuocata æquatione in analogiam, fiet analogiſmus hic.

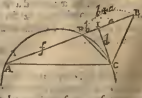
$2b \quad \sqrt{(d^2 + b^2)} \quad : a$. Hinc.

PORISMA.

Fiat, vt dupla b in figura reſolutionis, & in alia ſuperiori, vt dupla F I, ad latus, quod poteſt aggregatum quadratorum d, & b, in figura reſolutionis, in ſuperiori autem aggregatum quadratorum I C, F I, ita huiuſmodi latus, ad a.

Quod ſi datus angulus ad verticem fuerit acutus. Sit iam factum Triangulum A B C, cuius angulus ad verticem B datus ſit acutus, baſis data ſit A C, differentia laterum data ſit A F, ducta F C, datur; angulus A B C; ergo & reliquus ad duos rectos C B E; quare & eius dimidium E B H, vel C B H; ſed huic dimidio æqualis eſt angulus B F C, vel B C F; ergo & angulus B F C dabitur; quare, & A F C; reliquus, ad duos rectos, datus erit. In figura igitur reſolutionis ſuper baſin A C deſcribatur Circuli ſegmentum capiens angulum æqualem noto angulo A F C. Et in eo accomodetur recta A F æqualis datæ differentiæ laterum; protrahatur in infinitum, ad partes F; & in eam, ex puncto C cadat perpendicularis C I. Segmentum F I ſit b, perpendicularis C I ſit d; differentia laterum A F ſit f. Inſuper I B exceſſus quo latus minus ſuperat ſegmentum F I, quod appellabatur b, eſto a, ergo latus minus nempe F B, vel C B erit $b + a$; Latus maius erit $f + b + a$. Quadratum lateris minoris eſt $b^2 + 2ba + a^2$, quod æquabitur $a^2 + d^2$; nimirum aggregato quadratorum ex I B, & I C. Per antitheſin autem fiet æquatio huiuſmodi $2ba = d^2 - b^2$; & reuocata æquatione, ad analogiam fiet huiuſmodi analogiſmus.





$2b \quad \sqrt{(d^2 - b^2)} \quad a$ Hinc.

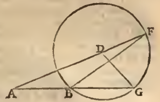
PO-

PORISMA.

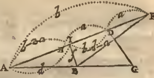
Vt eſt duplum ſegmentum b ad latus, quod poteſt differentiam quadratorum, quorum vnum eſt d alind b^2, ita huiuſmodi latus, ad aliud. Hoc enim erit radicis pretium, & exceſſus quo latus minus ſuperat ſegmentum F I notum. Is autem cognitis omnia innoteſcent.

PROBLEMA.

Data differentia ſegmentum baſeos trianguli aggregato laterum, & angulo verticis inuenire triangulum. Exemplum VII.



Sit triangulum iam factum A D G; in quo differentia ſegmentorum baſeos ſit A B centro D, interuallo D G deſcripto circulo qui neceſſario tranſibit per B producta A D, ad F ducta B F. Cum datus ſit angulus A D G, cognitus erit G D F angulus reliquus ad duos rectos; quare & eius dimidium G B F cognitus erit; quare; & A B F reliquus ad duos rectos cognitus erit.



In figura igitur reſolutionis ſuper A F aggregato laterum deſcribatur circuli ſegmentum, quod capiat angulum æqualem cognito angulo A B F; & in eo apetur recta æqualis datæ A B differentiæ ſegmentorum baſeos. Ex B cadat B I, ad rectos angulos ſuper A F ſupereſt, vt diuidamus A F in puncto H; ita vt ſi ſegmentum H F bifariam diuidatur in D, quadratum dimidij verbi gratia H D, æquale ſit quadrato intercepti ſegmenti I D, vna cum quadrato perpendicularis B I.

Aggregatum A F ſit b, inſuper ſegmentum A I cognitum ſit d, & ſegmentum H F eſto, 2 a, ita vt eius dimidium H D ſit a, interceptum ſegmentum I D ſit b -- d -- a perpendicularis B I ſit f. Quadratum ex b -- d -- a eſt b^2 -- 2 b d ✠ d^2 ✠ 2 d a ✠ a^2; quadratum ex f, eſt f^2 aggregatum eſt f^2 † b^2 -- 2 b d † d^2 † 2 b a † 2 d a † a^2, quod æquabitur a^2. Et per antitheſin fiet æquatio huiuſmodi 2 b a -- 2 d a = b^2 † d^2 -- 2 b d reuocata autem proportione ad analogiam fiet huiuſmodi analogiſmus.

2 b -- 2 d   ℞ (b^2 † d^2 -- b d)   a   Hinc.

PORISMA.

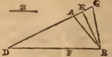
Vt eſt 2 b -- 2 d, ad latus quod poteſt b^2 † d^2 minus duplo rectangulo b d, ita huiuſmodi latus, ad aliud. Illud enim erit radicis pretium, & minus latus quaſitum.

Licet etiam hoc abſoluere, vt in exemplo quarto factum eſt, ſi loco ibi anguli ad A, detur A B, differentia ſegmentorum baſeos.

PROBLEMA.

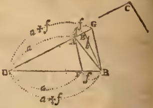
Dato vno ex lateribus Trianguli datum verticis angulum ambientibus, & differentia inter reliquum latus, & baſim inuenire triangulum. Exemplum VIII.

Datum



Datum ſit vnum, è lateribus trianguli A B, differentia verò inter reliquum latus, & baſim ſit z; angulus ad verticem datus ſit æqualis angulo C oporteat reperire triangulum.

Sit triangulum A B D, cuius latus datum, eſt A B angulus ad verticem D A B æqualis C; intelligatur latus D A protractum vſque ad G, ita vt A G ſit æqualis Z ex B, ad A G cadat perpendicularis B E, ex B itidem ducatur B G, At ex A intelligatur ducta A F parallela ipſi B G; In figura igitur reſolutionis A G ſit f, & A E, ſit d, inſuper E B ſit b, at verò D A eſto a, tantum etiam erit D F; cum ſit æqualis D A; At vero cum F B ſit æqualis A G, erit, & ipſa F B, etiam f, quare tota baſis B D erit $a * f$, cuius quadratum $a^2 * 2fa * f^2$ æquale eſſe debet quadratis ex D E, E B; at verò D E eſt $a * d$, cuius quadratum eſt $a^2 * 2da * d^2$; quadratum verò ex E B eſt b^2; proinde erit æquatio $a^2 * 2fa + f^2 = a^2 + 2da + d^2 + b^2$, & per antitheſin $2fa + f^2 = 2da + d^2 + b^2$; & rurſus $2fa - 2da = d^2 + b^2 - f^2$. Quamobrem ſi in analogiſmum tranſmutetur æquatio; fiet huiuſmodi analogiſmus.



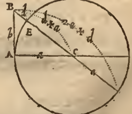
$2f - 2d \qquad ℞(d^2 + b^2 - f^2) \qquad a$ Hinc,

PORISMA.

Fiat; vt duplum f minus duplo d ad latus, quod poteſt aggregatum, ex $d^2 + b^2$ minus f^2; ita huiuſmodi latus, ad aliud; Illud enim erit latus ignotum, quo cognito baſis non ignorabitur.

Quod ſi triangulum quæſitum foret rectangulum, vt triangulum A B C, cuius latus datum verbigratia ſit A B differentia inter reliqum latus, & baſim, ſit B E latus datum ſit b; & differentia data ſit d.

Latus reliquum eſto a, baſis igitur erit $d + a$ ergo rectangulum ſub aggregato ex baſi, & vno ex lateribus circa angulum rectum, in differentiam inter baſim, & prædictum latus ignotum, cum æquale ſit quadrato alterius lateris circa rectum ſitque aggregatum ex baſi, & latere ignoto $2a + d$, & differentia iam dicta ſit d, rectangulum proinde erit $2da + d^2$, quod æquabitur b^2, & per antitheſin, $2da = b^2 - d^2$, quamobrem erit, vt 2 d, ad ℞$(b^2 - d^2)$, ita ℞$(b^2 - d^2)$ ad. a. ſunt igitur proportionales $2d$; ℞$(b^2 - d^2)$; a Hinc,



PORISMA.

Fiat, vt dupla differentia data, ad latus, quod poteſt differentiam quadratorum, quorum vnum eſt quadratum differentia data, aliud verò quadratum dati lateris; ita huiuſmodi latus ad aliud; Hoc enim erit latus ignotum.

De Problematibus illis, quæ conſtructione operaria non egent; ſed poſtulant tantummodo, vt quæſitum numero explicetur. Caput XIV.

EA ſanè Arte, qua Problemata, de quibus hucuſque loquuti ſumus, quæ nimirum ope-
rariam conſtructionem, requirunt, etiam ea, quæ huiuſmodi conſtructionem
non expoſcunt, reſoluuntur; Poriſmata verò, quæ ex ipſis Reſolutionibus deducuntur, in
formam Theorematis proponuntur, & eorum demonſtratio procedit per Analyſeos veſti-
gia ordine directo; & huiuſmodi Theoremata, vt etiam aduertit Ghetaldus rationem ſug-
gerunt conſtruendi ipſa Problemata, hoc eſt numero explicandi id, quod quæritur, ad
hoc Problematum genus pertinet illud, quod etiam idem Auctor affert.

Extant nonnulla Problemata, quæ operariam nõ exigunt conſtructionem. Quomodo hæc Problemata ſe habeant. Declaratur hoc Probl. genus.

Quomodo Archimedes portionem argenti aureæ Coronæ permixtam inuenerit.

Idem Ghetaldus in ſuo opere differit de huius generis Problematibus, qua nimirùm ar-
te reſoluantur, & hanc materiam non paucis explicat, verum quia eodem prorſus modo,
& artificio hæc problemata reſoluuntur, quo nimirùm illa, quæ conſtructionem opera-
riàm requirunt, vt ſupra dictum eſt; proinde non eſt cur hic immoremur; aduertendum
autem eſt præcipuè Demonſtrationem eodem ordine procedere, quo procedit Analyſis,
ſed huius generis Problemata ſuo loco Deo fauente non pauca reſoluemus. Placet nihi-
lominus nonnullorum reſolutiones afferre.

Quidam Nauta diſcedens Ancona, ſingulis diebus conficit miliaria 30, alius autem idem ingreditur iter decimo ſecundo die poſt elapſo; quæritur miliariorum numerus, quem conficere debet poſterior, vt priorem itinerantem aſſequatur diebus viginti.

Problema primum conſtructionem operariam non expoſcens.

Numerus miliariorum quæſitus eſto 1 R; miliariorum; ergo ille prior Nauta diebus 20,
conficiet 20 R, miliariorum, cum autem is ſingulis diebus confecerit 30, miliaria, abſol-
uet ſpatio 20, dierum miliaria 600, addantur verò 360, miliaria, quæ ipſe confecit die-
bus prioribus 12, & fit ſumma 960, & 20 R, æquabitur 960, diuiſione inſtituta fit 1 R,
valor 48, & tot debet miliaria conficere poſterior, vt priorem aſſequatur diebus 20.
Hæc eadem quæſtio ſic reſoluetur per Algebram Specioſam.

Numerus miliariorum, quæ conficit prior Nauta ſingulis diebus ſit d, & numerus die-
rùm elapſorum ſit b, numerus verò dierum, quibus debet poſterior aſſequi priorem, ſit f.

Quæſitus numerus miliariorum ſit a; Ergo in ſpatio dierum ſignificato per f, conficiet
fa, miliariorum, cum autem ſingulis diebus prior conficiat miliariorum numerum ſigni-
ficatum per d, in ſpatio dierum ſignificato per f, conficiet d f, miliariorum, addatur d b,
fit d f † d b, & erit æquatio inter f a & d f † d b; proindè proportionales erunt termini iſti.
Vt f, ad f † b, ita d ad a, & hinc deduci poteſt Poriſma vniuerſale.

Secundò proponatur.

Dic quota nunc hora eſt? ſuperat tantum ecce dici.
Quantum bis gemini exacta de luce trientes.

Problema ſecundum, quod operariam cõſtructionem non requirit.

Diei horarum numerus erit b, intellecto die more antiquorum pro duodecim horis æ-
qualibus, & vt eſt s ad r, ſit quantitas horarum præteritarum ad horas, quæ ſuperſunt.
Numerus horarum præteritarum ſit a. Ergo horæ, quæ ſuperſunt erunt $\frac{ra}{s}$, ſic enim quæ-
ſtio requirit, vt eſt ſiquidem s ad r, ita eſt a, ad $\frac{ra}{s}$; ſumma ex his eſt $\frac{ra}{s}$ † a, & æquabitur
b, omnia ducantur in s, & fiet r a † s a = b s, reuocetur æqualitas ad proportionem, &
erit vt r † s, ita b ad a, hinc deduci poteſt Poriſma.

Horæ ſunt, quas Gnomonici planetarias appellant.

Tertiò proponatur.

Alexander Magnus die quodam cum Caliſthene de ſua ætate, ſuorumque amicorum Epheſtionis, & Clyti, quos ipſe etiam, atque etiam amabat ita loquutus eſt. Ego inquit meum Epheſtionem duorum annorum ſpatio antecedo, At verò Clytus ſua ætate amborum annos comprehendit, & prætereà annos quatuor; Tunc Caliſthenes dixit ſe non mediocri affici lætitia, quod pater ſuus vixerit annos 96, atque adeò eius ætas comprehendit annos trium ipſorum. Quæritur qua ætate Alexander hæc dixerit, & quos annos tunc tam Epheſtio, quam Clytus habuerit.

Problema tertium.

Annorum Epheſtionis numerus eſto $1\,R$, ob id Alexandri annorum numerus fuit $1\,R + 2$, Clyti verò $2\,R + 6$, horum ſumma eſt $4\,R + 8$, & erit æquatio inter $4\,R + 8$, & 96, & per Antitheſin inter $4\,R$, & 88, diuiſione inſtituta, fit $1\,R$ valor 22; Itaque numerus annorum Epheſtionis fuit 22, & Alexandri 24, Clyti autem 50.

Intelligatur b, exceſſus annorum Alexandri ſuprà Epheſtionis ætatem, & d, ſit exceſſus Clyti &c. at verò patris ipſius Clyti ætas ſupponatur z; Epheſtionis annorum quantitas eſto a; proindè Alexandri erit $a + b$, & Clyti $2\,a + b + d$, horum autem aggregatum eſt $4\,a + 2\,b + d$, & erit æquatio huiuſmodi $4\,a + 2\,b + d = z$, vtrinque auferatur $2\,b + d$, & erit æquatio huiuſmodi $4\,a = z - 2\,b - d$, atque adeò $a = \frac{z - 2\,b - d}{4}$, & hinc Poriſma.

Cæterum innumera ſunt huius generis Problemata, quibus noua Algebra ſatisfacit, & vnuſquiſque poterit varia, atque diuerſa exercitationis gratia, reſoluere.

Qua Arte cognoſcantur Problemata impoſsibilia. Caput XV.

Vtilis eſt iſta tractatio, de cognoſcenda impoſſibilitate Problematum

NOn eſt parui faciendus ille modus, quo deprehenditur, num Problema ſit poſſibile, an impoſſibile; ſiquidem non raró contingit, vt Analyſta incidat in æquationē aliquam impoſſibilem, hoc autem niſi animaduertat fruſtrà teret tempus in enodanda Quæſtione; curandum eſt ergo diligenter, vt nos cognoſcamus omnino num ipſa Quæſtio propoſita ſit poſſibilis, an impoſſibilis ne cauillatoribus occaſionē præbeamus, vt nos irrideant.

Problema impoſſibile quod nam ſit.

Problema impoſſibile illud eſt, in cuius analyſi incidit Analyſta inæquationem impoſſibilem.

Aequatio impoſſibilis, quæ ſit.

Æquatio impoſſibilis ea eſt, in qua totum proponitur æquari parti; maior magnitudo minori.

Quod eſt abſurdum; hoc autem dupliciter cognoſcitur, vel nimirum apertè ex eo, quod videmus duas magnitudines inæquales, vt æquales inuicem conferri; vel cognoſcitur ex eo, quia æquatio redditur inexplicabilis. Proponatur Problema reſoluendum.

Problema impoſſibile.

Datam rectam lineam ita ſecare, vt ſi à rectangulo comprehenſo ſub tota, & vna ex partibus auferatur quadratum eiuſdem partis remaneat quadratum totius.

Data ſit recta linea b, ſecanda &c. Pars vna eſto a, alia erit $b - a$; rectangulum ſub tota, & vna ex partibus erit b a, à quo ſi auferatur quadratum eiuſdem partis a, nempè a^2, remanebit $b\,a - a^2$, & æquabitur b^2, nempe quadrato totius, Hoc Problema dicetur impoſſibile, quoniam eſt æquatio inexplicabilis, non enim à quadrato dimidiæ coefficientis b, puta ab $\frac{1}{4}\,b^2$, auferri poteſt b^2, comparationis homogeneum, pro vt hæc æquatio Amphibola exigit, vt ſuo loco docuimus, licet autem non apertè cernatur inæqualitas inter $b\,a - a^2$, & b^2, nihilominus facilè deprehendetur hoc modo; Quoniam ponitur a^2, auferri abs b a, & quod remanet æquari b^2, neceſſario b a, maius erit, quèm a^2, non enim maius poteſt à minori auferri, & ſi æquale ab æquali auferatur nihil poteſt relinquere; proinde a^2, minus erit quàm b a, & per conſequens a, minor erit, quàm b, alioqui ex multiplicatione a per b, non fieret quid maius, quàm ex a in ſe ducta; cum autem a, ſit minor, quàm b, ſequitur b a minus eſſe quàm b^2. Sit æquatio $12\,R - 1\,Q = 144$, vides à 36 quadrato dimidij numeri Radicum non poſſe auferri 144, & eadem ob cauſam eſſet Problema impoſſibile.

Conuincitur impoſſibile, & ſi non apertè cernantur.

Problema impoſſibile.

Diuidatur latus in tales duas partes, vt ex ductu vnius in alterum producatur quadratum totius.

Datum ſit latus b, diuidendum &c. Pars vna eſto a, alia erit $b - a$, ſi vna ducatur in alteram fiet $b\,a - a^2$, & æquabitur b^2, non poteſt autem ab $\frac{1}{4}\,b^2$, auferri b^2.

Secta ſit A C in B, ſi fieri poteſt, vt Problema iubet &c.



Quoniam ergo rectangulum A C B, minus quadrato ex B C, æquale eſt quadrato totius A C, & quadratum ex A C

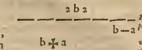
4. ſecundi.

eſt æquale quadratis ex A B, B C, vna cum duplo rectangulo A B C, erit idem rectangulum A C B, minus quadrato ex B C, æquale quadratis ex A B, B C, vna cum duplo rectangulo A B C, ſed rectangulum A C B, minus quadrato ex B C, eſt æquale rectangulo A B C, ergo rectangulum A B C, erit æquale duplo rectangulo A B C, vna cum quadratis ex A B, B C, pars toti, quod eſt abſurdum, non poteſt ergo latus diuidi, vt Problema poſtulat &c.

Datum latus in tales duas partes diuidere, vt rectangulum ſub partibus, vna cum quadrato differentia partium æquale ſit quadratis partium. Exemplum.

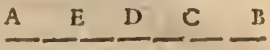
Hoc exemplo vtitur etiam Ghetaldus.

Secundum Problema impoſſibile. Hoc exemplo vtitur Ghetaldus.



Datum ſit latus 2 b, ſecundum vt Problema iubet.

Supponatur factum dimidia differentia partium eſto a, ob id pars maior erit $b + a$ pars verò minor erit $b - a$, cum autem rectangulum ſub $b + a$, & $b - a$, vna cum quadrato ex 2 a, æquale ſit quadratis ex $b + a$, & $b - a$, (hoc ſiquidem pacto latus 2 b, ſupponitur ſectum); proinde $b^2 - a^2 + 4a^2$, æquabitur $2b^2 + 2a^2$, ſeu $b^2 + 3a^2$, æquabitur $2b^2 + 2a^2$; vtrinque auferatur b^2, & $2a^2$, & a^2 æquabitur b^2, & a, æquabitur b pars toti quod eſt abſurdum.

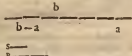


Sit recta A B, ſecta in C, vt Problema iubet &c. accipiatur A E, æqualis C B, itaque partium A C, C B, differentia erit E C, ſecetur A B, in D, bifariam; Quoniam autem rectangulum A C B, vna cum quadrato ex E C, id eſt cum quadrato ex D C quater (ſunt enim E D, & D C, æquales, ob id quadratum ex E C quadruplum eſt quadrati ex D C, vel E D) æquale eſt quadratis ex A C, C B, hoc enim pacto ſecta ponitur A B; rectangulum verò A C B, vna cum quadrato ex D C [a] æquale eſt quad. ex A D, ſeu quod idem eſt rectang. A C B, eſt æquale quad. ex A D, minus quad. ex D C, ergo quad. AD, minus quad. DC, plus quad. ex D C, quater, nempè quad. ex A D, vna cum quadrato ex D C ter, erit æquale quadratis ex A C, C B, nempè [β] duplo quadratorum ex A D, D C, vtrinque auferatur quadratum ex A D, & duplum quadrati ex D C; ob id reliquum quadratum ex D C, æquabitur reliquo quadrato ex A D, atque adeò D C, æquabitur A D, ſeu D B, pars toti, quod eſt inconueniens. Impoſſibile eſt itaque Problema.

a 5. ſecundi; β 9. ſecundi.

Datum latus ita diuidere, vt rectangulum ſub toto, & altera parte, ad rectangulum ſub partibus habeat datam rationem minoris, ad maius. Exemplum.

Tertium Problema impoſſibile.



Datum ſit latus b, diuidendum ſic, vt rectangulum ſub toto, & altera parte, ad rectangulum ſub partibus habeat datam rationem vt eſt s, ad r, minoris ad maius: Pars vna eſto a, alia erit $b - a$, rectangulum ſub toto, & altera pars nempè a erit b a, & rectangulum ſub partibus eſt $ba - a^2$, vt verò eſt s, ad r, ita debet eſſe b a, ad $ba - a^2$, reuocetur proportio, ad æqualitatem, & b r a, æquabitur $bsa - sa^2$, omnia applicentur ad a, vt ſit aliqua magnitudo, cui comparentur reliqua, & b r, æquabitur $bs - sa$, vtrinque addatur s a, & $br + sa$ æquabitur b s, vtrinque non poteſt auferri b r, vt certa ab incertis ſeparentur, ſiquidem maius puta b r, nequit ſubtrahi à minori b s. Hæc eſt æquatio ergo inexplicabilis, cum nò poſſit b r, ſubtrahi à b s, maius à minori, atque adeò, nequit ad analogiam reduci, ſiquidem ab s, non poteſt ſubduci r, terminus maior, à minori.

Recta ſit A B ſecta &c. & ratio data vt A E ad A D.



Quoniam ergo ſic eſt diuiſa A B in C, erit ſolidum ſub A D in A B, B C comprehenſum æquale ſolido, quod ſub A E in A B, B C, minus ſolido ſub A E in quadratum B C, omnia applicentur ad C B, rectangulum ſub A D, in A B, æquale erit rectangulo ſub A E, A B, minus rectangulo ſub A E, C B; vtrinque addatur rectangulum ſub A E, BC, nam rectangulum ſub A D, A B, plus rectangulo ſub A E, B C, æquabitur rectangulo ſub A B, in A E; vtrinq; auferri poſſe deberet rectang. ſub A B, A D, quod eſt impoſsibile; maius eſt enim rectangulum ſub A B, A D, quàm ſub A B, & A E; alias ipſa A E, foret maior, quam A D pars toto, quod eſt abſurdum; proindè longè maius erit rectangulum ſub A B, A D, vna cum rectangulo ſub A E, & C B, quàm ſub AB, A E, &c.

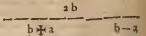
SCHOLION.

Superior Reſolutio per ſolidorum comparationem procedit, putat Ghetaldus abſtinendum Analyſi ab huiuſmodi Analyſeos methodo, ſiquidem in Geometricis Reſolutionibus vti ſolidorum comparatione eſt veluti per impropria procedere, nihilominus eſt Reſolutio veriſſima manu du-

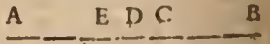
cens ad id quod eſt in quæſtione; quod Geometra ſufficit.

Exemplum.

Datum latus in duas partes diuidere, vt triplum rectangulum ſub partibus, vna cum duplo quadrato differentiæ partium, æquale ſit quadrato totius, vna cum quadrato differentiæ partium,



Datum ſit latus diuidendum $2b$, &c. dimidia differentia partium eſto a, pars maior erit $b + a$, alia nempè minor erit $b - a$, rectangulum ſub partibus eſt $b^2 - a^2$, cuius triplum eſt $3b^2 - 3a^2$, huic ſi addatur duplum quadratum differentiæ partium, fiet $3b^2 - 3a^2 + 8a^2$, & hoc æquabitur $4b^2 + 4a^2$, nempè quadrato totius vna cum quadrato differentiæ partium, & facta translatione ſecundum Artem a^2, æquabitur b^2, atque adeò a, æquabitur b; pars toti, quod eſt impoſſibile, repetendo autem Analyſeos veſtigia fiet Compoſitio.



Sit ſecta A B in C, vt petitur, fiat autem ipſi C B, æqualis A E, eritque partium A C, C B, differentia E C, diuidatur A B, biſariam in D. Quoniam ergo triplum rectangulum A C B, vna cum duplo quadrato ex E C, æquale ponitur quadrato totius A B, vna cum quadrato ipſius E C, rectangulum verò A C B, vna cum quadrato ex D C æquale eſt [a] quadrato ex A D, vel D B, ſeu quod idem eſt rectangulum A C B, æquale eſt quadrato ex D B, minus quadrato ex D C, atque adeò triplum rectangulum A C B, æquale eſt triplo quadrato ex D B, minus triplo quadrato ex D C. Ergo triplum quadratum ex D B, minus triplo quadrato ex D C, vna cum duplo quadrato ex E C, ſeu octuplo quad. D C, æquabitur quadrato totius A B, vna cumquadrato differentiæ E C, hoc eſt quadruplo quadrato ex D B, vna cum quadruplo quadr. ex D C; hoc eſt triplum quadratum D B, plus quintuplo quadrato ex D C, æquabitur quadruplo quad. D B, vna cum quadruplo quadrato D C: Vtrinque auferatur triplum quadratum ex B D, & quadruplum quadratum ex D C, & remanebit quadratum ex D C, æquale quadrato ex D B, atque adeò D C, æquabitur ipſi B D, pars toti, quod eſt inconueniens.

[a] 5. ſecundi.

SCHOLION.

Et eodem pacto reperiemus quàm plurima alia Problemata impoſſibilia, quæ non diſſimili arte dignoſcentur; & eorum impoſſibilitas deprehendetur, ſic etiam ex Problematibus in quorum analyſi occurrit angulorum comparatio, reperiemus, quædam impoſſibilia; vt ſi proponeretur. Triangulum conſtituere habens tres angulos æquales tribus angulis rectis.

Qua arte cognoſcantur Problemata vana, & nugatoria. Caput XV.

DE modo cognoſcendi Problematum impoſſibilitatem egimus; reliquum eſt vt hic de Methodo, qua Problematum vanitatem deprehendere poſsimus verba faciamus. Problemata vana, ſeu nugatoria impoſsibilibus Problematibus ex diametro opponuntur quandoquidem illud cenſetur Problema impoſsibile, cum id, quod ipſum Problema iubet nulla ratione fieri poteſt. Vanum autem cum id quod fieri iubet quocunque modo fiat Problemati ſit ſatis, vel infinitis modis ipſum Problema conſtrui poteſt.

Problemata vana ſeu Nugatoria impoſſibilibus opponuntur, & quid vtrumque.

Quando Problema nugatorium ex æquatione colligatur.

Cum autem Problematis Reſolutio in aliquam inutilem æquationem incidit Problema vanum eſt, & nugatorium.

Æquatio inutilis quæ.

Equatio inutilis illa eſt, inqua eædem magnitudines ijſdem magnitudinis æquantur; vel cum datæ magnitudines datis tantum magnitudinibus expulſo quæſito æquantur.

Propterea quod nulla tunc ſit comparatio dati, & quæſiti, propter quem finem æquationem inſtitutam eſſe peritioribus liquet. Inutiles autem æquationes ſunt veluti iſtæ $b^2 = b^2$, in qua nimirùm eadem magnitudo eidem magnitudini adæquatur; inſuper $2b + 2a^2 = 2a^2 + 2b^2$, in qua eædem magnitudines ijſdem magnitudinibus adæquantur; præterea $4ba = 4ba$, ob eandem cauſam eſt æquatio inutilis. Sic etiam $b^2 - 2ba + a^2 = b^2 - 2ba + a^2$; inutilis eſt, cum ex vtraque parte eædem magnitudines ſint.

Exempla.

Si proponatur.

PROBLEMA.

Datum latus in tales duas partes diuidere, vt rectangulum ſub toto, & partium differentia vna cum quadrato partis minoris æquale ſit quadrato partis maioris.

Problema vanum eſt, & nugatorium; propterea quod, vtcunque latus datum diuidatur perpetuò reperiremus ex ea diuiſione hoc proficiſci, nempè id quod quæritur, vt patet ex ijs, quæ habentur in Elementis lib. 2. Prop. 5. ſi nimirùm illa dimidia intelligatur pars maior, intermedia verò pars minor, & reliqua differentia partium, ſi verò inſtituatur Analyſis hæc in æquationem incidet inutilem, in qua ex vtraque parte eædem ſunt magnitudines, ſi namque latus propoſitum ſupponatur b, & pars minor ſit a, erit maior $b - a$, eritque partium differentia $b - 2a$ rectangulum ſub toto latere, & partium differentia eſt $b^2 - 2ba$, huic ſi addatur quadratum partis minoris, nempè a^2, fiet $b^2 - 2ba + a^2$, & hoc æquale eſt quadrato partis maioris, nimirum $b^2 - 2ba + a^2$, & hæc eſt æquatio inutilis, in qua ex vtraque parte eædem ſunt magnitudines, ex hac autem Analyſi facile eſt demonſtrationem elicere, vt facit etiam Ghetaldus, qui hoc eodem vtitur exemplo.

$$\begin{array}{r} b - a \\ b - a \\ \hline - ba + a^2 \\ b^2 - ba \quad\quad \\ \hline b^2 - 2ba + a^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b - 2a \\ b \\ \hline b^2 - 2ba \\ a^2 \\ \hline b^2 - 2ba + a^2 \end{array}$$



Recta A B, ſeceturque vtcunque in C, & C B, ſit minor pars, cui fiat æqualis D C, & A D, erit partium A C, C B, differentia; Dico rectangulum B A D, vna cum quadrato ex C B, æquale eſſe quadrato ex A C; Cum enim rectangulum B A D, hoc eſt rectangulum ſub tota, & differentia partium æquale ſit quadrato totius A B, minus rectangulo A B D, hoc eſt minus duplò rectangulo A B C, quod illi eſt æquale, cum D B, ſit dupla ipſius B C, addatur vtrobique quadratum ipſius B C, & rectangulum B A D, vna cum quadrato ex B C, æquale erit quadrato ex A B, vna cum quadrato ex B C, minus duplo rectangulo A B C; at verò quadratum A C, partis maioris æquale eſt a quadratis ex A B, B C minus duplo rectangulo A B C, ergo rectangulum B A D, vna cum quadrato ex B C, æquale erit quadrato ex A C, quod oportebat oſtendere. a ex lib. Analyſeos.

Sic etiam vanum, & nugatorium Problema eſſet illud.

Propoſitum latus in duas partes diuidere ea lege, vt quadruplum rectangulum ſub partibus, vna cum quadrato differentiæ partium æquale ſit quadrato totius.

Vtcunque enim latus diuidatur, id euenire comperiemus, vt patet ex demonſtratis ab Euclide lib. 2. Prop. 8. ſi tota recta intelligatur pars maior, alterum ſegmentorum pars minor, reliquum verò differentia partium.

F I N I S.

Exemplum ad idem.

Propoſitio deducta ex Poriſmate per modum theorematis enunciati.

Non dum, hactenus dicta, ſatis ab alijs explicata fuerunt.

De quibus Geometria diſputet.

Quid Problema præſtet.

Exemplum. ibid. vt ſup.

Finis Problematis, & Theorematis. pag. 14

Nonnulla aſſeruntur, quæ à Maioribus tradita fuerunt.

Problema, vel Theorema ſi perfectum extiterit ex conſtat partibus.

Propoſitio è quibus conſtet.

Expoſitio.

Determinatio.

Conſtructio.

Demonſtratio.

Concluſio.

Supradicta non ſunt omnia neceſſaria in omni Problemate, vel Theoremate.

Propoſitio plerunque, & ſi non conſtet explicitè ex dato, & quæſito, conſtat tamen implicitè.

Determinatio, ac expoſitio quando contingat.

Datum pluribus modis continget.

Conſtructio variatur pro varietate poſitionis.

Quotuplex datum, totuplex expoſitio.

Demonſtratio qualis.

Concluſio duplex, particularis vna, vniuerſalis altera. ibid. vt ſup.

Problematis partes ſex numerantur, ac explicantur. pag. 15

Theorematis partes.

Lemma quid.

Caſus quid.

Corollarium quid.

Poriſma quid.

Inſtantia quid.

Deductio quid.

Poriſma explicatur.

Quid ſit Reſolutio, & quid Compoſitio Mathematica Cap. I.

Reſolutio varijs modis definiri ſolet.

Reſolutio alis realis alia rationis. pag. 16

Reſolutio rationis duplex, altera practica, altera ſpeculatiua.

Reſolutio ſpeculatiua triplex, Metaphyſica, Mathematica, & Logica.

Analyſis tribuitur Platoni tanquam Auctori.

Quid ſit Reſolutio Mathematica explicatur.

Quid Compoſitio &c. ibid vt ſup.

Deductio ad impoſſibile. pag. 17

Duplex Methodus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Methodus antiqua.

Methodus noua.

Quid maxime commendabile in vtraque Methodo.

Accuratius perpenditur Analyſeos, & ſyntheſeos natura.

Duplex Reſolutionis genus. ibid. vt ſup.

Aduertenda quædam. pag. 18

Quid interſit inter deductionem ad impoſſibile, & conuerſionem.

Conuerſione ſyllogizare quid.

Conuerſio quid.

Quid interſit inter oſtenſiuam demonſtrationem, & deducentem ad impoſſibile.

Veteres ad reſoluenda Problemata Datis vtebantur. ibid. vt ſup.

Imitatione Theorematum Problemata reſolui poſſunt. pag. 19

Antiqua Methodus in Reſolutione Problematum, vtitur Euclidis Datis.

Multa congeſta à Veteribus ad Locum reſolutum ſpectantia.

Nonnulli Mathematicas demonſtrationes deteſtantur.

Mathematicæ Diſciplinæ demonſtratiuè procedunt.

Omnis demonſtratiua Scientia in tribus eſt occupata.

Demonſtrationes Mathematicæ rectè habent.

Platonis locus in 7. Lib. de Republica aduerſus Geometriam. pag. 20

Prima obiectio.

Verſio Ficini.

Verſio Auctoris.

Platonis ſententia perpenditur.

Platonis ſententia explicatur.

Secunda obiectio à ratione petita.

Solutio. ibid. vt ſup.

Obiectio ex alia Geometricæ propoſitione petita cum ſua ſolutione. pag. 21

Tertia obiectio.

Solutio.

Notanda quædam.

Quarta obiectio.

Solutio.

Quinta obiectio. pag. 22

Solutio.

Sexta obiectio.

Solutio.

Poſtremæ difficultates.

Primæ ſolutio.

Secunda, eiuſque ſolutio.

Euclidis de Datis Liber ſingularis ad Locum pertinens reſolutum, ab Auctore recognitus, & Commentarijs illuſtratus.

DEFINITIONES.

Data Magnitudine dicuntur areæ, ſeu ſpatia, lineæ, & anguli quibus æqualia poſſumus exhibere. Def. 1.

Difficultates de angulo. pag. 23

Angulum non eſſe magnitudinem demonſtratur.

Suadetur prima propoſitio.

Alia ratione demonſtratur angulum quantitatem non eſſe.

Occurritur difficultati.

Reſponſionis impugnatio.

Epilogus. pag. 24

Explicatio Definitionis propoſitæ.

Voces quædam explicantur.

Hypotheſis quid.

Ordinatum quid.

Porimon quid.

Apotimon quid.

Effabile quid.

Cognitum quid.

Secunda Definitio; Ratio dari dicitur, cui poſſumus eandem exhibere. pag. 25
Definitionis explicatio.
Num proportio quantitas dici mereatur. Dubitandi ratio.
Rationes quibus oſtenditur ratio participare quantitatis naturam.
Iterum idem comprobatur.
Oppoſita ſententia tanquam probabilior defenditur.
Quorundam effugium. pag. 26
Reijcitur.
Reſpondetur ad initio propoſita argumenta.
Ad primum.
Ad ſecundum.
Ad tertium.
Tertia definitio; Recti-lineæ figuræ ſpecie dari dicuntur, quarum & ſinguli anguli dati ſunt, &, laterum rationes adinuicem datæ ſunt; Eius explicatio.
Definitio quarta. pag. 27
Definitio quinta. Circulus magnitudine dari dicitur, cuius ea quo ex centro &c.
Definitio ſexta. Poſitione, & magnitudine dari dicuntur &c.
Definitio ſeptima. Circuli ſegmenta magnitudine dari dicuntur &c.
Definitio octaua. Poſitione, & magnitudine dari dicuntur circuli ſegmenta &c.
Definitio nona. Magnitudo, magnitudine maior eſt data, quando oblata data &c.
Definitio decima Data &c. pag. 28
Definitio vndecima. Magnitudo, magnitudine maior eſt data, quàm in ratione &c.
Definitio duodecima. Magnitudo, magnitudine minor eſt data, quàm in ratione &c.
Definitio decimatertia. Deducta linea dicitur à dato puncto, ad datam poſitione &c.
Definitio decimaquarta. pag. 29
Definitio decimaquinta. Contra poſitione eſt, recta per datum punctum &c.
Propoſitio prima. Datarum magnitudinum ad inuicem, data ratio eſt.
Propoſitio II. Si data magnitudo ad datam aliquam magnitudinem habeat rationem datam, datur etiam hæc alia magnitudine.
Propoſitio III. Si quælibet datæ magnitudines componantur, etiam dabitur quæ ex his componitur magnitudo.
Propoſitio IV. ſi à data magnitudine, data magnitudo auferatur &c. pag. 30
Propoſitio V. ſi magnitudo ad ſui ipſius aliquam partem habeat rationem datam &c.
Propoſitio VI. ſi componantur duæ magnitudines; habentes ad inuicem &c.
Propoſitio VII. ſi data magnitudo, data ratione ſecetur, vtrumque ſegmentorum &c.
Propoſitio VIII. Quæ ad idem rationem habent datam, habebunt &c. pag. 31
Propoſitio IX. ſi duæ pluresue magnitudines adinuicem habeant rationem &c.
Propoſitio X. ſi magnitudo, magnitudine maior fuerit data quam &c.
Triplex hypotheſis.
Secunda hypotheſis. pag. 32
Propoſitio XI. ſi magnitudo, magnitudine maior ſit data, quam in ratione &c.
Propoſitio XII. ſi fuerint tres magnitudines, & prima quidem cum ſecunda data ſit &c.
Propoſitio XIII. ſi fuerint tres magnitudines, & earum prima ad ſecundam &c. pag. 34
Propoſitio XIV. ſi duæ magnitudines adinuicem, habeant rationem datam, vtrique &c.
Propoſitio XV. ſi duæ magnitudines habeant adinuicem, rationem datam, & ab vtraque &c.
Propoſitio XVI. ſi duæ magnitudines adinuicem habeant rationem datam &c. pag. 34
Propoſitio XVII. ſi fuerint tres magnitudines, & prima quidem, ſecunda maior ſit quam &c.
Propoſitio XVIII. ſi fuerint tres magnitudines, atque ex his vna, vtraque reliquarum maior &c.
Propoſitio XIX. ſi fuerint tres magnitudines, & prima quidem magnitudo &c. pag. 35
Propoſitio XX. ſi datæ duæ fuerint magnitudines, & auferantur ab ipſis &c.
Propoſitio XXI. ſi fuerint duæ magnitudines datæ, & adijciantur &c. pag. 36
Propoſitio XXII. ſi duæ magnitudines ad aliam aliquam magnitudinem habeant &c.
Propoſitio XXIII. ſi totum, ad totum habeat rationem datam, habeant autem & partes &c.
Propoſitio XXIV ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint, prima autem &c. pag. 37
Propoſitio XXV. ſi duæ rectæ poſitione datæ ſe mutuo inuicem ſecuerint &c.
Scholion.
Propoſitio XXVI. ſi lineæ rectæ extremitates, poſitione datæ ſint; recta &c.
Propoſitio XXVII. ſi datæ rectæ lineæ poſitione, & magnitudine data fuerit &c.
Propoſitio XXVIII. ſi per datum punctum contra datam poſitione rectam agatur &c. pag. 38
Propoſitio XXIX. ſi ad poſitione datam rectam, datumque in ea punctum &c.
Scholion.
Propoſitio XXX. ſi à dato puncto in datam poſitione rectam, agatur recta linea &c.
Propoſitio XXXI. ſi à dato puncto, in datam poſitione rectam &c. pag. 39
Propoſitio XXXII. ſi in datas poſitione parallelas rectas, agatur recta linea &c.
Propoſitio XXXIII. ſi in datas poſitione parallelas rectas agetur magnitudine &c.
Propoſitio XXXIV. ſi in datas poſitione parallelas rectas &c. pag. 40
Propoſitio XXXV. ſi à dato puncto in datam poſitione rectam, agatur recta linea &c.
Propoſitio XXXVI. ſi à dato puncto in datam poſitione rectam lineam agatur &c.
Propoſitio XXXVII. ſi in datas poſitione parallelas &c. pag. 41
Corollarium.
Propoſitio XXXVIII. ſi in datas poſitione parallelas rectas agatur recta linea &c.
Propoſitio XXXIX. ſi trianguli ſingula latera, magnitudine &c. pag. 42
Propoſitio XL. ſi trianguli ſinguli, anguli, magnitudine dati ſint &c.
Propoſitio XLI. ſi triangulum, vnum angulum datum habeat, circa datum autem angulum &c.
Propoſitio XLII. ſi trianguli latera adinuicem habeant &c. pag. 43
Propoſitio XLIII. ſi trianguli rectanguli, circa vnum acutorum angulorum &c.
Propoſitio XLIV. ſi triangulum habeat, vnum angulum datum, circa alium autem &c.
Propoſitio XLV. ſi trianguli datum vnum angulum habeat &c. pag. 44
Propoſitio XLVI. ſi triangulum datum vnum angu-

lum

lum habeat, circa alium autem angulum &c.
Propoſitio XLVII. Data rectilinea ſpecie, in data ſpecie triangula diuiduntur, &c. pag. 45
Propoſitio XLVIII. si ab eadẽ recta deſcribantur triangula data ſpecie &c.
Propoſitio XLIX. si ab eadem recta duo rectilinea, quælibet data ſpecie &c.
Propoſitio L. si duæ rectæ lineæ ad inuicem habeant rationem data &c.
Propoſitio LI. si duæ rectæ lineæ habeant ad inuicem &c. pag. 46
Propoſitio LII. si à data magnitudine recta, data figura ſpecie &c.
Propoſitio LIII. si duæ figuræ ſpecie datæ fuerint, & vnum latus vnius ad &c.
Propoſitio LIV. si duæ figuræ datæ ſpeciæ ad inuicem habuerint &c. pag. 47
Propoſitio LV. si ſpatium magnitudine, & ſpecie datum fuerit, eius latera &c.
Propoſitio LVI. si dua æquiangula parallelogramma habuerint ad inuicem &c.
Corollarium.
Propoſitio LVII. si datum ſpatium ad datam rectam applicatum fuerit &c. pag. 48
Propoſitio LVIII. si datum, ad datam rectam applicetur, deficiens data ſpecie &c.
Propoſitio LIX. si datum, ad datam rectam applicetur, excedens datam &c.
Propoſitio LX. si datum ſpecie, & magnitudine parallelogrammum &c. pag. 49
Propoſitio LXI. si ad datæ ſpecie figuræ vnum latus applicetur &c.
Propoſitio LXII. si duæ rectæ ad inuicem habeant rationem datam &c. pag. 50
Propoſitio LXIII. si triangulum ſpecie datum ſit, quod ab vnoquoque laterum &c.
Propoſitio LXIV. si triangulum angulum obtuſum datum habeat &c.
Monitum. pag. 51
Propoſitio LXV. si triangulum, angulum acutum datum habeat, illud ſpatium &c.
Propoſitio LXVI. si triangulum habuerit angulum datum, quod ſub recta &c.
Propoſitio LXVII. si triangulum habuerit datum angulum &c. pag. 52
Propoſitio LXVIII. si duo parallelogramma æquiangula habeant ad inuicem &c.
Propoſitio LXIX. si duo parallelogramma datos angulos habeant &c.
Propoſitio LXX. si duorum parallelogrammorum circa æquales &c. pag. 53
Propoſitio LXXI. si duorum triangulorum circa æquales angulos &c.
Propoſitio LXXII. si duorum triangulorum, & baſes fuerint &c. pag. 54
Propoſitio LXXIII. si duorum parallelogrammorum circa æquales angulos, &c.
Propoſitio LXXIV. si duo parallelogramma datam rationem habeant &c.
Propoſitio LXXV. si duo triangula ad inuicem habeant &c. pag. 55
Propoſitio LXXVI. si à trianguli dati ſpecie vertice linea perpendicularis &c.
Propoſitio LXXVII. si datæ duæ figuræ ſpecie ad inuicem habeant rationem datam &c.
Propoſitio LXXVIII. si data figura ſpecie habeat ad quod &c. pag. 56
Propoſitio LXXIX. si duo triangula vnum angulum, cum angulo æqualem habeant &c.
Propoſitio LXXX. si triangulum datum vnum angulum habuerit, quod autem &c.
Propoſitio LXXXI. si tres rectæ proportionales tribus rectis &c. pag. 57
Propoſitio LXXXII. si quatuor rectæ proportionales fuerint &c.
Propoſitio LXXXIII. si quatuor rectæ ita ad inuicem ſe habeant &c.
Propoſitio LXXXIV. si duæ rectæ datum ſpatium comprehendant &c. pag. 58
Propoſitio LXXXV. si duæ rectæ datum ſpatium comprehendant in angulo dato &c.
Propoſitio LXXXVI. si duæ rectæ datum ſpatium comprehendant in angulo dato &c.
Scholion.
Propoſitio LXXXVII. si duæ rectæ datum ſpatium comprehendant &c. pag. 59
Propoſitio LXXXVIII. si in circulum magnitudine datum acta ſit recta linea, &c.
Propoſitio LXXXIX. si in datum magnitudine circulum, data magnitudine recta acta fuerit, auferet &c.
Propoſitio XC. si in circuli poſitione dati circumferentia, datum &c. pag. 60
Propoſitio XCI. si à dato puncto acta recta fuerit, quæ datum poſitione &c.
Propoſitio XCII. si extra circulum poſitione datum, accipiatur aliquod punctum &c.
Propoſitio XCIII. si intra datum poſitione circulum, ſumatur aliquod datum punctum &c.
Propoſitio XCIV. si in circulum magnitudine datum, agatur recta, &c. pag. 61
Propoſitio XCV. si in circuli poſitione dati diametro, ſumatur datum punctum &c.
Scholion. pag. 62
In epilogum rediguntur, quæ in Datorum Libro tradita ſunt.
Libri de Proportionis ſectione ab Appollonio conſcripti, ad Locum faciunt reſolutum.
Problema.
Pappus parùm accuratè horum Librorum retulit argumentum. pag 63
Libri de Spatij ſectione, quos Apollonius deſcripſit ad locum itidem faciebant reſolutum.
Problema.
Libri de determinata ſectione conſcripti quoque ſunt ab Apollonio, qui faciebant ad Locum reſolutum.
Nulla Geometriæ pars eſt vtilior, quàm ea, in qua de lineæ ſectione agitur. pag. 64
Libri duo de Tactionibus ab Apollonio conſcripti, ad locum faciebant reſolutum.
Auctor in his nil ſe feciſſe arbitratur, quamuis plus quam tria millium propoſitionum proprio Marte adinuenerit.
Tres Libros Poriſmatum Auctore Euclide agnouit Antiquitas.
Pappi ſententia ex Bullialdo. pag. 65
Ex ſententia Auctoris quid Pappus docuerit.
Ad quem Propoſitionum ordinem pertineant Poriſmata.
Budæus in Commentarijs Græcæ linguæ. pag. 66
Auctoris ſententia de Poriſmatis natura.
Procli auctoritas in 3. Lib. Euclidis pag. 67
Poriſmatis definitio ex Proclo.
Hac tempeſtate quid per Poriſma intelligatur.
Poriſma non confunditur cum Lemmate.
Perperam aliqui Poriſma confundunt cum Deductione.
Tractandorum argumentum; ac Auctoris par-

tes, pag. 68

Quæ hactenus dicta ſunt de Methodo Antiqua, Exemplis illuſtrantur ad Reſolutionem, & Compoſitionem Theorematum. Caput Secundum.

Theorema. Exemplum I. Si recta linea extrema, ac media ratione ſecta fuerit, maior portio aſſumens dimidium totius, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia fit, quadrati. pag. 69
Antecedentis Theorematis Reſolutio.
Reſolutionis examen. pag. 70
Eiuſdem Theorematis Compoſitio.
Compoſitionis examen.
Scholion.
Animaduerſione digna.
Theorema. Exemplum II. Si recta linea partis ipſius quintuplum poſſit, dupla dictæ partis, extrema, ac media ratione ſecta, maior portio reliqua pars eſt eius, quæ à principio rectæ lineæ.
Antecedentis Theorematis reſolutio. pag. 71
Reſolutionis examen.
Eiuſdem Theorematis Compoſitio. pag. 72
Compoſitionis examen.
Scholion.
Præceptum ad Reſolutionem.
Præceptum ad Compoſitionem.
Theorema. Exemplum III. Sit ſemicirculus A B C, & infléctatur A B D, ſitque A B æqualis B D; ipſi verò B D, ducatur, ad rectos angulos D E, & B E iungatur; cui ad rectos angulos ducatur E F, ſitque centrum G, & vt A G, ad G D, ita ſit D H, ad H F, & iungatur H E. Dico angulum B E D, angulo D E H æqualem eſſe. pag. 73
Præparatio.
Reſolutio.
Compoſitio.
Scholion. pag. 74
Theorema. Exemplum IV. Sit ſemicirculus in recta linea A B, atque à punctis A, B ipſi A C B ad rectos angulos agantur rectæ lineæ B D, A E, & ducatur vtcunque D E, à puncto autem F, ipſi D E ad rectos angulos agatur F G, quæ cum A B in puncto G conueniat. Dico rectangulum contentum A E, B D, rectangulo A G B æquale eſſe.
Reſolutio.
Compoſitio.
Auctoris exempla. pag. 75
Theorema. Exemplum V. Si fuerit ſemicirculus ſuper diametrum A B, & eductæ fuerint ex C duæ lineæ tangentes illum in duobus punctis D, & E; iunctæque fuerint E A, D B ſe mutuò ſecantes in F; & iuncta fuerit C F, & producatur ad G. Dico C G perpendicularem eſſe ipſi A B.
Præparatio.
Reſolutio.
Lemma.
Compoſitio. pag. 76
Conſpectus Reſolutionis atque Compoſitionis.
Theorema. Exemplum VI. Si ſuper A B rectam ex centro E deſcriptus ſit ſemicirculus A C B, & in eo aptata ſit A C æqualis ſemidiametro, nempè A E vel E B; ſitque A C bifariam diuiſa in D; & ex E ducta ſit E D, quæ protracta perueniat ad peripheriam in F: ductæque ſint B F, A F. Dico B F, E F, A F eſſe in continua ratione.
Reſolutio. pag. 77
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.
Theorema. Exemplum VII. Si recta linea extrema, ac media ratione ſecetur. Dico quadratum totius; rectangulum ſub tota, & ſegmento maiori; rectangulum ſub tota, & ſegmento minori in continua eſſe ratione.
Præparatio ad Reſolutionem.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 78
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.
Theorema. Exemplum VIII. Si fuerint tres quantitates proportionales, aggregatum quadratorum ex media, & maiori extrema ad rectangulum contentum ſub iiſdem, rationem habet, vt aggregatum extremarum ad mediam.
Reſolutio.
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis. pag. 79
Theorema. Exemplum IX. Sit ſemicirculus in recta A B, ita vt ſit protracta hæc ad quodcunque punctum C, & ab eo ducta ſit C D, occurrens conuexo peripheriæ in E. Dico arcum A D maiorem eſſe arcu B E.
Reſolutio.
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.
Theorema. Exemplum X. In omni triangulo rectangulo vt eſt hypothenuſa ad aggregatum laterum ambientium angulum rectum, ita hoc aggregatum, ad aggregatum ex hypothenuſa, & duplo catheto.
Reſolutio. pag. 80
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis atque Compoſitionis.
Th. Exemplum XI. In quadrante D E A, & ſemicirculo D C A ſit ducta vbilibet D C B; & D B, ad B F, ſit in duplicata ratione arcus E B A ad arcum A B. Dico punctum F cadere vltra punctum C, verſus B.
Reſolutio. pag. 81
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.
Theorema. Exemplum XII. ſit B E perpendicularis rectæ B D, quæ biſariam ſecta ſit in C; & protracta, ad partes B, in A, vt C A æqualis ſit C E. Dico eſſe A B ad B E, vt B E ad A D.
Reſolutio. pag. 82
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.
Theorema. Exemplum XIII. ſi per puncta A, E, D, tranſeat circuli peripheria, & ex puncto A erecta ſit perpendicularis A F, occurrens peripheriæ in F, Dico quatuor rectas A F, A B, B E, A D, eſſe proportionales in continua ratione.
Præparatio.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 83
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.
Theorema. Exemplum XIV. ſi ſit quædam recta A E diuiſa in punctis B, C, D, ea lege vt A B, ad C D, ſit in ratione F H, ad F G, & B D ad B E ſit in ratione H G, ad F H. Dico A E, ad C E, in ratione eſſe vt F H ad F G.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 84
Scholion.
Conſpectus Reſolutionis atque compoſitionis.
Theorema. Exemplum XV. ſi ſit recta A F diuiſa in partes A B, B C, C D, D E, E F, ita vt A B, ſit æqualis

qualis E F. Sit autem vt F C ad C E, ita A C, ad C D, & vt G H, media proportionalis inter B C, C E ad C E, ita C D, ad G I. Dico eſſe G H, C E, C D, G I, quatuor diſcretè proportionales, ita vt H I, differentia extremarum, ad D E, differentiã mediarum rationem habeat, vt A B, vel E F ad G H.

Reſolutio.

Compoſitio. pag. 85

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Theorema. Exemplum XVI. Sit circulus D B F G, cuius diameter D G diuiſa ſit in puncto C, vnde ſit erecta perpendicularis C F, diameter verò G D producta ſit ad partes D vſque ad A, ita vt rectangulum G A D ſit æquale quadrato C F; per puncta verò A, & C deſcripto ſemicirculo A E C; itemque D I C, circunferentia verò A K H ſumpta D H æquali ipſi A D, erectiſque H I, D E, atque ductis C I, A E. Dico eſſe vt A E ad C F, ita C I ad C D. pag. 86

Reſolutio.

Compoſitio. pag. 87

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Scholion. Aduertenda quædam.

Aliud notandum.

Quo pacto Analyſta ſuppoſitis vti debeat. pag. 88

Hypotheſis non officit, niſi ſit in quæſtione.

Ad demonſtrandi candorem magis valent Artis præcepta, quàm aſſuetudo.

Theorema. Exemplum XVII. Sit circulus ABC, cuius centrum L; diameter autem A B, & recta F B tangat illum in B, & F C, in C; ductaque ſit B C; & inſuper F L, quæ occurrat peripheriæ in K, & ipſi B C in I. ducta inſuper A C. Dico eſſe vt F K, ad K I, ita B A, ad A C.

Reſolutio,

Lemma. pag. 89

Compoſitio.

Theorema. Exemplum XVIII. Sint circuli F O K, F P I, interius tangentes circulum A E B in puncto F; ſint deinde circuli ſecantes priores iam dictos in punctis F, & E, & in I, & K, in directum cum F. Ducta ſit F C occurrens peripherijs in punctis H, Q, L, R, C. Dico eſſe vt H L, ad L C, ita Q R ad R C; atque ita omnia intercepta linearum ſegmenta inter arcus circulorum tangentium proportionalia eſſe omnibus interceptis inter arcus circulorum ſecantium.

Reſolutio,

Lemma.

Compoſitio, pag. 90

Theorema. Exemplum XIX. Sit circulus K D F H G, in cuius circumferentia duobus aſſumptis punctis D, & F, itemque duobus æqualibus arcubus K O, H O; ita vt ductis rectis K D, G F, atque continuatis ad C; item G D, H F, & continuatis ad B; ductaque D H; centro H, interuallo H D, deſcripto circulo D E O, & centro G, interuallo G D, deſcripto circulo A D P; ductis tangentibus C A, B I; & perpendicularibus A M, I N; item A L, & I E, chordis, quæ angulos C A M, B I N, biſariam ſecent. Dico circulum, cuius centrum G, ad circulum, cuius centrum H, rationem habere, vt quadratum chordæ A L, ad quadratum chordæ I E.

Reſolutio,

Lemma. pag. 91

Compoſitio,

Theorema. Exemplum XX. Si circulus A B C, cuius centrum M. diameter B H, & recta D H tangat illum in H, ductis quotcunque B D, B E, B F, B C, proportionalibus occurrentibus peripheriæ in punctis A, I, K, L; & accepto quouis puncto C, ductiſque A C, I C, K C, L C; atque ducta B C, circa hanc deſcripto circulo, qui ſecet prædictas rectas in punctis M, N, O, P. Dico L P, K O, I N, A M, proportionales eſſe in eadem ratione cum rectis D B, E B, F B, G B.

Reſolutio.

Compoſitio. pag. 92

Theorema. Exemplum XXI. Sit A D diuiſa biſariam in E, & ad extremum D erecta ſit perpendicularis D C: & ex E ducta ſit E C, quæ ſit protracta ad partes C; mox autem acceptis quotcunque punctis G, H, I, &c. à punctis autem G, H, I, ductæ ſint ad punctum A, rectæ G A, H A, C A, I A, & ad punctum D ductæ ſint G D, H D, I D, ſitque D C biſariam diuiſa in K. Dico differentiam quadratorum A G, G D, ad triangulum A G D, vel differentiam quadratorum A H, H D, ad triangulum A H D, & ſic de reliquis, rationem habere vt A O, ad D K.

Reſolutio.

Compoſitio. pag. 93

Corollarium.

Theorema. Exemplum XXII. Sit circulus A B C D, per cuius centrum E, tranſeat recta H D; atque H C tangat ipſum in C; recta verò C A ſecet B D ad rectos angulos in K; ducta verò ſit H O. Dico eſſe, vt G I ad I F, ita quadratum H C, ad quadratum H F.

Reſolutio.

Compoſitio. pag. 94

Theorema. Exemplum XXIII. Sit triangulum æquilaterum A B C; producto latere A C vſque ad E, ita vt A C, C E ſint æquales, excitata A D perpendiculari, ductaque E B, quæ illi occurrat in D: ex B cadat B K, perpendicularis ad A C. Dico D B eſſe ſemidiametrum circuli, in quo triangulum A B C inſcribi poteſt.

Reſolutio.

Compoſitio. pag. 95

Scholion.

Theorema: Exemplum XXIV. Sit recta A B, diuiſa in punctis D, E, F, G, H, & vt I K, ad H E, ita ſit E H, ad F H, & vt I K plus F H, ad F H, ita A E, ad E D; at verò D G poſſit rectangulum B D E; ſitque vt I K, ad E H, ita K L ad E G. Dico eſſe aggregatum quadratorum K L, A G æquale rectangulo E A B.

Reſolutio.

Lemma primum. pag. 96

Lemma ſecundum.

Compoſitio.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

De Theorematibus pertinentibus ad Sectiones Conicas, aliaſque lineas. Cap. III.

INtereſt Analyſtæ linearum omnium naturam habere perſpectam pag. 97

De quibus agendum.

Veteres geneſin linearum ad motum retulerunt.

Conicarum ſectionum ortus in plano. pag. 98

Parabolæ ortus in plano.

Hyperbolæ ortus in plano. pag. 99

Ellipſis ortus in plano.

Theorema. Exemplum XXV. Data ſit Parabole A B C, in qua diametrorum vertices ſint A, & B, ducta verò ſit A B, & E H ordinatim applicata ſit ad diametrum B D, vt protracta, quæ ſupra A C, occurrat alteri diametro protractæ ad partes A in I, & quæ infra, occurrat E A protractæ ad partes A, in I; ea tamen lege ducta ſit vtraque ordinatim applicata, vt I E ſit æqualis F G. Dico ſuperiorem ſemiordinatam ab A B, & inferiorem a diametro A F, diuidi in F, extrema, ac media ratione.

tes. pag. 68

Quæ hactenus dicta ſunt de Methodo Antiqua, Exemplis illuſtrantur ad Reſolutionem, & Compoſitionem Theorematum. Caput Secundum.

THeorema. Exemplum I, Si recta linea extrema, ac media ratione ſecta fuerit, maior portio aſſumens dimidium totius, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia fit, quadrati. pag. 69

Antecedentis Theorematis Reſolutio.

Reſolutionis examen. pag. 70

Eiuſdem Theorematis Compoſitio.

Compoſitionis examen.

Scholion.

Animaduerſione digna.

Theorema. Exemplum II. Si recta linea partis ipſius quintuplum poſſit, dupla dictæ partis, extrema, ac media ratione ſecta, maior portio reliqua pars eſt eius, quæ à principio rectæ lineæ.

Antecedentis Theorematis reſolutio. pag. 71

Reſolutionis examen.

Eiuſdem Theorematis Compoſitio. pag. 72

Compoſitionis examen.

Scholion.

Præceptum ad Reſolutionem.

Præceptum ad Compoſitionem.

Theorema. Exemplum III. Sit ſemicirculus A B C, & inflectatur A B D, ſitque A B æqualis B D; ipſi verò B D, ducatur, ad rectos angulos D E, & B E iungatur; cui ad rectos angulos ducatur E F, ſitque centrum G, & vt AG, ad G D, ita ſit D H, ad H F, & iungatur H E. Dico angulum B E D, angulo D E H æqualem eſſe. pag. 73

Præparatio.

Reſolutio.

Compoſitio.

Scholion. pag. 74

Theorema. Exemplum IV. Sit ſemicirculus in recta linea A B, atque à punctis A, B ipſi A C B ad rectos angulos agantur rectæ lineæ B D, A E, & ducatur vtcunque D E, à puncto autem F, ipſi D E ad rectos angulos agatur F G, quæ cum A B in puncto G conueniat. Dico rectangulum contentum A E, B D, rectangulo A G B æquale eſſe.

Reſolutio.

Compoſitio.

Auctoris exempla. pag. 75

Theoreme. Exemplum V. Si fuerit ſemicirculus ſuper diametrum A B, & eductæ fuerint ex C duæ lineæ tangentes illum in duobus punctis D, & E; iunctæque fuerint E A, D B ſe mutuò ſecantes in F; & iuncta fuerit C F, & producatur ad G. Dico C G perpendicularem eſſe ipſi A B.

Præparatio.

Reſolutio.

Lemma.

Compoſitio. pag. 76

Conſpectus Reſolutionis atque Compoſitionis.

Theorema. Exemplum VI. Si ſuper A B rectam ex centro E deſcriptus ſit ſemicirculus A C B, & in eo aptata ſit A C æqualis ſemidiametro, nempè A E vel E B; ſitque A C bifariam diuiſa in D; & ex E ducta ſit E D, quæ protracta perueniat ad peripheriam in F: ductæque ſint B F, A F. Dico B F, E F, A F eſſe in continua ratione.

Reſolutio. pag. 77

Compoſitio.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Theorema. Exemplum VII. Si recta linea extrema, ac media ratione ſecetur. Dico quadratum totius; rectangulum ſub tota, & ſegmento maiori; rectangulum ſub tota, & ſegmento minori in continua eſſe ratione.

Præparatio ad Reſolutionem.

Reſolutio.

Compoſitio. pag. 78

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Theorema. Exemplum VIII. Si fuerint tres quantitates proportionales, aggregatum quadratorum ex media, & maiori extrema ad rectangulum contentum ſub iiſdem, rationem habet, vt aggregatum extremarum ad mediam.

Reſolutio.

Compoſitio.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis. pag. 79

Theorema. Exemplum IX. Sit ſemicirculus in recta A B, ita vt ſit protracta hæc ad quodcunque punctum C, & ab eo ducta ſit CD, occurrens conuexo peripheriæ in E. Dico arcum A D maiorem eſſe arcu B E.

Reſolutio.

Compoſitio.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Theorema. Exemplum X. In omni triangulo rectangulo vt eſt hypothenuſa ad aggregatum laterum ambientium angulum rectum, ita hoc aggregatum, ad aggregatum ex hypothenuſa, & duplo catheto.

Reſolutio. pag. 80

Compoſitio.

Conſpectus Reſolutionis atque Compoſitionis.

Th. Exemplum XI. In quadrante D E A, & ſemicirculo D C A ſit ducta vbilibet D C B; & D B, ad BF, ſit in duplicata ratione arcus E B A ad arcum A B. Dico punctum F cadere vltra punctum C, verſus B.

Reſolutio. pag. 81

Compoſitio.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Theorema. Exemplum XII. ſit B E perpendicularis rectæ B D, quæ bifariam ſecta ſit in C; & protracta, ad partes B, in A, vt C A æqualis ſit C E. Dico eſſe A B ad B E, vt B E ad A D.

Reſolutio. pag. 82

Compoſitio.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Theorema. Exemplum XIII. ſi per puncta A, E, D, tranſeat circuli peripheria, & ex puncto A erecta ſit perpendicularis A F, occurrens peripheriæ in F. Dico quatuor rectas A F, A B, B E, A D, eſſe proportionales in continua ratione.

Præparatio.

Reſolutio.

Compoſitio. pag. 83

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Theorema. Exemplum XIV. ſi ſit quædam recta A E diuiſa in punctis B, C, D, ea lege vt A B, ad C D, ſit in ratione F H, ad F G, & B D ad B E ſit in ratione H G, ad F H. Dico A E, ad C E, in ratione eſſe vt F H ad F G.

Reſolutio.

Compoſitio. pag. 84

Scholion.

Conſpectus Reſolutionis atque compoſitionis.

Theorema. Exemplum XV. ſi ſit recta A F diuiſa in partes A B, B C, C D, D E, E F, ita vt A B, ſit æ-

qualis

qualis E F. Sit autem vt F C ad C E, ita A C, ad C D, & vt G H, media proportionalis inter B C, C E ad C E, ita C D, ad G I. Dico eſſe G H, C E, C D, G I, quatuor diſcretè proportionales, ita vt H I, differentia extremarum, ad D E, differentiã mediarum rationem habeat, vt A B, vel E F ad G H.

Reſolutio.

Compoſitio. pag. 85

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Theorema. Exemplum XVI. Sit circulus D B F G, cuius diameter D G diuiſa ſit in puncto C, vnde ſit erecta perpendicularis C F; diameter verò G D producta ſit ad partes D vſque ad A, ita vt rectangulum G A D ſit æquale quadrato C F; per puncta verò A, & C deſcripto ſemicirculo A E C; itemque D I C, circunferentia verò A K H ſumpta D H æquali ipſi A D, erectiſque H I, D E, atque ductis C I, A E. Dico eſſe vt A E ad C F, ita C I ad C D. pag. 86

Reſolutio.

Compoſitio. pag. 87

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Scholion. Aduertenda quædam.

Aliud notandum.

Quo pacto Analyſta ſuppoſitis vti debeat. pag. 88

Hypotheſis non officit, niſi ſit in quæſtione.

Ad demonſtrandi candorem magis valent Artis præcepta, quàm aſſuetudo.

Theorema. Exemplum XVII. Sit circulus ABC, cuius centrum L; diameter autem AB, & recta FB tangat illum in B, & FC, in C; ductaque ſit BC; & inſuper FL, quæ occurrat peripheriæ in K, & ipſi BC in I. ducta inſuper AC. Dico eſſe vt FK, ad KI, ita BA, ad AC.

Reſolutio.

Lemma. pag. 89

Compoſitio.

Theorema. Exemplum XVIII. Sint circuli FOK, PFT, interius tangentes circulum ABE in puncto F; ſint deinde circuli ſecantes priores iam dictos in punctis F, & B, & in I, & K, in directum cum F. Ducta ſit FC occurrens peripherijs in punctis H, Q, L, R, C. Dico eſſe vt HL, ad LC, vt QR ad RC; atque ita omnia intercepta linearum ſegmenta inter arcus circulorum tangentium proportionalia eſſe omnibus interceptis inter arcus circulorum ſecantium.

Reſolutio.

Lemma.

Compoſitio. pag. 90

Theorema. Exemplum XIX. Sit circulus KDFHO, in cuius circumferentia duobus aſſumptis punctis D, & F, itemque duobus æqualibus arcubus KG, HO; ita vt ductis rectis KD, GF, atque continuatis ad C; item GD, HF, & continuatis ad B; ductaque DH; centro H, interuallo HD, deſcripto circulo DBO, & centro G, interuallo GD, deſcripto circulo ADP; ductis tangentibus CA, BI; & perpendicularibus AM, IN; item AL, & IE, chordis, quæ angulos CAM, BIN, bifariam ſecent. Dico circulum, cuius centrum G, ad circulum, cuius centrum H, rationem habere, vt quadratum chordæ AL, ad quadratum chordæ IE.

Reſolutio.

Lemma. pag. 91

Compoſitio.

Theorema. Exemplum XX. Si circulus ABC, cuius centrum M, diameter BH, & recta DH tangat illum in H, ductis quotcunque BD, BE, BF, BC, proportionalibus occurrentibus peripheriæ in punctis A, I, K, L; & accepto quouis puncto C, ductiſque AC, IC, KC, LC; atque ducta BC, circa hanc deſcripto circulo, qui ſecet prædictas rectas in punctis M, N, O, P. Dico LP, KO, IN, AM, proportionales eſſe in eadem ratione cum rectis DB, EB, FB, GB.

Reſolutio.

Compoſitio. pag. 92

Theorema. Exemplum XXI. Sit AD diuiſa bifariam in E, & ad extremum D erecta ſit perpendicularis DO: & ex E ducta ſit EC, quæ ſit protracta ad partes C; mox autem acceptis quotcunque punctis G, H, I, &c. à punctis autem G, H, I, ductæ ſint ad punctum A, rectæ GA, HA, CA, IA, & ad punctum D ductæ ſint GD, HO, ID, ſitque DC bifariam diuiſa in K. Dico differentiam quadratorum AG, GD, ad triangulum AGD, vel differentiam quadratorum AH, HD, ad triangulum AHD, & ſic de reliquis, rationem habere vt AD, ad DK.

Reſolutio.

Compoſitio. pag. 93

Corollarium.

Theorema. Exemplum XXII. Sit circulus ABCD, per cuius centrum E, tranſeat recta HD; atque HC tangat ipſum in C; recta verò CA ſecet BD ad rectos angulos in K; ducta verò ſit HO. Dico eſſe, vt G I ad I F, ita quadratum HC, ad quadratum HF.

Reſolutio.

Compoſitio. pag. 94

Theorema. Exemplum XXIII. Sit triangulum æquilaterum ABC; producto latere AC vſque ad E, ita vt AC, CE ſint æquales, excitata AD perpendiculari, ductaque EB, quæ illi occurrat in D: ex B cadat BK, perpendicularis ad AC. Dico DB eſſe ſemidiametrum circuli, in quo triangulum ABC inſcribi poteſt.

Reſolutio.

Compoſitio. pag. 95

Scholion.

Theorema: Exemplum XXIV. Sit recta AB, diuiſa in punctis D, E, F, G, H, & vt IK, ad HE, ita ſit BH, ad FH, & vt IK plus FH, ad FH, ita AE, ad ED; at verò OG poſſit rectangulum BDE; ſitque vt TK, ad EH, ita KL ad EG. Dico eſſe aggregatum quadratorum KL, AG æquale rectangulo EAB.

Reſolutio.

Lemma primum. pag. 96

Lemma ſecundum.

Compoſitio.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

De Theorematibus pertinentibus ad Sectiones Conicas, aliaſque lineas. Cap. III.

INtereſt Analyſtæ linearum omnium naturam habere perſpectam pag. 97

De quibus agendum.

Veteres geneſin linearum ad motum retulerunt.

Conicarum ſectionum ortus in plano. pag. 98

Parabolæ ortus in plano.

Hyperbolæ ortus in plano. pag. 99

Ellipſis ortus in plano.

Theorema. Exemplum XXV. Data ſit Parabole ABC, in qua diametrorum vertices ſint A, & B, ducta verò ſit AB, & EH ordinatim applicata ſit ad diametrum BD, vt protracta, quæ ſupra AC, occurrat alteri diametro protractæ ad partes A in I, & quæ infra, occurrat BA protractæ ad partes A, in I; ea tamen lege ducta ſit vtraque ordinatim applicata, vt IA ſit æqualis FG. Dico ſuperiorem ſemiordinatam ab AB, & inferiorem à diametro AF, diuidi in F, extrema, ac media ratione.

Reſolutio.
Lemma. pag. 100
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.
Theorema. Exemplum xxvi. Sit parabole A B C, cuius baſis A C, tangens verò G K, diametro autem ſit æquidiſtans A K, & in A C ſumpto quolibet puncto E, & eidem diametro ducta parallela E G, quæ parabolæ occurrat in F. Dico eſſe vt A K, ad E G, ita E G, ad G F. pag. 101
Reſolutio.
Lemma.
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis. pag. 102
Theorema. Exemplum xxvii Sit ellipſis A B C D, cuius centrum M, maior axis B D, minor verò A C; producto maiori axe D B ad partes B, fit acceptum quodcunque punctum G, ex quo ducta ſit G H, tangens perimetrum ſectionis in H, & per H ducta ſit ad B D perpendicularis H N; ſuper G M ſit deſcriptus ſemicirculus G I M; ſitque protracta N H, ad partes H, donec peripheriæ occurrat in I. Dico M I, M B eſſe inter ſe æquales.
Præparatio.
Reſolutio. pag. 103
Lemma 1.
Lemma 2.
Lemma 3.
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis. pag. 104
Theorema. Exemplum xxviii. Sit ſemiellipſis A B C, cuius centrum M, minor axis A C, & ſemimaior B M, in quo protracto ad partes B, ſit acceptum punctum G, à quo ducta G H, tangens perimetrum in H, protracta ad partes H, occurrens in K axi minori: ducta que ſit M F, æquidiſtans tangenti G H. Dico quadratum G H ad quadratum M F rationem habere, vt G H, ad H K.
Præparatio. pag. 105
Reſolutio.
Lemma.
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis. pag. 106
Theorema. Exemplum xxix. Sit hyperbole G B H, cuius diameter A B H, latus tranſuerſum A B, centrum C, recta D E tangat verticem B, cui ductæ ſint æquidiſtantes F K, ſic vt rectangulum A H B, ad rectangulum A H B, plus quadrato C B, ita quadratum H G, ad quadratum H F; erit enim, quod ab alijs oſtenſum eſt, C D F linea recta. Dico C F ſemper propius accedere ad perimetrum hyperboles, nunquàm tamen punctum F coincidere cum puncto G.
Reſolutio.
Lemma. pag. 107
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.
Theorema. Exemplum xxx. Si rectæ quædam contingant hyperbolé cum aſymptotis conuenientes; à punctis verò contactuum ducantur parallelæ vtrique aſymptoto, & diametri; per has rectas vnaquæque diameter ſibi vendicat quatuor triangula æqualia, tùm inter ſe, tùm ijs, quæ per huiuſmodi lineas alijs diametris debentur. pag. 108
Reſolutio.
Lemma.
Compoſitio. pag. 109
Conſpectus Reſolutionis, atque compoſitionis.
Admonitio ad Lectorem pro ijs, quæ dicta ſunt in Exemplo xviii. pag. 110
Pater Bonauentura Cauallerius commendatur.
D. Steſanus de Angelis laudatur.
Non ſolum dantur infinitæ parabolæ, ſed etiam infinitæ hyperbolæ. pag. 111
Dantur etiam infinitæ Ellipſes.
Alia ratione ſectiones conicæ conſiderantur.
De reliquis Lineis. pag. 112
Præter Conicarum Sectionum lineas, etiam innumeræ ſuperſunt.
De lineis, quas Auctor excogitauit, in ſecundo lib. differendum.
Linea helica, ſeu ſpiralis ex Antiquis lineis admodum elegans eſt.
Lineæ ſpiralis deſcriptio ab Archimede tradita.
Prioris defioitionis explicatio.
Spiralis principium quid. pag. 113
Circulationis principium quid.
Archimedes à quibuſdam reprehenditur.
De Spiralibus tractatio ab Archimede inſtituta potiùs Phyſico Geometrica eſt, quàm purè Geometrica.
Spiralis ortus per communem ſectionem plani cum ſolido.
Cylindrico ſpirale.
Geometrica ipſius ſpiralis primariæ deſcriptio.
Theorema. Exemplum xxxi. Si in ſpiralem ex prima reuolutione ortam incidant duæ, vel plures lineæ à puncto, quod eſt principium ſpiralis, & producantur ad circumferentiam vſque primi circuli: eandem rationem inter ſe habebunt iſtæ in ſpiralem incidentes, quàm arcus circuli medij inter terminum ſpiræ & limites linearum productarum in circumferentia factos, ſumptis in præcedentia arcubus à fine ſpiralis. pag. 114
Reſolutio.
Theorema ab Archimede Phyſico-Geometricè oſtenſum, purè Geometricè ab Auctore demonſtratur.
Compoſitio.
Spiralis primaria Archimedæa. pag. 115
Linea prima quid in geneſi ſpiralis.
Linea ſecunda quid.
Supradictorum explicatio.
Primum ſpatium quid.
Secundum ſpatium quid.
Antecedentia quid.
Conſequentia quid.
Circulus primus. Circulus ſecundus &c.
Aliæ conſiderationes lineæ ſpiralis ſecundùm diuerſas hypotheſes.
Spirales primi ordinis.
Alia ſpecies ſpiralis 2.
Alia ſpecies ſpiralis 3.
Alia ſpecies ſpiralis 4.
Spiralis diuerſi ordinis. pag. 116
Species ſpiralis diuerſi ordinis.
Species 2.
Species 3.
Aliæ etiam ſpirales oriri poſſunt pertinentes ad primum ordinem ſecundum diuerſas combinationes.
Aliæ ſpirales pertinentes ad ſecundum ordinem.
Linea, quam deſcriberet graue deſcendens in plano æquatoris, ex hypotheſi quod tellus moueretur, motu tamen ſolo diurno.
Lineæ ſpirales concipi poſſunt deſcriptæ ſuper alias

alias ſuperficies.
Infinitæ ſpirales dantur, ſicut infinitæ ſectiones conicæ.
Spiralis prima, & linearis.
Spiralis quadratica.
Spiralis cubica.
Spiralis quadrato-quadratica.
Etiam circulum conſiderari poſſe, prout ſumpta fuit conſideranda ſpiralis. pag. 117
Theorema. Exemplum xxxii. ſi in ſpiralem vna quidem circumuolutione deſcriptam, à principio ſpiralis rectæ quotlibet cadant, quæ æquales inter ſe ſe angulos contineant, ſe ſe mutuò æqualiter excedent.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 118
Linea recta ſpiralem tangit in puncto.
Demonſtratio, quæ ſupponit tempus, ac motum.
Aliqua ſpiralis accidentia.
Spiralis proprietas, quæ fuit indirectè oſtenſa, directè, & oſtenſiuè demonſtratur.
Aliæ inſignes proprietates ſpiralis. pag. 119
In quo præcipue Analyſtæ ſolertia eluceat.
Fit reditus ad ſpirales. pag. 120
Linea quadratrix, & eius origo antiqua Phyſico-geometrica.
Hæc linea quibuſdam non arriſit. pag. 121
Geneſis quadratricis Geometrica, Explicatio.
De quadratricis vſu poſt modum differendum.
Cyſſoides linea conſideratu digna. pag. 122
Præcipuus eius vſus ad indagandas duas medias continuè proportionales inter duas datas.
Natura Conchilis explicatur. pag. 123
Huius lineæ proprietates.
Beneficio huius lineæ præclara Problem. ſoluuntur.
Huius etiam auxilio duæ mediæ in continua ratione reperiuntur.
Cycloidis lineæ ortus, atque Natura.
Genitor Cycloidis, & eiuſdem baſis.
Epicycloïs linea nouiter ab Auctore excogitata. pag. 124
Ex interſectione variarum ſuperficierum, variæ quoque emergunt lineæ.
Solida ex reuolutione &c.
Cylindro parabolicum.
Solidum Cylindri hyperbolicum &c.
Vniuerſalis Methodus reſolutiua in omnibus adhiberi poteſt; plerunque tamen adeunda eſt vna, vel altera peculiaris.
Theorema. Exemplum xxxiii. Cylindrus, cuius altitudo eſt ſpheræ diameter, baſis verò eſt circulus maximus eiuſdem ſpheræ, ad ſpheram ipſam eſt in ratione ſeſquialtera. pag. 125
Theorema iſtud ab Archimede demonſtratum ab Auctore longè aliter, & quidem oſtenſiuè demonſtratur.
Reſolutio.
Compoſitio.

De exercitio Analytico exercendo in Reſolutionibus, atque Compoſitionibus Theorematum, ad cæteras partes Matheſeos pertinentium. Cap. IV.

EX Arithmeticis deſumuntur exempla. pag. 126
Theorema. Exemplum xxxiv. Differentia laterum duorum quadratorum ducta in quodlibet latus facit differentiam inter quadratum prædicto lateri reſpondens, mediumque proportionalem inter ipſos numeros quadratos.
Reſolutio.
Compoſitio.
Theorema. Exemplum xxxv. Duobus numeris quadratis ſi numerus idem ſigillatim additus fuerit, aggregatis per laterum differentiam ſigillatim diuiſis, numerus factus ex quotientum mutuo ductu multatus numero, qui fuit quadratis additus, euadit quadratus. pag. 127
Reſolutio.
Lemma primum.
Lemma ſecundum.
Compoſitio. pag. 128
Ex Opticis deſumuntur exempla.
Theorema. Exemplum xxxvi. ſit oculus A, cui obiecta ſint mobilia B. & C, quorum illud propinquius, hoc autem remotius, ſintque duæ parallelæ BD, CE, in quibus prædicta mobilia æquè velociter cieantur. Dico eo tempore, quo mobile B promouetur, mobile C oculo A, videri tardius promouiſſe.
Reſolutio.
Compoſitio.
Theorema. Exemplum xxxvii. Corpus opacum tot fundit vmbras, quot ſunt luminoſa, quibus opponitur. pag. 129
Reſolutio.
Compoſitio.
Scholion. pag. 130
Vmbra quid.
Tenebræ quid.
Ex Catoptricis exempla deſumuntur.
Duo ſunt, quibus vniuerſa Catoptrica innititur.
Heliodorus in Opticis.
Quid præcipuè curandum Analyſtæ, cùm de re quapiam ſuſcipit tractationem.
Cur angulus reflexionis æqualis ſit ang. incidẽtiæ.
Qua ratione id Ptolemæus demonſtrauerit. p. 131
Notanda quædam.
Demonſtratio quorundam. pag. 132
Reijcitur talis demonſtratio.
Alius explicandi modus à Neoterico quodam adhibitus. pag. 133
Superior ratio reijcitur.
Carteſij demonſtratio de æqualitate anguli incidentiæ & reflexionis perpenditur.
Carteſij demonſtratio parùm laudatur.
Aliorum quoque demonſtratio improbatur.
Kepleri ratio reijcitur. pag. 134
Auctoris ratio affertur.
Alia Auctoris ratio affertur.
Theorema. Exemplum xxxviii. Angulus reflexionis æqualis eſt angulo incidentiæ. pag. 135
Reſolutio.
Compoſitio.
Quod in Catoptricis maximè decantatum. pag. 136
Euclides ſupradicta malè demonſtrauit. pag. 137
Præmittenda quædam.
Keplerus reprehenditur.
Quorundam deceptio. pag. 138
Suppoſitum.
Theorema. Exemplum xxxix. ſit pupillæ diameter BC, res aſpectabilis ſit A, vnde cadant radij A O, A I, qui ſuper ſpeculi ſuperficiem D I H, reflectantur ad puncta B, C. Dico radios reflexos B D, C I, protractos ad partes D, I, occurrere rectæ cadenti ex A perpendiculariter ad ſpeculi ſuperficiẽ in infinitum protractæ.
Reſolutio. pag. 139
Compoſitio.
Theorema. Exemplum xl. Iiſdem poſitis. Dico

ſecundo

ſecundò concurſum eſſe in vno,eodemque puncto.
Reſolutio.
Lemma. pag. 140
Compoſitio.
Theorema. Exemplum xLI. In quolibet ſpeculo imago apparet in concurſu catheti cum radio ab oculo per reflexionis punctum directè producto.
Notanda quædam.
Vulgatum Theorema apud Opticos.
Communiſſima Philoſophorum ſenteotia. pag. 141
Eam eſſe falſam Auctor oſtendit.
Experimenti cuiuſdam declaratio.
Experimentũ præclarũ ad confirmandum effluuiũ.
Reſpooſionis præoccupatio. pag. 142
Ariſtotelis auctoritas ex 2. de Anima.
Ariſtotelis Auctoritas ex 4. Metheororum textu 34
Ex corporibus omnibus expirare effluuia.
Experimeotum ad id comprobandum mirabile.
Admonitio.
Non omnis qualitas negauda eſt. pag. 143
Explicatio quorundam. pag. 144
Aliorum explicatio.
Reijcitur.
Radij exeuntes à centro corporis ſolaris ſunt validiores. pag. 145
Tria ſuot radiorum genera.
Explicatio ſupradictorum.
keplerus haud benè de intenſione locutus.
Definitio prima. Diuaricationes radiorum ſunt eorundem radiorum interualla, accepta in circumferentijs, ad quas è circulorum centris ijdem radij peruenīuot.
Defioitio ſecunda. Similes diuaricationes dicuntur, quæ accipiuntur penes interualla ſimilia circumferentiæ vnius, & alterius circumferentiæ.
Theorema. Exemplum xLII. Si virtutis iotenſio attendatur in lineis. Eadem eſt ratio arcus ad arcum ſimilem reciprocè, quæ eſt intenſionis ad intenſionem virtutis.
Reſolutio. pag. 146
Lemma.
Compoſitio.
Notanda quædam.
Corollarium.
Explicatio quædam. pag. 147
Thermometrum ab Auctore adinuentum exquiſitè repræſentans.
Thermometrum alterum exquiſitiùs differentias oſteodens. pag. 148
Multorum error.
Claudij Berigardi ſententia.
Malè hanc Matheſeos partem plerique tractarunt. pag. 149
Theorema. Exemplum xLIII. Si in ſpeculum concauo-ſphæricum radius parallelus ei, qui per ſpeculi centrum, extra tamen ſextantem eiuſdem, incideret, dico reflexum eius extra ſpeculum cadere.
Reſolutio.
Compoſitio.
Theorema. Exemplum xLIV. Si fuerit ſpeculum cauo-ſphæricum, per cuius centrum radius aliquis inciderit in illud; huic autem radio parallelus alter incidat in terminum ſextantis, coius initium punctum eſt, per quod incidit radius per centrum. Dico radium incidentem in ſextantis terminum prædictum, reflecti ad eiuſdem terminum alterum.
Reſolutio. pag. 150
Compoſitio.
Theorema. Exemplum xLV. ſecundò, ijſdem poſitis. Dico reliquorum radiorum, quorum quilibet prædictis duobus eſt parallelus, nullum per reflexionem aſcendere ſupra punctum F, vbi videlicet G D ſemidiameter biſariam diuiditur.
In ſpeculo cauo-ſphærico non fit vnio in puncto, vt in habentibus conicam ſectionem.
Theorema. Exemplum xLVI. Omnes radij ſolares in ſpeculum concauum à parabola quacunque circa manentem axem circumducta procreatum, incidentes, e a lege vt axi æquidiſtent, reflectuntur ad vnum, ac idem axeos punctum, quod videlicet à vertice ſpeculi diſtat interuallo quartæ partis lateris recti illius parabolæ, quæ ſpeculum ipſum deſcribit.
Prout multiplex hypotheſis, ita multiplex reſolutio. pag. 151
Reſolutio variari poteſt pro varietate præparationis.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 152
Reſolutio.
Compoſitio.
Reſolutio. pag. 153
Lemma.
Compoſitio.
Scholion. Supradictorum explicatio.
Speculum hyperbolicum quale. pag. 154
Quomodo radij reflectantur in ſpeculo elliptico.
Quid interſit inter ſpecula ſupradicta.
Theorema. Exemplum xLVII. Si oculus, & aſpectabile ſint in diuerſis medijs ſe mutuò contingentibus, imago apparebit in concurſu catheti, & radij ab oculo per punctum refractionis directè producti.
Multa ſunt conſideratu digna in hac Matheſeos parte.
Radij luminoſi non gracileſcunt, nec atteouantur, quo magis protrahuntur.
Laterna Magica qua Arte fiat. pag. 155
Aliud eſt quoque in Dioptrica conſideratu digniſſimum.
Theorema Mechanicum. Exemplum xLVIII. Grauia appenſa extremitatibus libræ, ſi æquiponderantia extiterint, erit, vt diſtantia ad diſtantiam à centro, ita reciprocè graue ad graue.
Et ſi fuerit, vt diſtantia ad diſtantiam, ita reciprocè graue ad graue, ipſa grauia erunt æquipooderantia.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 156

De Methodo Reſolutiua pro Theorematibus alijs Phyſico-Geometricis. Cap. V.

Platonis Dogma.
Helenæ Corneliæ Piſcopiæ laudes. pag. 157
Difficultas de aſcenſu corporum.
Grauitatis, & leuitatis explicatio.
Experimenta quædam. pag. 158
Preſſio fluidorum colligitur. pag. 159
Archimedis locus explicatur.
Difficultati occurritur.
An extruſum aſcendat motu accelerato. pag. 160
Difficultas in Archimedis doctrina de ijs, quæ vehuntur in humido.
Difficultas in contraria ſententia.
Compoſitio difficultatum.
Extruſio quo pacto contingat. pag. 161
Preſſionis humidarum partium cauſa quid.
Atmoſphæræ altitudinem colligere.
Tychonis opinio.

keplerí

Kepleri ſententia exploditur. pag. 162
Theorema. Exemplum XLIX. ſolidarum magnitudinum per humidum aſcendentium, quæ leuior eſt, ſurſum celeriùs fertur.
Reſolutio.
Compoſitio.
Theorema. Exemplum L. ſolida magnitudo leuior humido per fluidum grauius velocius aſcendit, quàm per leuius. pag. 163
Theorema. Exemplum LI. ſi aliqua fuerit ſolida magnitudo leuior humido, huic autem adiecta ſit alia quæpiam, itidem humido leuior, ſolida magnitudo, hoc aggregatum immiſſum in humidum maiori vi, quàm initio ſola propoſita magnitudo, ſurſum feretur.
Reſolutio.
Compoſitio.
Experimenta quædam. pag. 164
Duo proponuntur inquirenda.
Experimenti explicatio. pag. 165
Notandum.
Theorema. Exemplum LII. ſi certo quodam impetu proijciatur graue ſecundùm directionem eleuatam ſupra lineam horizontalem, & alio itidem impetu ſecundùm eandem directionis lineam idem graue proijciatur. Dico eſſe vt quadratum impetus, ad impetus quadratum, ita ſpatium in linea horizontali ad ſpatium in eadem linea confectum.
Quid impetus, ſiue velocitas.
Per menſuram momenti intelligitur recta, per quam impetus, & momentum poteſt proijcere mobile ab extremo ad extremum ipſius; quod prius intelligendum de deſcenſu. pag. 166
Th. Exemplum LIII. ſi certo quodã impetu proijciatur graue ſecundùm directionem eleuatam ſupra lineã horizontalem, & alio itidem impetu ſecundùm eandẽ directionis lineam idẽ graue proijciatur. Dico eſſe vt quad. impetus, ad impetus quad. ita ſpatium in linea horizontali ad ſpatium in eadem linea confectum.
Quid intelligatur per momenti menſuram. pag. 167
Reſolutio.
Compoſitio.
Experimentum de bombarda explodente pilam horizontaliter. pag. 168
Experimentum proponitur alterum.
Experimentum alterum. pag. 169
Theorema. Exemplum LIV. Magnitudo rarefactione adaucta vi caloris æquè inuadentis ſingulas eius partes, menſuras acquirit maiores in ratione, qua ab initio. pag. 170
Reſolutio.
Compoſitio.
Reſolutio. pag. 171
Compoſitio.
Quæ de Annulo æneo dicta ſunt, Auctor expertus eſt in annulis ligneis iniectis in humidum.
Multos hoc experimentum vexauit. pag. 172
Ex accidenti poteſt idem euenire, vt in funibus, & in muſculis.
Monitum.
Theorema. Exemplum LV. ſi magnitudo aliqua alteratione ſuſcipiat incrementum, dum augetur terminus vnus modo iam dicto, augentur & reliqui.
Theorema. Exemplum LVI. ſi ſolidum aliquod ſit annulare, & agente calore æquè in ſingulas eius partes rarefiat, acquiret menſuras maiores in ratione, quam prius habebat, & latius fiet ſecundum internam ſuperficiem. pag. 173
Theorema. Exemplum LVII. Anguſta fiſtula ex vtroque extremo recluſa immiſſa in humidum ſecundum extremum vnum, per eam humidum ipſum ad certam quandam ſtationem neceſſariò aſcendet. pag. 174
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 175
Alia Reſolutio.
Compoſitio.
Scholion.
Explicatio multorum, quæ faciunt in primis ad inſtitutum.
Libratio, vel per deſcenſum, vel per aſcenſum. pag. 176
Figura non facit ad momentum grauitatis, ſed ad celeritatem motus.
Supradicta de Libratione faciunt etiam ad deſcenſus celeritatem.
Aduertenda quædam. pag. 177
Notanda quædam de acceleratione maiori deſcenſus.
Kepleri deceptio.
Modus explorandi aeris grauitatem. pag. 178
Scholion. pag. 179
Supradictorum Theoria.
Error commiſſus à quodam in aeris ponderatione.
Auctoris modus peculiaris ad explorandam aeris grauitatem.
Theorema. Exemplum LVIII. ſi rei ſtabili Priſma fuerit horizontaliter infixum, ad cuius extremum graue fuerit appenſum. Dico potentiam, qua reſiſtit fractioni, ad graue, reciprocè eſſe, vt longitudo Priſmatis ad ſemi-altitudinem eiuſdem. pag. 180
Reſolutio.
Lemma primum. Si fuerit Vectis A C, cuius hypomochlion B; &c. pag. 181
Reſolutio.
Compoſitio.
Lemma ſecundum, Si Priſma H G D C fuerit erectum &c.
Corollarium primum. pag. 182
Corollarium ſecundum.
Compoſitio.
Scholion.
Auctor agit in Phyſica de potentia, qua corpora reſiſtunt fractioni. pag. 183
Proponitur Theorema.
Aliquorum error.
Supradictorum demonſtratio oſtenſiua. pag. 184
Principale interum. pag. 185
Præmittenda quædam.
Theorema. Exemplum LX. Gradus velocitatis eiuſdem mobilis ſuper diuerſas planorum inclinationes acquiſiti tunc ſunt æquales, cùm eorundem planorum eleuationes æquales ſunt. pag. 186
Reſolutio.
Compoſitio.
Controuerſia inter D. Stephanum de Angelis, & P. Ricciolium perpenditur.
Experimentum de curru. pag. 187
Ex hoc experimento duo colliguntur.
Idem, quod in curru, contingeret, ſi terra in orbem cieretur.
Quod de proiecto dictum fuit aptatur graui deſcendenti.
Telluris immobilitas ex hactenus traditis colligitur. pag. 188
Dum graue ſurſùm proijcitur, nulla interpoſita quiete, motum ſubiret duplicem &c.
Duæ proponuntur difficultates. pag. 189
Occur-

Occurritur primæ difficultati.
Mirabile quoddam proponitur, pag. 190
Rota dum reuoluitur circa proprium axem, ſe habet inſtar penſilis.
Quid ſentiendum de motu telluris. pag. 191
Indifferentia grauis ad omnem motum, commentitia.
Supradictorum confirmatio. pag. 192
Quorundam deceptio.
Perpenditur aliquorum ſententia.
Velocitatis gradus aliquandò non variatur variata directione &c. pag. 195
Theorema. Exemplum LXI. ſi fuerit funependulum A B, quod actum in gyrum deſcribat &c.
Quæſtio 24. apud Ariſtotelem in Mechanicis.
Theorema. Exemplum LXII. Dum circulus, cuius ſemidiameter A B per rectam voluitur B F, omnes concentrici minores A C ſi iunctim moueantur vna volutione percurrunt ſpatium æquale circunferentiæ circuli, cuius ſemidiameter A B. pag. 196
Scholion.

De Experimentis ad Veritates Phyſicas indagandas. Cap. VI.

AD rectè philoſophandum nulla ſecurior via, quam per experimenta.
Philoſophus deluſus ob inaduertentiam propoſiti Problematis.
Experimenta ſunt repetenda. pag. 197
Experimentis Diſciplinarum principia inueniuntur.
In demonſtrando non licet in infinitum abire.
Ex principijs, quædam habita terminorum cognitione cognoſcuntur, quædam aſſuetudine, & quædam experimentis comparantur.
Inductio quàm maximè opportuna ad confirmanda Diſciplinarum principia.
A particularibus ad vniuerſale progredi eſt à poſterioribus ad priora gradum facere.
A ſingularibus ad vniuerſalia progreſſus experimenta ſupponit. pag. 198
Auctor experimẽtis operam nauauit Florentiæ ad ſtabilienda Naturalis Philoſophiæ principia.
Antiperiſtaſis hactenus malè fuit explicata.
Experimentum ad reprobandam antiperiſtaſin, prout hactenus explicari conſueuit.
Reſponſionis præoccupatio.
Experimenta, quibus nonnulli probare nituntur antiperiſtaſin veteri ſenſu explicatam.
Occurritur experimentis allatis. pag. 199
Calx viua magis exardeſcit aqua feruenti, quàm aqua frigida.
Spiritus vini ſuperinfuſus calci viuæ nullam facit mutationem in eius calore, nec illam diſſoluit.
Aquam glaceſcere abſque aeris permixtione comprobatur.
In experimentis conficiendis, nè minima quidem differentia eſt negligenda.
Quomodo chalybis temperatura perficiatur.
E coloribus ad temperaturam quis magis idoneus. pag. 200
Natura vniformi difformi quadam actione operatur.
Experimentum ad magnetis vires explorandas.
Deſcenſus grauium.
Grauia non deſcendunt, magnetica vi à terra attracta.
Aliunde circumſpectio in experiendo probatur.
Gaſſendi opinio. pag. 201
Leuis quorundam in experiendo coniectura.
Animarum plena ſunt omnia 3. de Gen. An. Cap. 11.
Varietas magnoperè ad Vniuerſi pulchritudinem conducit.
Experienti lapis omnis mouendus. pag. 202
Experimenta.
Communis opinio de concoctione ventriculi per modum elixationis.
Calor animalis feruidioris naturæ non excedit æſtiuum, ſole ſcandente Leonem.
Natura vtitur humore, tanquàm fermento ad celebrandam concoctionem in animalium ventriculis.
Experimentum conducens ad cognoſcendum, qua ratione concoctio in ventriculo perficiatur.
Hiſtoria mirabilis, vnde colligitur dari humorem, à quo vitrum corroditur.
Chronometron. Penſile, ſeu pendulum, ſeu funependulum. pag. 203
Præclara Chronometri phænomena. pag. 204
Quorundam error.
Mirabile aliud Chronometri ſymptoma.
Mirabile aliud ſymptoma. pag. 205
Aeris reſiſtentia.
Penſile, cur tandem quieſcat. Opinio quorundam.
Reijcitur.
Opinio Auctoris.
Itus, ac reditus initio prolixiores.
Itus, ac reditus duplici parte conſtant.
Penſile maximè deſeruit obſeruationibus Aſtronomicis. pag. 206
Ygroſtathmos, hoc eſt fluidorum menſura primum.
Secundum, & tertium. pag. 207
Ad aeris humiditatem explorandam inſtrumentum idoneum, Ygrometron. pag. 208
Aliter idem inquiritur. pag. 209
Thermometrum hactenus adhiberi ſolitum omninò inutile.
Optimum ab Auctore adinuentum, & eius conſtructio qualis.
Actio vniformiter difformiter diffuſa non ita deprehenſa eſt ab Auctore, quemadmodum à Scholaſticis deſcribitur.
Ad obſeruandam rerum texturam inſtrumentum idoneum Microſcopion.
Tubi optici inuentio. pag. 210
Sperandum aliquandò futurum, vt reperiatur aliquod inſtrumentum, quo auditus adiuuetur.

A quibus cauendum Analyſtæ, nè deluſus quodammodo videatur. Cap. VII.

THeorema. Exemplum LXIII. ſi recta linea A B ſecta ſit in punctis C, D, E, F, vt exiſtentibus æqualibus partibus A C, C E, &c.
Reſolutio. pag. 211
Compoſitio.
Theorema. Exemplum LXIV. ſi recta linea A B, diuiſa ſit in punctis C, D, E, F, ita vt exiſtentibus æqualibus partibus A C, C E, &c. pag. 212
Reſolutio.
Compoſitio.
A pugnantibus cauendum. pag. 213
Item à ſuperfluo &c.

Quod Artifici magnoperè curandum in oblati Theorematis Reſolutione inſtituenda, Cap. VIII,

Claritas in demonſtrationibus commendabilis;
Theorema. Exemplum LXV. ſit recta quæpiam A B, duplata quidem in D, & ex punctis A, & B, perpendicularibus erectis A H, B I; &c. pag. 214
Reſolutio.
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis. pag. 215
Reſolutio.
Compoſitio;
Reſolutio. pag. 216
Compoſitio.
Theorema. Exemplum LXVI. ſit recta A F, diuiſa in partes A B, B O, D F, inæquales continuò creſcentes, vel decreſcentes, &c.
Præparatio.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 217
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.
Lemma. Exemplum LXVII. ſint tres magnitudines A B, A C, A D. Dico aggregatum differentiarum eſſe differentiam inter maximam, & minimam.
Reſolutio. pag. 218
Compoſitio.
Theorema. Exemplum LXVIII. ſi recta A B, ita diuiſa ſit in C, D, & E, vt quemadmodum eſt A D ad DC, ita ſit B D, ad D E. Dico rectangulum D E B, ad quadratum D E, rationem habere, vt A C ad C D.
Reſolutio.
Compoſitio.
Superior Reſolutionis modus non omninò ſpernendus. pag. 219
Comprobatio.
Reſolutio.
Compoſitio.
Theorema. Exemplum LXIX. ſit Conus, cuius vertex punctum A, baſis autem circulus, cuius diameter B C, &c. pag. 220
Reſolutio.
Compoſitio.
Theorema. Exemplum LXX. ſit Conus, cuius vertex A punctum; baſis verò circulus, cuius diameter B C &c. pag. 221
Reſolutio.
Compoſitio.
Theorema. Exemplum LXXI. ſit Conus, cuius vertex A punctum; baſis circulus, cuius diameter B C &c. pag. 222
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 223

De recta demonſtrandi ratione ab Analyſta ſeruanda. Cap. IX.

Maximè decet, Mathematicum omnem adhibere curam in demonſtrando.
Demonſtrationes Mathematicæ omnium præſtantiſſimæ.
Ad rectè demonſtrandum requiruntur præcepta. pag. 224
Genus demonſtrandi ab effectu ad cauſam.
Aliud genus demonſtrandi à cauſa ad effectum.
Demonſtratio potiſſima per quod cauſæ genus procedat.
Geometria vtitur materiali cauſa, tanquàm demonſtrationis medio. pag. 225
Cauſa itidem formali vtitur.
Demonſtratio per concomitantia ad genus demõſtrationis per cauſam reuocatur; & in Mathematicis frequenter adhibetur.
In Mathematicis demonſtrationibus plerumque medium eſt ſubiecti, aliquandò affectionis definitio.
Mathematicæ definitiones nominales dicuntur.
Quales eſſe debent demonſtrationis præmiſſæ.
Præmiſſarum conditiones.
Primum genus propoſitionum immediatarum ſunt dignitates.
Secundum genus propoſitionum immediatarum.
Tertium genus. pag. 226
Quartum genus.
Poſitiones quales.
Notanda quædam.
Error quorundam deteſtantium Mathematicas demonſtrationes.
Quo pacto demonſtratio debeat ex immediatis conſtare.
Præmiſſæ demonſtrationis euidentes eſſe debent, vel per ſe, vel per alias.
Ineuidentes euidentes fiunt inductione.
Principia qualiter dicantur prima.
Quo pacto præmiſſæ cauſæ dicantur concluſionis.
Quorundam error.
Duplex cauſa; alia in cognoſcendo tantùm, alia in eſſendo, & cognoſcendo ſimul. pag. 227
Præmiſſæ quare priores concluſione.
Notiores.
Certiores, ac euidentiores.
Demonſtratio per propria principia procedit.
Supradictorum probatio inſtituitur.
Nullius ſcientiæ ſubiectum ad aliam ſcientiam transferri poteſt. pag. 228
Bryſonis demonſtratio peccabat ob communia principia. pag. 229
Quomodo ſe haberet Bryſonis demonſtratio.
Circa concluſionem errores quinam contingant.
Primus error.
Secundus error.
Tertius error. pag. 230
Errorum exempla ex Ariſtotele.
Secundi erroris exemplum.
Exemplũ alterum quando genus nomen habet &c.
Sophiſta qui dicatur.
Cognitio trianguli, vel ſecundùm numerum, vel ſecundùm formam. pag. 231
Multiplex demonſtratio, eiuſque ſpecies aſſignantur.
Demonſtratio vniuerſalis præfertur particulari.
Vniuerſale quid.
Demonſtratio ſingularis quando conficiatur.
Mathematicorum, tùm Veterum, tùm Recentiorum error. pag. 232
Redarguitur Auctor Propoſitionis 47. primi Euclidis.
Redargutionis ratio.
Prima Elementa tractantibus in hoc aliquid condonandum.
Exemplum.
Exemplum.
Exemplum alterum. pag. 233
Exemplum.
In quo debeat Analyſta inſudare, plurimamque

Secunda Definitio; Ratio dari dicitur, cui poſſumus eandem exhibere. pag. 25
Definitionis explicatio.
Num proportio quantitas dici mereatur. Dubitandi ratio.
Rationes quibus oſtenditur ratio participare quantitatis naturam.
Iterum idem comprobatur.
Oppoſita ſententia tanquam probabilior defenditur.
Quorundam effugium. pag. 26
Reijcitur.
Reſpondetur ad initio propoſita argumenta.
Ad primum.
Ad ſecundum.
Ad tertium.
Tertia definitio; Recti-lineæ figuræ ſpecie dari dicuntur, quarum & ſinguli anguli dati ſunt, & latera rationem ad inuicem datæ ſunt; Eius explicatio.
Definitio quarta. pag. 27
Definitio quinta. Circulus magnitudine dari dicitur, cuius ea quo ex centro &c.
Definitio ſexta. Poſitione, & magnitudine dari dicuntur &c.
Definitio ſeptima. Circuli ſegmenta magnitudine dari dicuntur &c.
Definitio octaua. Poſitione, & magnitudine dari dicuntur circuli ſegmenta &c.
Definitio nona. Magnitudo, magnitudine maior eſt data, quando oblata data &c.
Definitio decima. Data &c. pag. 28
Definitio vndecima. Magnitudo, magnitudine maior eſt data, quàm in ratione &c.
Definitio duodecima. Magnitudo, magnitudine minor eſt data, quàm in ratione &c.
Definitio decimatertia. Deducta linea dicitur à dato puncto, ad datam poſitione &c.
Definitio decimaquarta. pag. 29
Definitio decimaquinta. Contra poſitione eſt, recta per datum punctum &c.
Propoſitio prima. Datarum magnitudinum ad inuicem, data ratio eſt.
Propoſitio II. Si data magnitudo ad datam aliquam magnitudinem habeat rationem datam, datur etiam hæc alia magnitudine.
Propoſitio III. Si quælibet datæ magnitudines componantur, etiam dabitur quæ ex his componitur magnitudo.
Propoſitio IV. si à data magnitudine, data magnitudo auferatur &c. pag. 30
Propoſitio V. si magnitudo ad ſui ipſius aliquam partem habeat rationem datam &c.
Propoſitio VI. si componantur duæ magnitudines, habentes ad inuicem &c.
Propoſitio VII. si data magnitudo, data ratione ſecetur, vtrumque ſegmentorum &c.
Propoſitio VIII. Quæ ad idem rationem habent datam, habebant &c. pag. 31
Propoſitio IX. si duæ pluresue magnitudines adinuicem habeant rationem &c.
Propoſitio X. si magnitudo, magnitudine maior fuerit data quam &c.
Triplex hypotheſis.
Secunda hypotheſis. pag. 32
Propoſitio XI. si magnitudo, magnitudine maior ſit data, quam in ratione &c.
Propoſitio XII. si fuerint tres magnitudines, & prima quidem cum ſecunda data ſit &c.
Propoſitio XIII. si fuerint tres magnitudines, & earum prima, ad ſecundam &c. pag. 34
Propoſitio XIV. si duæ magnitudines adinuicem, habeant rationem datam, vtrique &c.
Propoſitio XV. si duæ magnitudines habeant adinuicem, rationem datam, & ab vtraque &c.
Propoſitio XVI. si duæ magnitudines adinuicem habeant rationem datam &c. pag. 34
Propoſitio XVII. si fuerint tres magnitudines, & prima quidem, ſecunda maior ſit quam &c.
Propoſitio XVIII. si fuerint tres magnitudines, atque ex his vna, vtraque reliquarum maior &c.
Propoſitio XIX. si fuerint tres magnitudines, & prima quidem magnitudo &c. pag. 35
Propoſitio XX. si datæ duæ fuerint magnitudines, & auferantur ab ipſis &c.
Propoſitio XXI. si fuerint duæ magnitudines datæ, & adijciantur &c. pag. 36
Propoſitio XXII. si duæ magnitudines ad aliam aliquam magnitudinem habeant &c.
Propoſitio XXIII. si totum, ad totum habeat rationem datam, habeant autem & partes &c.
Propoſitio XXIV. si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, prima autem &c. pag. 37
Propoſitio XXV. si duæ rectæ poſitione datæ ſe mutuo inuicem ſecuerint &c.
Scholion.
Propoſitio XXVI. si lineæ rectæ extremitates, poſitione datæ ſint; recta &c.
Propoſitio XXVII. si datæ rectæ lineæ poſitione, & magnitudine data fuerit &c.
Propoſitio XXVIII. si per datum punctum contra datam poſitione rectam agatur &c. pag. 38
Propoſitio XXIX. si ad poſitione datam rectam, datumque in ea punctum &c.
Scholion.
Propoſitio XXX. si à dato puncto in datam poſitione rectam, agatur recta linea &c.
Propoſitio XXXI. si à dato puncto, in datam poſitione rectam &c. pag. 39
Propoſitio XXXII. si in datas poſitione parallelas rectas, agatur recta linea &c.
Propoſitio XXXIII. si in datas poſitione parallelas rectas agatur magnitudine &c.
Propoſitio XXXIV. si in datas poſitione parallelas rectas &c. pag. 40
Propoſitio XXXV. si à dato puncto in datam poſitione rectam, agatur recta linea &c.
Propoſitio XXXVI. si à dato puncto in datam poſitione rectam lineam agatur &c.
Propoſitio XXXVII. si in datas poſitione parallelas &c. pag. 41
Corollarium.
Propoſitio XXXVIII. si in datas poſitione parallelas rectas agatur recta linea &c.
Propoſitio XXXIX. si trianguli ſingula latera, magnitudine &c. pag. 42
Propoſitio XL. si trianguli ſinguli, anguli, magnitudine dati ſint &c.
Propoſitio XLI. si triangulum, vnum angulum datum habeat, circa datum autem angulum &c.
Propoſitio XLII. si trianguli latera adinuicem habeant &c. pag. 43
Propoſitio XLIII. si trianguli rectanguli, circa vnum acutorum angulorum &c.
Propoſitio XLIV. si triangulum habeat, vnum angulum datum, circa alium autem &c.
Propoſitio XLV. si triangulū datum vnum angulum habeat &c. pag. 44
Propoſitio XLVI. si triangulum datum vnum angu-

lum

lum habeat, circa alium autem angulum &c.
Propoſitio XLVII. Data rectilinea ſpecie, in data ſpecie triangula diuiduntur, &c. pag. 45
Propoſitio XLVIII. si ab eadẽ recta deſcribantur triangula data ſpecie &c.
Propoſitio XLIX. si ab eadem recta duo rectilinea quælibet data ſpecie &c.
Propoſitio L. si duæ rectæ lineæ ad inuicem habeant rationem data &c.
Propoſitio LI. si duæ rectæ lineæ habeant ad inuicem &c. pag. 46
Propoſitio LII. si à data magnitudine recta, data figura ſpecie &c.
Propoſitio LIII. si duæ figuræ ſpecie datæ fuerint, & vnum latus vnius ad &c.
Propoſitio LIV. si duæ figuræ datæ ſpeciæ ad inuicem habuerint &c. pag. 47
Propoſitio LV. si ſpatium magnitudine, & ſpecie datum fuerit, eius latera &c.
Propoſitio LVI. si dua æquiangula parallelogramma habuerint ad inuicem &c.
Corollarium.
Propoſitio LVII. si datum ſpatium ad datam rectam applicatum fuerit &c. pag. 48
Propoſitio LVIII. si datum, ad datam rectam applicetur, deficiens data ſpecie &c.
Propoſitio LIX. si datum, ad datam rectam applicetur, excedens datam &c.
Propoſitio LX. si datum ſpecie, & magnitudine parallelogrammum &c. pag. 49
Propoſitio LXI. si ad datæ ſpecie figuræ vnum latus applicetur &c.
Propoſitio LXII. si duæ rectæ ad inuicem habeant rationem datam &c. pag. 50
Propoſitio LXIII. si triangulum ſpecie datum ſit, quod ab vnoquoque laterum &c.
Propoſitio LXIV. si triangulum angulum obtuſum datum habeat &c.
Monitum. pag. 51
Propoſitio LXV. si triangulum, angulum acutum datum habeat, illud ſpatium &c.
Propoſitio LXVI si triangulum habuerit angulum datum, quod ſub rectis &c.
Propoſitio LXVII. si triangulum habuerit datum angulum &c. pag. 52
Propoſitio LXVIII. si duo parallelogramma æquiangula habeant ad inuicem &c.
Propoſitio LXIX. si duo parallelogramma datos angulos habeant &c.
Propoſitio LXX. si duorum parallelogrammorum circa æquales &c. pag. 53
Propoſitio LXXI. si duorum triangulorum circa æquales angulos &c.
Propoſitio LXXII. si duorum triangulorum, & baſes fuerint &c. pag. 54
Propoſitio LXXIII. si duorum parallelogrammorum circa æquales angulos, &c.
Propoſitio LXXIV. si duo parallelogramma datam rationem habeant &c.
Propoſitio LXXV. si duo triangula ad inuicem habeant &c. pag. 55
Propoſitio LXXVI. si à trianguli dati ſpecie vertice linea perpendicularis &c.
Propoſitio LXXVII. si datæ duæ figuræ ſpecie ad inuicem habeant rationem datam &c.
Propoſitio LXXVIII. si data figura ſpecie habeat ad quod &c. pag. 56
Propoſitio LXXIX. si duo triangula vnum angulum, cum angulo æqualem habeant &c.
Propoſitio LXXX. si triangulum datum vnum angulum habuerit, quod autem &c.
Propoſitio LXXXI. si tres rectæ proportionales tribus rectis &c. pag. 57
Propoſitio LXXXII. si quatuor rectæ proportionales fuerint &c.
Propoſitio LXXXIII. si quatuor rectæ ita ad inuicem ſe habeant &c.
Propoſitio LXXXIV. si duæ rectæ datum ſpatium comprehendant &c. pag. 58
Propoſitio LXXXV. si duæ rectæ datum ſpatium comprehendant in angulo dato &c.
Propoſitio LXXXVI. si duæ rectæ datum ſpatium comprehendant in angulo dato &c.
Scholion.
Propoſitio LXXXVII. si duæ rectæ datum ſpatium comprehendant &c. pag. 59
Propoſitio LXXXVIII. si in circulum magnitudine datum acta ſit recta linea, &c.
Propoſitio LXXXIX. si in datum magnitudine circulum, data magnitudine recta acta fuerit, auferet &c.
Propoſitio XC. si in circuli poſitione dati circumferentia, datum &c. pag. 60
Propoſitio XCI. si à dato puncto acta recta fuerit, quæ datum poſitione &c.
Propoſitio XCII. si extra circulum poſitione datum, accipiatur aliquod punctum &c.
Propoſitio XCIII. ſi intra datum poſitione circulum, ſumatur aliquod datum punctum &c.
Propoſitio XCIV. si in circulum magnitudine datum, agatur recta, &c. pag. 61
Propoſitio XCV. si in circuli poſitione dati diametro, ſumatur datum punctom &c.
Scholion. pag. 62
In epilogum rediguntur, quæ in Datorum Libro tradita ſunt.
Libri de Proportionis ſectione ab Appollonio conſcripti, ad Locum faciunt reſolutum.
Problema.
Pappus parùm accuratè horum Librorum retulit argumentum. pag 63
Libri de Spatij ſectione, quos Apollonius deſcripſit ad locum itidem faciebant reſolutum.
Problema.
Libri de determinata ſectione conſcripti quoque ſunt ab Apollonio, qui faciebant ad Locum reſolutum.
Nulla Geometriæ pars eſt vtilior, quàm ea, in qua de lineæ ſectione agitur. pag. 64
Libri duo de Tactionibus ab Apollonio conſcripti, ad locum faciebant reſolutum.
Auctor in his ual ſe feciſſe arbitratur, quamuis plus quam tria millium propoſitionum proprio Marte adinuenerit.
Tres Libros Poriſmatum Auctore Euclide agnouit Antiquitas.
Pappi ſententia ex Bullialdo. pag. 65
Ex ſententia Auctoris quid Pappus docuerit.
Ad quem Propoſitionum ordinem pertineant Poriſmata.
Budæus in Commentarijs Græcæ linguæ. pag. 66
Auctoris ſententia de Poriſmatis natura.
Procli auctoritas in 3. Lib. Euclidis pag. 67
Poriſmatis definitio ex Proclo.
Hac tempeſtate quid per Poriſma intelligatur.
Poriſma non confunditur cum Lemmate.
Perperam aliqui Poriſma confundunt cum Deductione.
Tractandorum argumentum; ac Auctoris par-

tes. pag. 68

Quæ hactenus dicta ſunt de Methodo Antiqua, Exemplis illuſtrantur ad Reſolutionem, & Compoſitionem Theorematum.
Caput Secundum.

Theorema. Exemplum I. Si recta linea extrema, ac media ratione ſecta fuerit, maior portio aſſumens dimidium totius, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia fit, quadrati. pag. 69
Antecedentis Theorematis Reſolutio.
Reſolutionis examen. pag. 70
Eiuſdem Theorematis Compoſitio.
Compoſitionis exameo.
Scholion.
Animaduerſione digna.
Theorema. Exemplum II. Si recta linea partis ipſius quintuplum poſſit, dupla dictæ partis, extrema, ac media ratione ſecta, maior portio reliqua pars eſt eius, quæ à principio rectæ lineæ.
Antecedentis Theorematis reſolutio. pag. 71
Reſolutionis examen.
Eiuſdem Theorematis Compoſitio. pag. 72
Compoſitionis examen.
Scholion.
Præceptum ad Reſolutionem.
Præceptum ad Compoſitionem.
Theorema. Exemplum III. Sit ſemicirculus A B C, & inflectatur A B D, ſitque A B æqualis B D; ipſi verò B D, ducatur, ad rectos angulos D E, & B E iungatur; cui ad rectos anguloa ducatur E F, ſitque centrum G, & vt A G, ad G D, ita ſit D H, ad H F, & iuogatur H E. Dico augulum B E D, angulo D E H æqualem eſſe. pag. 73
Præparatio.
Reſolutio.
Compoſitio.
Scholion. pag. 74
Theorema. Exemplum IV. Sit ſemicirculus in recta linea A B, atque à punctis A, B ipſi A C B ad rectos angulos agantur rectæ lineæ B D, A E, & ducatur vtcunque D E, à puocto autem F, ipſi D E ad rectos angulos agatur F G, quæ cum A B in puncto G conueniat. Dico rectangulum contentum A E, B D, rectangulo A G B æquale eſſe.
Reſolutio.
Compoſitio.
Auctoris exempla. pag. 75
Theorema. Exemplum V. Si fuerit ſemicirculus ſuper diametrum A B, & eductæ fuerint ex C duæ lineæ tangentes illum in duobus punctis D, & E; iunctæque fuerint E A, D B ſe mutuò ſecantes in F; & iuncta fuerit C F, & producatur ad G. Dico C G perpendicularem eſſe ipſi A B.
Præparatio.
Reſolutio.
Lemma.
Compoſitio. pag. 76
Conſpectus Reſolutionis atque Compoſitionis.
Theorema. Exemplum VI. Si ſuper A B rectam ex centro E deſcriptus ſit ſemicirculus A C B, & in eo aptata ſit A C æqualis ſemidiametro, nempè A E vel E B; ſitque A C biſatiam diuiſa in D; & ex E ducta ſit E D, quæ protracta perueniat ad peripheriam in F: ductæque ſint B F, A F. Dico B F, E F, A F eſſe in continua ratione.
Reſolutio. pag. 77
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.
Theorema. Exemplum VII. Si recta linea extrema, ac media ratione ſecetur. Dico quadratum totius; rectangulum ſub tota, & ſegmento maiori; rectangulum ſub tota, & ſegmeoto minori in continua eſſe ratione.
Præparatio ad Reſolutionem.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 78
Conſpectus Reſulutionis, atque Compoſitionis.
Theorema. Exemplum VIII. Si fuerint tres quantitates proportionales, aggregatum quadratorum ex media, & maiori extrema ad rectangulom contentum ſub iiſdem, rationem habet, vt aggregatum extremarum ad mediam.
Reſolutio.
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis. pag. 79
Theorema. Exemplum IX. Sit ſemicirculus in recta A B, ita vt ſit protracta hæc ad quodcunque punctum C, & ab eo ducta ſit C D, occurrens conuexo peripheriæ in E. Dico arcum A D maiorem eſſe arcu B E.
Reſolutio.
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.
Theorema. Exemplum X. In omni triaogulo rectangulo vt eſt hypothenuſa ad aggregatom laterum ambientium angulum rectum, ita hoc aggregatum, ad aggregatum ex hypothenuſa, & duplo cathero.
Reſolutio. pag. 80
Compoſitio.
Conſpectus Reſolotionis atque Compoſitionis.
Th. Exemplum XI. In quadrante D E A, & ſemicirculo D C A ſit ducta vbilibet D C B; & D B, ad B F, ſit in duplicata ratione arcus E B A ad arcum A B. Dico punctum F cadere vltra punctum C, verſus B.
Reſolutio. pag. 81
Compoſitio.
Cooſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.
Theorema. Exemplum XII. ſit B E perpendicularis rectæ B D, quæ biſariam ſecta ſit in C; & protracta ad partes B, in A, vt C A æqualis ſit C E. Dico eſſe A B ad B E, vt B E ad A D.
Reſolutio. pag. 82
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.
Theorema. Exemplum XIII. ſi per puncta A, E, D, tranſeat circuli peripheria, & ex puncto A erecta ſit perpendicularis A F, occurrens peripheriæ in F. Dico quatuor rectas A F, A B, B E, A D, eſſe proportionales in continua ratione.
Præparatio.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 83
Cooſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.
Theorema. Exemplum XIV. ſi ſit quædam recta A E diuiſa in punctis B, C, D, ea lege vt A B, ad C D, ſit in ratione F H, ad F G, & B D ad B E ſit in ratione H G, ad F H. Dico A E, ad C E, in ratione eſſe vt F H ad F G.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 84
Scholion.
Conſpectus Reſolutionis atque compoſitionis.
Theorema. Exemplum XV. ſi ſit recta A F diuiſa in partes A B, B C, C D, D E, E F, ita vt A B, ſit æ-

qualis E F. Sit autem vt F C ad C E, ita A C, ad C D, & vt G H, media proportionalis inter B C, C E ad C E, ita C D, ad G I. Dico eſſe G H, C E, C D, G I, quatuor diſcretè proportionales, ita vt H I, differentia extremarum, ad D E, differentiã mediarum rationem habeat, vt A B, vel E F ad G H.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 85
Conſpectux Reſolutionis, atque Compoſitionis.
Theorema. Exemplum xvi. Sit circulus D B F G, cuius diameter D G diuiſa ſit in puncto C, vnde ſit erecta perpeodicularis C F, diameter verò G D producta ſit ad partes D vſque ad A, ita vt rectangulum G A D ſit æquale quadrato C F; per puncta verò A, & C deſcripto ſemicirculo A E C, itemque D I C, circunferentia verò A K H ſumpta D H æquali ipſi A D, erectiſque H I, D E, atque ductis C I, A E. Dico eſſe vt A E ad C F, ita C I ad C D. pag. 86
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 87
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.
Scholion. Aduertenda quædam.
Aliud notandum.
Quo pacto Analyſta ſuppoſitis vti debeat. pag. 88
Hypotheſis non obſicit, niſi ſit in quæſtione.
Ad demonſtrandi candorem magis valent Artis præcepta, quàm aſſuetudo,
Theorema. Exemplum xvii. Sit circulus ABC, cuius centrum L; diameter autem A B, & recta F B tangat illum in B, & F C, in C; ductaque ſit B C; & inſuper F L, quæ occurrat peripheriæ in K, & ipſi B C in I. ducta inſuper A C. Dico eſſe vt F K, ad K I, ita B A, ad A C.
Reſolutio,
Lemma. pag. 89
Compoſitio.
Theorema. Exemplum xviii. Sint circuli F O K, F P I, interius tangentes circulum A B D in puncto F; ſint deinde circuli ſecantes priores iam dictos in punctis F, & B, & in I, & K, in directum cum F, Ducta ſit F C occurrens peripherijs in punctis H, Q, L, R, C. Dico eſſe vt H L, ad L C, ita Q R ad R C; atque ita omnia intercepta linearum ſegmenta inter arcus circulorum tangentium proportionalia eſſe omnibus interceptis inter arcus circulorum ſecantium,
Reſolutio,
Lemma.
Compoſitio, pag. 90
Theorema. Exemplum xix. Sit circulus K D F H G, in cuius circumſerentia duobus aſſumptis punctis D, & F, itemque duobus æqualibus arcubus K O, H O; ita vt ductis rectis K D, G F, atque continuatis ad C; item G D, H F, & continuatis ad B; ductaque D H; centro H, interuallo H D, deſcripto circulo D E O, & centro G, interuallo G D, deſcripto circulo A D F; ductis tangentibus C A, B I; & perpendicularibus A M, I N; item A L, & I X, chordis, quæ angulos C A M, B I N, bifariam ſecent. Dico circulum, cuius centrum G, ad circulum, cuius centrum H, rationem habere, vt quadratum chordæ A L, ad quadratum chordæ I X.
Reſolutio,
Lemma, pag. 91
Compoſitio,
Theorema. Exemplum xx. Si circulus A B C, cuius centrum M. diameter B H, & recta D H tangat illum in H, ductis quotcunque B D, B E, B F, B C, proportionalibus occurrentibus peripheriæ in punctis A, I, K, L; & accepto quouis puncto C, ductiſque A C, I C, K C, L C; atque ducta B C, circa hanc deſcripto circulo, qui ſecet prædictas rectas in punctis M, N, O, P. Dico L P, K O, I N, A M, proportionales eſſe in eadem ratione cum rectis D B, E B, F B, G B.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 92
Theorema. Exemplum xxi. Sit A D diuiſa bifariam in E, & ad extremum D erecta ſit perpendicularis D C: & ex E ducta ſit E C, quæ ſit protracta ad partes C; mox autem acceptis quotcunque punctis G, H, I, &c. à punctis autem G, H, I, ductæ ſint ad punctum A, rectæ G A, H A, C A, I A, & ad punctum D ductæ ſint G D, H D, I D, ſitque D C bifariam diuiſa in K. Dico differentiam quadratorum A G, G D, ad triangulum A G D, vel differentiam quadratorum A H, H D, ad triangulum A H D, & ſic de reliquis, rationem habere vt A D, ad D K.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 93
Corollarium.
Theorema. Exemplum xxii. Sit circulus A B C D, per cuius centrum E, tranſeat recta H D; atque H C tangat ipſum in C; recta verò C A ſecet B D ad rectos angulos in K; ducta verò ſit H O. Dico eſſe, vt G I ad I F, ita quadratum H C, ad quadratum H F,
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 94
Theorema. Exemplum xxiii. Sit triangulum æquilaterum A B C; producto latere A C vſque ad E, ita vt A C, C E ſint æquales, excitata A D perpendiculari, ductaque E B, quæ illi occurrat in D: ex B cadat B K, perpendicularis ad A C. Dico D B eſſe ſemidiametrum circuli, in quo triangulum A B C inſcribi poteſt.
Reſolutio.
Compoſitio, pag. 95
Scholion.
Theorema: Exemplum xxiv. Sit recta A B, diuiſa in punctis D, X, F, G, H, & vt I K, ad H X, ita ſit E H, ad F H, & vt I K plus F H, ad F H, ita A X, ad E D; at verò D G poſſit rectangulum B D A; ſitque vt I K, ad X H, ita K L ad X G. Dico eſſe aggregatum quadratorum K L, A O æquale rectangulo X A B.
Reſolutio.
Lemma primum. pag. 96
Lemma ſecundum.
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

De Theorematibus pertinentibus ad Sectiones Conicas, aliaſque lineas. Cap. III.

INtereſt Analyſtæ linearum omnium naturam habere perſpectam pag. 97
De quibus agendum.
Veteres geneſin linearum ad motum retulerunt,
Conicarum ſectionum ortus in plano. pag. 98
Parabolæ ortus in plano.
Hyperbolæ ortus in plano. pag. 99
Ellipſis ortus in plano.
Theorema. Exemplum xxv. Data ſit Parabole A B C, in qua diametrorum vertices ſint A, & B, ducta verò ſit A B, & E H ordinatim applicata ſit ad diametrum B D, vt protracta, quæ ſupra A C, occurrat alteri diametro protractæ ad partes A in I, & quæ infra, occurrat B A protractæ ad partes A, in I; ea tamen lege ducta ſit vtraque ordinatim applicata, vt I E ſit æqualis F G. Dico ſuperiorem ſemiordinatam ab A B, & inferiorem a diametro A F, diuidi in F, extrema, ac media ratione.

Reſolutio.
Lemma. pag. 100
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.
Theorema. Exemplum XXVI. Sit parabole A B C, cuius baſis A C, tangens verò G K, diametro autem ſit æquidiſtans A K, & in A C ſumpto quolibet puncto E, & eidem diametro ducta parallela E G, quæ parabolæ occurrat in F. Dico eſſe vt A K, ad E G, ita E G, ad G F. pag. 101
Reſolutio.
Lemma.
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis. pag. 102
Theorema. Exemplum XXVII. Sit ellipſis A B C D, cuius centrum M, maior axis B D, minor verò A C; producto maiori axe D B ad partes B, ſit acceptum quodcunque punctum G, ex quo ducta ſit G H, tangens perimetrum ſectionis in H, & per H ducta ſit ad B D perpendicularis H N; ſuper G M ſit deſcriptus ſemicirculus G I M; ſitque protracta N H, ad partes H, donec peripheriæ occurrat in I. Dico M I, M B eſſe inter ſe æquales.
Præparatio.
Reſolutio. pag. 103
Lemma 1.
Lemma 2.
Lemma 3.
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis. pag. 104
Theorema. Exemplum XXVIII. Sit ſemiellipſis A B C, cuius centrum M, minor axis A C, & ſemimaior B M, in quo protracto ad partes B, ſit acceptum punctum G, à quo ducta G H, tangens perimetrum in H, protracta ad partes H, occurrens in K axi minori: ductaque ſit M F, æquidiſtans tangenti G H. Dico quadratum G H ad quadratum M F rationem habere, vt G H, ad H K.
Præparatio. pag. 105
Reſolutio.
Lemma.
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis. pag. 106
Theorema. Exemplum XXIX. Sit hyperbole G B I, cuius diameter A D H, latus tranſuerſum A B, centrum C, recta D E tangat verticem B, cui ductæ ſint æquidiſtantes F K, ſic vt rectangulum A H B, ad rectangulum A H B, plus quadrato C B, ita quadratum H G, ad quadratum H F; erit enim, quod ab alijs oſtenſum eſt, C D F linea recta. Dico C F ſemper propius accedere ad perimetrum hyperboles, nunquàm tamen punctum F coincidere cum puncto G.
Reſolutio.
Lemma. pag. 107
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.
Theorema. Exemplum XXX. Si rectæ quædam contingant hyperbolē cum aſymptotis conuenientes; à punctis verò contactuum ducantur parallelæ vtrique aſymptoto, & diametri; per has rectas vnaquæque diameter ſibi vendicat quatuor triangula æqualia, tùm inter ſe, tùm ijs, quæ per huiuſmodi lineas alijs diametris debentur. pag. 108
Reſolutio.
Lemma.
Compoſitio. pag. 109
Conſpectus Reſolutionis, atque compoſitionis.
Admonitio ad Lectorem pro ijs, quæ dicta ſunt in Exemplo XVIII. pag. 110
Pater Bonauentura Cauallerius commendatur.
D. Steſanus de Angelis laudatur.
Non ſolum dantur infinitæ parabolæ, ſed etiam infinitæ hyperbolæ. pag. 111
Dantur etiam infinitæ Ellipſes.
Alia ratione ſectiones conicæ conſiderantur.
De reliquis Lineis. pag. 112
Præter Conicarum Sectionum lineas, etiam innumeræ ſuperſunt.
De lineis, quas Auctor excogitauit, in ſecundo lib. diſſerendum.
Linea helica, ſeu ſpiralis ex Antiquis lineis admodum elegans eſt.
Lineæ ſpiralis deſcriptio ab Archimede tradita.
Prioris definitionis explicatio.
Spiralis principium quid. pag. 113
Circulationis principium quid.
Archimedes à quibuſdam reprehenditur.
De Spiralibus tractatio ab Archimede inſtituta potiùs Phyſico Geometrica eſt, quàm purè Geometrica.
Spiralis ortus per communem ſectionem plani cum ſolido.
Cylindrico ſpirale.
Geometrica ipſius ſpiralis primariæ deſcriptio.
Theorema. Exemplum XXXI. Si in ſpiralem ex prima reuolutione ortam incidant duæ, vel plures lineæ à puncto, quod eſt principium ſpiralis, & producantur ad circumferentiam vſque primi circuli: eandem rationem inter ſe habebunt iſtæ in ſpiralem incidentes, quàm arcus circuli medij inter terminum ſpiræ, & limites linearum productarum in circumferentia factos, ſumptis in præcedentia arcubus à fine ſpiralis. pag. 114
Reſolutio.
Theorema ab Archimede Phyſico-Geometricè oſtenſum, purè Geometricè ab Auctore demonſtratur.
Compoſitio.
Spiralis primaria Archimedæa. pag. 115
Linea prima quid in geneſi ſpiralis.
Linea ſecunda quid.
Supradictorum explicatio.
Primum ſpatium quid.
Secundum ſpatium quid.
Antecedentia quid.
Conſequentia quid.
Circulus primus. Circulus ſecundus &c.
Aliæ conſiderationes lineæ ſpiralis ſecundùm diuerſas hypotheſes.
Spirales primi ordinis.
Alia ſpecies ſpiralis 2.
Alia ſpecies ſpiralis 3.
Alia ſpecies ſpiralis 4.
Spiralis inuerſi ordinis. pag. 116
Species ſpiralis inuerſi ordinis.
Species 2.
Species 3.
Aliæ etiam ſpirales oriri poſſunt pertinentes ad primum ordinem ſecundum diuerſas combinationes.
Aliæ ſpirales pertinentes ad ſecundum ordinem.
Linea, quam deſcriberet graue deſcendens in plano æquatoris, ex hypotheſi quod tellus moueretur, motu tamen ſolo diurno.
Lineæ ſpirales concipi poſſunt deſcriptæ ſuper

alias

alias ſoperficies.
Infioitæ ſpirales dantur, ſicut infinitæ ſectiones conicæ.
Spiralis prima, & linearis.
Spiralis quadratica.
Spiralis cubica.
Spiralis quadrato-quadratica.
Etiam circulum conſiderari poſſe, prout ſumpta fuit conſideranda ſpiralis. pag. 117
Theorema. Exemplum xxxII. si in ſpiralem vna quidem circumuolutione deſcriptam, à principio ſpiralis rectæ quotlibet cadant, quæ æquales inter ſe ſe angulos contineant, ſe ſe mutuò æqualiter excedent.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 118
Linea recta ſpiralem tangit io puncto.
Demonſtratio, quæ ſupponit tempus, ac motum.
Aliqua ſpiralis accidentia.
Spiralis proprietas, quæ fuit indirectè oſtenſa, directè, & oſtenſiuè demonſtratur.
Aliæ inſignes proprietates ſpiralis. pag. 119
In quo præcipue Analyſtæ ſolertia eluceat.
Fit reditus ad ſpirales. pag. 120
Linea quadratrix, & eius origo antiqua Phyſico-geometrica.
Hæc linea quibuſdam non arriſit. pag. 121
Geoeſis quadratricis Geometrica, Explicatio.
De quadratricis vſu poſt modum diſſerendum.
Cyſſoides linea conſideratu digna. pag. 122
Præcipuus eius vſus ad indagandas duas medias continuè proportionales inter duas datas.
Natura Conchilis explicatur. pag. 123
Huius lineæ proprietates.
Beneficio huius lineæ præclara Problem. ſoluũtur.
Huius etiam auxilio duæ mediæ in continua ratione reperiuntur.
Cycloidis lineæ ortus, atque Natura.
Genitor Cycloidis, & eiuſdem baſis.
Epicyclois linea nouiter ab Auctore excogitata. pag. 124
Ex interſectione variarum ſuperficierum, variæ quoque emergunt lineæ.
Solida ex reuolutione &c.
Cylindro parabolicum.
Solidum Cylindri hyperbolicum &c.
Vniuerſalis Methodus reſolutiua io omnibus adhiberi poteſt; plerunque tamen adeunda eſt vna, vel altera peculiaris.
Theorema. Exemplum xxxIII. Cylindrus, cuius altitudo eſt ſpheræ diameter, baſis verò eſt circulus maximus eiuſdem ſpheræ, ad ſpheram ipſam eſt in ratione ſeſquialtera. pag. 125
Theorema iſtud ab Archimede demonſtratum ab Auctore longè aliter, & quidem oſtenſiuè demonſtratur.
Reſolutio.
Compoſitio.

De exercitio Analytico exercendo in Reſolutionibus, atque Compoſitionibus Theorematum, ad cæteras partes Matheſeos pertinentium. Cap. IV.

EX Arithmeticis deſumuntur exempla. pag. 126
Theorema. Exemplum xxxIV. Differentia laterum duorum quadratorum ducta in quodlibet latus facit differentiam inter quadratum prædicto lateri reſpondens, mediumque proportionalem inter ipſos numeros quadratos.
Reſolutio.
Compoſitio.
Theorema. Exemplum xxxv. Duobus numeris quadratis ſi numerus idem ſigillatim additus fuerit, aggregatis per laterum differentiam ſigillatim diuiſis, numerus factus ex quotientum mutuo ductu multatus numero, qui fuit quadratis additus, euadit quadratus. pag. 127
Reſolutio.
Lemma primum.
Lemma ſecundum.
Compoſitio. pag. 128
Ex Opticis deſomuntur exempla.
Theorema. Exemplum xxxvI. ſit oculus A, cui obiecta ſint mobilia B, & C, quorum illud propinquius, hoc autem remotius, ſintque duæ parallelæ BD, CE, in quibus prædicta mobilia æquè velociter cieantur. Dico eo tempore, quo mobile B promouetur, mobile C oculo A, videri tardius promouiſſe.
Reſolutio.
Compoſitio.
Theorema. Exemplum xxxvII. Corpus opacum tot fundit vmbras, quot ſunt luminoſa, quibus opponitur. pag. 129
Reſolutio.
Compoſitio.
Scholion. pag. 130
Vmbra quid.
Tenebræ quid.
Ex Catoptricis exempla deſumuntur.
Duo ſunt, quibus vniuerſa Catoptrica innititur.
Heliodorus in Opticis.
Quid præcipuè curandum Analyſtæ, cùm de re quapiam ſuſcipit tractationem.
Cur angulus reflexionis æqualis ſit ang. incidẽtiæ.
Qua ratione id Ptolemæus demonſtrauerit. p. 131
Notanda quædam.
Demonſtratio quorundam. pag. 132
Reijcitur talis demonſtratio.
Alius explicandi modus à Neoterico quodam adhibitus. pag. 133
Superior ratio reijcitur.
Carteſij demonſtratio de æqualitate anguli incidentiæ & reflexionis perpenditur.
Carteſij demonſtratio parùm laudatur.
Aliorum quoque demonſtratio improbatur.
Kepleri ratio reijcitur. pag. 134
Auctoris ratio affertur.
Alia Auctoris ratio affertur.
Theorema. Exemplum xxxvIII. Angulus reflexionis æqualis eſt angulo incidentiæ. pag. 135
Reſolutio.
Compoſitio.
Quod in Catoptricis maximè decantatum. pag. 136
Euclides ſupradicta malè demonſtrauit. pag. 137
Præmittenda quædam.
Keplerus reprehenditur.
Quorundam deceptio. pag. 138
Suppoſitum.
Theorema. Exemplum xxxIx. ſit pupillæ diameter BC, res aſpectabilis ſit A, vnde cadant radij AD, AE, qui ſuper ſpeculi ſuperficiem DEH, reflectantur ad puncta B, C, Dico radios reflexos BD, CE, protractos ad partes D, E, occurrere rectæ cadenti ex A perpendiculariter ad ſpeculi ſuperficiẽ io infinitum protractæ.
Reſolutio. pag. 139
Compoſitio.
Theorema. Exemplum xl. Iiſdem poſitis. Dico ſecundò

ſecundò concurſum eſſe in vno,eodemque puncto.
Reſolutio,
Lemma. pag. 140
Compoſitio.
Theorema. Exemplum XLI. In quolibet ſpeculo imago apparet in concurſu catheti cum radio ab oculo per reflexionis punctum directè producto.
Notanda quædam.
Vulgatum Theorema apud Opticos.
Communiſſima Philoſophorum ſententia. pag. 141
Eam eſſe falſam Auctor oſtendit.
Experimenti cuiuſdam declaratio.
Experimentũ præclarũ ad confirmandum effluuiũ.
Reſponſionis præoccupatio. pag. 142
Ariſtotelis auctoritas ex 2. de Anima.
Ariſtotelis Auctoritas ex 4. Metheororum textu 34
Ex corporibus omnibus expirare effluuia.
Experimentum ad id comprobandum mirabile.
Admonitio.
Non omnis qualitas neganda eſt. pag. 143
Explicatio quorundam. pag. 144
Aliorum explicatio.
Reijcitur.
Radij exeuntes à centro corporis ſolaris ſunt validiores. pag. 145
Tria ſunt radiorum genera.
Explicatio ſupradictorum.
Keplerus haud benè de intenſione locutus.
Definitio prima. Diuaricationes radiorum ſunt eorundem radiorum interualla, accepta in circumferentijs, ad quas è circulorum centris ijdem radij perueniunt.
Definitio ſecunda. Similes diuaricationes dicuntur, quæ accipiuntur penes interualla ſimilia circumferentiæ vnius, & alterius circumferentiæ.
Theorema. Exemplum XLII. Si virtutis intenſio attendatur in lineis. Eadem eſt ratio arcus ad arcum ſimilem reciprocè, quæ eſt intenſionis ad intenſionem virtutis.
Reſolutio. pag. 146
Lemma.
Compoſitio.
Notanda quædam.
Corollarium.
Explicatio quædam. pag. 147
Thermometrum ab Auctore adinuentum exquiſitè repræſentans.
Thermometrum alterum exquiſitiùs differentias oſtendens. pag. 148
Multorum error.
Claudij Berigardi ſententia.
Malè hanc Matheſeos partem plerique tractarunt. pag. 149
Theorema. Exemplum XLIII. Si in ſpeculum concauo-ſphæricum radius parallelus ei, qui per ſpeculi centrum, extra tamen ſextantem eiuſdem, incideret, dico reflexum eius extra ſpeculum cadere.
Reſolutio.
Compoſitio.
Theorema. Exemplum XLIV. Si fuerit ſpeculum concauo-ſphæricum, per cuius centrum radius aliquis inciderit in illud; huic autem radio parallelus alter incidat in terminum ſextantis, cuius initium punctum eſt, per quod incidit radius per centrum. Dico radium incidentem in ſextantis terminum prædictum, reflecti ad eiuſdem terminum alterum.
Reſolutio. pag. 150
Compoſitio.
Theorema. Exemplum XLV, ſecundò, iiſdem poſitis. Dico reliquorum radiorum, quorum quilibet prædictis duobus eſt parallelus, nullum per reflexionem aſcendere ſupra punctum F, vbi videlicet C D ſemidiameter bifariam diuiditur.
In ſpeculo cauo-ſphærico non fit vnio in puncto, vt in habentibus conicam ſectionem.
Theorema. Exemplum XLVI. Omnes radij ſolares in ſpeculum concauum à parabola quacunque circa manentem axem circumducta procrearum, incidentes, ea lege vt axi æquidiſtent, reflectuntur ad vnum, ac idem axeos punctum, quod videlicet à vertice ſpeculi diſtat interuallo quartæ partis lateris recti illius parabolæ, quæ ſpeculum ipſum deſcribit.
Prout multiplex hypotheſis, ita multiplex reſolutio. pag. 151
Reſolutio variari poteſt pro varietate præparationis.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 152
Reſolutio.
Compoſitio.
Reſolutio. pag. 153
Lemma.
Compoſitio.
Scholion. Supradictorum explicatio.
Speculum hyperbolicum quale. pag. 154
Quomodo radij reflectantur in ſpeculo elliptico.
Quid interſit inter ſpecula ſupradicta.
Theorema. Exemplum XLVII. Si oculus, & aſpectabile ſint in diuerſis medijs ſe mutuò contingentibus, imago apparebit in concurſu catheti, & radij ab oculo per punctum refractionis directè producti.
Multa ſunt conſideratu digna in hac Matheſeos parte.
Radij luminoſi non graciteſcunt, nec attenuantur, quo magis protrahuntur.
Laterna Magica qua Arte fiat. pag. 155
Aliud eſt quoque in Dioptrica conſideratu digniſſimum.
Theorema Mechanicum. Exemplum XLVIII. Grauia appenſa extremitatibus libræ, ſi æquiponderantia exiterint, erit, vt diſtantia ad diſtantiam a centro, ita reciprocè graue ad graue.
Et ſi fuerit, vt diſtantia ad diſtantiam, ita reciprocè graue ad graue, ipſa grauia erunt æquiponderantia.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 156

De Methodo Reſolutiua pro Theorematibus alijs Phyſico-Geometricis. Cap. V.

Platonis Dogma.
Helenæ Corneliæ Piſcopiæ laudes. pag. 157
Difficultas de aſcenſu Corporum.
Grauitatis, & leuitatis explicatio.
Experimenta quædam. pag. 158
Preſſio fluidorum colligitur. pag. 159
Archimedis locus explicatur.
Difficultati occurritur.
An extruſum aſcendat motu accelerato. pag. 160
Difficultas in Archimedis doctrina de ijs, quæ vehuntur in humido.
Difficultas in contraria ſententia.
Compoſitio difficultatum.
Extruſio quo pacto contingat. pag. 161
Preſſionis humidarum partium cauſa quid.
Atmoſphæræ altitudinem colligere.
Tychonis opinio.

Kepleri ſententia explod.tur. pag. 162
Theorema. Exemplum XLIX. ſolidarum magnitudinum per humidum aſcendentium, quæ leuior eſt, ſurſum celerius fertur.
Reſolutio.
Compoſitio.
Theorema. Exemplum L, ſolida magnitudo leuior humido per fluidum grauius velocius aſcendit, quàm per leuius. pag. 163
Theorema. Exemplum LI, si aliqua fuerit ſolida magnitudo leuior humido, huic autem adiecta ſit alia quæpiam, itidem humido leuior, ſolida magnitudo, hoc aggregatum immiſſum in humidum maiori vi, quàm initio ſola propoſita magnitudo, ſurſum feretur.
Reſolutio.
Compoſitio.
Experimenta quædam. pag. 164
Duo proponuntur inquirenda.
Experimenti explicatio. pag. 165
Notandum.
Theorema. Exemplum LII. si certo quodam impetu projciatur graue ſecundùm directionem eleuatam ſupra lineam horizontalem, & alio itidem impetu ſecundùm eandem directionis lineam idem graue projciatur. Dico eſſe vt quadratum impetus, ad impetus quadratum, ita ſpatium in linea horizontali ad ſpatium in eadem linea confectum.
Quid impetus, ſiue velocitas.
Per menſuram momenti intelligitur recta, per quam impetus, & momentum poteſt projcere mobile ab extremo ad extremum ipſius; quod prius intelligendum de deſcenſu. pag. 166
Th. Exemplum LIII, si certo quodã impetu projciatur graue ſecundùm directionem eleuatam ſupra lineã horizontalem, & alio itidem impetu ſecundùm eandẽ directionis lineam idẽ graue projciatur. Dico eſſe vt quad. impetus, ad impetus quad. ita ſpatium in linea horizontali ad ſpatium in eadem linea confectum.
Quid intelligatur per momenti menſuram. pag. 167
Reſolutio.
Compoſitio.
Experimentum de bombarda explodente pilam horizontaliter. pag. 168
Experimentum proponitur alterum.
Experimentum alterum. pag. 169
Theorema. Exemplum LIV. Magnitudo rarefactione adaucta vi caloris æquè inuadentis ſingulas eius partes, menſuras acquirit maiores in ratione, qua ab initio. pag. 170
Reſolutio.
Compoſitio.
Reſolutio. pag. 171
Compoſitio.
Quæ de Annulo æneo dicta ſunt, Auctor expertus eſt in annulis ligneis iniectis in humidum.
Multos hoc experimentum vexauit. pag. 172
Ex accidenti poteſt id ſecus euenire, vt in ſunibus, & in muſculis.
Monitum.
Theorema. Exemplum LV. si magnitudo aliqua alteratione ſuſcipiat incrementum, dum augetur terminus vnus modo iam dicto, augentur & reliqui.
Theorema. Exemplum LVI. si ſolidum aliquod ſit annulare, & agente calore æquè in ſingulas eius partes rarefiat, acquiret menſuras maiores in ratione quam prius habebat, & latius fiet ſecundum internam ſuperficiem. pag. 173
Theorema. Exemplum LVII. Auguſta fiſtula ex vtroque extremo recluſa immiſſa in humidum ſecundum extremum vnum, per eam humidum ipſum ad certam quandam ſtationem neceſſariò aſcendet. pag. 174
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 175
Alia Reſolutio.
Compoſitio.
Scholion.
Explicatio multorum, quæ faciunt in primis ad inſtitutum.
Libratio, vel per deſcenſum, vel per aſcenſum. pag. 176
Figura non facit ad momentum grauitatis, ſed ad celeritatem motus.
Supradicta de libratione faciunt etiam ad deſcenſus celeritatem.
Aduertenda quædam. pag. 177
Notanda quædam de acceleratione maiori deſcenſus.
Kepleri deceptio.
Modus explorandi aeris grauitatem. pag. 178
Scholion. pag. 179
Supradictorum Theoria.
Error commiſſus à quodam in aeris ponderatione.
Auctoris modus peculiaris ad explorandam aeris grauitatem.
Theorema. Exemplum LVIII. si rei ſtabili Priſma fuerit horizontaliter infixum, ad cuius extremum graue fuerit appenſum. Dico potentiam, qua reſiſtit fractioni, ad graue, reciprocè eſse, vt longitudo Priſmatis ad ſemi-altitudinem eiuſdem. pag. 180
Reſolutio.
Lemma primum. Si fuerit Vectis A C, cuius hypomochlion B; &c. pag. 181
Reſolutio.
Compoſitio.
Lemma ſecundum, Si Priſma H G D C fuerit erectum &c.
Corollarium primum. pag. 182
Corollarium ſecundum.
Compoſitio.
Scholion.
Auctor agit in Phyſica de potentia, qua corpora reſiſtunt fractioni. pag. 183
Proponitur Theorema.
Aliquorum error.
Supradictorum demonſtratio oſtenſiua. pag. 184
Principale intentum. pag. 185
Præmittenda quædam.
Theorema. Exemplum LX. Gradus velocitatis eiuſdem mobilis ſuper diuerſas planorum inclinationes acquiſiti tunc ſunt æquales, cùm eorundem planorum eleuationes æquales ſunt. pag. 186
Reſolutio.
Compoſitio.
Controuerſia inter D. Stephanum de Angelis, & P. Ricciolium perpenditur.
Experimentum de curru. pag. 187
Ex hoc experimento duo colliguntur.
Idem, quod in curru, contingeret, ſi terra in orbem cieretur.
Quod de proiecto dictum fuit aptatur graui deſcendenti.
Telluris immobilitas ex hactenus traditis colligitur. pag. 188
Dum graue ſurſùm projcitur, nulla interpoſita quiete, motum ſubiret duplicem &c.
Duæ proponuntur difficultates. pag. 189
Occur-

Occurritur primæ difficultati.
Mirabile quoddam proponitur. pag. 190
Rota dum reuoluitur circa proprium axem, ſe habet inſtar penſilis.
Quid ſentiendum de motu telluris. pag. 191
Indifferentia grauis ad omnem motum, commentitia.
Supradictorum confirmatio. pag. 192
Quorundam deceptio.
Perpenditur aliquorum ſententia.
Velocitatis gradus aliquandò non variatur variata directione &c. pag. 195
Theorema. Exemplum LXI. ſi fuerit funependulum A B, quod actum in gyrum deſcribat &c.
Quæſtio 24. apud Ariſtotelem in Mechanicis.
Theorema. Exemplum LXII. Dum circulus, cuius ſemidiameter A B per rectam voluitur B F, omnes concentrici minores A C ſi iunctim moueantur vna volutione percurrunt ſpatium æquale circunferentiæ circuli, cuius ſemidiameter A B. pag. 196
Scholion.

De Experimentis ad Veritates Phyſicas indagandas, Cap. VI.

AD rectè philoſophandum nulla ſecurior via, quam per experimenta.
Philoſophus deluſus ob inaduertentiam propoſiti Problematis.
Experimenta ſunt repetenda. pag. 197
Experimentis Diſciplinarum principia inueniuntur.
In demonſtrando non licet in infinitum abire.
Ex principijs, quædam habita terminorum cognitione cognoſcuntur, quædam aſſuetudine, & quædam experimentis comparantur.
Inductio quàm maximè opportuna ad confirmanda Diſciplinarum principia.
A particularibus ad vniuerſale progredi eſt à poſterioribus ad priora gradum facere.
A ſingularibus ad vniuerſalia progreſſus experimenta ſupponit. pag. 198
Auctor experimētis operam nauauit Florentiæ ad ſtabilienda Naturalis Philoſophiæ principia.
Antiperiſtaſis hactenus malè fuit explicata.
Experimentum ad reprobandam antiperiſtaſin, prout hactenus explicari conſueuit.
Reſponſionis præoccupatio.
Experimenta, quibus nonnulli probare nituntur antiperiſtaſin veteri ſenſu explicatam.
Occurritur experimentis allatis. pag. 199
Calx viua magis exardeſcit aqua feruenti, quàm aqua frigida.
Spiritus vini ſuperinfuſus calci viuæ nullam facit mutationem in eius calore, nec illam diſſoluit.
Aquam glaceſcere abſque aeris permixtione comprobatur.
In experimentis conficiendis, nè minima quidem differentia eſt negligenda.
Quomodo chalybis temperatura perficiatur.
E coloribus ad temperaturam quis magis idoneus. pag. 200
Natura vniformi difformi quadam actione operatur.
Experimentum ad magnetis vires explorandas.
Deſcenſus grauium.
Grauia non deſcendunt, magnetica vi à terra attracta,
Aliunde circumſpectio in experiendo probatur.
Gaſſendi opinio. pag. 201
Leuis quorundam in experiendo coniectura.
Animarum plena ſunt omnia 3. de Gen. An. Cap. 11.
Varietas magnoperè ad Vniuerſi pulchritudinem conducit.
Experienti lapis omnis mouendus. pag. 202
Experimenta.
Communis opinio de concoctione ventriculi per modum elixationis.
Calor animalis feruidioris naturæ non excedit æſtiuum, ſole ſcandente Leonem.
Natura vtitur humore, tanquàm fermento ad celebrandam concoctionem in animalium ventriculis.
Experimentum conducens ad cognoſcendum, qua ratione concoctio in ventriculo perficiatur.
Hiſtoria mirabilis, vnde colligitur dari humorem, à quo vitrum corroditur.
Chronometron. Penſile, ſeu pendulum, ſeu funependulum. pag. 203
Præclara Chronometri phænomena. pag. 204
Quorundam error.
Mirabile aliud Chronometri ſymptoma.
Mirabile aliud ſymptoma. pag. 205
Aeris reſiſtentia.
Penſile, cur tandem quieſcat. Opinio quorundam.
Reijcitur.
Opinio Auctoris.
Itus, ac reditus initio prolixiores.
Itus, ac reditus duplici parte conſtant.
Penſile maximè deſeruit obſeruationibus Aſtronomicis. pag. 206
Ygroſtathmos, hoc eſt fluidorum menſura primum.
Secundum, & tertium. pag. 207
Ad aeris humiditatem explorandam inſtrumentum idoneum, Ygrometron. pag. 208
Aliter idem inquiritur. pag. 209
Thermometrum hactenus adhiberi ſolitum omninò inutile.
Optimum ab Auctore adinuentum, & eius conſtructio qualis.
Actio vniformiter difformiter diffuſa non ita deprehenſa eſt ab Auctore, quemadmodum à Scholaſticis deſcribitur.
Ad obſeruandam rerum texturam inſtrumentum idoneum Microſcopion.
Tubi optici inuentio. pag. 210
Sperandum aliquandò futurum, vt reperiatur aliquod inſtrumentum, quo auditus adiuuetur.

A quibus cauendum Analyſta, nè deluſus quodammodo videatur. Cap. VII.

THeorema. Exemplum LXIII. ſi recta linea A B ſecta ſit in punctis C, D, E, F, vt exiſtentibus æqualibus partibus A C, C E, &c.
Reſolutio. pag. 211
Compoſitio.
Theorema. Exemplum LXIV. ſi recta linea A B, diuiſa ſit in punctis C, D, E, F, ita vt exiſtentibus æqualibus partibus A C, C E, &c. pag. 212
Reſolutio.
Compoſitio.
A pugnantibus cauendum. pag. 213
Item à ſuperfluo &c.

Quod Artifici magnoperè curandum in oblati Theorematis Reſolutione inſtituenda, Cap. VIII,

Claritas in demonſtrationibus commendabilis.
Theorema. Exemplum LXV. ſit recta quæpiam A B, duplata quidem in D, & ex punctis A, & B, perpendicularibus erectis A H, B I; &c. pag. 214
Reſolutio.
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis. pag. 215
Reſolutio.
Compoſitio.
Reſolutio. pag. 216
Compoſitio.
Theorema. Exemplum LXVI. ſit recta A F, diuiſa in partes A B, B D, D F, inæquales continuò creſcentes, vel decreſcentes, &c.
Præparatio.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 217
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.
Lemma. Exemplum LXVII. ſint tres magnitudines A B, A C, A D. Dico aggregatum differentiarum eſſe differentiam inter maximam, & minimam.
Reſolutio. pag. 218
Compoſitio.
Theorema. Exemplum LXVIII. ſi recta A B, ita diuiſa ſit in C, D, & E, vt quemadmodum eſt A D ad DC, ita ſit B D, ad D E. Dico rectangulum D E B, ad quadratum D E, rationem habere, vt A C ad C D.
Reſolutio.
Compoſitio.
Superior Reſolutionis modus non omninò ſpernendus. pag. 219
Comprobatio.
Reſolutio.
Compoſitio.
Theorema. Exemplum LXIX. ſit Conus, cuius vertex punctum A, baſis autem circulus, cuius diameter B C, &c. pag. 220
Reſolutio.
Compoſitio.
Theorema. Exemplum LXX. ſit Conus, cuius vertex A punctum; baſis verò circulus, cuius diameter B C &c. pag. 221
Reſolutio.
Compoſitio.
Theorema. Exemplum LXXI. ſit Conus, cuius vertex A punctum; baſis circulus, cuius diameter B C &c. pag. 222
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 223

De recta demonſtrandi ratione ab Analyſta ſeruanda. Cap. IX.

Maximè decet, Mathematicum omnem adhibere curam in demonſtrando.
Demonſtrationes Mathematicæ omnium præſtantiſſimæ.
Ad rectè demonſtrandum requiruntur præcepta. pag. 224
Genus demonſtrandi ab effectu ad cauſam.
Aliud genus demonſtrandi à cauſa ad effectum.
Demonſtratio potiſſima per quod cauſæ genus procedat.
Geometria vtitur materiali cauſa, tanquàm demonſtrationis medio. pag. 225
Cauſa itidem formali vtitur.
Demonſtratio per concomitantia ad genus demõſtrationis per cauſam reuocatur; & in Mathematicis frequenter adhibetur.
In Mathematicis demonſtrationibus plerumque medium eſt ſubiecti, aliquandò affectionis definitio.
Mathematicæ definitiones nominales dicuntur.
Quales eſſe debent demonſtrationis præmiſſæ.
Præmiſſarum conditiones.
Primum genus propoſitionum Immediatarum ſunt dignitates.
Secundum genus propoſitionum immediatarum.
Tertium genus. pag. 226
Quartum genus.
Poſitiones quales.
Notanda quædam.
Error quorundam deteſtantium Mathematicas demonſtrationes.
Quo pacto demonſtratio debeat ex immediatis conſtare.
Præmiſſæ demonſtrationis euidentes eſſe debent, vel per ſe, vel per alias.
Ineuidentes euidentes fiunt inductione.
Principia qualiter dicantur prima.
Quo pacto præmiſſæ cauſæ dicantur concluſionis.
Quorundam error.
Duplex cauſa; alia in cognoſcendo tantùm, alia in eſſendo, & cognoſcendo ſimul. pag. 227
Præmiſſæ quare priores concluſione.
Notiores.
Certiores, ac euidentiores.
Demonſtratio per propria principia procedit.
Supradictorum probatio inſtituitur.
Nullius ſcientiæ ſubiectum ad aliam ſcientiam transferri poteſt. pag. 228
Bryſonis demonſtratio peccabat ob communia principia. pag. 229
Quomodo ſe haberet Bryſonis demonſtratio.
Circa concluſionem errores quinam contingant.
Primus error.
Secundus error.
Tertius error. pag. 230
Errorum exempla ex Ariſtotele.
Secundi erroris exemplum.
Exemplũ alterum quando genus nomen habet &c.
Sophiſta qui dicatur.
Cognitio trianguli, vel ſecundùm numerum, vel ſecundùm formam. pag. 231
Multiplex demonſtratio, eiuſque ſpecies aſſignantur.
Demonſtratio vniuerſalis præfertur particulari.
Vniuerſale quid.
Demonſtratio ſingularis quando conficiatur.
Mathematicorum, tùm Veterum, tùm Recentiorum error. pag. 232
Redarguitur Auctor Propoſitionis 47. primi Euclidis.
Redargutionis ratio.
Prima Elementa tractantibus in hoc aliquid condonandum.
Exemplum.
Exemplum.
Exemplum alterum. pag. 233
Exemplum.
In quo debeat Analyſta inſudare, plurimamque

curam adhibere.
Probationes, quibus oſtenditur demonſtratio præſtantior illa, quæ vniuerſalis dicitur.
Demonſtratio affirmatiua præferenda negatiuæ.
Demonſtratio Duplex; Oſtenſiua, & ducens ad inconueniens. pag. 234
Oſtenſiua præfertur.
Oſtenſiua, quamuis negatiua, præferenda.
Reprehenduntur ij, qui paſſim demonſtratione ducente ad incommodum vtuntur.
Demonſtratio quomodò procedat per deductionem ad impoſſibile.
Quid commune ſit vtrique modo.
Quæ priora naturæ ſunt, priùs tractandæ videntur. pag. 235
Redarguuntur non nulli.

De particularibus Methodis, quas hucuſque Mathematicorum ſchola frequentauit. Deque peculiari ab Auctore exculta.

Cap. X.

De Antiqua Methodo per exploſum exceſſum, atque defectum. pag. 236
Antiqua Methodus per exploſum exceſſum, atque defectum explicatur.
Vieta Methodum hanc neglexit.
Aduerſus hanc Methodum difficultas affertur. pag. 237
Diluitur propoſita difficultas.
Non malè Archimedes, nec fallaciter Euclides.
Theorema. Exemplum LXXII. Parabolæ æqualium altitudinum ſunt inter ſe, vt baſes.
Theorema. Exemplum LXXIII. Cylindi recti baſis ad eiuſdem Cylindri curuam ſuperficiem eſt, vt quarta pars diametri baſeos ad ipſius Cylindri latus. pag. 238
De indiuiſibilium Methodo. pag. 239
Indiuiſibilium Methodus ad obſcuriſſima demonſtranda conducit.
Quibuſdam hæc Methodus non arridet.
Methodus declaratur.
Quibus vtatur hæc Methodus, tanquàm inſtrumentis.
Quid in hac Methodo ſit Regula.
Oppoſitæ tangentes quid.
In planis figuris adhibentur lineæ, in ſolidis autem plana.
Hæc Methodus duplex.
Explicatur prima, quæ vtitur Indiuiſibilibus collectiuè ſumptis.
Poſterior vtitur Indiuiſibilibus diſtributiuè.
Vtraque generalem regulam tradit ad comparandam figurarum menſuram. pag. 240
Exemplum.
Generalis regula prioris Methodi.
Perinde eſt dicere, omnes lineæ ad omnes lineas; ac dicere, aggregatum omnium linearum ad aggregatum omnium linearum.
Generalis regula poſterioris Methodo.
Locum habet non ſolùm in ratione æqualitatis, ſed in quacunque ratione. pag. 241
Quid obſeruandum in gratiam prioris Methodi.
Quid obſeruandum in gratiam ſecundæ.
Prima definitio.
Corollarium.
Secunda definitio.
Corollarium.
Tertia definitio.
Corollarium.
Quarta definitio. pag. 242
Quinta definitio.
Corollarium.
Sexta definitio.
Corollarium.
Septima definitio.
Octaua definitio A.
B.
C.
D. pag. 243
E.
Supradictarum definitionum explicatio.
Omnes lineæ.
Recti tranſitus.
Obliqui tranſitus.
Omnia plana.
Omnia puncta recti tranſitus.
Abſciſſæ.
Reſiduæ omnium abſciſſarum.
Maximæ abſciſſarum.
Abſciſſæ reſiduæ.
Omnes figuræ ſimiles. pag. 244
Solidum ſimilare genitum ex figura plana.
Figura ſolidi Genitrix.
Solida ſimilaria.
Rectangula ſub figuris.
Primum Poſtulatum.
Secundum Poſtulatum.
Animaduertenda quædam.
De Methodo mixta Grauitatis centro. pag. 246
Vſus centri Grauitatis ad Geometrica Theoremata demonſtranda, in vſu fuit, tùm apud Veteres, tùm apud Recentiores.
Vſus centri Grauitatis ad Geometrica problemata conſtruenda.
Multa de Grauitatis centro tractantur.
Centrorum, vt & quantitatum, triplex genus.
Centrum figuræ quid.
Centrum magnitudinis quid.
Centri Grauitatis variæ definitiones. pag. 247
Grauitas propriè corporibus ineſt.
Mathematicus grauitatem concipit ineſſe punctis, lineis, & ſuperficiebus, non ſine vtile.
Quorundam error.
Aduertenda quædam.
De vſu centri Grauitatis diſſerendum proponitur.
Archimedes hunc vſum innuit. pag. 248
Theorema. Exemplum LXXIV. Parabole ſeſquitertia eſt trianguli eandem ſibi baſin, & eandem altitudinem habentis.
Reſolutio.
Lemma I.
Lemma II.
Lemma III. pag. 249
Lemma IV.
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.
Scholion. pag. 250
Aliter.
Theorema. Exemplum LXXV. Circuli ſegmentum ad inſcriptum ſibi triangulum eiuſdem baſeos, ac altitudinis eſt, vt duæ tertiæ partes diametri ſegmenti reliqui ad rectam connectentem circuli centrum, & grauitatis centrum, quod ab initio proponebatur, ſegmenti.
Reſolutio.
Lemma. pag. 251
Compoſitio.

Conſpe-

Conſpectus Reſolutionis, atque compoſitionis.
Scholion. pag. 252
Theorema. Exemplum xxxvi. Cuiuslibet circuli, ac Ellipſeos quidem ſegmentum ad inſcriptum ſibi triangulum eiuſdem baſeos, ac altitudinis, eſt vt duæ tertiæ partes diametri ſegmenti reliqui ad illam, quæ ex figuræ centro ad grauitatis centrum eius, quod initio dicebatur, ſegmenti.
Reſolutio.
Lemma. pag. 253
Compoſitio.
Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.
In quo hæc Methodus conſiſtat.
Modus alter adhibendi centrum grauitatis.
In quo hæc Methodus conſiſtat.
Quid Rotundi nomine intelligendum. pag. 254
Motus localis ſimplex in duplici diſcrimine.
Duplex Poteſtas; Directa, & Rotunda.
Vtraque Poteſtas tripartitò diuiditur.
Linea recta quid.
Linea recta eſt poteſtas primi gradus.
Parallelogrammum eſt poteſtas ſecundi gradus.
Parallelepipedum eſt poteſtas tertij gradus.
Prædictæ poteſtatis quilibet gradus diuiditur in Iuſtam, maiorem, & minorem Iuſta.
In ſecundo gradu Iuſta poteſtas eſt quadratum. Rectangulum altera parte breuius, poteſtas minor Iuſta. Altera verò parte longius, poteſtas maior Iuſta.
In tertio gradu Iuſta poteſtas eſt cubus. Parallelepipedum, quod altitudine cubum non adæquat, poteſtas eſt minor Iuſta. Quæ verò excedit, maior Iuſta.
Rotunda poteſtas eſt amplior, quàm Directa.
Poteſt. Rotundæ, & Rotunda corpora ſunt infinita.
Sicut poteſtates Directæ ex motu recto, ita Rotundæ ex motu circulari fiunt. pag. 255
Puncti poteſtas Iuſta eſt punctum. Habet poteſtatem Iuſta maiorem, ſed non minorem.
Punctum à centro disiunctum ſui reuolutione perfectam periphæriam circuli deſcribit.
Poteſtates Rotundæ ſecundi, & tertij gradus multiplicantur ob triplicem ſitum, ſcilicet horizontalem, verticalem, & obliquum quantitatum, vnde naſcuntur.
Poteſtates Rotundæ fiunt horizontales, verticales, & obliquæ.
Poteſtas Rotunda Iuſta quando generetur.
Quando generetur poteſtas Rotunda minor Iuſta.
Prima definitio. Quid ſit Rotatio.
Secunda. Quid ſit quantitas Rotanda, vel Rotata.
Tertia. Radius Rotationis quid.
Quarta. Via Rotationis quid.
Remotio, ſeu elongatio puncti, ſeu quantitatis, quæ rotatur, quid ſit.
Regula generalis.
Quantitas Rotanda in viam Rotationis ducta producit poteſtatem Rotundam, vno gradu altiorem poteſtate, ſiue quantitate Rotata.
Hanc regulam generalem, etſi veriſſimam, indemonſtratam tamen Auctor reliquit.
Lemma.
Si figura plana ſuper aliqua ſui recta linea figuram ipſam ſecante libretur, erunt momenta ſegmentorum figuræ, vt ſunt ſolida Rotunda ab ipſis ſegmentis circa ſecantem lineam reuolutis, deſcripta.
Supradictæ Regulæ demonſtratio. pag. 256
Corollarium primum. pag. 257
Corollarium ſecundum.
Corollarium tertium.
Corollarium quartum.
Hæc Methodus centri grauitatis indagationem requirit, & primò incipit ab eius vſu in punctis, ac lineis.
Prima poteſtas Rotunda.
Poteſtas Rotunda vnius puncti componitur.
Quando plura ſunt puncta ſine reſpectu ad poſitionem.
Quando plura ſunt in certa poſitione.
Quomodo indaganda vnica peripheria ſingulis æqualis, data punctorum pluralitate, &c.
Quando plura data ſunt puncta ſine certo poſitionis ordine.
Poteſtas, quam data recta affirmat, & quidem horizontalis, Verticalis, & Obliqua componitur. pag. 258
Poteſtas Verticalis Iuſta lineæ rectæ nulla eſt, niſi ipſamet linea.
Poteſtas obliqua pro ſui compoſitione quid requirat.
Poteſtates maiores Iuſtis.
Poteſtas Verticalis Iuſta maior.
Poteſtas Obliqua Iuſta maior.
Poteſtas Rotunda, quam binæ rectæ ſimul ſumptæ deſcribunt, vt componatur.
Poteſtas Rotunda, quam binæ rectæ ſimul ſumptæ deſcribunt, quomodo componatur.
Alio modo idem perficitur.
Quando datæ rectæ fuerint ad inuicem inclinatæ.
Quando rectæ ſunt inuicem inclinatæ.
Poteſtates Iuſtis maiores ex dictis colligi poſſunt pag. 259
Caſus alter.
Poteſtates Rotundæ plurium rectarum linearum.
Poteſtas communis linearum rectarum æqualium, ſegmento circulari inſcriptarum.
Superficies ex huiuſmodi rotationibus ortæ conicæ ſunt. pag. 260
Poteſtatum inquiſitio bifariam inſtitui poteſt.
Pro primo modo quid agendum.
Pro ſemicirculo.
Pro ſegmento maiori.
Aliæ Verticales poteſtates emergunt.
Poteſtates Rotundæ perimetri triangulorum, & quadrangulorum.
Bifariam poteſt contingere, vt triangulum, atque quadrangulum Iuſtam poteſtatem componant.
Quando triangulum aliquo ſuo angulo rotationis axem attingit. pag. 261
Poteſtas Iuſta horizontalis.
Iuſta Verticalis.
Iuſta Obliqua.
Cingulorum, & Gnomonum poteſtates ex generali Regula depromuntur.
Poteſtas perimetri polygonorum regularium.
Rotunda.
Verticalis poteſtas quænam dicenda.
Quæ dicenda horizontalis.
Obliquæ poteſtates quæ dicendæ.
Verticalis poteſtas Iuſta vt componatur.
Poteſtas cuiuſuis peripheriæ circulum non ambientis.
Poteſtas circuli qua ratione componatur.
Radius rotationis poteſtatis maioris qualis ſit. pag. 262
Poteſtates perimetri ſegmentorum, aliarumque circuli partium quomodo componantur.
Poteſtates perimetrorum mixtilinearum figurarum quomodo componantur.
Poteſtatum Verticalium eorundem ſegmentorum compo-

compoſitio quomodo ſe habeat.
Quando Rotationis axis mutatur, ſitque priori parallelus.
poteſtates Obliquæ, & Verticales; &c.
poteſtates ſegmentorum iuſtis maiores.
poteſtates horum perimetrorum quomodo faciliùs componantur.
Hactenus dicta ſunt intelligenda de ſectoribus, eorundemque æmulis.
Poteſtas perimetri Lunularum.
Horizontalis poteſtas.
Quando Lunula fit per interſectionem circulorum. pag. 263
poteſtates Verticales iuſtæ perimetri Lunularum.
Aliæ poteſtates iuſtæ Verticales.
poteſtates Obliquæ perimetri Lunularum.
poteſtates Arcuatarum figurarum.
poteſtates perimetri Ellipſeos, &c.
Horizontalis iuſta.
Verticalis iuſta.
Poteſtas obliqua.
poteſtas maior iuſta.
poteſtas Rotunda, quam planum trianguli rectilinei deſcribit.
poteſtas Verticalis eiuſdem trianguli. pag. 264
In reliquis triangulorum poteſtatibus componendis quid agendum.
Alia Verticalis eiuſdem trianguli poteſtas.
poteſtas Horizontalis eiuſdem trianguli.
Alia Horizontalis poteſtas.
poteſtas obliqua.
poteſtates Rotundæ quadrilaterorum.
poteſtas quadrati.
Quando fuerit figura altera parte longior.
Quando altera parte longior figura habet latera in obliquo ſitu ad axem. pag. 265
poteſtates multangulorum laterum.
Duplex modus componendi poteſtatem horum multangulorum.
poteſtas horizontalis multanguli ſemicirculo inſcripti.
poteſtas polygonorum regularium.
poteſtas Rotunda cuiuſcunque figuræ rectilineæ.
poteſtas circuli.
poteſtas ſemicirculi.
Horizontalis poteſtas iuſta. pag. 266
poteſtas iuſta Verticalis.
poteſtates Lunularum.
poteſtas Rotunda Ellipſeos.
poteſtas obliqua.
poteſtates iuſtis maiores.
poteſtates Rotundæ ſemiellipſeos, &c.
poteſtas iuſta Verticalis æquatur ſphæroidi.
Horizontales, & obliquæ poteſtates iuſtæ, maioreſque iuſtis, quomodo fiant.
poteſtas Rotunda paraboles horizontalis, Verticalis, & obliqua.
Horizontalis iuſta quomodo dici conſueuit.
Generalis Regula Reſolutionis poteſtatum.
poteſtas data applicetur parti componenti datæ, & quantitas, quæ inde oritur, partem alteram componentem manifeſtabit. pag. 267
Quando poteſtas iuſta fuerit.
poteſtas iuſta maior.
poteſtates iuſtis minores negliguntur.
poteſtates Rotundæ à lineis rectis quomodo reſoluantur.
poteſtates iuſtis maiores.
poteſtas à pluribus, quàm vna recta, &c.
poteſtas Rotunda in directam tranſmutatur.
pag. 268
Theorema. Exemplum LXXVII. Circuli inter ſe ſunt, vt à ſemidiametris, diametris, &c. ſemicircumferentijs, circumferentijs, &c. quadrata.
Theorema. Exemplum LXXVIII. Cylindri recti curua ſuperficies ad baſin eſt, vt latus eiuſdem Cylindri ad quartam partem diametri eiuſdem baſeos.
Theorema. Exemplum LXXIX. Omnis Cylindri recti ſuperficies ſine baſibus, æqualis eſt circulo, cuius ea, quæ ex centro, media proportionalis eſt inter latus, & diametrum baſeos eiuſdem Cylindri.
pag. 269
Theorema. Exemplum LXXX. Cuiuſcunque Coni Iſoſcelis ſuperficies ad baſin, eam habet rationem, quam latus Coni ad Radium circuli, qui baſis eſt Coni.
Theorema. Exemplum LXXXI. Cuiuſcunque ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli eorum, qui ſunt in ipſa.
Theorema. Exemplum LXXXIII. Omnis ſphæra quadrupla eſt coni, baſin quidem habentis æqualem maximo circulo eorum, qui in ſphæra, altitudinem verò Radium ſphæræ. pag. 270
De Methodo Progreſſionibus innixa.
Mirabilis vſus vtriuſque progreſſionis.
Propoſitio.
Series quantitatum Arithmeticè proportionalium (ſiue iuxta ſeriem numerorum quadraticorum) continuò creſcentium, à o, vel puncto inchoatarum numero, vel finitarum, vel infinitarum, eſt ad ſeriem totidem maximè æqualium in ratione ſubdupla.
pag. 271
Theor. Exemplum LXXXIV. Triangulum ad parallelogrammum eiuſdem baſeos, ac altitudinis eſt in ratione ſubdupla.
Theorema. Exemplum LXXXV. Pyramidoides, vel Conoides parabolicum, eiuſdem baſeos, ac altitudinis, ſiue erectum, ſiue inclinatum, eſt in ratione ſubdupla.
Propoſitio.
Series infinita quantitatum in duplicata ratione Arithmeticè proportionalium &c.
Propoſitio.
Series potentia infinita quantitatum in duplicata ratione Arithmeticè proportionalium, (ſiue iuxta ſeriem numerorum quadraticorum) continuò creſcentium à puncto, ſiue o, inchoatarum, eſt ad ſeriem totidem maximè æqualium, in ratione ſubtripla.
Theorema. Exemplum LXXXVI. Conus, vel Pyramis, ad Cylindrum, vel Priſma eiuſdem baſeos, ac altitudinis eſt in ratione ſubtripla. pag. 272
Theorema. Exemplum LXXXVII. Complementum ſemiparaboles, ſpatium ſcilicet, quo ſemiparabole complet parallelogrammum, eſt ad parallelogrammum in ratione ſubtripla.
Theorema. Exemplum LXXXVIII. Semiparabole ad prædictum parallelogrammum eſt in ratione ſeſquialtera.
Scholion.
Aduertenda quædam.
Aduertenda quædam. pag. 273
Propoſitio.
Series quantitatum in triplicata ratione Arithmeticè proportionalium &c.
Theorema. Exemplum LXXXIX. Series infinita quantitatum in triplicata ratione Arithmeticè proportionalium, ſiue iuxta ſeriem numerorum cubicorum

continuè creſcentium, à puncto, ſeu o, inchoatarum, eſt ad ſeriem totidem maximè æqualium in ratione ſubquadrupla.
Theorema. Exemplum LXXXX. Complementum ſemiparaboles cubicæ ad ſuum parallelogrammum eſt in ratione ſubquadrupla, ac proptetea, & ipſa ſemiparabole eſt in ratione ſubſeſquitertia.
Adnotanda quædam.
De Geometrica progreſſione diſſeritur.
Vſus Geometricæ progreſſionis. pag. 274

De Auctoris Methodo peculiari, ac propria,

Per decreſcentiam exceſſus, atque defectus in infinitum abeuntem, Particularium omnium feracisſima, velut illa, qua obſcurioribus Theorematibus facilè, ac expeditè ſit ſatis; prætertim iis, quæ cùm Veteres, tùm Recentiores laborioſè demonſtrarunt.

Demonſtratio, pag. 275
Corollarium.
Circa ſuperiorem demonſtrationem difficultas.
Diluitur difficultas. pag. 276
Obſeruanda quædam,
Supradictorum Epilogus.
Circulus non eſt polygonum infinitorum laterum. pag. 277
Theoremata quædam Καθολικὰ, quibus Auctoris Methodus innititur,
Theorema I.
Si quotcunque fuerint quantitates, è quarum ſingulis partes in eadem ratione cum illis acceptæ ſint. Dico has poſſe, per συνεχῶς ἐπαυξόμενα, continuata incrementa ſemper, ac ſemper ab illis minus deficiendo, tandem deficere defecta minori quacunque data quantitate, rationem eandem inter ſe perpetuò ſeruantes.
Scholion.
Obſeruandum,
Theorema II.
Si quotcunque fuerint quantitates, à quarum ſingulis partes acceptæ ſint &c. pag. 278
Theorema III.
Si ſint, quotcunque fuerint, quantitates, è quarum ſingulis partes in eadem ratione cum illis acceptæ ſint, &c.
Theorema IV,
Si quotcunque fuerint quantitates, è quarum ſingulis partes accceptæ ſint, &c,
Theorema V.
Si quotcunque fuerint quantitates, quarum ſingulis aliæ maiores acceptæ ſint in eadem ratione cum illis &c, pag. 279
Theorema VI,
Si quotcunque fuerint quantitates, quarum ſingulis aliæ maiores acceptæ ſint, &c.
Theorema VII.
Si quatuor ſint quantitates proportionales, ex ſecunda, & quarta ſumi poterunt partes, quæ &c.
Lemma. pa. 280
Theorema VIII.
Si ſint quatuor quantitates proportionales, & per continuata quidem incrementa prima minus deficiendo à quapiam quinta, &c,
Theorema IX,
Si ſit, vt prima ad ſecundam, ita tertia ad quartam; at verò prima minus ſemper in infinitum excedendo quampiam quantitatem quintam &c. p. 281
Theorema X.
Si ſint quantitates, & quot in vna ſumi poſſunt partes, totidem &c.
Theorema XI.
Si quantitas prima ſemper minus excedendo ſecundam, excedere tandem poſſit exceſſu &c,
Theorema XII.
Si ſint quatuor quantitates primi ordinis, totidemque aliæ ordinis ſecundi, &c, pag. 282
Theorema XIII.
Si quotcunque ſint quantitates, ſic ſe habentes reſpectu alicuius &c.
Lemma.
Similia polygona circulis inſcripta ſunt inter ſe, vt à diametris quadrata.
Theorema. Exemplum LXXXIX. Circuli inter ſe ſunt, quemadmodum à diametris quadrata.
Lemma.
Polygonorum ſimilium circulis inſcriptorum ambitus ſunt inter ſe, vt diametri.
Theorema. Exemplum LXXXX, Circulorum peripheriæ ſunt inter ſe vt diametri. pag. 283
Theorema. Exemplum XCI, Parabolæ æqualium altitudinum ſunt inter ſe, vt baſes.
Lemma, pag. 284
Lemma.
Theorema. Exemplum XCII. Cylindri recti curua ſuperficies ad baſin eſt, vt latus ipſius Cylindri ad quartam partem diametri eiuſdem baſeos.
Lemma,
Priſmatis recti ſuperficies ad baſin eſt, vt altitudo ipſius Priſmatis ad quartam partem diametri circuli, cui Priſmatis baſis eſt circumſcripta. pag. 285
Theorema. Exemplum XCIII. Circulus, cuius radius eſt medius proportionalis inter Cylindri recti latus, baſeoſque diametrum, æqualis eſt ſuperficiei cylindricæ.
Theorema. Exemplum XCIV. Omnis Cylindri recti ſuperficies ſine baſibus æqualis eſt circulo, cuius ea, quæ ex centro media proportionalis eſt inter latus, & cylindri baſeos diametrum.
Theorema. Exemplum XCV. Omnis Cylindri recti ſuperficies ſine baſibus æqualis eſt circulo, cuius ea, quæ ex centro, media proportionalis eſt inter latus, & Cylindri baſeos diametrum, pag. 286
Reſolutio,
Lemma I.
Si fuerint duo triangula ſuper eadem baſi conſtituta, erunt in ratione altitudinum,
Lemma II.
Si fuerint duo triangula ſuper eadem baſi conſtituta, & altitudo vnius ſit dupla altitudinis alterius, rectangulum ſuper eadem baſi, altitudinem habens eam, quæ eſt minoris trianguli, æquabitur triangulo maiori.
Lemma III,
Si ſuper polygonum regulare erectum ſit Priſma, cuius altitudo ſit quarta pars altitudinis ipſius polygoni, ſuperficies Priſmatis æqualis erit huiuſmodi polygono. pag. 287
Lemma IV,
Cylindri recti ſuperficies, cuius altitudo eſt quarta pars diametri baſeos, æqualis eſt ipſi baſi.
Lemma V.
Cuiuſcunque recti Cylindri ſuperficies eſt ad baſin, vt cylindri latus ad quartam partem diametri

ipſius baſeos.

Compoſitio.

Theorema. Exemplum xcvi. Coni recti ſuperficies ad baſin eſt, vt latus eiuſdem coni ad ſemidiametrum baſeos, pag. 288

Theorema. Exemplum xcvii. Superficies cylindri recti eiuſdem altitudinis, ac baſeos cum cono, exceptis baſibus, ad conicam ſuperficiem eſt, vt latus cylindri ad ſemilatus coni.

Theorema. Exemplum xcviii. Circulus, cuius radius eſt medius proportionalis inter coni recti latus, & ſemidiametrum baſeos, æqualis eſt conicæ ſuperficiei.

Theorema. Exemplum xcix. Si conus rectus fuerit ſectus plano, quod ſit baſi parallelum. Dico &c.

Lemma. pag. 289

Lemma primum ad ſequens Theorema.

Sit polygonum regulare parilaterum, & æquilaterum, A B C D, &c. inſcriptum circulo A C X G, &c.

Lemma ſecundum.

Iiſdem poſitis; intelligatur circa A X, veluti axem, reuolui polygonum &c. pag. 290

Theorema. Exemplum c. Sphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli in eadem ſphæra deſcriptibilis.

Theorema. Exemplum ci. Sphætica ſuperficies quadrupla eſt circuli maximi eiuſdem ſpæræ. pag. 291

Theorema. Exemplum cii. Circulus æqualis eſt triangulo rectangulo, cuius latus vnum circa rectum æquale eſt radio; latus verò alterum itidem circa rectum æquale eſt peripheriæ eiuſdem circuli.

Theorema. Exemplum ciii. Cuiuſcunque portionis ſpæricæ ſuperficies æqualis eſt circulo, cuius radius eſt recta à vertice portionis ducta ad circumferētiam circuli, qui baſis eſt ipſius portionis. pag. 292

Lemma. pag. 293

Theorema. Exemplum civ. Cylindri recti ſphæræ circumſcripti ſuperficies æqualis eſt ſuperficiei ſphæræ.

Theorema. Exemplum cv. Si Cylindrus rectus ſphæræ circumſcriptus, ac ſphæra, ſecentur planis ad axem rectis, erunt ſingula ſuperficiei cylindricæ ſegmenta, ſegmentis ſingulis ſuperficiei ſphæricæ æqualia.

Theorema. Exemplum cvi. Segmenta ſuperficiei ſphæricæ parallelis circulis diſſectæ, rationem habent inter ſe, quam ſegmenta diametri ad prædictos circulos perpendicularis. pag. 294

Theorema. Exemplum cvii. Parabole ſeſquitertia eſt trianguli eiuſdem baſeos, ac altudinis.

Theorema. Exemplum cviii. Parabole ſeſquitertia eſt trianguli eiuſdem baſeos, ac altitudinis. pag. 295

Theorema. Exemplum cix. Parabole ſeſquiterſia eſt trianguli eiuſdem baſeos, ac altitudinis. pag. 296

Theorema. Exemplum cx. Omnis ſemiparaboles centrum grauitatis eſt in ea recta linea, quæ diametro æquidiſtans, ita diuit baſin, vt pars, quæ eſt ad curuam ſit ad reliquam, vt 5 ad 3.

Theorema. Exemplum cxi. Spatium linea ſpirali in prima circulatione deſcripta, & recta linea prima in principio circulationis, contentum, tertia pars eſt circuli primi. pag. 297

Theorema. Exemplum cxii. Spatium linea ſpirali in prima circulatione deſcripta, & recta linea prima in principio circulationis, contentum, tertia pars eſt circuli primi. pag. 298

Theorema. Exemplum cxiii. Linea ſpiralis æqualis eſt ſemicircumferentiæ ſui circuli. pag. 299

Theorema. Exemplum cxiv. Spatium cycloidale ad circulum ſui genitorem eſt in ratione tripla.

Theorema. Exemplum cxv. ſi ſit portio hyperboles, ellipſeos, vel circuli, dimidia figura non maior, &c. pag. 300

Theorema. Exemplum cxvi. ſphæra ad conum, cuius altitudo eſt ſemidiameter, baſis verò circulus maximus eiuſdem ſphæræ, eſt in ratione quadrupla.

Lemma. pag. 301

Theorema. Exemplum cxvii. ſi ſuper hemiſphærij baſi conſtitutus fuerit cylindrus eiuſdem cum hemiſphærio altitudinis. Dico exceſſum huius cylindri ſupra hemiſphærium æqualem eſſe cono eiuſdem baſeos, ac altitudinis cum ipſo hemiſphærio,

Lemma. pag. 302

Theorema. Exemplum cxviii. ſphæra ad conum, cuius altitudo eſt ſemidiameter, baſis verò circulus maximus eiuſdem ſphæræ eſt in ratione quadrupla.

Theorema. Exempla cxix. ſphæra æqualis eſt cono, cuius baſis eſt æqualis ſuperficiei ſphæræ, altitudo autem radius eiuſdem.

Theorema. Exemplum cxx. Omnis ſector ſphæræ æqualis eſt cono, cuius altitudo eſt radius ſphæræ, baſis autem æqualis ſectoris ſphæricæ ſuperficiei. pag. 303

Theorema. Exemplum cxxi. Cylindrus triplus eſt coni, eiuſdem altitudinis, ac baſeos.

Theorema. Exemplum cxxii. Omne conoides parabolicum dimidium eſt cylindri eiuſdem baſeos, ac altitudinis. pag. 305

Theorema. Exemplum cxxiii. Conoides parabolicum ad conum eiuſdem baſeos, ac altitudinis eſt in ratione ſeſquialtera. pag. 306

Methodus per Indiuiſibilia procedens iterum perpenditur,

Plerumque expedit Methodum indiuiſibilium acceſſire.

Vſus indiuiſibilium non expoſcit continuè compoſitionem ex indiuiſibilibus, tanquàm ex partibus.

Phyſicè in continuo ad minima quędam deueniendum eſt.

Nihil refert ad concludendam figurarum æqualitatem, quod lineæ actu ſint diſtinctæ in continuo &c.

Theorema I.

Figurarum omnia indiuiſibilia accepta, vt ſupra, ſunt magnitudines inter ſe rationem habentes.

Continuum ex ſemper diuiſibilibus, tanquàm ex partibus, componitur; ex indiuiſibilibus, tanquam ex earundem nexibus.

Partes dantur actu in continuo realiter inter ſe diſtinctæ.

Multitudo ipſarum dicenda eſt infinita in *potentia*, non in actu.

Multitudo partium in continuo nequit dici maxima.

Multitudo indiuiſibilium in continuo eandem ſortitur conditionem cum eius partibus. pag. 307

Non repugnat dari infinitum in potentia maius, & minus, quod tamen repugnat infinito in actu.

Quæ eſt ratio totius quantitatis ad totam, ea eſt multitudinis partium proportionalium ad multitudinem partium proportionalium, &c.

Mobile, dum mouetur motu æquabili, vt eſt tempus ad tempus, ita ſpatium ad ſpatium, &c.

Theorema II.

Figuræ habent inter se rationem eandem, quam earum omnia indiuiſibilia iuxtà quamuis Regulam aſſumpta.
Aliter idem Theorema demonſtratur. pag. 308
Per Methodos indiuiſibilium multa, præclaraque Theoremata demonſtrantur.
Prior Methodus vtitur indiuiſibilibus collectiuè ſumptis.
Posterior vtitur iiſdem indiuiſibilibus diſtributiuè acceptis.
Aliquando vtraque Methodus coniungitur.
Theorema. Exemplum cxxiv. Parabolæ inter eaſdem parallelas ſunt inter ſe, vt baſes. pag. 309
Obſeruanda quædam.
Figuræ æqualiter analogæ quæ dicantur.
Quæ nam dicantur figuræ proportionaliter analogæ. pag. 310

De Maximis, & Minimis.

Contemplatio de Maximis, & Minimis apud Veteres non habebat ſpecialem reſolutionis formam, ſicut apud Recentiores.
Auctor duo reſoluit ſibi propoſita Theoremata de Maximis, & Minimis.
Theorema. Exemplum cxxv. ſit recta A B, ad cuius extrema A, B, rectæ ſint conſtitutæ A T, B Q cum ea facientes angulos rectos, &c.
Lemma ad ſequens Theorema.
Si quotcunque fuerunt triangula vnius ordinis, totidem autem alia alterius ordinis &c. pag. 311
Corollarium.
In omni polygono regulari aggregatum rectarum æqualium, quæ ducuntur ex puncto intus accepto perpendiculares ad ſingula eiuſdem latera, æquale eſt aggregato ex lineis ductis à centro perpendicularibus ad eadem polygoni latera.
Theorema. Exemplum cxxvi. ſi à pluribus, quàm duobus punctis rectæ coeuntes angulos æquales efficiant. Dico prædictarum linearum aggregatum minimum eſſe.

De Problematum Reſolutione iuxta Veteres; ſeu de Antiqua Methodo per explicitum Datorum vſum ad Problemata reſoluenda. Cap. XI.

ANtiquiores Geometræ in Problematum reſolutionibus plurimum inſudarunt. pag. 312
Reſolutionis Problematum gratiâ, Ars Analytica à Antiquis inſtituta fuit. pag. 313
Reſolutionis duplex genus; Theorematicum, ſeu contemplatiuum vnum; Problematicum alterum.
Problematis determinatio quid.
Datorum doctrina apud Veteres ad Problemata reſoluenda conducebat.
Tripartitum genus Problematum; Planum, Solidum, & Lineare.
Lemma.
Sit quadratum A D, & ducatur B G E, atque ipſi ad rectos angulos E F; intelligatur recta linea B G E ſecare C D in puncto G, & A C productam in E, recta verò linea E F, ſecare B D, productam in F. Dico quadrata ex C D, G E, quadrato ex D F æqualia eſſe.
Problema.
Quadrato exiſtente A D producere A C in E, & facere E F datam, quæ ad punctum B pertineat. pag. 314
Reſolutio.
Compoſitio.
Problema.
Circuli portione data in recta linea A B, inflectere A C B in data proportione. pag. 315
Reſolutio.
Compoſitio.
Problema.
Rectis lineis A B, A C poſitione datis, ducere D E parallelam rectæ lineæ poſitione datæ, & facere ipſam DE datam, hoc eſt rectæ lineæ magnitudine datæ æqualem.
Reſolutio. pag. 316
Compoſitio.
Problema.
Circulo poſitione dato A B C, & datis duobus punctis D, E, inflectere D A E, & facere B C ipſi D E parallelam.
Reſolutio.
Compoſitio.
Problemata, quæ Ghetaldus reſoluenda ſibi propoſuit. pag. 317
Problema.
Data baſe trianguli, differentia laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.
Reſolutio.
Compoſitio.
Lemma ad ſequens Problema.
Si angulus trianguli fuerit centrum circuli, baſis verò ſemidiameter, &c. pag. 318
Problema.
Data baſe trianguli, aggregato laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.
Reſolutio.
Compoſitio.
Lemma ad ſequens Problema.
Si duo anguli in ratione dupla eidem circumferentiæ circuli inſiſterint, duplus autem fuerit ad centrum, alter ad circumferentiam erit. pag. 319
Problema.
Data differentia ſegmentorum baſeos trianguli, aggregato laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 320
Lemma primum ad ſequens Problema.
Si angulus trianguli fuerit centrum circuli; differentia verò laterum ſemidiameter, &c.
Lemma ſecundum ad idem.
Secet circulum ſub A centro recta linea B H L in punctis H, L, & per punctum H, quod ſit propius ad B, ducatur altera recta A H I. Dico angulum I H B, minorem eſſe recto. pag. 321
Problema.
Data differentia ſegmentorum baſeos trianguli, differentia laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.
Reſolutio.
Compoſitio.

De Methodo, per implicitum Datorum vſum, quam Auctor in locum Antiquæ iam explicatæ ſubrogauit, & in Problematum reſolutionibus adhibere conſueuit. Cap. XII.

DAtorum vſus in Problematum reſolutionibus inſtituendis pleriſque non arridet. pag. 322
Præceptum.

Præceptum.
Conſideremus, ex hypotheſi, quod problema ipſum ſit factum, quid inde conſequatur; nam hunc in modum ratiocinando peruenimus ad ea, quæ data ſunt, ac nota; vnde quod quæritur, datum redditur, & ex datis licet perficere.
Problema. Exemplum I. Quadrato exiſtente A D, producere A C in E, & facere F datam, quæ ad punctum B pertineat. pag. 323
Reſolutio.
Compoſitio.
Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.
Problema. Exemplum II. Circuli portione data in recta linea A B, inflectere A C B, in data proportione, E ad F.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 324
Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.
Problema. Exemplum III. Rectis lineis A B, A C, poſitione datis, ducere D E parallelam rectæ lineæ poſitione datæ, & facere ipſam D E datam, hoc eſt rectæ lineæ magnitudine datæ æqualem.
Reſolutio.
Compoſitio.
Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.
Problema. Exemplum IV. Circulo poſitione dato A B C, & datis duobus punctis D, E, inflectere D A E, & facere B C ipſi D E parallelam.
Reſolutio. pag. 325
Compoſitio.
Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.
Reſolutio.
Compoſitio.
Problema. Exemplum V. Data baſe trianguli, differentia laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum. pag. 326
Reſolutio.
Compoſitio.
Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.
Problema. Exemplum VI. Data baſe trianguli, aggregato laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 327
Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.
Problema. Exemplum VII. Data differentia ſegmentorum baseos trianguli, aggregato laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 328
Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.
Reſolutio.
Compoſitio.
Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.
Problema. Exemplum VIII. Data differentia ſegmentorum baſeos trianguli, differentia laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum. pag. 329
Reſolutio.
Lemma.
Compoſitio.
Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.
Scholion. pag. 330
Problema. Exemplum IX. Dato in ſemicirculo A B C, puncto quidem B, quæritur in diametro punctum reflexionis, puta D, ita vt ducta incidente B D, reflectatur in E punctum in linea tangente C E; at intercepta F E ad tangentem E C rationem habeat, vt S ad R.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 331
Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.
Problema. Exemplum X. Data trianguli baſe, & aggregato laterum vnà cum ratione ſegmentorum baſeos, reperire triangulum.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 332
Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.
Problema. Exemplum XI. Datum ſit triangulum A H C, cuius baſis A C, diuiſa ſit bifariam in B; ex B verò acta ſit B G. Oportet ducere D F parallelam ipſi A C, quæ abs B G, ſecetur in E, ita vt rectangulum D E F æquale ſit quadrato datæ rectæ I. pag. 333
Reſolutio primi caſus. pag. 334
Lemma.
Compoſitio.
Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.
Reſolutio ſecundi caſus.
Compoſitio. pag. 335
Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.
Reſolutio tertij caſus.
Compoſitio. pag. 336
Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.
Problema. Exemplum XII. Dato vno è lateribus trianguli, angulum verticis ambientibus, dato verticis angulo &c. pag. 337
Reſolutio Lemmatica.
Lemma. pag. 338
Compoſitio.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 339
Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.
Ad Auctoris Methodum, eam, qua Archimedes in Problematum Reſolutionibus vtebatur, reuocari oſtenditur.
Auctoris Methodo Archimedis Problemata demonſtrantur.
Problema. Exemplum XIII. Dato Cono, vel cylindro, ſphæram inuenire, cono, vel cylindro æqualem.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 340
Effectio Geometrica ex Analyſi deducta.
Problema. Exemplum XIV. Datam ſphæram plano ſecare, ita vt ſuperficies ſegmentorum rationem inter ſe inuicem habeant eandem, quæ ſit alia data.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 341
Effectio Geometrica.

De Deductione.

Deductio communis eſt Theoremati, atque Problemati.
Deductio quid.
Problema de cubi duplicatione, Veteres ad illud, quod eſt de duabus medijs continuè proportionalibus, deduxerunt.
Problema alterum, quod ad aliud deduci poteſt.
Problema. Examplum XV. Datis duabus rectis lineis in plano, punctiſque datis, & data proportione inæqualium linearum &c.

*De ineunda Reſolutione, Compoſitioneque in-
ijs Magnitudinibus, quæ commenſurabi-
les, & incommenſurabiles dicuntur.*
Notanda quædam. pag. 343
Theorema. Exemplum CXXVII. Eſt quadratum A B C D, in quo diameter A C, arcus quadrantis A F C ſecans diametrum in F, &c.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 344

LIBRI SECVNDI.

PRæfatio. pag. 345

De explicandis æquationibus Puris, ſiue Simplicibus. Cap. I.

EXemplum I. pag. 347
Datum latus ita diuidere, vt partes dato diſtant interuallo. Oportet autem interuallum datum minus eſſe dato latere diuidendo.

De explicandis æquationibus compoſitis, & primò de Quadraticis. Cap. II.

Variæ, ac diuerſæ Methodi explicandi æquationem, in qua quadratum afficitur affirmatè, ſeu in qua quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere, & data coefficiente magnitudine.

MEthodus Diophanti.
Enarratio Methodi Diophanti.
Exemplo illuſtratur. pag. 348
Methodus communis Antiquorum.
Enarratio Methodi communis Antiquorum.
Exemplum.
Demonſtratio Geometrica huius Methodi. pag. 349
Idem aliter demonſtratur.
Methodus peculiaris Vietæ. pag. 350
Demonſtratio.

Variæ, ac diuerſæ Methodi explicandi æquationem, in qua quadratum afficitur negatè, ſeu in qua quadratum afficitur multa plani ſub latere, dataque coefficiente magnitudine.

Methodus Diophanti.
Methodus communis Antiquorum.
Exemplum.
Demonſtratio. pag. 351
Methodus peculiaris Vietæ. pag. 352
Demonſtratio.

Variæ, ac diuerſæ Methodi explicandi æquationem, in qua quadratum negatur de efficiente homogeneo, ſeu in qua planum ſub latere, & data coefficiente longitudine afficitur multa quadrati.

Methodus Diophanti.
Methodi Diophanti enarratio.
Exemplo illuſtratur.
Methodus communis Antiquorum. pag. 353
Enarratio Methodi communis Antiquorum.
Exemplum.
Demonſtratio.
Alia demonſtratio. pag. 354
Corollarium. pag. 355
Methodus peculiaris Vietæ.
Enarratio peculiaris Methodi Vietæ.
Demonſtratio eiuſdem Methodi.

De explicandis æquationibus ſolidis compoſitis, & primò de Cubicis. Cap. III.

Methodi ad explicandam æquationem, in qua Cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano, vt $a^3 + b^2 a = z^3$, *ſeu z ſolido.* pag. 356

ITalorum laus.
Hæc ſuperior Methodus non inſeruit Geometriæ.
Methodus communis Recentiorum. pag. 357
Exemplum. pag. 358
Demonſtratio.
Lemma I.
Datis differentia cuborum, & rectangulo ſub lateribus, cuborum aggregatum ſic reperiunt.
Scholion. pag. 359
Lemma II.
Datis aggregato, & differentia duorum cuborum, eorum latera ſic reperiunt.
Lemma III.
Cubum differentiæ laterum, plus triplo ſolido ſub differentia laterum in rectangulum ſub lateribus, eſſe æqualem differentiæ cuborum à lateribus, ſic oſtendunt.
Modus, quo Auctor vſus eſt ad duas medias continuè proportionales inueniendas inter duas datas.
Auctoris Methodo abſoluitur, quod Clariſſimus Geometra præſtitit beneficio ſpecioſæ Logiſtices ad eandem Cubicam æquationem affirmatiuè affectam ſub latere, explicandam. pag. 360
Problema.
Propoſitam rectam Q D, vtcunque diuiſam in A, iterum oportet diuidere in C, ita vt quadratum Q A ad quadratum A C ſit in ratione, quam habet A C ad C D.
Auctoris Methodo idem Problema reſoluitur.
Reſolutio.
Lemma I. pag. 361
Lemma II.
Lemma III.
Compoſitio.
Geometrica Effectio ex Analyſi deducta.

Methodi ad explicandam cubicam æquationem ſub latere negatiuè affectam, vt $a^3 - 3b^2 a = z^3$, *ſeu z ſolido.* pag. 362

Methodus communis Recentiorum.
Lemma I. pag. 363
Lemma II.
Anguli triſectio, qua Auctor in huius Problematis effectione vti conſueuit. pag. 364

Problema.
Datum angulum rectilineum triſariam diuidere.
Anguli recti triſectio.
Anguli cuiuſdam, tàm obtuſi, quàm acuti triſectio.
Omnis anguli, tàm obtuſi, quàm acuti triſectio. pag. 365
Auctoris Methodus ad generalem Polygonorum omnium ordinatorum inſcriptionem in circulo. pag. 367
Problema.
Circuli circumferentiam in quotcunque partes æquales diſpeſcere. Vel, quod in idem recidit; Propoſito circulo quodcunque polygonum æquilaterum, ac ordinatum inſcribere.
Auctoris Methodo abſoluitur, quod Præclaros Geometra præſtitit beneficio ſpecioſæ Logiſtices ad eandem Cubicam æquationem negatiuè affectam explicandam. pag. 368
Problema.
Datis duabus rectis Z, & Q, tertiam reperire X, ad cuius quadratum eandem habeat rationem quadratum Z, quæ eſt ipſius X ad aggregatum ex Z, & X.
Reſolutio.
Lemma I.
Lemma II. pag. 369
Compoſitio.

Methodi explicandi æquationem, in qua ſolidum afficitur multa Cubi vt $3 b^2 a - a^3 = z^3$, ſeu Z ſolido. pag. 370

Methodus communis Recentiorum.
Auctoris Methodo abſoluitur, quod Præclaros Geometra præſtitit beneficio ſpecioſæ Logiſtices ad eandem cubicam æquationem explicandam, in qua ſolidum ſub latere afficitur multa Cubi. pag. 371
Problema.
Datis duabus rectis P, & Q, tertiam adinuenire, vt X, ad cuius quadratum, datæ P quadratum eandem habeat rationem, quæ eſt ipſius X ad exceſſum, quo X ſuperat Q.
Reſolutio.
Lemma I.
Lemma II. pag. 372
Lemma III.
Compoſitio.
Monitum.
Scholion. pag. 373
Methodus explicandi æquationem, in qua ſolidum affectum ſub quadrato multatur cubo.
Æquationes Cubicæ affectæ ſimpliciter ſub Quadrato. pag. 374
Æquationes Cubicæ affectæ, tàm ſub quadrato, quàm latere. pag. 375
Æquationes Cubicæ affectæ, tàm ſub quadrato, quàm latere.

Methodi explicandi æquationes compoſitas quadrato-quadraticas; & primò de Æquationibus quadrato-quadraticis ſimpliciter affectis ſub quadrato. Cap. IV.

Problema. pag. 376
Data baſe trianguli rectanguli, dataque media proportionali inter hypothenuſam, & perpendiculum, reperire triangulum.
Methodus explicandi Æquationem, in qua quadrato-quadratum afficitur negatè ſub quadrato. pag. 377
Methodus explicandi Æquationem, in qua plano-planum ſub quadrato multatur Quadrato-quadrato.
Problema.
Data hypothenuſa trianguli rectanguli, & media proportionali inter baſim, & perpendiculum reperire triangulum. pag. 378
Æquationes quadrato-quadraticæ affectæ ſimpliciter ſub latere.

De Theorematibus reſoluendis beneficio ſpecioſæ Logiſtices. Cap. V.

In Theorematibus reſoluendis per Algebram, eodem ordine, quo procedit Reſolutio, procedit etiam Demonſtratio, ſeu Compoſitio. pag. 379
Propoſitio. Exemplum I. Si recta linea ſecetur vtcunque, rectangulum ſub tota, & differentia partium, cui, plano ad ipſas partes relato, æquale ſit, inquirere. pag. 380
Theorema.
Si recta linea ſecetur vtcunque, rectangulum ſub tota, & differentia partium æquale eſt differentiæ quadratorum partium.
Scholion.
Corollarium.
Si differentia quadratorum applicetur ad laterum differentiam oritur eorundem laterum aggregatum.
Propoſitio. Exemplum II. Si recta linea ſecetur, vtcunque quadratum differentiæ partium, quibus, planis ad ipſas partes relatis, æquale ſit, inquirere.
Theorema.
Si recta linea ſecetur vtcunque, quadratum differentiæ partium æquale eſt quadratis partium, minus duplo rectangulo ſub partibus. pag. 381
Propoſitio. Exemplum III. Si recta linea ſecta ſit vtcunque, ſolidum ſub differentia partium, & ſub aggregato quadratorum, vnà cum rectangulo ab ipſis, cui, ſolido ad ipſas partes relato, æquale ſit, inueſtigare.
Theorema.
Si recta linea ſecetur vtcunque, ſolidum, cuius altitudo eſt differentia partium, baſis autem aggregatum planorum, quorum duo ſunt quadrata partium, reliquum autem rectangulum ſub ipſis, æquale eſt differentiæ cuborum ab ipſis partibus.
Scholion.
Corollarium.
Differentia cuborum applicata ad laterum differentiam, oritur aggregatum planorum, &c. pag. 382
Propoſitio. Exemplum IV. Sit recta EI, & inea ſit, vt IE ad HE, ita GE ad FE; rectanguli quidem EHF ad rectangulum ſub EH, & GI, quæ ratio ſit, penes lineæ partes, nìm vt EF ad EG, inquirere.
Theorema.
Sit recta quidem AB, ſitque vt AB ad AE, ita AD ad AC. Dico eſſe, vt AC ad AD, ita rectangulum AEC ad rectangulum ſub AE, & DB.
Propoſitio. Exemplum V. Si ex EI abſciſſæ ſint æquales partes EF, HI, & interceptum ſegmentum FH, vtcunque diuiſum in G; oporteat rectangulum FGH, quibus, planis ad alia lineæ ſegmenta relatis, æquale ſit, inueſtigare.
Theorema.

Si ex recta A B, abſciſſæ ſint æquales partes A C, D B, & interceptum ſegmentum C D, vtcunque diuiſum in E. Dico rectangulum C E D, æquale eſſe rectangulo A E B, minus rectangulo A C B. pag. 383
Propoſitio. Exemplum VI. Si fuerit, vt E I ad H I, ita I G ad G H; biſariam autem E H ſecetur in F; è reliquis tres deſignare continuè proportionales.
Theorema.
Si ſit recta A B, ſitque vt A B ad H B, ita A D ad D H; & A H biſariam ſecetur in C. Dico item eſſe, vt C B ad C H, ita C H ad C D.
Scholion.
Propoſitio. Exemplum VII. Iiſdem poſitis, &c. Num dicendum vt G I ad E G, ita G H ad F G, inquirere. pag. 384
Theorema.
Iiſdem poſitis &c. in recta A B, & ſit vt A B, ad H B, ita A D ad D H. Dico eſſe vt D B ad A D, ita D H ad D C.
Notandum.
Scholion.
Termini proportionales. pag. 385
Propoſitio. Exemplum VIII. Sit recta quædam ſecta per inæqualia in D; ſint autem partes A D, D B diuiſæ biſariam in C, & E; oporteat conferre quadratum totius A B, plus quadrato D B, cum quadrato A C, plus quadrato C B.
Theorema.
Si recta A B diuiſa ſit per inæqualia in D. Diuiſis autem partibus in punctis C, & E, biſariam. Dico quadratum A B, plus quadrato D B, duplum eſſe quadrati A C, plus quadrato C B. pag. 386
Propoſitio. Exemplum IX. Si latus aliquod ſectum ſit vtcunque, quadratum totius, plus quadrato differentiæ partium, quibus, planis ad ipſas partes relatis, æquale ſit, inquirere.
Theorema.
Si latus aliquod diuiſum fuerit vtcunque, quadratum totius, plus quadrato differentiæ partium, duplum eſt aggregati quadratorum à partibus.
Propoſitio. Exemplum X. Si recta A B ſecta ſit in C, & D, vt A C, D B ſint inter ſe æquales; ſit autem adiecta ipſi quæcunque B F; rectangulum C F D, quibus, planis ad ipſas partes relatis, æquale ſit, inquirere. pag. 387
Theorema.
Si recta linea A B ſecta ſit in C, & D, ita vt A C, D B ſint æquales, & adiecta ei ſit B F. Dico rectangulum C F D, æquale eſſe rectangulo A F B, vnàcum rectangulo C B D.
Corollarium.
Propoſit. Exempl. XI. ſit recta B F, ſecta quidem in G, & H, ita vt quadratum E G ad quadratum G H ſit, vt E F ad H F. Sit autem iniunctum inquirere, quo pacto ſe habeant E F, G F, & H F, ſi inter ſe conferantur.
Theorema.
Si recta B F ſecta ſit in G, & H, ita vt quadratum E G ad quadratum G H, ſit vt B F ad H F. Dico B F, G F, H F, in continua eſſe analogia. pag. 388
Propoſitio. Exemplum XII. ſit recta A D, diuiſa in punctis C, B, ita vt rectangulum A D B, ſit æquale quadrato C D, quo pacto ſegmenta inter ſe collata ſe habeant, inueſtigare.
Theorema.
Sit recta A D, diuiſa in punctis C, & B, ita vt rectangulum A D B æquale ſit quadrato C D; erit A C maior, quàm C B; & erit vt differentia inter A C, & C B ad C B, ita C B ad B D.
Notandum. pag. 389
Scholion.
Propoſitio. Exemplum XIII. ſit iniunctum inquirere, cui nam plano, relato ad rectam abſciſſam ex diametro F L, ſit æquale quadratum ſemiordinatim applicatæ in ſectione, quæ dicitur Parabole.
Theorema.
Si fuerit, vt rectangulum B A C ad quadratum B C; ita A F ad F R. Dico rectangulum R F L, æquale eſſe quadrato K L. pag. 390
Propoſitio. Exemplum XIV. ſit iniunctum inquirere, cui nam plano, relato ad rectam abſciſſam ex diametro, ſit æquale quadratum ſemiordinatim applicatæ in ſectione, quæ dicitur Hyperbole.
Theorema.
Si fuerit vt quadratum A I ad rectangulum B I C, ita H F ad R F, &c. pag. 391
Propoſitio. Exemplum XV. ſit iniunctum inquirere, cui nam plano, relato ad F L, ſit æquale quadratum ſemiordinatim applicatæ K L, in ſectione, quæ dicitur Ellipſis.
Theorema.
Si fiat vt quadratum A I ad rectangulum B I C, ita F H ad F R, & vt F H ad F R, ita F L, ſeu P S, ad P R. Dico rectangulum P F L æquale eſſe quadrato K L.
Propoſitio. Exemplum XVI. Propoſita ſit Ellipſis D M E O in cono A B C: eius autem axis D E, ordinatim applicatæ A K, M O. Sit iniunctum inquirere, quænam ſit ratio quadrati I K ad quadratum N O. pag. 392
Theorema.
Si ſit Ellipſis D H E O in cono A B C, cuius axis D E; ordinatim applicatæ H K, M O. Dico quadratum I K ad quadratum N O eſſe, vt rectangulum E I D ad rectangulum E N D.

Cautiones, quibus indiget Analyſta in Theorematis oblati Reſolutione inſtituenda, & quid inter Antiquam, & nouam Methodum interſit.

Cap. VI.

QVid Analyſtæ cauendum. pag. 393
Theorema.
In omni circulo ſumpto quouis arcu minori, quàm 45. grad. eiuſque duplo, erit &c.
Auctoris modi, quibus propoſito Theoremati ſit ſatis.
Propoſitio.
Iiſdem poſitis, & propoſitum ſit inquirere, quæ ſit ratio differentiæ quadratorum A B, B F, ad duplum quadratum A B, relata ad E F, & B G.
Reſolutio I.
Propoſitio.
Quod ſupra dicebatur &c. propoſitum ſit inquirere. Auctoris ſuprapoſiti Theorematis. pag. 394
Reſolutio II.
Theorema.
In omni circulo ſumpto quouis arcu minori, quàm 45. grad. eiuſque duplo erit, &c.
Eiuſdem Theorematis ab Auctore iuxtà Methodum antiquam inſtituitur Reſolutio I.
Compoſitio. pag. 395
Aduertenda quædam.
Theorema.
In omni circulo ſumpto quouis arcu minori, quàm 45. gradaum, eiuſque duplo erit &c.
Eiuſdem Theorematis ab Auctore iuxtà Methodum antiquam inſtituitur Reſolutio II. pag. 396
Compoſitio.

Theorema.
Si trianguli angulus bifariam ſectus ſit, ſecans autem angulum recta linea, ſecuerit & baſin &c. pag. 397
Theorema.
Si trianguli angulus bifariam ſectus ſit, ſecans autem angulum recta linea, ſecuerit, & baſin &c. pag. 398
Auctor iuxtà Methodum antiquam idem Theorema reſoluit.
Reſolutio.
Compoſitio.

De Problematibus reſoluendis Specioſa Algebra beneficio. Cap. VII.

IN cuius gratiam instituta ſit analytica. pag. 399
In Problematibus reſoluendis quomodo procedendum.
Duo ſunt in quocunque Problemate.
Notanda quædam pro reſoluendis Problematibus.
Genos Problematum tripartitum. pag. 400
Notandum.
Notanda quædam.
Problema locale.
Quo ſenſu admitti poſſit. pag. 401
Exempla de æquationibus planis.
Æquationes ſolidæ.
Inſtituenti Problematis reſolutionem quid obſeruandum.
Quando peruentum eſt ad quantitates imaginarias quid agendum.
Problema.
Sit inuentum quatuor quantitates Geometricè proportionales reperire, ita vt differentia quadratorum, quæ fiunt ab illis, ſint in harmonica ratione.
Problema.
Tres quantitates proportionales inæquales adinuenire, quæ cum alia quauis data quadrilaterum circulo quidem inſcriptibile efficiant.
Exemplum alterum. pag. 402

Præcepta pro reſoluendis Problematibus beneficio ſpecioſa Algebra varijs Exemplis illuſtrantur. Cap. VIII.

PRimum Exemplorum genus; ad quod Problemata pertinent plana, in quibus ſimplex æquatio contingit.
Problema. Exemplum I. Propoſitio latus ita diſpeſcere, vt maior pars minorem dato ſuperet exceſſu.
Reſolutio.
Poriſma.
Compoſitio.
Alia Reſolutio. pag. 403
Poriſma.
Compoſitio.
Scholion.
Problema. Exemplum II. Propoſito lateri latus adiungere, vt datum cum adiuncto ad adiunctum datam habeat rationem. Oportet autem rationem datam eſſe maioris ad minus.
Reſolutio.
Poriſma. pag. 404
Compoſitio.
Monitum.
Scholion.
Problema. Exemplum III. Propoſitum latus A B, vtcunque diuiſum in C, ita protrahere ad D, vt rectangulum A D a quadrato C D ſit æquale.
Reſolutio.
Poriſma. pag. 405
Compoſitio.
Scholion.
Notandum.
Reſolutio ſecunda.
Poriſma.
Compoſitio.
Conſpectus prioris Reſolutionis, atque Compoſitionis. pag. 406
Conſpectus ſecundæ Reſolutionis, atque Compoſitionis.
Problema. Exemplum V. Propoſitum latus in duas partes diuidere, vt rectangulum ſub partibus ad quadratum differentiæ partium datam habeat rationem.
Reſolutio.
Poriſma.
Compoſitio. pag. 407
Problema. Exemplum VI. in dato triangulo B G C, quadratum inſcribere.
Reſolutio.
Poriſma.
Compoſitio. pag. 408
Problema. Exemplum VII. Data ſumma duorum laterum, & differentia quadratorum ab ipſis, reperire latera, ſeu datum latus diuidere &c.
Poriſma.
Secundum Exemplorum genus; ad quod pertinent illa problemata, in quorum Reſolutionibus, æquationes affectæ intercedunt, non tranſcendentes tamen planorum limites. pag. 409
Problema. Exemplum I. Dato rectangulo ſub lateribus, & differentia laterum inuenire latera.
Reſolutio.
Poriſma.
Compoſitio.
Reſolutio II.
Compoſitio. pag. 410
Problema. Exemplum II. Propoſitis duobus lateribus, alterum ita diuidere, vt rectangulum ſub indiuiſo, & altero ſegmentorum diuiſi ad quadratum reliqui ſegmenti datam habeat rationem.
Poriſma.
Compoſitio.
Aliter eidem problemati ſatisfit. pag. 411
Problema. Exemplum III. Propoſitum latus in duas partes diuidere, vt rectangulum ſub ipſis æquale ſit plano facto ex differentia partium in latus aliud datum.
Reſolutio.
Poriſma.
Compoſitio.
Problema. Exemplum IV. Data ratione interualli quadratorum minoris extremi, & medij ad quadratum maioris, inuenire tria latera proportionalia. pag. 412
Poriſma.
Problema. Exemplum V. Dato vno ex cruribus trianguli angulum rectum ambientibus, dataque differentia ſegmentorum baſeos, reperire triangulum.
Poriſma. pag. 413
Problema. Exemplum VI. Propoſitum ſit rectangulum, in quo oporteat deſcribere rectangulum alterum, vt in figura ibi poſita, ita vt hoc ſit quarta pars illius. pag. 414

Reſolutio I.
Poriſma. pag. 415
Compoſitio.
Speculum demonſtrationis. pag. 416
Aliter hoc idem Problema reſoluitur. pag. 425
Reſolutio II.
Poriſma. pag. 426
Compoſitio.
Tertium Exemplorum genus; ad quod pertinent ea Problemata, quorum reſolutiones per rectam, & circulum perfici non poſſunt, ſed vel Conicas ſectiones, vel lineas magis compoſitas requirunt. pag. 427
Problema. Exemplum I. Propoſitam rectam Q D diuiſam in A, iterum ſecare quidem in C, vt ſit quadratum Q A ad quadratum A C, in ratione A C ad C D.
Reſolutio.
Poriſma.
Compoſitio. pag. 428
Problema. Exemplum II. Latus reperire, à cuius cubo ſi ſubtraxeris ſolidum ex ipſo in quadratum alterius lateris dati, remaneat ſolidum itidem datum.
Reſolutio.
Compoſitio.
Problema. Exemplum III. propoſitum latus A B, vtcunque ſectum in C, iterum diuidere in D inter C, B, ita vt ſolidum parallelepipedum ex A D, in quadratum C D ad cubum D B, rationem habeat datam. pag. 429
Reſolutio primi caſus.
Problema. Exemplum IV. Eſt circulus A B C D E, in quo diameter C B, & perpendicularis B G; diametrum ſecans in G. Oporteat &c.
Præparatio.
Reſolutio.
Compoſitio. pag. 430

De cautionibus in cuiuslibet oblati Problematis Reſolutione inſtituenda. Deque Subſidiaria coëfficente quantitate, *quam Auctor ad altos gradus in ipſamet Reſolutione vitandos, adhibere conſueuit. Cap. IX.*

Problema. Exemplum I. Quadrato dato, & vno latere producto, aptare ſub exteriori angulo rectam magnitudine datam, quæ quidem ad oppoſitum angulum pertingat.
Carteſij modus. pag. 431
Schootenij modus.
Auctoris modi, quibus ſuperiori Problemati ſit ſatis.
Reſolutio I. pag. 432
Reſolutio II.
Poriſma.
Lemma I.
Lemma II.
Compoſitio. pag. 433
Problema. Exemplum II. Data recta biſecta, ſuper ipſam conſtituere triangulum rectangulum, ita vt quæ à vertice anguli recti ducitur ad punctum biſectionis, media ſit proportionalis inter latera circa rectum.
Aduertenda quædam.
Cautius procedendum Analyſtæ.
Obſeruanda quædam.
Problema. Exemplum III. Datum latus bifariam diuiſum, iterum in partes inæquales diſpeſcere, vt rectangulum ſub partibus ipſis inæqualibus ad quadratum intermedij ſegmenti, propoſitam rationem obtineat.
Reſolutio I.
Poriſma. pag. 434
Reſolutio II.
Poriſma.
Compoſitio.
Problema. Exemplum IV. Datis duobus lateribus vnum ipſorum ita producere, vt rectangulum contentum ſub compoſito ex dato, & adiuncto, & ſub adiuncto, ad quadratum alterius itidem dati, datam habeat rationem.
Reſolutio I.
Poriſma. pag. 435
Compoſitio.
Reſolutio II.
Poriſma.
Compoſitio. pag. 436
Problema. Exemplum VII. E tribus lateribus continuè proportionalibus, dato medio, inuenire extrema, vt maius, plus multiplici medio, ad minus, plus æquè multiplici medio, datam rationem obtineat.
Reſolutio.
Poriſma.
Lemma.
Compoſitio. pag. 437
Problema. Exemplum VIII. Dato vno ex lateribus trianguli, rectum angulum ambientibus, datoque aggregato ex reliquo latere, & baſi, reperire triangulum.
Reſolutio.
Poriſma.
Compoſitio. pag. 438
Problema. Exemplum IX. Datum latus ita diſpeſcere, vt rectangulum ſub toto, & parte ad quadratum alterius partis ſit in data ratione.
Reſolutio I.
Poriſma.
Compoſitio. pag. 439
Reſolutio II.
Poriſma.
Compoſitio.
Problema. Exemplum X. propoſitum latus in duas partes diuidere, vt harum vtriuſque, non tamen eædem datæ partes, ſi coniungantur, datum latus conficiant. &c.
Reſolutio. pag. 440
Poriſma.
Reſolutio.
Poriſma.
Compoſitio.
Scholion. pag. 451
Problema. Exemplum IX. Latus reperire, à quo ablatis duobus datis lateribus, reſidua conſtituturam inter ſe rationem habeant. pag. 452
Poriſma.
Compoſitio.
Problema. Exemplum X. propoſitam rectam A B, bifariam ſectam in C, ſecare iterum in D, inter C, B, &c.
Reſolutio I. pag. 453
Reſolutio II.
Poriſma.
Compoſitio.
Lemma I. pag. 454
Reſolutio.
Compoſitio.
Problema. Exemplum XI. Dato latere, vtcunque diuiſo,

uiſo, vt multiplex pars vna, plus multiplici aggregato ex altera parte, & latere adiuncto ad multiplicem eandem partem, plus aggregato iam dicto, ſit in data ratione.
Reſolutio I.
Poriſma.
Reſolutio II. pag. 455
Reſolutio III.
Compoſitio.
Problema.
Data perpendiculari, aggregato laterum trianguli, ac differentia ſegmentorum baſeos; reperire triangulum.
In huius Problematis Reſolutione Gheraldus viam minùs obuiam calcauit.
Problema. Exemplum XII. Data perpendiculari, aggregato crurum trianguli, & differentia ſegmentorum baſeos; reperire triangulum. pag. 456
Reſolutio.
Poriſma.
Compoſitio.
Superius Poriſma cum alio coincidit. pag. 457
Secunda Reſolutio.
Poriſma. pag. 458
Compoſitio.
Notandum. pag. 459
Notanda quædam.
Inſtituitur noua, & quidem expeditior Reſolutio.
Poriſma.
Problema. Exemplum XIII. Data differentia crurum alicuius trianguli, & perpendiculari, vnà cum differentia ſegmentorum baſeos, reperire triangulum. pag. 460
Reſolutio I.
Poriſma.
Compoſitio.
Reſolutio II.
Poriſma.
Problema. Exemplum XIV. Datum latus A B, vtcunque ſectum in D, diuidere illud iterum in C, inter A, D, ita vt rectangulum B A C ad rectangulum C D B datam habeat rationem. pag. 461
Reſolutio.
Poriſma.
Compoſitio.
Problema. Exemplum XV. Duo latera reperire, vt vtrunque ab altero datum ſegmentum accipiens, ad reſiduum conſtitutam habeat rationem. pag. 462
Reſolutio.
Poriſma.
Compoſitio.
Lemma.
Si ſint quatuor termini proportionales, eſt differentia primi, & tertij ad differentiam primi, & quarti, minùs differentia inter primum, & ſecundum, vt eſt primus terminus ad ſecundum, &c. pag. 463
Problema. Exemplum XVI. Propoſitum latus bis diuidere in duas partes, ea lege, vt maior pars è prima diuiſione ſit ad minorem ex ſecunda in data ratione maioris ad minus, & maior ex ſecunda ſit ad minorem ex prima in alia ratione quoque maioris ad minus. pag. 464
Reſolutio.
Poriſma.
Compoſitio.
Problema. Exemplum XVII. Propoſitum latus in tres partes diſpeſcere, ea lege, vt alicuius extremarum aſſumpta media ad extremam reliquam conſtitutam rationem habeat. pag. 465
Reſolutio.
Poriſma.
Poriſma.
Compoſitio. pag. 466
Problema. Exemplum XVIII. In ſemicirculo A B C, eſt diameter A C, protracta vſque ad E, ita vt &c.
Reſolutio.
Poriſma.
Compoſitio. pag. 467
Problema. Exemplum XIX. Dati ſemicirculi diametrum producere eouſque, vt ab huius extremo ducta tangente, &c.
Reſolutio.
Poriſma.
Compoſitio. pag. 468
Scholion.
Problema. Exemplum XX. Dato aggregato quatuor quantitatum continuè proportionalium, & aggregato quadratorum ab extremis, ſingulas diſtinguere.
Reſolutio.
Poriſma.
Compoſitio. pag. 469
Idem per Analyſeos regreſſum, adhibita ſolidorum comparatione, oſtendi poteſt.
Exponitur ἐπιταγματικὴ, ſeu ſubſidiaria coefficiens quantitas, quam Auctor adinuenit, & quam adhibere conſueuit.
Subſidiaria coefficiens quantitas explicatur.
Problema. Exemplum XXI. Datus ſit circulus A B C, & in eo quæratur punctum A, ita conſtitutum, vt linea ab ipſo per centrum D, ad alteram vſque partem putà C, duo puncta deſignet A, C, à quibus ad punctum datum G, ductæ rectæ G A, G D, G C, ſint proportionales. pag. 470
Triplex caſus.
Primus caſus reſoluitur.
Iuxtà primam poſitionem ſecundi caſus; Reſolutio I.
Quantitas coefficiens ſubſidiaria, quam Auctor adinuenit, quid ſit, & eius vſus. pag. 471
Poriſma. pag. 472
Compoſitio.
Iuxtà primam poſitionem tertij caſus, Reſolutio I. pag. 473
Iuxtà ſecundam poſitionem ſecundi caſus, Reſolutio I. pag. 474
Schlion.
Iuxtà ſecundam poſitionem ſecundi caſus, Reſolutio II.
Poriſma. pag. 475
Compoſitio.
Iuxtà ſecundam poſitionem tertij caſus, Reſolutio I. pag. 476
Poriſma.
Iuxtà ſecundam poſitionem tertij caſus, Reſolutio II. pag. 477
Compoſitio.
Problema. Eemplum XXII. Datum latus ita ſecare, vt differentia quadratorum partium ad rectangulum ſub partibus, datam habeat rationem. pag. 478
Reſolutio.
Poriſma.
Compoſitio.
Lemma. pag. 479
Scholion.
Problema. Exemplum XXIII. Datum latus A B, biſariam diuiſum in C, ſit iniunctum iterum illud diuidere in D, inter C, B, vt rectangulum A B D ad rectangulum

rectangulum A D C, plus rectangulo ex A B, in C D, ſit in ratione data.
Reſolutio I. pag. 480
Reſolutio II.
Poriſma.
Compoſitio.
Clarior demonſtratio. pag. 481

Auctoris Noua, eaque Methodus Abſolutiſſima; qua demonſtrantur omnium Problematum Effectiones, ex ijs deducta Reſolutionibus; quarum veſtigia, vel non licet, vel non placet, in componendo repetere: vbi quod Algebricum eſt ad Geometricam φράσιν traducitur. Cap. X.

QVid maximè vexauerit Analyſtarum ingenia. pag. 482
Admonitio ad Lectorem.
In quo conſiſtat Artificium, de quo diſſeritur.
Problema. Exemplum I. Datum latus ita diuidere, vt quadratum vnius partis datum planum aſſumens ad rectangulum ſub toto, & altera parte, ſibi itidem datum planum adſciſcens, propoſitam rationem obtineat. pag. 483
Reſolutio.
Poriſma.
Effectio Geometrica.
Propoſitio.
Datis ijs, quæ Poriſma dictat, núm quadratum A N, plus quadrato C ad rectangulum A B N, plus quadrato P, ſit in ratione A B ad B, inquirere. pag. 484
Reſolutio.
Theorema.
Data ſit recta A A, ita vt E ad A A ſit, vt quadratum rectæ A A, plus quadrato P, ad quadratum rectæ D F; &c.
Compoſitio.
Aduertenda quædam. pag. 485
Problema. Exemplum II. Propoſitum latus, ita producere, vt quadratum compoſiti ex dato cum producto, ſit ad exceſſum ipſius ſupra quadratum dati in præſcripta ratione.
Problema.
Latus adinuenire, cuius quadratum ad exceſſum, quo idem ſuperat dati lateris quad. ſit in ratione data.
Reſolutio.
Poriſma. pag. 486
Compoſitio.
Problema. Exemplum III. Datum latus A B, vtcunque diuiſum in C, diuidere illud iterum in D, vt rectangulum D A B ad rectangulum D C B, datam habeat rationem.
Reſolutio.
Poriſma. pag. 487
Compoſitio.
Problema. Exemplum IV. Propoſitum latus A B, vtcunque ſectum in C, iterum diuidere in D, inter C, B, vt rectangulum A D C, ad quadratum D B, conſtitutam habeat rationem.
Reſolutio primi caſus.
Poriſma.
Reſolutio ſecundi caſus. pag. 488
Poriſma.
Reſolutio tertij caſus.
Poriſma.
Compoſitio primi caſus. pag. 489
Secundi caſus Effectio Geometrica.
Propoſitio.
Datis ijs, quæ Poriſma dictat &c. veritatem inquirere.
Reſolutio.
Theorema.
Si ſit vt A E ad E C, ita A A, plus C B, ad A G, ſitque L media proportionalis inter A B, & B C; &c. pag. 490
Compoſitio.
Tertij caſus effectio Geometrica. pag. 491
Propoſitio.
Datis ijs, quæ Poriſma dictat &c. veritatem inquirere.
Reſolutio.
Theorema.
Si fuerit vt E A ad A G, ita dupla C B ad B G, & ita E C ad G M; deinde ſit &c.
Compoſitio. pag. 492
Notandum.
Problema. Exemplum V. Datis duobus circulis circa diametrum eandem, quorum vnus intra alium exiſtat, ſiue ſe tangant, ſiue non, per minoris centrum aptare rectam in maiori, vt &c.
Reſolutio. pag. 493
Poriſma.
Problema. Exemplum VI. Datis duobus circulis circa diametrum eandem, quorum vnus intra alium exiſtat, per minoris centrum aptare rectam in maiori, vt intercepta ſegmenta inter circulorum peripherias datam interſe rationem obtineant.
Reſolutio. pag. 494
Poriſma.
Effectio Geometrica.
Propoſitio.
Datis ijs, quæ Poriſma dictat; núm ea ſit ratio intercepti ſegmenti X E ad interceptum P H, relata ad ſemidiametrum circuli T S F, nempè quæ A S, vel S T, &c. ad X, inquirere. pag. 495
Reſolutio.
Theorema.
Sit circulus A B C D, cuius diameter A C, circa quam ſit circulus alter R T S F; cuius centrum A, &c.
Compoſitio. pag. 496
Problema. Exemplum VII. Propoſito lateri latus adiungere, vt quadratum dati, plus duplo rectangulo ſub dato, & adiuncto, ad quadratum adiuncti datam habeat rationem.
Reſolutio I. pag. 497
Poriſma.
Effectio Geometrica.
Compoſitio.
Propoſitio.
Suppoſitis ijs, quæ Poriſma dictat, &c. veritatem inquirere.
Reſolutio.
Theorema.
Si ſit latus A D diuiſum in B, ſuper A D, deſcripto ſemicirculo, ſitque B F, &c.
Compoſitio. pag. 498
Reſolutio II.
Poriſma.
Compoſitio. pag. 499
Problema. Exemplum VIII. Data ratione interualli quadratorum à medio, & minori ad aggregatum quadratorum à medio, & maiori, tria latera proportionalia adinuenire.
Reſolutio.
Poriſma.

Effectio

Effectio Geometrica. pag. 500
Propoſitio.
Datis iis, quæ Poriſma dictat, &c. veritatem inquirere.
Reſolutio.
Theorema.
Si fuerit quadratum è dimidia differentia duorum terminorum datæ rationis multatum rectangulo, &c.
Compoſitio.
Problema. Exemplum II. Quantitatem adiouenire, cui ſi addantur, & detrahantur datæ quantitates, ſumma ad reſiduum datam habeat rationem. pag. 501
Poriſma.
Compoſitio. pag. 502
Propoſitio.
Datis iis, quæ Poriſma dictauit, veritatem inquirere.
Reſolutio.
Theorema.
Si quantitas addenda ducta fuerit in poſteriorem terminorum datæ rationis, &c.
Compoſitio. pag. 503
Deductio quid, & eius vſus.

De Deductione quam Græci Ἐπαγωγὴν appellant. Cap. XI.

PRoblema.
Semicirculo poſitione dato A B C, & dato puncto D, deſcribere per D, ſemicirculum, qualis eſt D E F, ita vt ſi ducatur contingens B C, fiat A D, ipſi B E æqualis.
Reſolutio iuxtà Veteres.
Problema deductum.
Datum latus H K, diuiſum quidem in D. Oporteat iterum in G, illud diuidere inter D, K; ea lege, vt rectangulum comprehenſum ſub H G, G K, æquale ſit rectangulo comprehenſo ſub intermedia ſectione D G, & quouis dato latere L. pag. 504
Reſolutio.
Poriſma.
Compoſitio.
Problematis propoſiti Demonſtratio. pag. 505
Reſolutio iuxtà Veteres.
Problema deductum.
Propoſitum ſit latus H K, diuiſum in D, vtcunque, & oporteat iterum ſecare in G, inter D, K, vt rectangulum H G D, plus ¼ quadrati A D, ad quadratum D G habeat rationem, quam L ad G K. pag. 506
Deducti Problematis Reſolutio.
Reſolutio iuxtà Veteres.
Problema deductum.
Sit latus propoſitum A K, diuiſum in D, diuidere iterum in G inter D, K, vt quadratum illud, &c. pag. 507
Reſolutio.
Problema.
Dato quouis parallelogrammo A B E D; datoque puncto F in D E producta; ducere F H G C, occurrentem B A productæ in C, vt trapezium A H G B, ad triangulum C B G ſit in data ratione A B ad K.
Reſolutio.
Problema deductum.
Protrahere A B in C, vt exceſſus quadrati A C ſupra quadratum B C, hoc eſt vt quadratum A B, plus duplo rectangulo A B C, ad quadratum B C, ſit in data ratione A B ad K.
Deducti problematis Reſolutio.
Poriſma. pag. 508
Effectio Geometrica.
Propoſitio.
Datis iis, quæ Poriſma dictat, &c. veritatem inquirere.
Reſolutio.
Theorema.
Si ſit latus A B, & ei in directum adiuncta B D, & ſuper A D, deſcripto ſemicirculo, &c.
Compoſitio.
Problematis initio propoſiti demonſtratio. pag. 509

De Methodo depromendi Geometricas effectiones, ex Algebra Veteri: Siue vſus Veteris Algebræ, ad Geometricè Problemata reſoluenda. Cap. XII.

PVlchra eſt Methodus illa, quæ ex Veteri Logiſtica depromuntur Geometricæ Effectiones.
Additio quantitatum continuarum; Operatio prima.
Additio qua arte inſtituatur inter quantitates continuas.
Inſtitui debet inter quantitates homogeneas, &c.
Quando plano opus eſt addere planum, qua arte ſit inſtituenda additio; & primò quando plana ſunt quadrata. pag. 510
Quando plana non ſunt quadrata.
Ars tranſmutandi figuras qualcunque in quadrata alibi explicatur ab Auctore.
Additio inter ſolida qua arte fiat; primò cum addendus eſt cubus cubo.
Quando ſunt plures cubi, quàm duo.
Quando corpora non ſunt cubica, quid agendum?
Tranſmutatio corporum ab Auctore alibi declaratur.
Subtractio quantitatum continuarum; Operatio ſecunda.
Quot modis accidere poſſit ſubtractio inter quantitates continuas.
Subtractio inter lineas quomodo fiat.
Planum à plano quo pacto ſubtrahatur.
Quando plana ſunt quadrata.
Quando plana non ſunt quadrata. pag. 511
Subtractio inter ſolida qua arte ſit inſtituenda; & primò qua cubus à cubo ſubtrahi debet.
Quando plures cubi ſubtrahendi ſunt ab vno, quomodo fiat.
Si corpora propoſita non ſint cubi quid agendum.
Multiplicatio quantitatum continuarum, Operatio tertia.
Multiplicatio dupliciter poteſt accidere; vel enim quantitas continua ducenda eſt in continuam, vel in diſcretam.
Rurſus, ſi in diſcretam, vel in numerum integrum, vel in fractum.
Quando ducenda eſt quantitas continua in quantitatem continuam.
Inuentio mediæ proportionalis ad hoc præcipuè conducit. pag. 512
Quomodo planum ducatur in planum.
Applicatio, ſeu diuiſio quantitatum continuarum; Opera-

Operatio quarta.
Diuiſio quantitatis continuæ dupliciter poteſt accidere.
Diuiſio quantitatis continuæ per numerum integrum.
Diuiſio quantitatis continuæ per numerum fractum.
Diuiſio quantitatis continuæ per quantitatem continuam.
Quadratum diuidens per lineam.
Quando ſit diuidendum rectangulum, cuius latera ſunt inæqualia circa rectum, quid agendum.
Quando figuræ diuidendæ fuerint Trapetia, &c.
Quando cubus diuidendus eſt per quadratum.
Quando cubus diuidi debet per lineam.
Quando parallelepipedum rectangulum diuidi debet per quadrata, quid faciendum eſt. pag. 513
Quid agendum, cùm parallelepipedum diuidi debet per lineam.
Proponuntur non nulla Problemata, quibus Geometricè ſit ſatis, Algebræ Veteris præſidio.
Problema. Exemplum I. Datam rectam lineam in duas partes ita diuidere, vt partium quadrata dato quadrato differant. Oportet autem dati quadrati latus minus eſſe data ſecanda.
Poriſma.
Scholion. pag. 514
Conſideratio circa Veterem Logiſticen.
Problema. Exemplum II. Data ſumma duorum laterum, & rectangulo ſub ipſis, reperire latera.
Poriſma.
Scholion. pag. 515
Animaduerſio circa Veterem Logiſticen.
Problema. Exemplum III. Dato lateri latus adiungere ea lege, vt datum cum adiuncto ad adiunctum datam habeat rationem. Oportet autem rationem datam eſſe maioris ad minus.
Poriſma.
Problema. Exemplum IV. Datum latus ita diuidere, vt partium quadrata datam rationem habeant.
Poriſma. pag. 516
Problema. Exemplum V. Datum latus in duas partes diuidere, vt rectangulum ſub ipſis æquale ſit dato plano.
Scholion.
Poriſma.
Problema. Exemplum VI. Datum latus in duas partes diuidere, vt differentia quadratorum partium datam habeat rationem ad rectangulum ſub partibus. pag. 517
Poriſma.
Scholion. pag. 518
Animaduerſio circa ſuperiorem Reſolutionem.
Problema. Exemplum VII. Dato vno ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus, datoque alterno baſeos ſegmento, reperire triangulum.
Poriſma. pag. 519
Problema. Exemplum VIII. Propoſitum latus bis diuidere in duas partes ea lege, vt maior pars à prima diuiſione, ſit ad minorem è ſecunda in ratione data at verò maior è ſecunda diuiſione ad minorem è prima ſit in ratione pariter data. pag. 520
Poriſma.
Lemma.
Si ſint quatuor termini proportionales, vt eſt primus ad ſecundum, ita differentia primi, & tertij ad differentiam extremorum, minus differentia inter primum, & ſecundum, &c.
Problema. Exemplum IX. Datum latus in duas partes diuidere, vt ſi rectangulo ſub partibus addatur planum datum, aggregatum ipſum æquale ſit quadrato partis maioris. Oportet autem datum planum minus eſſe quadrato lateris diuidendi. pag. 521
Poriſma.
Problema. Exemplum X. Datum latus in duas partes diuidere, ea lege, vt quadratum vnius partis æquale ſit quadrato alterius, plus dato plano.
Poriſma. pag. 522

Auctor oſtendit, haud benè pleroſque Analyſtas exiſtimaſſe, Problemata nonnulla ſub Algebram non cadere.
Cap. XIII.

IMmeritò putarunt aliqui nonnulla Problemata ſub Algebram non cadere.
Problemata, quæ per angulorum comparationem demonſtrantur, poſſunt ad genus Problematum reuocari huiuſmodi, vt ſub Algebram cadant.
Angulus eſt heterogeneus lineis, &c.
Hac de re tractandum rurſus erit exquiſitiùs in Problematum Analyſi.
Problema. Exemplum I. Datum triangulum, per rectam à puncto extra triangulum datum eductam, data ratione diuidere. pag. 523
Poriſma.
Poriſma.
Problema. Exemplum II. Datum triangulum per punctum intra datum, data ratione diuidere.
Poriſma. pag. 524
Problema. Exemplum III. Data baſe trianguli, aggregato laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.
Problema. Exemplum IV. Iiſdem datis, & angulo ad A, reperire triangulum. pag. 525
Poriſma. pag. 526
Problema. Exemplum V. Dato vno ex lateribus trianguli datum verticis angulum ambientibus, datóque aggregato reliqui lateris, & baſeos, inuenire triangulum.
Poriſma.
Poriſma. pag. 527
Poriſma.
Admonitio.
Problema. Exemplum VI. Data baſe trianguli, differentia laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.
Poriſma.
Poriſma. pag. 528
Poriſma. pag. 529
Problema. Exemplum VII. Data differentia ſegmentorum baſeos trianguli, aggregato laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.
Poriſma.
Problema. Exemplum VIII. Dato vno ex lateribus trianguli, datum verticis angulum ambientibus, & differentiam inter reliquum latus, & baſin, inuenire triangulum.
Poriſma. pag. 530
Poriſma.

De Problematibus illis, quæ conſtructione operaria non egent, ſed poſtulant tantummodo, vt quæſitum numero explicetur. Cap. XIII.

EXtant non nulla problemata, quæ operariam non exigunt conſtitutionem. pag. 531
Quomodo hæc problemata ſe habeant.
Declaratur hoc problematis genus.
Problema primum conſtructionem operariam non exponens.
Quidem Nauta diſcedens Ancona, ſingulis diebus conficit miliaria 30, alius autem itidem ingreditur iter decimo ſecundo die poſt elapſo; quæritur miliariorum numerus, quem conficere debet poſterior, vt priorem itinerantem aſſequatur diebus viginti.
Problema ſecundum, quod operariam conſtructionem non requirit.
Dic quota nunc hora eſt? Superat tantum acce dici,
Quantum bis gemini exacta de luce trientes.
Horæ ſunt, quas Gnomonici planetarias appellant.
Problema tertium.
Alexander Magnus die quadam cum Caliſthene de ſua ætate, ſuorumque amicorum &c.

Qua Arte cognoſcantur Problemata Impoſſibilia. Cap. XIV.

VTilis eſt iſta tractatio de dignoſcenda impoſſibilitate problematum. pag. 532
Problema Impoſſibile quodnam ſit.
Æquatio impoſſibilis quæ ſit.
Problema impoſſibile.
Datam rectam lineam ita ſecare, vt, ſi à rectangulo, comprehenſo ſub tota, & vna ex partibus auferatur quadratum eiuſdem partis, remaneat quadratum totius.
Conuincitur impoſſibile, & ſi non apertè cernatur.
Problema impoſſibile.
Diuidatur latus in tales duas partes, vt ex ductu vnius in alteram, producatur quadratum totius.
Exemplum. Secundum problema impoſſibile.
Datum latus in tales duas partes diuidere, vt rectangulum ſub partibus, vnà cum quadrato differentiæ partium, æquale ſit quadrato partium. pag. 533
Hoc exemplo vtitur Ghetaldus.
Exemplum. Tertium Problema impoſſibile.
Datum latus ita diuidere, vt rectangulum ſub toto, & altera parte, ad rectangulum ſub partibus habeat datam rationem minoris ad maius.
Scholion.
Exemplum.
Datum latus in duas partes diuidere, vt triplum rectangulum ſub partibus, vnà cum duplo quadrato differentiæ partium, æquale ſit quadrato totius, vnà cum quadrato differentiæ partium. pag. 534
Scholion.

Qua Arte cognoſcantur Problemata Vana, & Nugatoria. Cap. XV.

PRoblemata Vana, ſeu Nugatoria impoſſibilibus opponuntur, & quid vtrumque.
Quando Problema Nugatorium ex æquatione colligatur.
Æquatio inutilis quæ.
Exempla.
Problema.
Datum latus in tales duas partes diuidere, vt rectangulum ſub toto, & partium differentia vnà cum quadrato partis minoris æquale ſit quadrato partis maioris. pag. 535
Problema.
Propoſitum latus in duas partes diuidere ea lege, vt quadruplum rectangulum ſub partibus, vnà cum quadrato differentiæ partium æquale ſit quadrato totius.

FINIS.